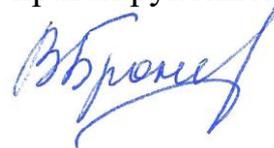


Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



Бронер Валентина Игоревна

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
СИСТЕМ РЕЛЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕСУРСАМИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор
Назаров Анатолий Андреевич

Томск – 2018

Оглавление

Введение.....	6
Глава 1 Исследование стохастической модели системы управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления при фазовых распределениях объемов потребления	19
1.1 Математическая модель стохастической системы релейного управления запасами	20
1.2 Свойства решения $P(s)$ основного уравнения стохастической модели релейного управления запасами.....	22
1.2.1 Свойство непрерывности плотности $P(s)$	22
1.2.2 Вероятности R_1 и R_2	24
1.3 Частичное решение $P_2(s)$ основного уравнения при $s \geq S$	26
1.4 Частичное решение $P_1(s)$ основного уравнения при $s < S$	27
1.4.1 Гиперэкспоненциальное m -фазное распределение объемов потребления	28
1.4.2 Численный пример при гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления.....	33
1.4.3 Распределение Эрланга порядка m объемов потребления	35
1.4.4 Численный пример при эрланговском распределении объемов потребления	42
1.4.5 РН-распределение объемов потребления.....	45
1.4.6 Численный пример при РН-распределении объемов потребления	47
1.5 Выводы по Главе 1	49
Глава 2 Исследование стохастической модели системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и релейным управлением кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при произвольном распределении его объемов методами аппроксимаций.....	50
2.1 Математическая модель и частичное решение	50
2.2 Метод неявной аппроксимации.....	52
2.3 Численные примеры применения метода R -аппроксимации	56

2.4	Метод явной аппроксимации	63
2.4.1	Моменты функции $P_1(x)$	64
2.4.2	Явная аппроксимация третьего порядка	67
2.4.3	Численные эксперименты применения аппроксимации третьего порядка	69
2.4.4	Явная аппроксимация четвертого порядка	71
2.4.5	Численные эксперименты применения аппроксимации четвертого порядка	73
2.4.6	Явная аппроксимация пятого порядка.....	75
2.4.7	Численные эксперименты применения аппроксимации пятого порядка	77
2.5	Выводы по Главе 2	79
Глава 3	Метод преобразования Фурье для решения интегродифференциального уравнения с переменными коэффициентами	81
3.1	Случай произвольного распределения объемов потребления	81
3.2	Случай фазового распределения объемов потребления	85
3.3	Случай гамма-распределения объемов потребления	86
3.4	Случай логнормального распределения объемов потребления	88
3.5	Выводы по Главе 3	90
Глава 4	Комплекс проблемно-ориентированных программ для исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами и численный анализ результатов	91
4.1	Программы численной реализации стохастических моделей систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при фазовых распределениях его объемов	92
4.1.1	Стохастические модели систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при гиперэкспоненциальном распределении его объемов	92

4.1.2 Стохастическая модель системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при эрланговском распределении его объемов	95
4.1.3 Стохастическая модель системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при РН-распределении его объемов.....	97
4.2 Программы для исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при произвольном распределении его объемов методом неявной аппроксимации	100
4.2.1 Реализация метода неявной аппроксимации для гамма-распределения объемов потребления.....	100
4.2.2 Реализация метода неявной аппроксимации для логнормального распределения объемов потребления	104
4.3 Программы для исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления методом явной аппроксимации при эрланговском, гамма и логнормальном распределениях объемов потребления.....	104
4.3.1 Реализация метода явной аппроксимации для гамма-распределения объемов потребления.....	105
4.3.2 Реализация метода явной аппроксимации для логнормального распределения объемов потребления	109
4.4 Имитационное моделирование стохастической модели системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при различных распределениях его объемов.....	109
4.5 Выводы по Главе 4.....	118

Заключение	119
Список литературы	121

Введение

Актуальность работы. Развитие экономики выявило потребность к созданию новых методов исследования систем управления ресурсами.

Под ресурсами будем подразумевать человеческие, материальные, финансовые, информационные и иные ресурсы.

На данный момент стратегиям планирования производства и управлению запасами уделяют большое внимание. Существует значительное число исследований, посвященных данной широкой области. Одной из важнейших составляющих стратегического планирования на предприятии является управление материальными и финансовыми запасами [6–8, 11, 12, 26, 34–36, 37, 39–47, 54, 58, 60, 66, 73, 81, 86, 93, 98–100, 110].

В числе первых работ в теории управления запасами принято считать публикацию F. Y. Edgeworth 1888 года [68], в которой исследуются финансовые резервы банка. В этой работе на основе центральной предельной теоремы определен оптимальный объем запасов (наличных средств) в банке для удовлетворения запросов на изъятие вкладов в случайные моменты времени.

Модели управления запасами можно классифицировать по рассматриваемым периодам на однопериодные и многопериодные.

В однопериодных моделях предполагается, что в начале рассматриваемого периода, например, дня, месяца или года, в систему управления запасами поступают некоторые ресурсы, которые будут потребляться в течение указанного периода. Тут возможны различные постановки задач.

Одной из распространенных однопериодных моделей является задача Newsvendor Problem (Newsboy problem) или задача разносчика газет, рассматриваемая в работах K. Arrow, T. Harris, J. Marshak, L. Abdel-Malek, R.J. Casimir, C.T. Chang, Y. Qin, M. Khouja, T.M. Choi [48–53, 59, 61, 63, 64, 69, 70, 77, 78, 80, 82, 83, 94, 102, 103]. Современная постановка данной задачи описана в 1951 го-

ду в статье «Optimal Inventory Policy», авторами которой являются Kenneth Arrow, Theodore Harris and Jacob Marshak [52].

Во многих работах описывается многопродуктовая Newsboy problem [48–50, 59, 80, 83, 102, 103], в которых выбираются различные политики дисконтирования, с помощью которых осуществляется управление накоплением запасов.

Более общей моделью, описывающей класс систем управления запасами, можно считать single-period problem (SPP – модель одиночного периода) рассматриваемую в работах В. Ismail, I. Kabak, A. Lau, А.Ф. Терпугова и других авторов [55, 70, 72, 74, 75, 86, 100, 101].

В работе Moutaz Khouja [75] описывается модель SPP. Основной целью классической однопериодной модели является поиск такого объема запасов, который необходимо приобрести (произвести) в начале периода, чтобы максимизировать ожидаемую прибыль. В рамках аналогичных моделей предполагается, что при наличии остатков запасов в конце рассматриваемого периода, продавец вынужден утилизировать товар или отпускать его со скидкой [72]. В обратной ситуации, при неудовлетворенном спросе, что означает, что запасов, приобретенных в начале периода, оказалось недостаточно, имеет место упущенная прибыль. Модель SPP находит применение во многих реальных системах управления запасами и часто используется, для принятия решений в различных отраслях, таких как индустрия моды, спортивные товары, в производстве и розничной торговле. Стоит отметить, что SPP также может быть применена в задачах, связанных с оценками предварительного спроса: бронирования заказов в сфере услуг, таких как авиакомпании и отели [92].

В [75] авторы описывают классическую SPP-модель, разрабатывают классификацию обобщений данной проблемы и проводят исследования некоторых из них, относя их к тому или иному классу.

В литературе рассматривалось два подхода к решению SPP. В рамках одного из них, ожидаемые потери, связанные с недооцененным или переоцененным спросом, минимизируются. Во втором подходе ставится задача максими-

зации ожидаемой прибыли. Оба подхода дают схожие результаты. Однако исследователи отметили, что максимизация средней ожидаемой прибыли не всегда адекватно отражает реальность. На самом деле, максимизация вероятности достижения целевой прибыли, более согласуется с реальными ситуациями и обосновывает действия работников компаний. Впоследствии были предложены задачи, обобщающие SPP, в которых цель состоит в максимизации вероятности достижения целевой прибыли [72, 74, 100, 101].

Рассматриваемые выше модели не учитывают, что нераспроданный в предыдущем периоде товар может быть использован в дальнейшем. Поэтому логичным обобщением однопериодных моделей являются многопериодные, предполагающие, что остатки запасов после окончания текущего периода переходят в использование на следующий.

Для проведения исследования указанных моделей требуется разработка новых математических методов, что делает данный класс задач более сложным для исследования.

В литературе многопериодные модели управления запасами рассмотрены в [1, 57, 62, 65–67, 71, 76, 79, 87, 92, 95–98, 109, 110].

Например, в [87] построена многопериодная модель определения нахождения местоположения товара в двухуровневой цепочке поставок, включающая заказчика и распределительные центры. В данной модели предполагается, что спрос случайный, а в каждом распределительном центре находится такой объем запасов, что дефицит не допускается. Ставится задача минимизация общей стоимости товара и оптимизация ожидаемого времени доставки товара клиентам.

В [92] рассматривается однопродуктовая, многопериодная математическая модель олигополистического рынка для скоропортящегося товара с фиксированным объемом запасов. Предполагается, что функция спроса для каждого продавца не определена, и продавцы принимают политику динамического ценообразования в условиях конкуренции, которая устойчива к случайности спроса. Например, начиная с определенного фиксированного уровня запасов, каждый продавец конкурирует за рынок и в последующих периодах, устанавли-

ливают цены для каждого из периодов, учитывая, что непроданные запасы будут испорчены, и их нельзя будет использовать в дальнейшем.

Существуют работы по исследованию многопродуктовых многопериодных системы управления запасами, которые были сформулированы для изучения влияния различных факторов, таких как инфляция в реальных жизненных ситуациях [36, 40, 58, 84, 85, 99, 105, 106, 108]. Многие авторы рассматривают системы управления запасами со скоропортящимися товарами [56, 67, 87]. В [76] рассматривается многопериодная модель планирования и распределения запасов.

Наименее изученными многопериодными моделями управления запасами, в том числе и зарубежом, являются модели с релейным управлением, рассматриваемые F.A. van der Duyn Schouten [104], А.Ф. Терпуговым [13,14], К. И. Ливщицем [17–25], О. А. Змеевым [5, 9, 10], А. В. Китаевой [13–14], О. В. Вальц [4, 5], Я. С. Бублик [3, 17–22], И.Ю. Шифердекер [23–25], Л.Ю. Сухотиной [22], и находящие широкое применение в описании моделей страховых компаний. В работах [3–5, 9, 10, 13, 14, 16, 18–25] в качестве входящего потока ресурса выступают страховые премии, а выходящего – выплаты по страховым случаям. Поскольку страховые компании заинтересованы в увеличении прибыли, то в подобных работах управление заключается в регулировании денежных притоков и оттоков. Управлением потоками ресурса в зависимости от некоторого порогового значения денежных ресурсов будем называть релейным.

В работах [3, 4, 5, 9, 10, 13, 14, 16–18, 21–25] рассматриваются математические модели деятельности фонда социального страхования с релейным управлением капиталом фонда. В [10] исследуются основные характеристики деятельности фонда социального страхования, в случае, когда на вход системы управления запасами с непрерывной скоростью поступают денежные средства, моменты страховых выплат образуют пуассоновский поток, а величины выплат подчиняются экспоненциальному закону распределения. Рассматривается некоторое пороговое значение денежных средств фонда, сверх которого производятся выплаты по социальным программам с непрерывной скоростью, в случае,

когда у фонда нет достаточно средств, то есть денежный уровень ниже порогового значения, то фонд функционирует в режиме без выплат по социальным программам.

В работах [5, 13] строятся и исследуются модели фонда социального страхования при релейном управлении (в [5] дополнительно рассмотрено релейно-гистерезисное управление) капиталом такого фонда. Существенным отличием указанной работы от [10] является то, что в данной модели предполагается, что выплаты по страховым случаям и выплаты на финансирование социальных программ образуют пуассоновские потоки событий с постоянной и переменной интенсивностями соответственно, а величины выплат являются одинаково распределенными независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения.

В [23] построена и исследована математическая модель деятельности некоммерческого фонда, в следующих предположениях: на вход системы поступает пуассоновский поток платежей постоянной интенсивности, величины платежей независимые и одинаково распределенные случайные величины с экспоненциальной функцией распределения. Управление в указанной системе заключается в том, что до достижения порогового значения ресурс (капитал фонда) расходуется с некоторой фиксированной скоростью, а в случае превышения этого значения скорость расходования возрастает, то есть скорость представляется некоторой кусочно-постоянной функцией. В работе [25] на основе диффузионного приближения исследуется модель, аналогичная рассмотренной в [23].

В [14] находится выражение для функции скорости выделения средств на социальные программы в диффузионном приближении для процесса изменения капитала фонда в условиях математической модели [3].

К сожалению, в указанных исследованиях разработанные авторами точные методы не удастся применить к исследованию моделей с неэкспоненциальными распределениями, а диффузионная аппроксимация применима не ко всем постановкам задач. Таким образом, возникает потребность в разработке методов исследования стохастических систем релейного управления ресурсами.

В данной работе проводится исследование математической модели системы управления ресурсами с релейным управлением скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления.

Примером реальной системы, описанной в данной диссертации, является водохранилище, в которое с непрерывной скоростью поступает вода, а заявки на потребление воды в случайном объеме поступают в случайные моменты времени. Поскольку потребление является случайным, то при отсутствии регулирования уровня воды могут происходить переполнение или опустошение водохранилища, что является в силу очевидных причин нежелательным. Поэтому в работе предлагается следующее релейное управление входящим и выходящим потоками в системе. Фиксируется некоторое пороговое значение уровня воды в системе, при достижении которого скорость поступления воды снижается и увеличивается интенсивность случайного потока потребления. Увеличение потребления реализуется за счет, например, снижения тарифов на потребление воды для населения. Такое управление повлечет за собой снижение уровня воды. Как только уровень воды становится ниже порогового уровня, скорость поступления ресурса и интенсивность случайного потока его потребления становятся прежними.

Аналогичными примерами являются склады при непрерывном производстве, станции перегонки ресурсов и другие.

Ярким примером применения частных случаев описанных моделей служит фонд социального страхования, в который равномерно с некоторой постоянной скоростью равной страховой премии в единицу времени поступают страховые взносы, которые формируют капитал компании. При наступлении в случайный момент времени страхового случая производится выплата в случайном размере. Для управления капиталом данной компании применим релейное управление, аналогичное предыдущему, то есть зафиксируем некоторое пороговое значение капитала. Пока уровень капитала не достиг порогового значения, то фонд функционирует в обычном режиме, при превышении порогового значения фонд начинает производить отчисления на благотворительные про-

граммы, вследствие чего объем капитала будет снижаться, пока не достигнет указанного порогового значения.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является разработка новых и модификация известных методов исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами.

Были поставлены следующие задачи:

1. Проанализировать существующие и предложить новые варианты математических моделей систем управления ресурсами для исследования реальных процессов в различных предметных областях.

2. Построить математическую модель системы управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока объемов потребления, управление которыми осуществляется релейно.

3. Найти стационарное распределение вероятностей значений процесса объемов накопленных запасов в системе управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока объемов потребления при гиперэкспоненциальном, эрланговском и РН-распределениях объемов потребления.

4. Разработать метод характеристических чисел для нахождения решения интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при m -фазными гиперэкспоненциальным, эрланговским и РН-распределениями объемов потребления.

5. Разработать методы явной и неявной аппроксимаций стационарного распределения вероятностей значений процесса объема накопленных запасов в системе управления ресурсами с постоянной скоростью поступления ресурса и релейным управлением интенсивностью случайного потока объемов потребления при произвольном распределении его объемов.

6. Модифицировать метод преобразования Фурье для нахождения стационарного распределения вероятностей значений процесса объема накопленных запасов в системе управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью

поступления и интенсивностью случайного потока объемов потребления при произвольном распределении объемов потребления.

7. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа стохастических систем релейного управления запасами.

Научная новизна результатов состоит в следующем:

1. Впервые предложены модификации стохастических моделей систем релейного управления ресурсами, основные отличия которых от существующих заключаются в следующем: и скорость поступления ресурса и интенсивность случайного потока потребления совместно представляют собой кусочно-постоянные функции с двумя значениями. В этих моделях предполагается, что значения процесса уровня запасов, накопленных в системе, могут быть отрицательными, что интерпретируется как отложенное исполнение заявки на потребление. Объемы потребления являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с m -фазными гиперэкспоненциальным, эрланговским, РН- и произвольным распределениями.

2. Впервые предложен метод характеристических чисел, позволяющий найти в явном виде решение интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова для стационарной плотности распределения вероятностей значений объемов накопленных запасов в системе управления ресурсами с релейным управлением и m -фазными гиперэкспоненциальными, эрланговскими и РН-распределениями объемов потребления.

3. Впервые предложен метод неявной аппроксимации, позволяющий с высокой точностью аппроксимировать решение интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при произвольной функции распределения объемов потребления. Указанный метод имеет широкую область применимости, в частности, может быть применен к модели, предложенной выше.

4. Впервые предложен метод явной аппроксимации третьего, четвертого и пятого порядков решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-

постоянными коэффициентами с двумя значениями. Данный метод применим для широкого класса моделей, в том числе к системам релейного управления ресурсами, при этом точность явной аппроксимации 4-го и 5-го порядков существенно выше по сравнению с неявной. Даны рекомендации по применению аппроксимаций.

5. Впервые предложена модификация метода преобразования Фурье для решения интегро-дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями. Разработанный метод может быть использован при исследовании широкого класса моделей, а в применении к предложенной выше модели позволяет вычислить стационарное распределение вероятностей значений процесса накопленных запасов в системе релейного управления ресурсами при произвольном распределении объемов потребления.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Модификации стохастических моделей систем релейного управления запасами.

2. Метод характеристических чисел для решения интегро-дифференциальных уравнений Колмогорова с m -фазными гиперэкспоненциальными, эрланговскими и РН-распределениями объемов потребления.

3. Метод неявной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями, основанный на R -аппроксимации распределений объемов потребления.

4. Метод явной аппроксимации третьего, четвертого и пятого порядков решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями.

5. Модификация метода преобразования Фурье для исследования интегро-дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при произвольном распределении объемов потребления.

6. Результаты применения разработанных методов к исследованию стохастических моделей релейного управления ресурсами.

7. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа стохастических моделей систем релейного управления запасами.

Методология и методы диссертационного исследования. Для проведения исследований в работе применялись математический аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, дифференциальных уравнений и аппарат имитационного моделирования.

Для исследований были разработаны три новых аналитических метода, в том числе две аппроксимации, и одна модификация, позволяющие найти стационарное распределение вероятностей значений накопленных запасов в системе релейного управления ресурсами.

Для оценки качества и точности предложенных аппроксимаций было проведено сравнение с результатами имитационного моделирования.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в развитии аналитических методов исследования стохастических систем управления ресурсами.

Разработанные методы имеют самостоятельное значение. С их помощью возможно исследование различных математических моделей:

- теории массового обслуживания, в частности, при исследовании телекоммуникационных и информационных систем;
- актуарной математики, в том числе при исследовании капитала фондов социального страхования;
- теории управления запасами и других областей.

Предложенные модификации стохастических моделей управления ресурсами являются достаточно общими, что позволяет применять их к различным реальным системам, в которых предполагается релейное управления ресурсами. К таковым можно отнести процессы изменения воды в водохранилище, капитала фонда социального страхования, выпуск книг в издательстве и другие процессы изменения ресурсов. При этом под ресурсами могут подразумеваться как

готовая продукция на складе, капитал компаний, так и информационные, природные ресурсы, сырье, что позволяет применять полученные результаты к широкому спектру прикладных задач.

Достоверность и обоснованность в диссертационном исследовании подтверждается корректным использованием математического аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, согласованностью результатов, полученных разными методами, численными экспериментами и имитационным моделированием и совпадением с результатами, полученными другими авторами в частных случаях.

Личное участие автора в получении результатов. Постановка изложенных задач была сделана научным руководителем, доктором технических наук, профессором А. А. Назаровым. Математические выкладки, численная реализация и имитационное моделирование выполнены В.И. Бронер. В совместных публикациях А. А. Назарову принадлежат постановки задач и указание основных направлений исследования.

Связь работы с крупными научными проектами. Значительная часть результатов диссертации была получена в рамках выполнения научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в 2014-2016 гг.

Соответствие паспорту специальности. Данное диссертационное исследование выполнено в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно соответствует следующим областям (номера соответствуют пунктам в паспорте специальности):

п.1 – Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

п.2 – Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

п. 4 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

XIV Международная научно-практическая конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Анжеро-Судженск, 2015), XX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи. Математика. Информатика» (Анжеро-Судженск, 2016), III Всероссийская молодежная научная конференция с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 2015), IV Всероссийская молодежная научная конференция с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» (Томск, 2016), XV Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (пос. Катунь, 2016), XVI Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Казань, 2017), V Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, 2016), VI Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, 2017), XIX Международная Конференция «Распределенные Компьютерные и Телекоммуникационные Сети: Управление, Вычисление, Связь» (Москва, 2016), XX Международная Конференция «Распределенные Компьютерные и Телекоммуникационные Сети: Управление, Вычисление, Связь» (Москва, 2017), Международная конференция «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях — АВМТВ 2017»

(Москва, 2017), Международная конференция "Вычислительная и прикладная математика 2017" (Новосибирск, 2017).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 16 работ, в том числе 3 статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук (из них 1 статья в российском научном журнале, переводная версия которого индексируется Web of Science), 4 статьи в зарубежных изданиях, индексируемых Scopus, 9 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских научных и научно-практических конференций.

Глава 1 Исследование стохастической модели системы управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления при фазовых распределениях объемов потребления

Системы управления запасами с кусочно-постоянной скоростью поступления или интенсивностью потребления применяются для исследования математических моделей некоммерческих фондов социального страхования. Предполагается, что в фонд поступают финансовые ресурсы, которые образуют капитал компании, расходуемый на выплаты по страховым случаям и при достижении определенного порогового значения на выплаты по социальным программам. Такие модели рассмотрены в работах Терпугова А.Ф., Лившица К. И., Бублик Я. С., Змеева О. А., однако в работах указанных авторов стационарная плотность распределения вероятностей накопленного капитала найдена точно только в случаях экспоненциальных и гиперэкспоненциальных объемов выплат по страховым случаям и социальным программам. Для произвольной функции распределения объемов выплат построена диффузионная аппроксимация.

К сожалению, в указанных исследованиях разработанные авторами точные методы не удается применить к исследованию моделей с неэкспоненциальными распределениями, а диффузионная аппроксимация применима не ко всем постановкам задач. Таким образом, возникает потребность в разработке методов исследования стохастических систем релейного управления ресурсами.

В данной главе проводится исследование стохастической модели системы управления ресурсами с релейным управлением скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления при различных распределениях объемов потребления. Ставится задача нахождения стационарной плотности распределения вероятностей значений накопленных запасов в системе, которая позволяет рассчитать различные вероятностные характеристики исследуемого процесса, такие как вероятности опустошения системы, превышение порогового значения, решить ряд оптимизационных задач, которые позволят увеличить

прибыль организациям, применяющим данный вид управления запасами, например, задача поиска оптимального порогового значения для минимизации вероятности ухода процесса в отрицательную область.

1.1 Математическая модель стохастической системы релейного управления запасами

Рассмотрим стохастическую систему управления запасами (рисунок 1).

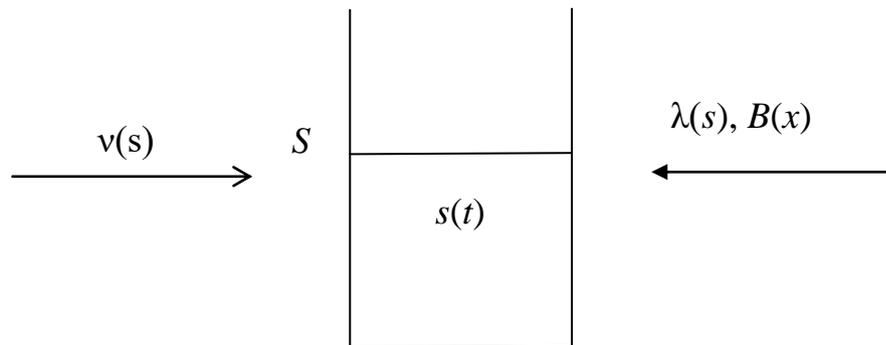


Рисунок 1 – Система управления запасами с релейным управлением скоростью поступления ресурса и интенсивностью случайного потока его потребления

Обозначим через $s(t)$ объем ресурсов, накопленных в системе к моменту времени t . Будем полагать, что потребление ресурса осуществляется в случайные моменты времени партиями случайного объема.

На вход данной системы непрерывно поступает ресурс с кусочно-постоянной скоростью $v(s)$ (под скоростью будем понимать объем ресурса, поступившего в единицу времени), которая зависит от значений процесса $s(t) = s$, то есть величин накопленных запасов к моменту времени t

$$v(s) = \begin{cases} v_1, & s < S, \\ v_2, & s \geq S, \end{cases} \quad (1)$$

где S – некоторое зафиксированное значение уровня запасов $s(t)$, которое будем называть пороговым.

Моменты поступления запросов на потребление образуют пуассоновский поток с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, здесь

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, & s < S, \\ \lambda_2, & s \geq S, \end{cases} \quad (2)$$

объемы запросов являются случайными величинами с функцией распределения $B(x)$.

Будем полагать, что значения процесса $s(t)$ могут быть отрицательными $s(t) < 0$, интерпретируя это как отложенное исполнение заявки на потребление, то есть если поступившая заявка не находит необходимого объема ресурса для ее исполнения в системе, она ожидает накопления требуемого количества ресурса, получив которое, покидает систему.

Условия существования стационарного режима в рассматриваемой системе имеют вид

$$v_1 > \lambda_1 b, \quad v_2 < \lambda_2 b,$$

где b – среднее значение объема одной партии на потребление ресурсов.

Данные неравенства можно объединить в одно

$$\frac{v_1}{\lambda_1 b} > 1 > \frac{v_2}{\lambda_2 b}. \quad (3)$$

Из последнего неравенства следует, что при $s(t) < S$ объем ресурса в системе в среднем будет накапливаться, а при достижении порогового значения S и его превышении, то есть $s(t) \geq S$, объем ресурса будет в среднем уменьшаться, поскольку интенсивность потока потребления ресурсов возрастет.

Из описания математической модели можно сделать вывод о том, что случайный процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством значений $-\infty < s < \infty$.

Обозначим плотность распределения процесса $s(t)$

$$P(s, t) = \frac{\partial P\{s(t) < s\}}{\partial s},$$

для которой запишем следующее равенство

$$P(s + v(s)\Delta t, t + \Delta t) = P(s, t)(1 - \lambda(s)\Delta t) + \Delta t \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x, t)dB(x) + o(\Delta t).$$

Преобразуя предыдущее равенство, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} + v(s) \frac{\partial P(s,t)}{\partial s} = -\lambda(s)P(s,t) + \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x,t)dB(x).$$

Рассматривая функционирование системы в стационарном режиме и обозначая стационарную плотность распределения $P(s)$ вероятностей значений уровня запасов, накопленных в системе, предыдущее уравнение перепишем в виде

$$v(s)P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x). \quad (4)$$

решение $P(s)$ которого удовлетворяет краевым условиям

$$P(-\infty) = P(\infty) = 0 \quad (5)$$

Полученное уравнение (4) будем называть основным уравнением стохастической системы релейного управления запасами с кусочно-постоянными скоростью входящего и интенсивностью выходящего случайного потоков.

Ставится задача нахождения решения $P(s)$ основного уравнения (4), удовлетворяющего условиям (5).

До того как будет определен вид функции $P(s)$, рассмотрим ее некоторые свойства.

1.2 Свойства решения $P(s)$ основного уравнения стохастической модели релейного управления запасами

1.2.1 Свойство непрерывности плотности $P(s)$

Лемма 1. При $v_1 = v_2 = v$ решение $P(s)$ уравнения (4) непрерывно в точке $s = S$.

Доказательство.

Очевидно, что при $s \neq S$ решение $P(s)$ уравнения (4) непрерывно. Докажем непрерывность данной функции в точке $s = S$.

Предположим, что нам известно решение уравнения (4), тогда произведя подстановку его решения в уравнение (4) и проинтегрировав, получим следующее тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(s)P'(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s)P(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)ds. \quad (6)$$

Рассмотрим интеграл в правой части равенства (6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)ds = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dsdB(x),$$

осуществляя замену $s+x=y$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)ds = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y)P(y)dydB(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y)P(y)dy.$$

Подставляя полученное выражение в (6), имеем следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(s)P'(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s)P(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y)P(y)dy,$$

тогда

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} v(s)P'(s)ds = v_1 \int_{-\infty}^{S-0} P'(s)ds + v_2 \int_S^{\infty} P'(s)ds,$$

следовательно,

$$0 = \int_{-\infty}^{S-0} P'(s)ds + \int_S^{\infty} P'(s)ds = P(S-0) - P(S).$$

Таким образом, при $v_1 = v_2 = v$ для решения $P(s)$ уравнения (4) выполняется свойство непрерывности решения $P(s)$ в точке $s = S$.

Утверждение доказано.

Лемма 2. При $v_1 \neq v_2$ решение $P(s)$ основного уравнения (4) терпит разрыв в точке $s = S$.

Доказательство.

При доказательстве Утверждения 1 было показано, что

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} v(s)P'(s)ds = v_1 \int_{-\infty}^{S-0} P'(s)ds + v_2 \int_S^{\infty} P'(s)ds = v_1 P(S-0) - v_2 P(S),$$

следовательно

$$v_1 P(S-0) = v_2 P(S),$$

а при $v_1 \neq v_2$ выполняется неравенство

$$P(S-0) \neq P(S).$$

Утверждение доказано.

1.2.2 Вероятности R_1 и R_2

Введем следующие обозначения

$$P(s) = \begin{cases} P_1(s), & s < S, \\ P_2(s), & s \geq S, \end{cases} \quad P_1(S) = \lim_{s \rightarrow S} P_1(s),$$

$$\int_{-\infty}^S P(s)ds = R_1, \quad \int_S^{\infty} P(s)ds = R_2.$$

Сформулируем лемму о виде вероятностей R_1 и R_2 .

Лемма 3. Вероятности R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \frac{v_1 - \lambda_1 b}{v_1 - v_2 - (\lambda_1 b - \lambda_2 b)}, R_2 = \frac{\lambda_2 b - v_2}{v_1 - v_2 - (\lambda_1 b - \lambda_2 b)}. \quad (7)$$

Доказательство.

Для доказательства Утверждения умножим уравнение (4) на s и проинтегрируем полученное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} sP'(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} s\lambda(s)P(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} s \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)ds. \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} sv(s)P'(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} s\lambda(s)P(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} s \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)ds.$$

Преобразуем интеграл в правой части последнего равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} s \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x)ds = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s\lambda(s+x)P(s+x)dsdB(x) =$$

$$\begin{aligned}
= [s + x = y] &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) \lambda(y) P(y) dy dB(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (y - x) dB(x) \lambda(y) P(y) dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y - b) \lambda(y) P(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \lambda(y) P(y) dy - b \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y) P(y) dy.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (8), имеем равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} sv(s) P'(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} s \lambda(s) P(s, t) ds = \int_{-\infty}^{\infty} y \lambda(y) P(y) dy - b \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y) P(y) dy$$

из которого, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} sv(s) P'(s) ds = -b \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y) P(y) dy.$$

Рассмотрим интеграл в левой части равенства и разобьем его на два, каждый из которых проинтегрируем по частям, используя введенные выше обозначения

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} sv(s) P'(s) ds &= \int_{-\infty}^S sv_1 P_1'(s) ds + \int_S^{\infty} sv_2 P_2'(s) ds = \\
&= v_1 SP_1(s) - v_2 SP_2(s) - \int_{-\infty}^S v_1 P_1(s) ds - \int_S^{\infty} v_1 P_1(s) ds.
\end{aligned}$$

При доказательстве Леммы 2 показано, что

$$v_1 SP_1(s) - v_2 SP_2(s) = 0,$$

тогда имеет место равенство

$$-\int_{-\infty}^S v_1 P_1(s) ds - \int_S^{\infty} v_1 P_1(s) ds = -b \left\{ \int_{-\infty}^S \lambda_1 P_1(s) ds + \int_S^{\infty} \lambda_1 P_1(s) ds \right\}.$$

Используя введенные в начале параграфа обозначения для вероятностей R_1 и R_2

$$\int_{-\infty}^S P(s) ds = R_1, \quad \int_S^{\infty} P(s) ds = R_2,$$

получим

$$v_1 R_1 + v_2 R_2 = \lambda_1 b R_1 + \lambda_2 b R_2,$$

Откуда, учитывая что $R_1 + R_2 = 1$, найдем значения вероятностей

$$R_1 = \frac{v_1 - \lambda_1 b}{v_1 - \lambda_1 b - (v_2 - \lambda_2 b)}, \quad R_2 = \frac{\lambda_2 b - v_2}{v_1 - \lambda_1 b - (v_2 - \lambda_2 b)}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

В силу условия существования стационарного режима $\nu_1 - \lambda_1 b > 0$, $-(\nu_2 - \lambda_2 b) > 0$, следовательно, знаменатель в выражениях (7) для вероятностей R_1 и R_2 отличен от нуля.

1.3 Частичное решение $P_2(s)$ основного уравнения при $s \geq S$

Сформулируем теорему о виде частичного решения $P_2(s)$ основного уравнения (4) при $s \geq S$

Теорема 1. Частичное решение $P_2(s)$ основного уравнения (4) при $s \geq S$ имеет вид

$$P_2(s) = Ce^{-\gamma(s-S)}, \quad s \geq S, \quad (9)$$

где γ ненулевой корень нелинейного уравнения

$$\lambda_2 - \nu_2 \gamma = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x), \quad (10)$$

константа C определяется равенством

$$C = \gamma R_2 = \gamma \frac{\lambda_2 b - \nu_2}{\nu_1 - \lambda_1 b - (\nu_2 - \lambda_2 b)}. \quad (11)$$

Доказательство.

Основное уравнение (4) при $s \geq S$ имеет вид

$$\nu_2 P_2'(s) + \lambda_2 P_2(s) = \lambda_2 \int_0^{\infty} P_2(s+x) dB(x), \quad s \geq S \quad (12)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде (9). Подставляя (9) в (12), получим равенство

$$-\gamma \nu_2 C e^{-\gamma(s-S)} + \lambda_2 C e^{-\gamma(s-S)} = \lambda_2 C \int_0^{\infty} e^{-\gamma(s-S+x)} dB(x),$$

из которого имеем нелинейное уравнение относительно γ

$$\lambda_2 - \nu_2 \gamma = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x).$$

Нетрудно видеть, что в силу условия существования стационарного режима (3) уравнение (10) кроме нулевого решения имеет единственный положительный корень $\gamma > 0$, что справедливо для любой функции распределения $B(x)$, поэтому решением основного уравнения при $s \geq S$ является функция (9), определяемая с точностью до мультипликативной постоянной C .

Подставляя выражение (9) для функции $P_2(s) = Ce^{-\gamma(s-S)}$, $s \geq S$ в выражение для вероятности R_2

$$R_2 = \int_S^{\infty} P(s) ds,$$

получим

$$R_2 = \int_S^{\infty} Ce^{-\gamma(s-S)} ds = C \int_S^{\infty} e^{-\gamma x} dx = \frac{C}{\gamma}.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$C = \gamma R_2 = \gamma \frac{\lambda_2 b - v_2}{v_1 - \lambda_1 b - (v_2 - \lambda_2 b)},$$

которое определяет значение константы C функции $P_2(s)$, совпадающее с (11).

1.4 Частичное решение $P_1(s)$ основного уравнения при $s < S$

Рассмотрим уравнение (4) при $s < S$

$$v_1 P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) dB(x) + \lambda_2 \int_{S-s}^{\infty} P_2(s+x) dB(x), s < S. \quad (13)$$

Подставляя (9) в (13), получим

$$v_1 P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) dB(x) + \lambda_2 C e^{-\gamma(s-S)} \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x), \quad (14)$$

а граничное условие (5) запишем для $P_1(s)$ следующим образом

$$P_1(-\infty) = 0. \quad (15)$$

В силу того, что интегро-дифференциальное уравнение (14) с переменными коэффициентами является неоднородным относительно функции

$P_1(s)$, то частичное решение $P_1(s)$ уравнения (13) будем искать в явном виде для частных случаев распределений объемов потребления.

В работе разработан метод характеристических чисел для нахождения частного решения $P_1(s)$ интегро-дифференциального уравнения (4) с кусочно-постоянными коэффициентами. Идея данного метода заключается в следующем. Предлагается искать частичное решение $P_1(s)$ основного уравнения

(4) в виде $P_1(s) = C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}$, $s < S$ где m – число фаз распределения

объемов потребления. Подставляя данное решение в уравнение (4) при $s < S$ и используя результат теоремы 1, после преобразований будут получены: характеристическое уравнение, корни z_n которого являются параметрами решения $P_1(s)$; система линейных уравнений, решение x_n которой определяет решение $P_1(s)$. При этом константа C определяется выражением (11).

1.4.1 Гиперэкспоненциальное m -фазное распределение объемов потребления

Найдем в явном виде решение $P(s)$ уравнения (14), рассматривая случай гиперэкспоненциального распределения $B(x)$ объемов партий потребления

$$B(x) = \sum_{k=1}^n b_k (1 - e^{-\mu_k x}) \quad (16)$$

с параметрами $\mu_k > 0$ и $b_k > 0$, причем

$$\sum_{k=1}^n b_k = 1. \quad (17)$$

В силу (16) и (17) величина первого момента b функции распределения $B(x)$ объемов партий потребления может быть представлена следующим выражением

$$b = \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{\mu_k}. \quad (18)$$

Прежде чем сформулировать теорему о виде функции $P_1(s)$ рассмотрим уравнение

$$v_1 z + \lambda_1 = \lambda_1 \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{\mu_k - z}. \quad (19)$$

Данное уравнение элементарным образом приводится к алгебраическому степени $m + 1$, следовательно, уравнение (19) имеет $m + 1$ корень, один из которых является нулевым $z = 0$.

Для остальных (ненулевых) корней $z = z_k, k = \overline{1, m}$ уравнения (19) сформулируем и докажем следующее утверждение.

Лемма 4. При выполнении условия (3)

$$v_1 > \lambda_1 b,$$

все корни $z = z_n, n = \overline{1, m}$ уравнения (19) действительные и положительные.

Доказательство.

Предположим, что значения μ_k упорядочены по возрастанию, то есть $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \lambda_1 \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{\mu_k - z},$$

которая совпадает с правой частью уравнения (19).

Поскольку

$$f'(z) = \lambda_1 \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{(\mu_k - z)^2} > 0,$$

то на интервале $0 < z < \mu_1$ $f(z)$ непрерывная, монотонно возрастающая функция, которая принимает значения из интервала $\lambda_1 < f(z) < \infty$. При выполнении условия $\lambda_1 b < v_1$, на интервале $0 < z < \mu_1$ уравнение (19) имеет хотя бы один положительный корень $z_1 > 0$.

Далее рассмотрим функцию $f(z)$ (рисунок 2) на следующем интервале $\mu_{n-1} < z < \mu_n$, где $f(z)$ непрерывна, монотонно возрастает и принимает значения –

$\infty < f(z) < \infty$, поэтому уравнение (19) на интервале $\mu_{m-1} < z < \mu_m$ также имеет, по крайней мере, один корень $z_m > 0$.

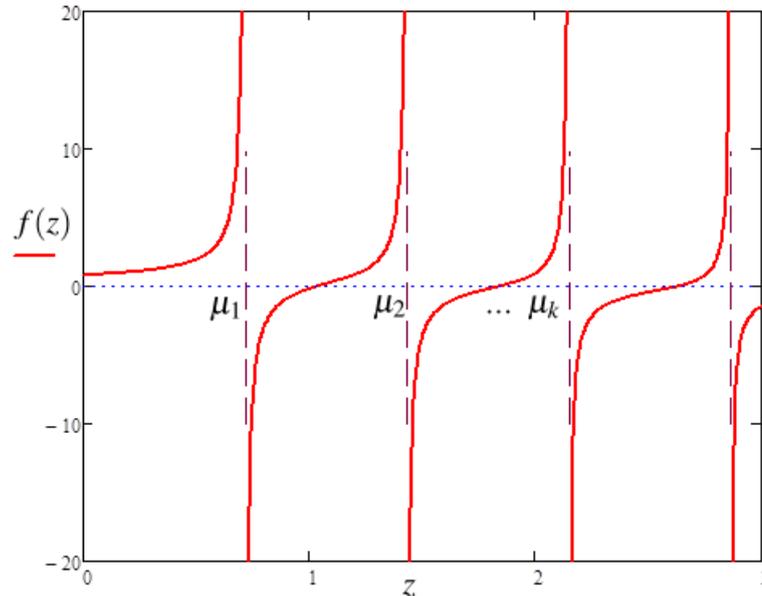


Рисунок 2 – График функции $f(z)$

Число рассматриваемых интервалов равно m и совпадает с числом положительных корней $z = z_n$, $n = \overline{1, m}$, следовательно, на каждом интервале имеется лишь по одному корню, а их совокупность определяет все без исключения корни уравнения (19).

Таким образом, лемма доказана.

Следствие 1. Корень $0 < z_1 < \mu_1$, а для любого $n = \overline{2, m}$, $\mu_{n-1} < z_n < \mu_n$.

Отметим, что использование Следствия 1 позволяет существенно упростить численное нахождение всех положительных корней уравнения (19).

Далее сформулируем теорему о виде частичного решения $P_1(s)$ уравнения (14) при гиперэкспоненциально распределенных объемах потребления.

Теорема 2. Решение $P_1(s)$ уравнения (14) имеет вид

$$P_1(s) = C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}, \quad s < S \quad (20)$$

где z_n , $n = \overline{1, m}$ – положительные корни уравнения (19), параметры x_n распределения (17) являются компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{AX} = \mathbf{h}, \quad (21)$$

где A_{kn} , $k = \overline{1, m}$ – элементы матрицы \mathbf{A} и h_k , $k = \overline{1, m}$ – компоненты вектора \mathbf{h} имеют вид

$$A_{kn} = \frac{\lambda_1}{\mu_k - z_n}, \quad h_k = \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma}, \quad (22)$$

нормирующая константа C определяется равенством (11).

Доказательство.

Решение $P_1(s)$ уравнения (14) будем искать в виде (20).

Учитывая (16), преобразуем интеграл в правой части уравнения (14)

$$\begin{aligned} \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x) &= \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} \sum_{k=1}^m b_k \mu_k e^{-\mu_k x} dx = \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \int_{S-s}^{\infty} e^{-(\mu_k + \gamma)x} dx = \\ &= \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{\mu_k + \gamma} e^{-(\mu_k + \gamma)(S-s)}, \end{aligned}$$

тогда уравнение (14) перепишем в виде

$$v_1 P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) dB(x) + \lambda_2 C \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{\mu_k + \gamma} e^{\mu_k(s-S)},$$

Подставляя выражение (16) для функции распределения $B(x)$ в интеграл в правой части последнего равенства, получим уравнение для $P_1(s)$

$$v_1 P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \left\{ \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) e^{-\mu_k x} dx + C e^{\mu_k(s-S)} \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma} \right\}.$$

Подставляя выражение (20) в последнее равенство, имеем

$$\begin{aligned} v_1 C \sum_{n=1}^m x_n z_n e^{z_n(s-S)} + \lambda_1 C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} = \\ = \sum_{k=1}^m b_k \mu_k \left\{ \lambda_1 \int_0^{S-s} C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S+x)} e^{-\mu_k x} dx + C e^{\mu_k(s-S)} \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Выполняя несложные преобразования, получим равенство

$$\sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} \left\{ v_1 z_n + \lambda_1 + \lambda_1 \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{z_n - \mu_k} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^m b_k \mu_k e^{\mu_k(s-S)} \left\{ \sum_{n=1}^m x_n \frac{\lambda_1}{z_n - \mu_k} + \frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma} \right\}.$$

В полученном выражении приравнивая коэффициенты в линейной комбинации экспонент $e^{z_n s}$ к нулю, получим следующие равенства

$$v_1 z_n + \lambda_1 + \lambda_1 \sum_{k=1}^m b_k \frac{\mu_k}{z_n - \mu_k} = 0, \quad n = \overline{1, m},$$

которые при всех $n = \overline{1, m}$ совпадают с (19), следовательно, $z = z_n$ являются корнями уравнения (19).

Аналогично для коэффициентов при экспонентах $e^{\mu_k s}$ получим равенства

$$\sum_{n=1}^m x_n \frac{\lambda_1}{\mu_k - z_n} = -\frac{\lambda_2}{\mu_k + \gamma}, \quad k = \overline{1, m},$$

составляющие неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно x_n , которая совпадает с системой (21), при этом элементы системы A_{kn} матрицы \mathbf{A} и компоненты h_k вектора \mathbf{h} определяются равенствами (22).

Теорема доказана.

В силу и (9), (11) и (20), распределение $P(s)$ имеет вид

$$P(s) = \gamma \frac{-v_2 + \lambda_2 b}{v_1 - v_2 - (\lambda_1 b - \lambda_2 b)} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}, & s \leq S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s \geq S, \end{cases} \quad (23)$$

где параметры γ и z_n этого распределения являются положительными корнями уравнений (10) и (19), параметры x_n являются компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы линейных алгебраических уравнений (21).

Явное выражение (23) для решения $P(s)$ уравнения (4) полностью решает проблему исследования математической модели управления запасами при выполнении указанных ограничений: релейное управление и гиперэкспоненциальное распределение объемов партий потребления ресурсов.

1.4.2 Численный пример при гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления

Пусть объемы потребления имеют гиперэкспоненциальное распределение третьего порядка

$$B(x) = \sum_{k=1}^3 b_k (1 - e^{-\mu_k x}).$$

Значения параметров μ_k и b_k определяются вектор-строками $\boldsymbol{\mu}$ и \mathbf{b} соответственно

$$\boldsymbol{\mu} = (0,4 \quad 1 \quad 10), \quad \mathbf{b} = (0,3 \quad 0,2 \quad 0,5),$$

при этом средняя величина объемов потребления $b = 1$.

Для следующих значений параметров $\nu_1 = 1,2$, $\nu_2 = 0,8$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $S = 40$ найдены значения параметров, определяющих решение $P(s)$ основного уравнения

$$\gamma = 0,124, \quad z_1 = 0,078, \quad z_2 = 0,886, \quad z_3 = 9,602$$

$$x_1 = 0,63, \quad x_2 = 0,024, \quad x_3 = 0,013, \quad C = 0,062.$$

Значит, уравнение (10) имеет единственное решение отличное от нуля, а уравнение (19) имеет три положительных корня, что равно числу фаз распределения $B(x)$.

Определим остальные параметры плотности $P(s)$ распределения вероятностей значений объема запасов при параметрах, определенных выше.

Матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{h} имеют следующий вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3,109 & -2,056 & -0,109 \\ 1,085 & 8,809 & -0,116 \\ 0,101 & 0,110 & 2,512 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1,909 \\ 0,890 \\ 0,099 \end{pmatrix},$$

тогда параметры $x_n, n = \overline{1,5}$, частичного решения $P_1(s)$ основного уравнения, являющиеся компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы (21) линейных алгебраических уравнений, имеют вид

$$x_1 = 0,630, \quad x_2 = 0,024, \quad x_3 = 0,013.$$

На рисунках 3-4 представлены графики плотности (рисунок 3) и функции (рисунок 4) распределения вероятностей значений процесса $s(t)$ при пятифазных гиперэкспоненциальных объемах потребления.

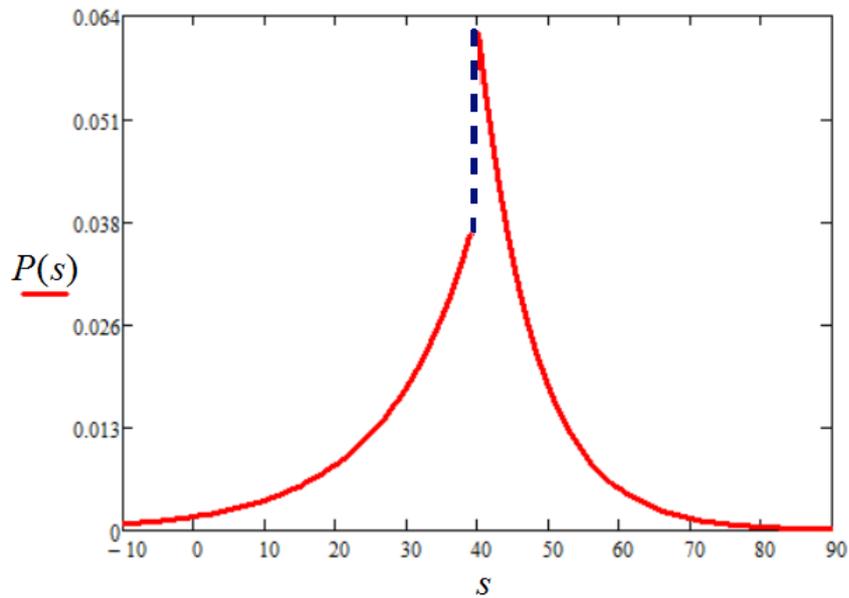


Рисунок 3 – Плотность распределения вероятностей $P(s)$ значений процесса $s(t)$ при трехфазных гиперэкспоненциальных объемах потребления и кусочно-постоянной скорости поступления ресурса

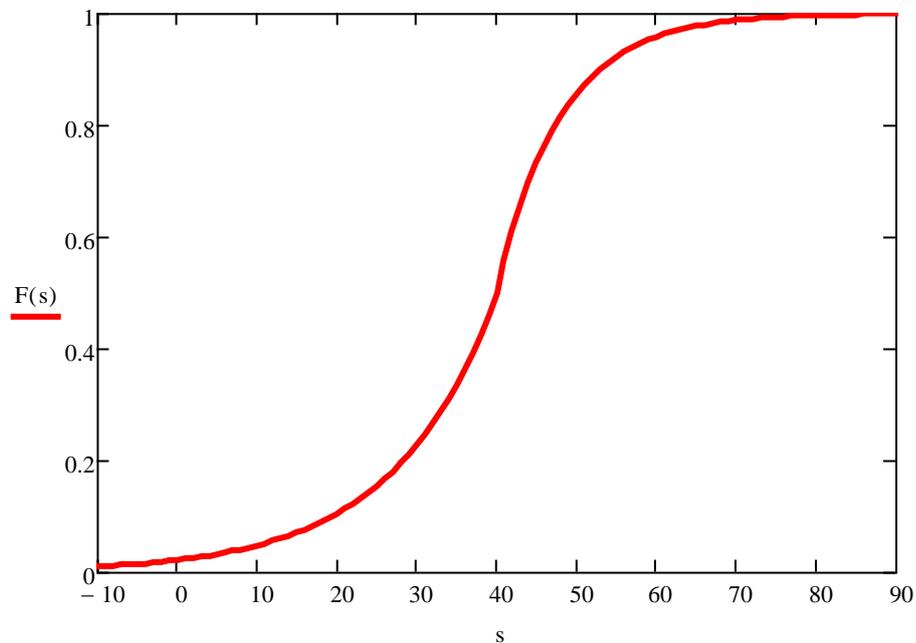


Рисунок 4 – Функция распределения вероятностей значений процесса $s(t)$ при трехфазных гиперэкспоненциальных объемах потребления и кусочно-постоянной скорости поступления ресурса

1.4.3 Распределение Эрланга порядка m объемов потребления

Рассмотрим в качестве функции распределения $B(x)$ объемов потребления ресурсов распределение Эрланга n -го порядка

$$B(x) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!}, k \geq 1. \quad (24)$$

В силу (24) величина b может быть представлена следующим образом

$$b = \frac{m}{\mu}. \quad (25)$$

Прежде чем сформулировать теорему о виде функции $P_1(s)$ рассмотрим уравнение

$$v_1 z + \lambda_1 = \lambda_1 \left(\frac{\mu}{\mu - z} \right)^m, \quad (26)$$

которое нетрудно преобразовать к алгебраическому уравнению степени $m + 1$, откуда следует, что уравнение (26) имеет $m + 1$ корней. Достаточно очевидно, что $z = 0$ является корнем этого уравнения.

Для остальных корней $z = z_n, n = \overline{1, m}$ уравнения (26) докажем следующее утверждение.

Лемма 5. При выполнении условия (3)

$$\lambda_1 b = \lambda_1 \frac{m}{\mu} < v_1$$

все m ненулевые корни $z = z_n, n = \overline{1, m}$ уравнения

$$(v_1 z + \lambda_1)(\mu - z)^m - \lambda_1 \mu^m = 0, \quad (27)$$

являются простыми и имеют положительные действительные части.

Доказательство.

Найдем корни производной от левой части уравнения (27), записав равенство

$$v_1(\mu - z)^m - m(v_1 z + \lambda_1)(\mu - z)^{m-1} = 0.$$

Для этого уравнения значение $z_1 = \mu$ является его корнем кратности $m - 1$ и $z_2 = (\mu - m\lambda)/(mv_1 + v_1)$ – простым корнем.

Так как эти значения z не являются корнями уравнения (27), то все корни уравнения (27) простые.

Раскроем скобки в уравнении (27)

$$v_1 z(\mu - z)^m + \lambda_1(\mu - z)^m - \lambda_1 \mu^m = 0.$$

Поделив полученное уравнение на $v_1 z$, уравнение (27) перепишем в виде

$$(\mu - z)^m + \frac{\lambda_1}{v_1} \frac{(\mu - z)^m - \mu^m}{z} = 0. \quad (28)$$

Обозначив

$$f(z) = (\mu - z)^m, \quad \varphi(z) = \frac{\lambda_1}{v_1} \frac{(\mu - z)^m - \mu^m}{z}, \quad (29)$$

приведем формулировку теоремы Руше:

Теорема (Руше). Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитические в замкнутой области \bar{D} , ограниченной контуром C , во всех точках z этого контура удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| > |\varphi(z)|, \quad (30)$$

тогда их сумма

$$F(z) = f(z) + \varphi(z)$$

и функция $f(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей (с учетом их кратности). [15]

Здесь функция $F(z)$ является левой частью уравнения (28), поэтому ее нули совпадают с корнями уравнения (28).

Функция $f(z)$ из (29) имеет m нулей $z = \mu$.

Применяя теорему Руше для доказательства сформулированной леммы, достаточно построить область D в полуплоскости $\text{Re}(z) > 0$, включающей точку

$z = \mu$ и доказать выполнение неравенства (30) на контуре C , ограничивающем область D .

Контур C (рисунок 5) выберем в виде окружности

$$C = \{z : |z - R| = R\}, R > \mu, \quad (31)$$

радиуса R с центром в точке $z = R$, а областью D будет круг, ограниченный этой окружностью и содержащий точку $z = \mu$.

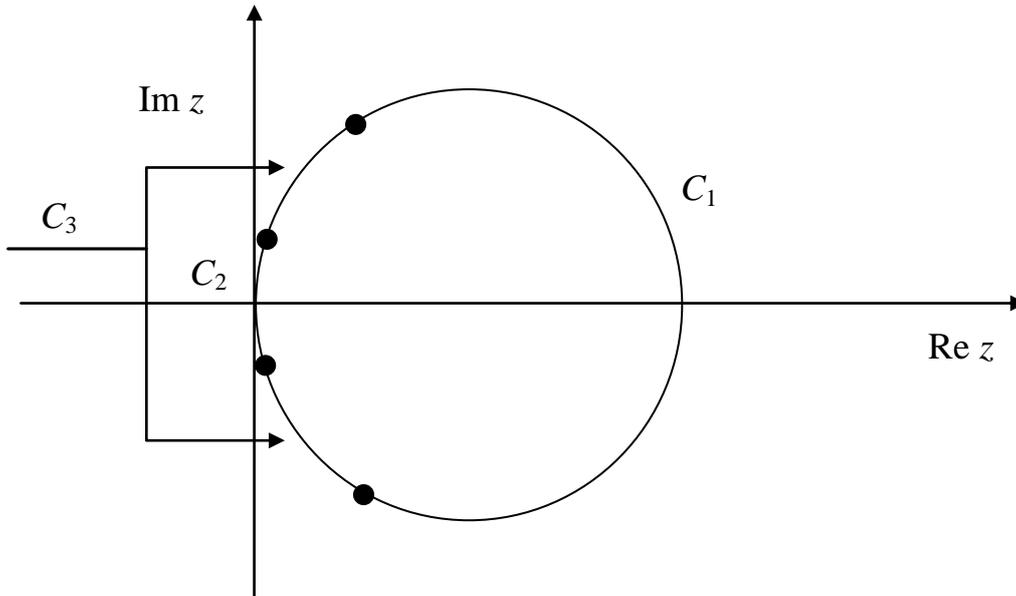


Рисунок 5 – Контур C , состоящий из трех частей C_1, C_2, C_3

Доказательство неравенства (30) выполним для трех частей C_1, C_2, C_3 , составляющих контур C , изображенных на рисунке.

Так как в левой части неравенства (30) записано абсолютное значение многочлена степени n , а в его правой части абсолютное значение многочлена степени $m - 1$, то это неравенство для достаточно больших значений R и z естественно выполняется. Здесь рассматривается часть C_1 контура C .

Точка $z = 0$ принадлежит контуру C . Покажем, что неравенство (30) выполняется и в некоторой окрестности точки $z = 0$, то есть в части C_2 контура C .

Неравенство (30) перепишем в виде

$$|\mu - z|^m > \frac{\lambda_1}{\nu_1} \left| \frac{(\mu - z)^m - \mu^m}{z} \right|. \quad (32)$$

Для левой и правой частей этого неравенства при $z \rightarrow 0$ выполняются равенства:

для левой части

$$\lim_{z \rightarrow 0} |\mu - z|^m = \mu^m,$$

для правой части

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\lambda_1}{v_1} \left| \frac{(\mu - z)^m - \mu^m}{z} \right| = \frac{\lambda_1}{v_1} m \mu^{m-1},$$

а в силу условия (3) $\lambda_1 \frac{m}{\mu} < v_1$, выполняются неравенства:

для левой части

$$\frac{\lambda_1}{v_1} m \mu^{m-1} < \mu^m,$$

откуда следует, что неравенство (30) выполняется в некоторой окрестности точки $z = 0$, то есть в части C_2 контура C .

Оставшаяся часть C_3 контура C исключает окрестность точки $z = 0$, то есть часть C_2 контура C и характеризуется тем, что z принимает конечные значения при $R \rightarrow \infty$.

Докажем неравенство (30) в точках $z \in C_3$.

Для точки $z = x + iy$ контура C и в частности для точек z части C_3 контура C , в силу равенства (31), получим условие на координаты x и y этих точек

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2,$$

которое перепишем в виде

$$x^2 + y^2 = 2xR. \quad (33)$$

Комплексные числа $z = x + iy \neq 0$, удовлетворяющие условию (33), запишем в показательной форме

$$z = \sqrt{2xR} \exp\{i\alpha(x, y)\},$$

где $\sqrt{2xR} = |z|$, $\alpha = \text{Arg}z$, а неравенство (32) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left| \mu - \sqrt{2xR}e^{i\alpha} \right|^n &> \frac{\lambda_1}{v_1} \left| \frac{(\mu - \sqrt{2xR}e^{i\alpha})^n - \mu^n}{\sqrt{2xR}e^{i\alpha}} \right| = \\ &= \frac{\lambda_1}{v_1 \sqrt{2xR}} \left| (\mu - \sqrt{2xR}e^{i\alpha})^n - \mu^n \right|. \end{aligned}$$

Поделив его левую и правую части на $(\sqrt{R})^n$, получим неравенство

$$\left| \frac{\mu}{\sqrt{R}} - \sqrt{2x}e^{i\alpha} \right|^n \geq \frac{\lambda_1}{\sqrt{2xR}} \left| \left(\frac{\mu}{\sqrt{R}} - \sqrt{2x}e^{i\alpha} \right)^n - \left(\frac{\mu}{\sqrt{R}} \right)^n \right|,$$

которое при $R \rightarrow \infty$ имеет вид

$$(\sqrt{2x})^n > \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{v_1 \sqrt{2xR}} (\sqrt{2x})^n = 0,$$

и выполняется при любых конечных $z \neq 0$

Лемма доказана.

Теорема 3. Решение $P_1(s)$ уравнения (15) имеет вид

$$P_1(s) = C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}, \quad s < S \quad (34)$$

где z_n – ненулевые корни уравнения (26), параметры x_n распределения (34) являются компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}, \quad (35)$$

где \mathbf{E} – единичный вектор-столбец, а A_{kn} – элементы матрицы \mathbf{A} имеют вид

$$A_{kn} = \left(\frac{\mu - z_n}{\mu + \gamma} \right)^{k-m-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad k, n = \overline{1, m}, \quad (36)$$

нормирующая константа C определяется выражением (11).

Доказательство.

Решение $P_1(s)$ уравнения (14) будем искать в виде (34).

Зная (24), можем найти интеграл в правой части уравнения (14)

$$\int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x) = \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{m-1}}{(m-1)!} dx = \int_{S-s}^{\infty} e^{-(\gamma+\mu)x} \frac{(\mu x)^{m-1}}{(m-1)!} d\mu x.$$

Выполним замену переменной $z=\mu x$

$$\int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x) = \int_{\mu(S-s)}^{\infty} e^{-\frac{(\gamma+\mu)}{\mu} z} \frac{(z)^{m-1}}{(m-1)!} dz = F_{m-1}.$$

Введем обозначения $w=\mu(S-s)$ и $\alpha=(\mu+\gamma)/\mu$, тогда

$$\begin{aligned} F_m &= \int_w^{\infty} e^{-\alpha z} \frac{z^m}{m!} dz = -\frac{1}{\alpha} \frac{z^m}{m!} e^{-\alpha z} \Big|_{z=w}^{\infty} + \frac{1}{\alpha} \int_w^{\infty} e^{-\alpha z} \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} dz = \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{w^m}{m!} e^{-\alpha w} + \frac{1}{\alpha} F_{m-1}. \end{aligned}$$

Предполагая $F_m = \frac{1}{\alpha^m} C(m)$ и $F_0 = \frac{1}{\alpha^m} e^{-\alpha w} = C(0)$, имеем

$$\frac{1}{\alpha^m} C(m) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha^{m-1}} C(m-1) + \frac{1}{\alpha} \frac{w^m}{m!} e^{-\alpha w},$$

тогда

$$C(m) = C(m-1) + \alpha^{m-1} \frac{w^m}{m!} e^{-\alpha w}.$$

Выполняя несложные арифметические действия, получаем

$$C(m) = C(0) + \sum_{i=1}^m \alpha^{i-1} \frac{w^i}{i!} e^{-\alpha w} = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha w} \sum_{i=0}^m \frac{(\alpha w)^m}{i!} \text{ и } F_m = \frac{1}{\alpha^{m+1}} e^{-\alpha w} \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha w)^m}{k!}.$$

Таким образом, возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$\int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x) = \frac{1}{\left(\frac{\mu+\gamma}{\mu}\right)^m} e^{\frac{\mu+\gamma}{\mu} \mu(S-s)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[(\mu+\gamma)(S-s)]^k}{k!}.$$

Поэтому (14) можем записать следующим образом

$$\begin{aligned} &v_1 P_1'(s) + \lambda_1 P_1(s) = \\ &= \lambda_1 \int_0^{S-s} P_1(s+x) b(x) dx + \lambda_2 e^{-\mu(S-s)} \left(\frac{\mu}{\mu+\gamma}\right)^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[(\mu+\gamma)(S-s)]^k}{k!}, \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя выражение (34) в (37) и выполняя несложные преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} \left\{ v_1 z_n + \lambda_1 - \lambda_1 \left(\frac{\mu}{\mu - z_n} \right)^m \right\} = \\ & = e^{\mu(s-S)} \left\{ \lambda_2 \left(\frac{\mu}{\mu + \gamma} \right)^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[(\mu + \gamma)(S - s)]^k}{k!} - \lambda_1 \sum_{n=1}^m x_n \left(\frac{\mu}{\mu - z_n} \right)^m \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[(\mu - z_n)(S - s)]^k}{k!} \right\} \end{aligned}$$

Обозначив $y = (\mu + \gamma)(S - s)$, $(\mu - z_n)(S - s) = \frac{\mu - z_n}{\mu + \gamma} y$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} \left\{ v_1 z_n + \lambda_1 - \lambda_1 \left(\frac{\mu}{\mu - z_n} \right)^m \right\} = \\ & = \mu^m e^{\mu(s-S)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^k}{k!} \left\{ \frac{\lambda_2}{(\mu + \gamma)^m} - \sum_{n=1}^m x_n \frac{\lambda_1}{(\mu - z_n)^m} \left(\frac{\mu - z_n}{\mu + \gamma} \right)^k \right\}. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю в полученном выражении коэффициенты в линейной комбинации экспонент $e^{z_n(s-S)}$, получим равенства

$$v_1 z_n + \lambda_1 = \lambda_1 \left(\frac{\mu}{\mu - z_n} \right)^m, \quad n = \overline{1, m},$$

которые при всех $n = \overline{1, m}$ совпадают с уравнением (26), следовательно, z_n являются корнями уравнения (26).

Аналогично для коэффициентов при линейно независимых экспонентах $e^{\mu(s-S)} y^m$ получим равенства

$$\sum_{n=1}^m x_n \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{\mu - z_n}{\mu + \gamma} \right)^{k-m} = 1, \quad k = \overline{0, m-1},$$

которые составляют неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно x_n , совпадающую с системой (35), в которой элементы A_{kn} матрицы \mathbf{A} определяются равенствами (36).

Теорема доказана.

В силу (9), (11) и (34) решение $P(s)$ уравнения (4) при m -фазном распределении Эрланга объемов потребления имеет вид

$$P(s) = \gamma \frac{\lambda_2 b - v_2}{v_1 - \lambda_1 b - (v_2 - \lambda_2 b)} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}, & s \leq S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s \geq S, \end{cases} \quad (38)$$

где параметры z_n этого распределения являются ненулевыми корнями уравнения (26), а γ – единственный положительный корень уравнения (10), параметры x_n являются компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы линейных алгебраических уравнений (35).

Явное выражение (38) для решения $P(s)$ уравнения (4) полностью решает проблему исследования математической модели управления запасами при выполнении указанных ограничений: релейное управление и эрланговское распределение объемов партий потребления ресурсов.

1.4.4 Численный пример при эрланговском распределении объемов потребления

Рассмотрим в качестве распределения $B(x)$ объемов потребления эрланговское распределение пятого порядка

$$B(x) = 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!}, k \geq 1.$$

где значения $\mu = n$, тогда средняя величина объемов потребления $b = 1$.

Для заданных значений параметров $v_1 = v_2 = 1$, $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_2 = 1,2$ и $S = 40$ найдены следующие значения параметров решения $P(s)$ основного уравнения

$$\gamma = 0,320; \quad z_1 = 0,350; \quad z_2 = 4,335 + 3,265j; \quad z_3 = 4,335 - 3,265j;$$

$$z_4 = 7.590 + 1.726j; \quad z_5 = 7.590 - 1.726j.$$

Таким образом, уравнение (10) имеет единственное ненулевое решение, а уравнение (26) имеет пять корней с положительными действительными частями, что равно числу фаз распределения $B(x)$.

Определим остальные параметры плотности распределения вероятностей значений объема запасов при заданных параметрах.

Матрица \mathbf{A} определяется следующим образом

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2,027 & 9,049 + 5,753i & 9,049 - 5,753i & 14,783 + 3,040i & 14,783 - 3,040i \\ 1,465 & 3,856 - 3,998i & 3,865 + 3,998i & -5,136 - 5,190i & -5,136 + 5,190i \\ 1,056 & -1,631 - 2,370i & -1,631 + 2,370i & 0,676 + 3,467i & 0,676 - 3,467i \\ 0,766 & -1,372 + 0,583i & -1,372 - 0,583i & 0,658 - 1,577i & 0,658 + 1,577i \\ 0,553 & 0,154 + 0,757i & 0,154 - 0,757i & -0,688 + 0,458i & -0,688 - 0,458i \end{pmatrix},$$

при этом элементами данной матрицы являются комплексно-сопряженные и действительные числа.

Параметры $x_n, n = \overline{1, 5}$, частичного решения $P_1(s)$ основного уравнения, являющиеся компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы (21) линейных алгебраических уравнений, имеют вид

$$x_1 = 1,244 \quad x_2 = -0,042 - 0,122i, \quad x_3 = -0,042 + 0,122i, \\ x_4 = -0,080 - 0,033i, \quad x_5 = -0,080 + 0,033i,$$

а нормирующая константа $C = 0,239$, тогда имеют место следующие графики плотности и функции распределения вероятностей $P(s)$ значений процесса $s(t)$ в случае 5-фазном эрланговском распределении $B(x)$ объемов потребления (рисунки 6, 7)

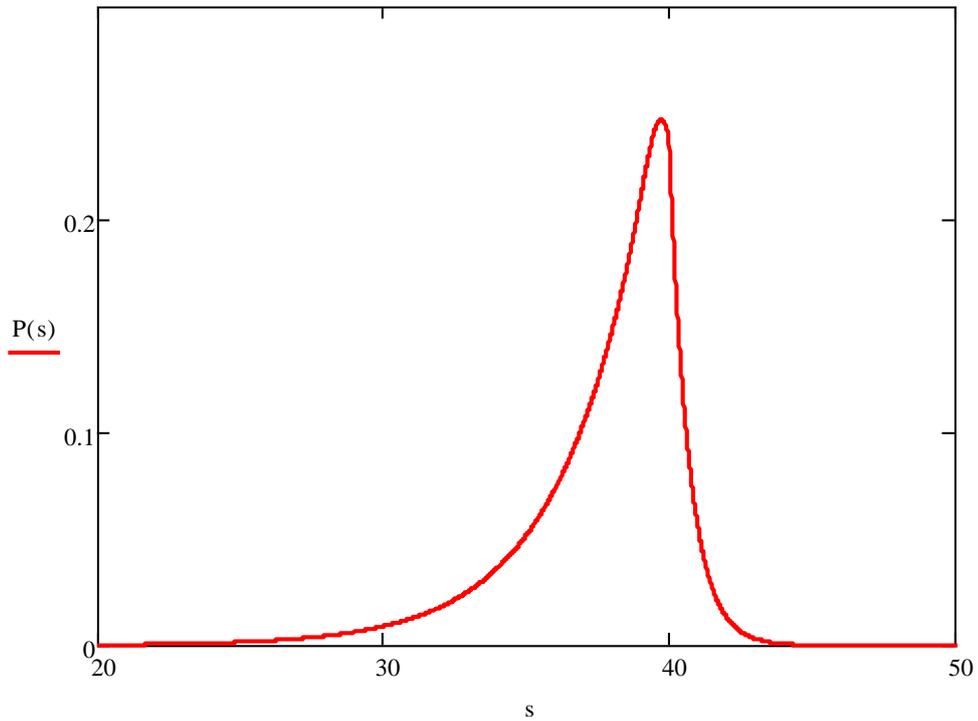


Рисунок 6 – Плотность распределения вероятностей $P(s)$ значений процесса $s(t)$ при 5-фазном эрланговском распределении $B(x)$ объемов потребления

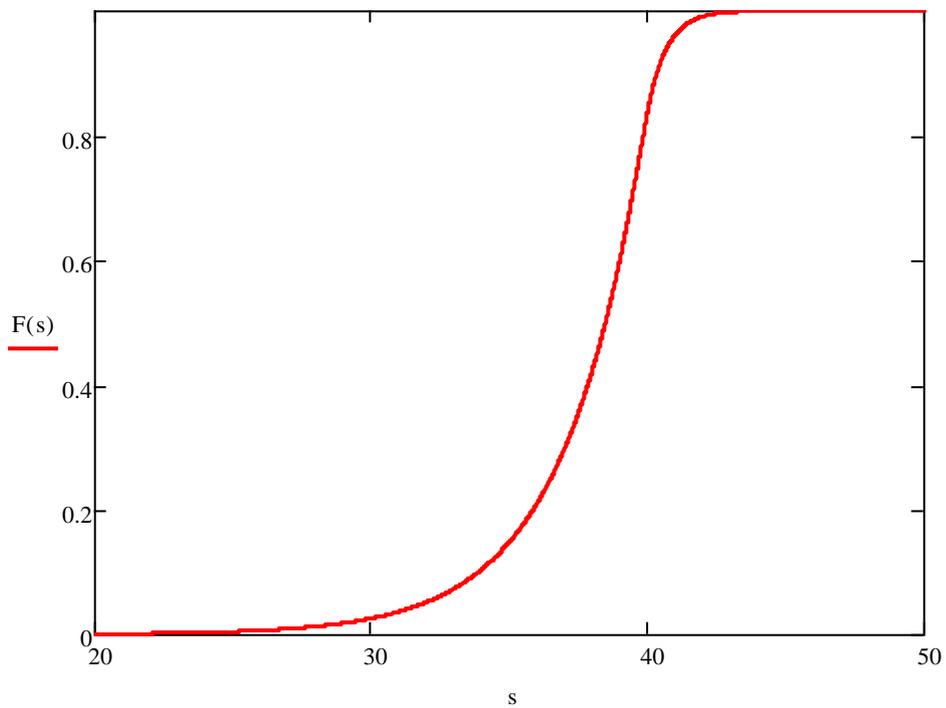


Рисунок 7 – Функция распределения вероятностей значений процесса $s(t)$ при 5-фазном эрланговском распределении $B(x)$ объемов потребления

1.4.5 PH-распределение объемов потребления

Рассмотрим PH-распределение объемов потребления ресурсов

$$B(x) = 1 - \beta e^{\mathbf{G}x} \mathbf{E}, \quad (39)$$

где $\beta_k > 0$, причем

$$\beta \mathbf{E} = 1, \quad (40)$$

а \mathbf{G} – субгенератор цепи Маркова, определяющий PH-распределение.

Сформулируем теорему о виде решения $P_1(s)$ уравнения (13).

Теорема 4. Если уравнение

$$v_1 z + \lambda_1 = \lambda_1 \beta (\mathbf{G} + z \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{E}, \quad (41)$$

имеет m простых корней с положительными действительными частями, то частичное решение $P_1(s)$ уравнения (13) имеет вид

$$P_1(s) = C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}, \quad s < S, \quad (42)$$

где z_n – ненулевые корни уравнения (41), параметры x_n распределения (42) являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_1 \sum_{n=1}^m x_n (\mathbf{G} + z_n \mathbf{I})^{-1} + \lambda_2 (\mathbf{G} - \gamma \mathbf{I})^{-1} = 0, \quad (43)$$

нормирующая константа C определяется выражением (11).

Доказательство.

Частичное решение $P_1(s)$ уравнения (13) будем искать в виде (42).

Подставим выражения (9) и (42) в (13)

$$\begin{aligned} & v_1 C \sum_{n=1}^m x_n z_n e^{z_n(s-S)} + \lambda_1 C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} = \\ & = \lambda_1 \int_0^{S-s} C \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S+x)} dB(x) + \lambda_2 \int_{S-s}^{\infty} C e^{-\gamma(s-S+x)} dB(x). \end{aligned}$$

Используя выражение (39) для функции распределения $B(x)$, найдем интеграл в правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x) &= - \int_{S-s}^{\infty} e^{-\gamma x} \beta e^{\mathbf{G}x} \mathbf{G} \mathbf{E} dx = - \int_{S-s}^{\infty} \beta e^{(\mathbf{G}-\gamma \mathbf{I})x} \mathbf{G} \mathbf{E} dx = \\ &= \beta e^{(\mathbf{G}-\gamma \mathbf{I})(S-s)} (\mathbf{G}-\gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &v_1 \sum_{n=1}^m x_n z_n e^{z_n(s-S)} + \lambda_1 \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} = \\ &= \lambda_1 \int_0^{S-s} \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S+x)} dB(x) + \lambda_2 \beta e^{(\mathbf{G}-\gamma \mathbf{I})(S-s)} (\mathbf{G}-\gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

тогда выполняя несложные преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)} \left\{ v_1 z_n + \lambda_1 - \lambda_1 \beta (\mathbf{G} + z_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{E} \right\} = \\ &= \beta e^{\mathbf{G}(S-s)} \left(\lambda_1 \sum_{n=1}^m x_n (\mathbf{G} + z_n \mathbf{I})^{-1} + \lambda_2 (\mathbf{G} - \gamma \mathbf{I})^{-1} \right) \mathbf{G} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы коэффициенты в линейной комбинации экспонент $e^{z_n(s-S)}$ равнялись нулю, тогда

$$v_1 z_n + \lambda_1 = \lambda_1 \beta (\mathbf{G} + z_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{E}, \quad n = \overline{1, m},$$

которые при всех $n = \overline{1, m}$ совпадают с уравнением (41), следовательно, z_n являются корнями уравнения (16).

Аналогично для линейной комбинации экспонент $e^{\mathbf{G}(S-s)}$ в правой части уравнения получим следующие равенства

$$\lambda_1 \sum_{n=1}^m x_n (\mathbf{G} + z_n \mathbf{I})^{-1} + \lambda_2 (\mathbf{G} - \gamma \mathbf{I})^{-1} = 0,$$

совпадающие с равенствами (43).

Таким образом, теорема доказана.

РН-распределение обобщает распределения фазового типа, в том числе гиперэкспоненциальное и Эрланга, однако, для РН-распределения найденное решение имеет место только при выполнении определенных условий, а при гиперэкспоненциальном и эрланговском решение найдено в общем случае.

1.4.6 Численный пример при РН-распределении объемов потребления

Пусть объемы потребления имеют РН-распределение вида (39) со следующими параметрами

$$\beta = (0,167 \quad 0,5 \quad 0,333), \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -8,871 & 5,914 & 1,774 \\ 2,218 & -5,914 & 2,957 \\ 8,871 & 4,435 & -14,784 \end{pmatrix}.$$

при которых выполняется (40).

Для заданных значений параметров $v_1 = v_2 = 1$, $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_2 = 1,2$ и $S = 40$ найдены следующие значения параметров решения $P(s)$ основного уравнения

$$\gamma = 0,199; \quad z_1 = 0,199; \quad z_2 = 12,418; \quad z_3 = 16,151.$$

Таким образом, уравнение (10) имеет единственное ненулевое решение, а уравнение (41) имеет три положительных корня, что равно числу фаз распределения $B(x)$.

Определим остальные параметры плотности распределения вероятностей значений объема запасов при заданных параметрах.

Параметры $x_n, n = \overline{1,5}$, частичного решения $P_1(s)$ основного уравнения, являющиеся компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы (21) линейных алгебраических уравнений, имеют вид

$$x_1 = 0,137; \quad x_2 = 0,000; \quad x_3 = 0,000,$$

а нормирующая константа $C = 0,729$, тогда имеют место следующие графики плотности и функции распределения вероятностей значений процесса $s(t)$ в случае 3-фазного РН-распределения $B(x)$ объемов потребления (рисунки 8, 9).

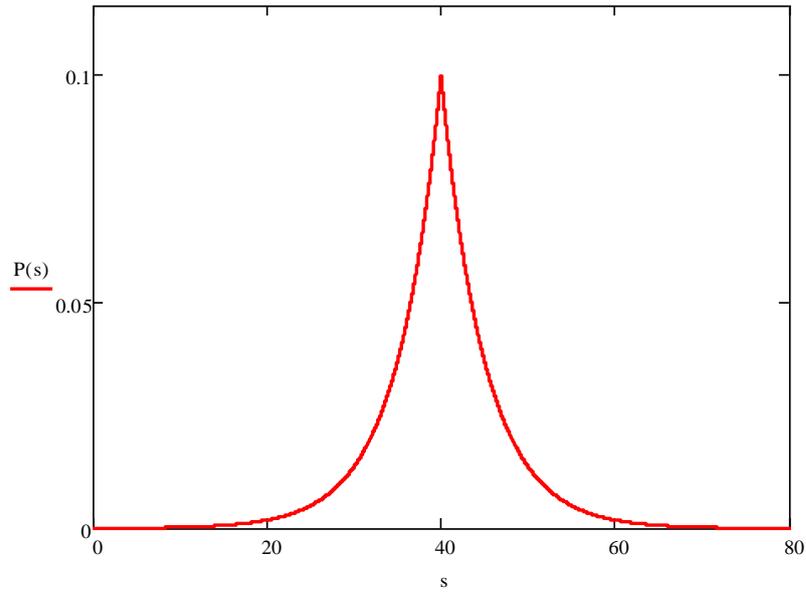


Рисунок 8 – Плотность распределения вероятностей $P(s)$ при РН-распределении объемов потребления

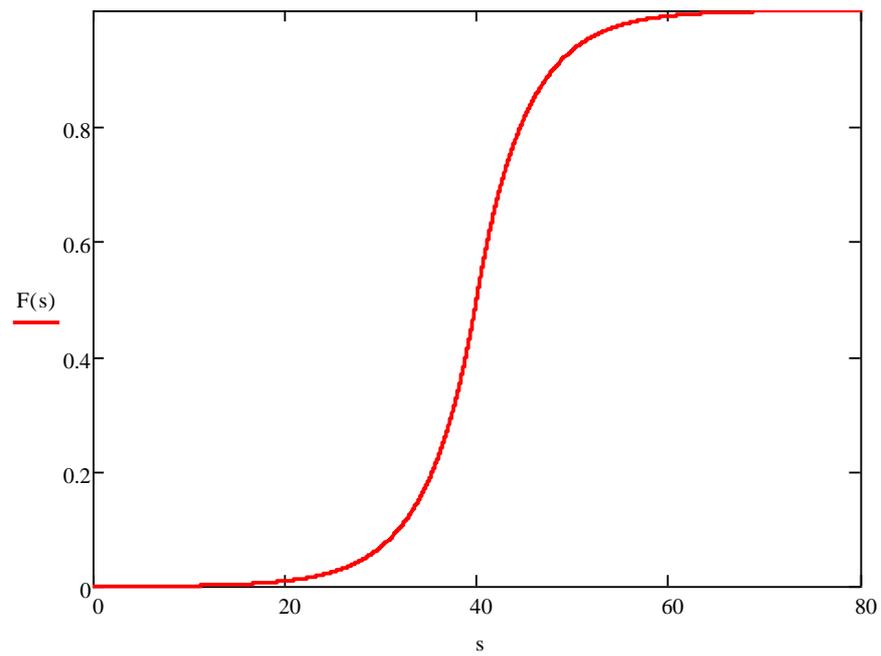


Рисунок 9 – Функция распределения вероятностей значений процесса $s(t)$ в случае 3-фазного РН-распределения $B(x)$ объемов потребления

1.5 Выводы по Главе 1

В данной главе при исследовании стохастической модели системы релейного управления запасами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления при частных случаях распределений объемов потребления получены следующие результаты:

Определены свойства решения основного уравнения (4), которое является интегро-дифференциальным уравнением с кусочно-постоянными коэффициентами.

Разработана модификация метода характеристических чисел для решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами.

Найдено явное выражение для стационарного распределения вероятностей $P(s)$ значений уровня запасов, накопленных в системе, при m -фазном гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления.

Найдено явное выражение для стационарного распределения вероятностей значений уровня запасов, накопленных в системе, при m -фазном эрланговском распределении объемов потребления.

Найдено явное выражение для стационарного распределения вероятностей значений уровня запасов, накопленных в системе, при РН-распределении объемов потребления, при выполнении заданных условий существования простых корней с положительными действительными частями уравнения (41).

Все полученные результаты являются точными. В четвертой главе диссертации приведены численные примеры исследования некоторых частных случаев стохастической модели системы релейного управления запасами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления.

Результаты данной главы опубликованы в работах [31, 32, 35, 87–91].

Глава 2 Исследование стохастической модели системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и релейным управлением кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при произвольном распределении его объемов методами аппроксимаций

В главе 1 найдено стационарное распределение вероятностей $P(s)$ значений уровня запасов, накопленных в системе релейного управления ресурсами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления, при различных фазовых распределениях $B(x)$ объемов потребления. Поскольку нахождение стационарного распределения $P(s)$ при произвольном распределении $B(x)$ объемов потребления задача затруднительная, то рассмотрим модель, описанную в главе 1 при постоянной скорости поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления ресурсов.

2.1 Математическая модель и частичное решение

Рассмотрим (рисунок 10) систему управления запасами, представляющую собой частный случай модели, описанной в Главе 1, на вход которой непрерывно поступает ресурс с постоянной скоростью $v_1 = v_2 = v$ в единицу времени.

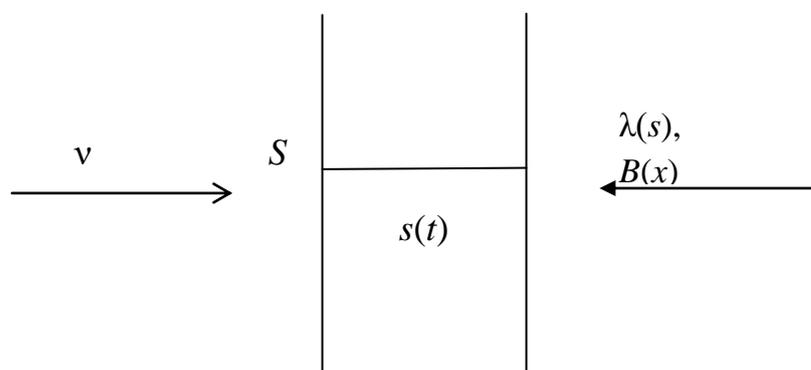


Рисунок 10 – Система управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления

Условие существования стационарного режима в рассматриваемой системе примет вид

$$\lambda_1 b < v < \lambda_2 b, \quad (44)$$

где b – среднее значение объема одной партии на потребление ресурсов.

Интегро-дифференциальное уравнение для стационарного распределения вероятностей значений объемов запасов, накопленных в системе, имеет вид

$$P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x), \quad (45)$$

решение $P(s)$ которого удовлетворяет краевым условиям

$$P(-\infty) = P(\infty) = 0. \quad (46)$$

Полученное уравнение является частным случаем уравнения (4).

Ставится задача нахождения решения $P(s)$ уравнения (45), удовлетворяющего краевым условиям (46) при произвольном распределении $B(x)$ объемов потребления.

В соответствии с леммой 3 при $v_1 = v_2 = 1$ вероятности R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \frac{\lambda_2 b - 1}{b(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad R_2 = \frac{1 - \lambda_1 b}{b(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (47)$$

Уравнение (45) при $s \geq S$ имеет вид

$$P_2'(s) + \lambda_2 P_2(s) = \lambda_2 \int_0^{\infty} P_2(s+x)dB(x). \quad (48)$$

Таким образом, можем определить решение $P(s)$ уравнения (45) при $s \geq S$.

Решение $P(s)$ уравнения (45) при $s \geq S$ имеет вид

$$P(s) = Ce^{-\gamma(s-S)}, \quad s \geq S, \quad (49)$$

где γ ненулевое решение нелинейного относительно γ уравнения

$$\lambda_2 - \gamma = \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} dB(x). \quad (50)$$

Константа C определяется равенством

$$C = \gamma R_2 = \gamma \frac{1 - \lambda_1 b}{b(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (51)$$

Частичное решение $P(s)$ уравнения (45) при $s < S$ будем искать методами аппроксимаций.

2.2 Метод неявной аппроксимации

Нахождение решения уравнения (45), которое является частным случаем основного уравнения (4), при $s < S$ и произвольной функции распределения $B(x)$ объемов потребления вызывает некоторые затруднения, поэтому будем его искать с помощью метода неявной аппроксимации, основанном на R -аппроксимации, которая является аналогом гиперэкспоненциальной аппроксимации, предложенной в работе Рыжикова Ю.И. [38], реализуемая следующим образом.

Рассмотрим решение уравнения (45) при двухфазном гиперэкспоненциальном распределении $B(x) = R(x)$ объемов потребления

$$B(x) = q(1 - e^{-\mu_1 x}) + (1 - q)(1 - e^{-\mu_2 x}), \quad (52)$$

где $\mu_k > 0$ и $0 < q < 1$. Тогда решение $P_R(s)$ интегро-дифференциального уравнения (45) можно записать явно в виде функции, зависящей от параметров q , μ_1 и μ_2 гиперэкспоненциального распределения $R(x)$.

Далее реализуем метод R -аппроксимации функции распределения $B(x)$. Для этого применим метод моментов для функции $B(x)$, реализуемый приравнованием первых трех моментов функции распределения $B(x)$ к первым трем интегральным характеристикам функции $R(x)$, с помощью которого определяются значения параметров q , μ_1 и μ_2 функции $R(x)$, аппроксимирующей функцию распределения $B(x)$.

Затем полученные значения параметров q , μ_1 и μ_2 подставляются в решение $P_R(s)$, найденные при двухфазной гиперэкспоненциальной функции распределения $R(x)$, реализуем этап неявной аппроксимации функцией $P_R(s)$ решения $P(s)$ уравнения (45) с произвольной функцией распределения $B(x)$ объемов потребления.

Логичным завершением метода неявной аппроксимации будет являться исследование свойств аппроксимирующей функции $P_R(s)$, определение области ее применимости и точности предлагаемой аппроксимации, что имеет принципиальное значение, так как аппроксимация допустима лишь только тогда, когда она удовлетворяет заданной точности.

Итак, сформулируем основные этапы метода неявной аппроксимации для решения уравнения (45).

На первом этапе метода R -аппроксимации найдем решение уравнения (45) при гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления (52).

Нетрудно показать, что решение уравнения (45) имеет вид

$$P(s) = \begin{cases} C_1 e^{z_1 s} + C_2 e^{z_2 s}, & s < S, \\ C_3 e^{\gamma s}, & s \geq S, \end{cases} \quad (53)$$

здесь параметры распределения $P(s)$ определяются в явном виде следующим образом

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \kappa - \lambda_1 \pm \sqrt{(\kappa - \lambda_1)^2 - 4\mu_1\mu_2(1 - \lambda_1 b)} \right\},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \kappa - \lambda_2 - \sqrt{(\kappa - \lambda_2)^2 + 4\mu_1\mu_2(\lambda_2 b - 1)} \right\}, \quad \kappa = \mu_1 + \mu_2,$$

причем $z_1 > 0, z_2 > 0, \gamma < 0$.

Константы C_1, C_2, C определяются равенствами

$$C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \frac{1}{X}, \quad C_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \frac{1}{X}, \quad C = \frac{1}{X},$$

где $X = a_{3,1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}}{a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}} + a_{3,2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,3}}{a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}} - a_{3,3}$, a_{kv} элементы мат-

$$\text{рицы } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/(z_1 - \mu_1) & 1/(z_2 - \mu_1) & 1/(\gamma - \mu_1) \\ 1/(z_1 - \mu_2) & 1/(z_2 - \mu_2) & 1/(\gamma - \mu_2) \\ 1/z_1 & 1/z_2 & 1/\gamma \end{pmatrix}.$$

На втором этапе метода R -аппроксимации выполним аппроксимацию функции распределения $B(x)$ функцией

$$R(x) = q(1 - e^{-\mu_1 x}) + (1 - q)(1 - e^{-\mu_2 x}), \quad (54)$$

которая формально совпадает с гиперэкспоненциальным распределением (52), однако параметры q , μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ не имеют ограничений на параметры гиперэкспоненциального распределения, то есть могут принимать достаточно произвольные значения. Например, возможны ситуации, когда параметр q принимает значения большие единицы, а параметры μ_1 и μ_2 могут быть комплексными, что будет отражено в численных примерах.

Метод R -аппроксимации будем считать неприемлемым, в том случае, когда параметры μ_1 и μ_2 принимают значения с отрицательными действительными частями.

Значения параметров q , μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ найдем методом моментов. Для этого приравняем первые три начальных момента a_1 , a_2 , a_3 функции распределения $B(x)$ к соответствующим интегральным характеристикам функции $R(x)$.

Получим систему, состоящую из трех нелинейных уравнений относительно неизвестных q , μ_1 и μ_2

$$\begin{cases} \frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2} = a_1, \\ \frac{q}{\mu_1^2} + \frac{1-q}{\mu_2^2} = \frac{a_2}{2}, \\ \frac{q}{\mu_1^3} + \frac{1-q}{\mu_2^3} = \frac{a_3}{6}. \end{cases} \quad (55)$$

Введем следующие обозначения

$$\mu_1 = 1/x, \quad \mu_2 = 1/y, \quad (56)$$

тогда систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} qx + (1-q)y = a_1, \\ qx^2 + (1-q)y^2 = \frac{a_2}{2}, \\ qx^3 + (1-q)y^3 = \frac{a_3}{6}. \end{cases} \quad (57)$$

Из первого уравнения системы имеем

$$q = \frac{a_1 - y}{x - y}, \quad 1 - q = \frac{x - a_1}{x - y}. \quad (58)$$

Подставляя полученные выражения во второе и третье уравнения системы (57), получим систему двух уравнений относительно неизвестных x и y

$$\begin{cases} a_1(x + y) - xy = \frac{a_2}{2}, \\ a_1(x^2 + xy + y^2) - xy(x + y) = \frac{a_3}{6}. \end{cases} \quad (59)$$

Введя обозначения $u = x + y$, $v = xy$, получим систему уравнений относительно неизвестных u и v

$$\begin{cases} a_1u - v = \frac{a_2}{2}, \\ a_1(u^2 - v) - uv = \frac{a_3}{6}, \end{cases}$$

решение u и v которой можно представить следующим образом

$$u = \frac{3a_1a_2 - a_3}{3(2a_1^2 - a_2)}, \quad v = \frac{3a_2^2 - 2a_1a_3}{6(2a_1^2 - a_2)}. \quad (60)$$

Решая систему (59) для неизвестных x и y , получим

$$x = \frac{1}{2} \left\{ u + \sqrt{u^2 - 4v} \right\}, \quad y = \frac{1}{2} \left\{ u - \sqrt{u^2 - 4v} \right\}, \quad (61)$$

а значения параметра q определяются из (58).

В зависимости от того, какие значения принимают полученные параметры q , μ_1 и μ_2 возможны следующие приемлемые варианты функции $R(x)$, при которых метод неявной аппроксимации может быть применен:

1) $R(x)$ – гиперэкспоненциальная функция распределения;

2) $R(x)$ – функция распределения, не являющаяся гиперэкспоненциальной;

3) $R(x)$ не является функцией распределения, но ее применение допустимо, так как позволяет найти аппроксимацию распределения $P(s)$, обладающую допустимой погрешностью, которая устанавливается имитационным моделированием;

и один неприемлемый, когда функция $R(x)$ неограниченна.

В следующем параграфе диссертации будут рассмотрены вопросы о свойствах функции $P_R(x)$ и качестве аппроксимации решения $P(s)$ уравнения (45).

2.3 Численные примеры применения метода R -аппроксимации

Рассмотрим гамма-распределение $B(x)$ объемов потребления с параметрами формы α и масштаба β . Далее реализуем этапы неявной аппроксимации, в первую очередь, построив R -аппроксимацию функции распределения $B(x)$ по первым трем моментам.

Первые три начальных момента гамма-распределения $B(x)$ имеют следующий вид

$$a_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad a_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2}, \quad a_3 = \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{\beta^3}.$$

Исходя из записанных моментов и выражений (58) и (61), запишем параметры аппроксимирующей функции $R(x)$ имеют вид

$$q = \frac{a_1 - y}{x - y}, \quad \mu_1 = 1/x, \quad \mu_2 = 1/y,$$

где

$$x = \frac{1}{2} \left\{ u + \sqrt{u^2 - 4v} \right\}, \quad y = \frac{1}{2} \left\{ u - \sqrt{u^2 - 4v} \right\},$$

$$u = \frac{3a_1 a_2 - a_3}{3(2a_1^2 - a_2)}, \quad v = \frac{3a_2^2 - 2a_1 a_3}{6(2a_1^2 - a_2)}.$$

Подставляя выражения для трех начальных моментов гамма-распределения в выражения для параметров u и v , получим

$$u = \frac{3\alpha^2(\alpha+1)/\beta^3 - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)/\beta^3}{3(2\alpha^2/\beta^2 - \alpha(\alpha+1)/\beta^2)} = (\alpha+1) \frac{3\alpha - (\alpha+2)}{3\beta(2\alpha - (\alpha+1))} =$$

$$= (\alpha+1) \frac{2\alpha - 2}{3\beta(\alpha - 1)} = \frac{2(\alpha+1)}{3\beta},$$

$$v = \frac{3\alpha^2(\alpha+1)^2/\beta^4 - 2\alpha^2(\alpha+1)(\alpha+2)/\beta^4}{6(2\alpha^2/\beta^2 - \alpha(\alpha+1)/\beta^2)} = \alpha(\alpha+1) \frac{\alpha - 1}{6\beta^2(\alpha - 1)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{6\beta^2}.$$

Для удобства будем полагать, что $\alpha = \beta$, тогда среднее значение функции $B(x)$ будет равно единице, тогда

$$u = \frac{2(\alpha+1)}{3\alpha}, \quad v = \frac{\alpha+1}{6\alpha}.$$

Осуществим подстановку полученных равенств в выражения для параметров x и y

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} + \sqrt{\left(\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} \right)^2 - 4 \left(\frac{\alpha+1}{6\alpha} \right)^2} \right),$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} - \sqrt{\left(\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} \right)^2 - 4 \left(\frac{\alpha+1}{6\alpha} \right)^2} \right).$$

Рассмотрим выражение, находящееся под знаком корня

$$\sqrt{\left(\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} \right)^2 - 4 \frac{\alpha+1}{6\alpha}} = \sqrt{\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} \left(\frac{2(\alpha+1)}{3\alpha} - 1 \right)} = \frac{1}{3\alpha} \sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)},$$

Тогда

$$x = \frac{1}{6\alpha} \left(2(\alpha+1) + \sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)} \right), \quad y = \frac{1}{6\alpha} \left(2(\alpha+1) - \sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)} \right).$$

Используя полученные равенства, запишем выражения определяющие параметры μ_1 и μ_2

$$\mu_1 = \frac{1}{x} = \frac{6\alpha}{2(\alpha+1) + \sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{y} = \frac{6\alpha}{2(\alpha+1) - \sqrt{2(\alpha+1)(2-\alpha)}},$$

$$q = \frac{a_1 - y}{x - y} = \frac{1 - 1/6\alpha \left(2(\alpha + 1) - \sqrt{2(\alpha + 1)(2 - \alpha)} \right)}{1/3\alpha \sqrt{2(\alpha + 1)(2 - \alpha)}}?$$

Окончательно имеем

$$q = \frac{1}{2} + \frac{2\alpha - 1}{D}, \quad \mu_1 = \frac{6\alpha}{2(\alpha + 1) + D}, \quad \mu_2 = \frac{6\alpha}{2(\alpha + 1) - D}, \quad (62)$$

где $D = \sqrt{2(\alpha + 1)(2 - \alpha)}$.

Далее рассмотрим возможные значения параметра формы α .

Несложно показать, что при $0 < \alpha < 1$ величина $D > 0$, следовательно параметры q , μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ действительные и положительные и $0 < q < 1$, то есть удовлетворяют всем требованиям на параметры гиперэкспоненциального распределения.

При $1 < \alpha < 2$ величина $D > 0$, а все параметры q , μ_1 и μ_2 функции $R(x)$ действительные и положительные, однако параметр q принимает значения большие единицы, но, несмотря на это, $R(x)$ остается функцией распределения (не гиперэкспоненциальной).

При $\alpha > 2$ величина D является комплексным числом, как и параметры q , μ_1 и μ_2 . Однако в силу того, что μ_1 и μ_2 , q и $1 - q$ являются комплексно сопряженными, то функция $R(x)$ принимает действительные значения, хотя и не является функцией распределения, так как ее производная в окрестности точки $x = 0$ принимает отрицательные значения. Тем не менее, применение аппроксимации вполне приемлемо для исследования рассматриваемой модели управления запасами, что будет показано ниже в численных примерах в таблице 1.

Построим R -аппроксимацию функции распределения $B(x)$ и неявную аппроксимацию функции $P(s)$ при различных значениях параметра формы α , а также воспользуемся расстоянием Колмогорова Δ_R для оценки качества R -аппроксимации функции распределения $B(x)$ и Δ для оценки качества неявной аппроксимации распределения $F_R(x)$ стационарной функции распределения значений объема накопленных ресурсов в системе управления запасов, полученной на основе R -аппроксимации

$$\Delta_R = \sup_{-\infty < x < \infty} |B(x) - R(x)|,$$

$$\Delta = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_R(x)|,$$

где $F(x)$ – эмпирическая функция распределения того же объема, полученная на основе имитационного моделирования при следующих значениях параметров $S = 10$, $\nu = 1$, $\lambda_1 = 0,8$ и $\lambda_2 = 1,2$.

Результаты исследования представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Неявная аппроксимация при гамма-распределении объемов потребления

α	R-аппроксимация				Неявная аппроксимация			
	q	μ_1	μ_2	Δ_R	z_1	z_2	γ	Δ
0,2	0,220	0,268	3,732	0,245	3,136	0,064	-0,070	0,014
0,4	0,406	0,488	3,512	0,112	3,089	0,111	-0,118	0,002
0,6	0,594	0,677	3,323	0,049	3,053	0,147	-0,152	0,005
0,8	0,789	0,845	3,155	0,016	3,024	0,176	-0,179	0,003
1	1,000	1,000	3,000	0	3,000	0,200	-0,200	0,007
1,2	1,246	1,147	2,853	0,007	2,980	0,220	-0,217	0,006
1,4	1,561	1,293	2,707	0,009	2,964	0,236	-0,231	0,002
1,6	2,025	1,445	2,555	0,008	2,950	0,250	-0,243	0,005
1,8	2,957	1,622	2,378	0,004	2,937	0,263	-0,253	0,004
2	3873	2,000	2,000	0	2,927	0,273	-0,261	0,004
3	0,5-1,768i	2-0,707i	2+0,707i	0,025	2,888	0,312	-0,291	0,009
5	0,5-1,5i	2-i	2+i	0,060	2,849	0,351	-0,320	0,006
10	0,5-1,432i	2-1,206i	2+1,206i	0,139	2,812	0,388	-0,347	0,001
50	0,5-1,415i	2-1,372i	2+1,372i	0,329	2,776	0,424	-0,371	0,004

Здесь z_1, z_2, γ – параметры функции $P(s)$ из (53).

Несмотря на то, что R -аппроксимация функции распределения $B(x)$ объемов потребления дает во многих случаях неприемлемый результат ($\Delta_R > 0,05$), неявная аппроксимация решения $P(s)$ интегро-дифференциального уравнения (45) при $s < S$ обеспечивает высокую точность $\Delta < 0,02$.

На рисунке 11 представлено сравнение эмпирической функции распределения $F(x)$ и аппроксимирующей функции $F_R(x)$ при гамма-распределении объемов потребления с параметром формы $\alpha = 1,5$.

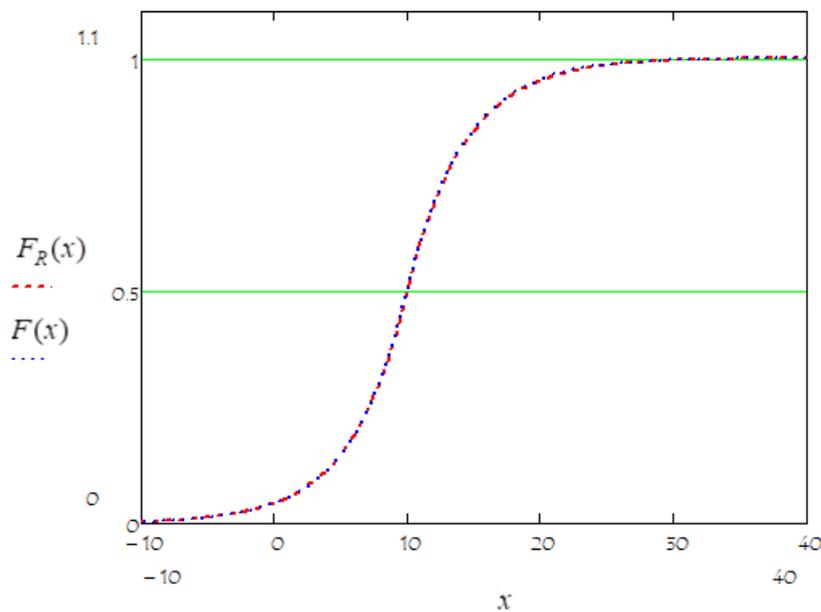


Рисунок 11 – Сравнение эмпирической функции распределения $F(x)$ и аппроксимирующей функции $F_R(x)$ при гамма-распределении объемов потребления с параметром формы $\alpha = 1,5$

Исходя из представленных результатов, важно отметить, что применение метода неявной аппроксимации для исследования рассматриваемой модели системы управления запасами целесообразно и в случае, когда $R(x)$ достаточно точно аппроксимирует функцию распределения $B(x)$ (в частности при $0,6 < \alpha < 5$), и в других случаях $0 < \alpha < 0,6$ и $\alpha > 5$, когда аппроксимация $R(x)$ функции $B(x)$ имеет погрешность $\Delta_R > 0,1$, а точность аппроксимации $F_R(x)$ окончательного распределения высокая, а именно $\Delta < 0,015$.

Отметим, что при $\alpha < 2$ функция $P(x)$, является плотностью распределения и применение неявной аппроксимации обоснованно, что вполне естественно, так как $R(x)$ в этом случае является функцией распределения, а при $\alpha > 2$ функция $R(x)$, аппроксимирующая $B(x)$, распределением не является, но ввиду того, что точность неявной аппроксимации высокая, ее аппроксимации допустимо.

Аналогичное исследование было проведено для случая, когда $B(x)$ является наиболее неудобным для аппроксимации логнормальным распределением с логарифмическими средним и дисперсией μ и σ^2 . Для того, чтобы среднее значение было равно единице положим $\mu = -\sigma^2/2$. Результаты применения метода неявной аппроксимации приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Неявная аппроксимация при логнормального распределенных объемах потребления

e^{σ^2}	R -аппроксимация				Неявная аппроксимация			
	q	μ_1	μ_2	Δ_R	z_1	z_2	γ	Δ
1,1	0,5- 1,476i	2-1,2i	2+1,2i	0,151	2,881	0,387	-0,347	0,003
1,2	0,5- 1,826i	2,17- 0,928i	2,17 +0,928i	0,080	3,184	0,349	-0,322	0,002
1,3	5,555	2,154	2,885	0,065	3,922	0,317	-0,300	0,002
1,4	1,773	1,567	5,862	0,086	6,339	0,290	-0,282	0,003
1,42	1,645	1,509	7,150	0,099	7,574	0,285	-0,279	0,001
1,44	1,543	1,457	9,265	0,119	9,642	0,28	-0,276	0,003
1,46	1,46	1,412	13,548	0,148	13,794	0,275	-0,273	0,005
1,48	1,391	1,371	25,981	0,184	26,280	0,271	-0,27	0,003
1,49	1,361	1,352	50,991	0,187	51,273	0,269	-0,268	0,003
1,5	1,333	1,333	$1,287 \cdot 10^{15}$	0,167	$1,287 \cdot 10^{15}$	0,250	-0,250	-
1,51	1,308	1,316	-48,991	∞	0,265	-48,74	-48,61	-
1,52	1,284	1,299	-23,984	∞	0,262	-23,75	-23,62	-

Продолжение таблицы 2

e^{σ^2}	R -аппроксимация				Неявная аппроксимация			
	q	μ_1	μ_2	Δ_R	z_1	z_2	γ	Δ
1,54	1,242	1,268	-11,470	∞	0,258	-11,26	-11,14	-
1,56	1,205	1,240	-7,921	∞	0,254	-7,106	-6,993	-
1,58	1,173	1,214	-5,198	∞	0,251	-5,035	-4,928	-
1,6	1,146	1,190	-3,940	∞	0,247	-3,797	-3,696	-
1,7	1,054	1,097	-1,420	∞	0,230	-1,354	-1,280	-
1,8	1,014	1,039	-0,594	$7,8 \cdot 10^5$	0,216	-0,572	-0,517	-
1,9	1,001	1,009	-0,206	0,705	0,205	-0,203	-0,20- 0,046i	-
1,92	1,001	1,005	-0,154	0,126	0,204	-0,152	-0,17- 0,024i	-
1,94	1	1,003	-0,108	0,124	0,202	-0,108	-0,193	-
1,96	1	1,001	-0,068	0,121	0,201	-0,068	-0,198	-
1,98	1	1	-0,032	0,119	0,200	-0,032	-0,2	-
2,0	1	1	0	0,117	0,200	0	-0,2	0,009
2,1	0,001	0,113	1,006	0,107	0,212	0,107	-0,196	0,013
2,2	0,004	0,173	1,021	0,010	0,257	0,138	-0,191	0,006
2,3	0,010	0,204	1,040	0,091	0,305	0,139	-0,185	0,008
2,4	0,015	0,219	1,059	0,083	0,343	0,135	-0,180	0,005
2,6	0,024	0,221	1,093	0,071	0,391	0,124	-0,17	0,006
3	0,029	0,195	1,138	0,058	0,430	0,103	-0,154	0,005

На рисунке 12 представлены результаты сравнения эмпирической функции распределения $F(x)$ и аппроксимирующей функции $F_R(x)$ при логнормальном распределении объемов потребления с параметром $e^{\sigma^2} = 1,4$.

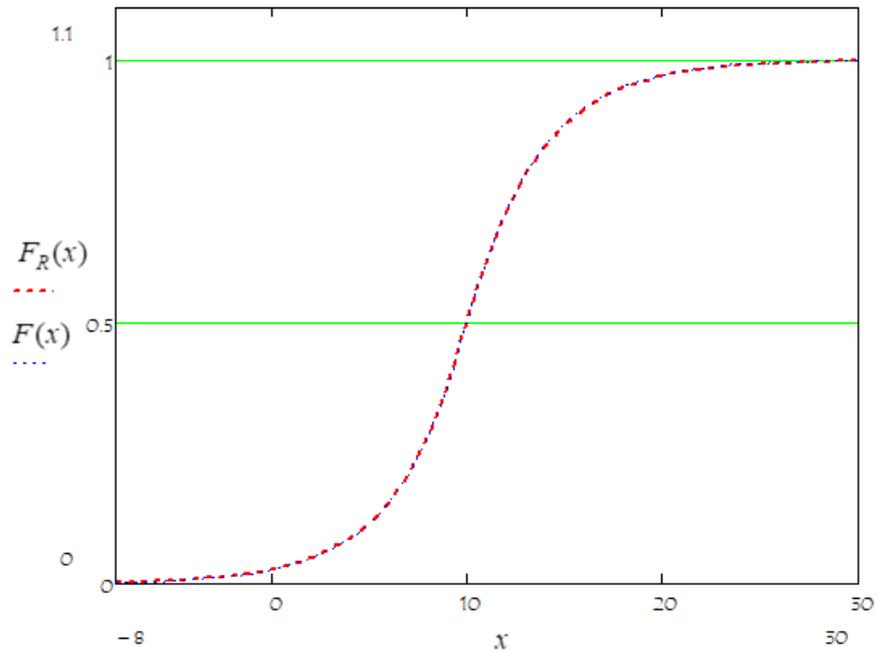


Рисунок 12 – Сравнение эмпирической функции распределения $F(x)$ и аппроксимирующей функции $F_R(x)$ при логнормальном распределении объемов потребления с параметром $e^{\sigma^2} = 1,4$

Результаты, представленные в таблице 2 свидетельствуют о том, что при $1.5 \leq \exp(\sigma^2) < 2$ применение неявной недопустимо, поскольку параметр μ_2 в этом случае принимает отрицательные значения и функция $R(x)$ не ограничена. В прочих случаях неявная аппроксимация функции $P(s)$ является допустимой, несмотря на то, что погрешность R -аппроксимации функции $B(x)$ объемов потребления достаточно велика (при $\exp(\sigma^2) = 1.1$ или $\exp(\sigma^2) > 2$), поскольку имитационное моделирование показало, что неявная аппроксимация стационарной функции распределения вероятностей значений объема запасов достаточно точно ($\Delta < 0.01$) описывает реальный процесс.

2.4 Метод явной аппроксимации

Поскольку частичное решение $P(s)$ при $s > S$ уравнения (45) определено полностью и имеет вид (49), то неизвестную функцию $P_I(x)$ при $x \leq 0$, которая

является частичным решением уравнения (45) при $s \leq S$, будем искать с помощью метода явной аппроксимации, основанного на методе моментов.

2.4.1 Моменты функции $P_1(x)$

Для того, чтобы найти моменты функции $P_1(x)$, домножим тождество (45) на $(s - S)^k$ и проинтегрируем полученное выражение

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (s - S)^k P'(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} (s - S)^k \lambda(s) P(s) ds = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (s - S)^k \int_0^{\infty} \lambda(s + x) P(s + x) dB(x) ds. \end{aligned} \quad (63)$$

Рассмотрим правую часть полученного выражения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (s - S)^k \int_0^{\infty} \lambda(s + x) P(s + x) dB(x) ds &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (s - S)^k \lambda(s + x) P(s + x) ds dB(x) = \\ &= [s + x = y] = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x - S)^k \lambda(y) P(y) dy dB(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (y - x - S)^k dB(x) \lambda(y) P(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - S)^n \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^k C_k^n (-x)^{k-n} dB(x) \lambda(y) P(y) dy = \\ &= \sum_{n=0}^k C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \int_{-\infty}^{\infty} (y - S)^n \lambda(y) P(y) dy = \\ &= \sum_{n=0}^k C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \left\{ \lambda_1 \int_{-\infty}^S (y - S)^n P_1(y - S) dy + \lambda_2 \int_S^{\infty} (y - S)^n C e^{-\gamma(y-S)} dy \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^k C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \left\{ \lambda_1 \int_{-\infty}^0 x^n P_1(x) dx + \lambda_2 \int_0^{\infty} x^n C e^{-\gamma x} dx \right\}, \end{aligned}$$

тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s - S)^k \int_0^{\infty} \lambda(s + x) P(s + x) dB(x) ds = \quad (64)$$

$$= \sum_{n=0}^k C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_1 a_n + \sum_{n=0}^k C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}},$$

где $a_n = \int_{-\infty}^0 x^n P_1(x) dx$ и $b_n = \int_0^{\infty} x^n dB(x)$ моменты n -го порядка функции $P_1(x)$ и

$B(x)$ соответственно.

Далее приступим к рассмотрению левой части равенства (63)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (s-S)^k P'(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} (s-S)^k \lambda(s) P(s) ds = \\ & = (s-S)^k P(s) \Big|_{-\infty}^{\infty} - k \int_{-\infty}^{\infty} (s-S)^{k-1} P(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} (s-S)^k \lambda(s) P(s) ds = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (s-S)^k \lambda(s) - k(s-S)^{k-1} \right\} P(s) ds = \\ & = \int_{-\infty}^S \left\{ (s-S)^k \lambda_1 - k(s-S)^{k-1} \right\} P_1(s-S) ds + \\ & + \int_S^{\infty} \left\{ (s-S)^k \lambda_2 - k(s-S)^{k-1} \right\} C e^{-\gamma(s-S)} ds = \\ & = \int_{-\infty}^0 \left\{ x^k \lambda_1 - kx^{k-1} \right\} P_1(x) dx + \int_0^{\infty} \left\{ x^k \lambda_2 - kx^{k-1} \right\} C e^{-\gamma x} dx = \\ & = \lambda_1 a_k - k a_{k-1} + \lambda_2 \frac{k!}{\gamma^{k+1}} C - k \frac{(k-1)!}{\gamma^k} C. \end{aligned}$$

Подставим выражение (64) и полученное выражение в (63), получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & \lambda_1 a_k - k a_{k-1} + \lambda_2 \frac{k!}{\gamma^{k+1}} C - k \frac{(k-1)!}{\gamma^k} C = \\ & = \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_1 a_n + \lambda_1 a_k + \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}} + \lambda_2 \frac{k!}{\gamma^{k+1}} C, \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$-k a_{k-1} - k \frac{(k-1)!}{\gamma^k} C = \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_1 a_n + \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}}.$$

Выполним несложные преобразования последнего равенства, тогда

$$\begin{aligned}
ka_{k-1} + \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_1 a_n &= -\frac{k!}{\gamma^k} C - \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}}, \\
ka_{k-1} - kb_1 \lambda_1 a_{k-1} + \sum_{n=0}^{k-2} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_1 a_n &= \\
= -\frac{k!}{\gamma^k} C + kb_1 \lambda_2 C \frac{(k-1)!}{\gamma^k} - \sum_{n=0}^{k-2} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}}, \\
ka_{k-1} (1 - \lambda_1 b_1) &= \frac{k!}{\gamma^k} C (\lambda_2 b_1 - 1) - \\
- \sum_{n=0}^{k-2} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}} - \sum_{n=0}^{k-2} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \lambda_1 a_n, \\
ka_{k-1} (1 - \lambda_1 b_1) &= \frac{k!}{\gamma^k} C (\lambda_2 b_1 - 1) - \sum_{n=0}^{k-2} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \left(\lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}} + \lambda_1 a_n \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, получим моменты

$$a_{k-1} = \frac{(\lambda_2 b_1 - 1) \frac{k!}{\gamma^k} C - \sum_{n=0}^{k-2} C_k^n (-1)^{k-n} b_{k-n} \left(\lambda_2 C \frac{n!}{\gamma^{n+1}} + \lambda_1 a_n \right)}{k(1 - \lambda_1 b_1)}.$$

Так как

$$a_0 = \int_{-\infty}^0 P_1(x) dx = \int_{-\infty}^S P_1(s) ds = R_1,$$

то можно сформулировать теорему о виде моментов функции $P_1(s)$

Теорема 5. Моменты функции $P_1(s)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
a_0 &= R_1 \\
a_k &= \frac{(k+1)! C (\lambda_2 b_1 - 1) - \sum_{n=0}^{k-1} C_{k+1}^n (-1)^{k+1-n} b_{k+1-n} (\lambda_2 C n! \gamma^{k-n} + \gamma^{k+1} \lambda_1 a_n)}{\gamma^{k+1} (k+1) (1 - \lambda_1 b_1)}, \quad (65) \\
k &\geq 1,
\end{aligned}$$

Таким образом, значения всех моментов a_k функции $P_1(x)$ рекуррентно определены.

2.4.2 Явная аппроксимация третьего порядка

При двухфазной гиперэкспоненциальной функции распределения $B(x)$ функция $P_1(x)$ при $x \leq 0$ определяется выражением (53).

Для произвольной функции распределения $B(x)$ функцию $P_1(x)$ будем аппроксимировать функцией вида (53). Значения параметров C_1, C_2, z_1, z_2 аппроксимирующей функции $\bar{P}_1(x)$ будем определять из условия непрерывности

$$C_1 + C_2 = C$$

решения $P(s)$ уравнения (45) в точке $s = S$ и равенства моментов

$$\int_{-\infty}^0 x^k \bar{P}_1(x) dx \quad (\text{при } k = 0, 1, 2),$$

аппроксимирующей функции $\bar{P}_1(x)$ с найденными выше моментами a_0, a_1 и a_2 для функции $P_1(x)$.

Моменты функции (53) при $s < S$ имеют вид

$$\int_{-\infty}^0 x^k (C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}) dx = (-1)^k k! \left(\frac{C_1}{z_1^{k+1}} + \frac{C_2}{z_2^{k+1}} \right),$$

тогда для нахождения значений параметров C_1, C_2, z_1 и z_2 запишем систему четырех уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C, \\ \frac{C_1}{z_1} + \frac{C_2}{z_2} = a_0, \\ \frac{C_1}{z_1^2} + \frac{C_2}{z_2^2} = -a_1, \\ \frac{C_1}{z_1^3} + \frac{C_2}{z_2^3} = a_2. \end{cases} \quad (66)$$

В данной системе, первое уравнение $C_1 + C_2 = C$ определяет условие непрерывности функции $P(s)$. Поскольку $a_0 = R_1$, то второе уравнение $C_1 z_1^{-1} + C_2 z_2^{-1} = a_0$ системы будет являться условием нормировки для аппрок-

симирующей функции $\overline{P}_1(x)$, а, следовательно, и для функции $P(s)$, и лишь два последних уравнения содержат моменты a_1 и a_2 функции $P_1(x)$.

Введем обозначения

$$q = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad 1 - q = \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad x = 1/z_1, \quad y = 1/z_2,$$

И перепишем последние три уравнения системы (82) в виде

$$\begin{cases} qx + (1 - q)y = f_1, \\ qx^2 + (1 - q)y^2 = f_2, \\ qx^3 + (1 - q)y^3 = f_3, \end{cases} \quad (67)$$

где

$$f_1 = a_0 C^{-1}, \quad f_2 = -a_1 C^{-1}, \quad f_3 = a_2 (2C)^{-1}. \quad (68)$$

Введя обозначения

$$u = \frac{f_1 f_2 - f_3}{f_1^2 - f_2}, \quad v = \frac{f_2^2 - f_1 f_3}{f_1^2 - f_2},$$

Получим, что решение x , y и q системы (67) имеет вид

$$x = \frac{1}{2} \left\{ u + \sqrt{u^2 - 4v} \right\}, \quad y = \frac{1}{2} \left\{ u - \sqrt{u^2 - 4v} \right\}, \quad q = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{u - 2b_1}{\sqrt{u^2 - 4v}} \right\}, \quad (69)$$

таким образом, значения параметров C_1 , C_2 , z_1 и z_2 определяются равенствами

$$\begin{aligned} C_1 &= Cq, \quad C_2 = C(1 - q), \\ z_1 &= \frac{1}{x} = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2v}, \quad z_2 = \frac{1}{y} = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2v}. \end{aligned} \quad (70)$$

Следовательно, аппроксимирующую функцию $P(s)$ можно записать в виде

$$P(s) = \begin{cases} \overline{P}_1(s - S), & s \leq S, \\ C e^{-\gamma(s - S)}, & s \geq S, \end{cases} \quad (71)$$

где $\overline{P}_1(x)$ имеет вид $\overline{P}_1(x) = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$, а значения ее параметров C_1 , C_2 , z_1 и z_2 определяются равенствами (70).

Поскольку значения параметров C_1 , C_2 , z_1 и z_2 аппроксимирующей функции $\overline{P}_1(x)$ определяются моментами a_0 , a_1 и a_2 , которые в свою очередь зависят от трех моментов b_1 , b_2 и b_3 функции распределения $B(x)$ в силу (65), то функцию $P(s)$ из (71) будем называть аппроксимацией третьего порядка. Точность такой аппроксимации будет установлена в Главе 4 путем численных экспериментов.

2.4.3 Численные эксперименты применения аппроксимации третьего порядка

Для того, чтобы оценить качество аппроксимации сравним результаты, полученные на основе приближенных формул с точными результатами, полученными для некоторых частных случаев функции $B(x)$.

Положим в качестве распределения $B(x)$ объемов потребления распределение Эрланга n -го порядка. Полагая в теореме 2 $\nu_1 = \nu_2 = 1$, нетрудно показать, что точное решение $P(s)$ уравнения (45) будет иметь вид

$$P(s) = C \begin{cases} \sum_{n=1}^m x_n e^{z_n(s-S)}, & s < S, \\ C e^{-\gamma(s-S)}, & s \geq S, \end{cases}$$

где z_n – ненулевые корни уравнения

$$z + \lambda_1 = \lambda_1 \left(\frac{\mu}{\mu - z} \right)^m,$$

параметры x_n являются компонентами вектора \mathbf{X} – решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} – единичный вектор-столбец, а элементы A_{kn} матрицы \mathbf{A} имеют вид

$$A_{kn} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{\mu - z_n}{\mu + \gamma} \right)^{k-m-1}, \quad k, n = \overline{1, m},$$

нормирующая константа C определяется выражением (51).

Рассмотрим следующий набор параметров

$$S = 40, v = 1, \lambda_1 = 0.8 \text{ и } \lambda_2 = 1.2, \mu = m.$$

Поскольку решение $P(s)$ уравнения (45) при $s > S$ определено в явном виде для произвольной функции распределения $B(x)$, то в качестве результатов приведем сравнение функций распределения, полученных на основе точного решения $F(x)$ и аппроксимации 3-го порядка $F_3(x)$, с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta_3 = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_3(x)|.$$

В таблице 3 отражена точность аппроксимации решения уравнения (45) для распределения Эрланга порядка m .

Таблица 3 – Сравнение точностей явной аппроксимации 3-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов для m -фазного распределения Эрланга

Порядок m	5	6	7	8
Δ_3	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$

Из представленных в таблице данных можно сделать вывод о том, что точность аппроксимации незначительно уменьшается с увеличением числа фаз распределения Эрланга, однако даже при 8-ми фазах точность аппроксимации $\Delta_3 < 0,001$, что свидетельствует о высокой точности аппроксимации.

Далее рассмотрим функции распределения $B(x)$ объемов потребления, для которых точные решения не найдены. В качестве такового рассмотрим гамма-распределение с параметрами формы α и масштаба β , причем $\alpha = \beta$.

Оценку качества аппроксимации будем проводить с помощью имитационного моделирования для набора параметров

$$S = 40, v = 1, \lambda_1 = 0,8 \text{ и } \lambda_2 = 1,2, \alpha = \beta.$$

В таблице 4 представлены результаты сравнения, а именно расстояния Колмогорова между эмпирической функцией распределения, полученной на

основе имитационного моделирования и функцией распределения, полученной путем аппроксимации 3-го порядка.

Таблица 4 – Сравнение точностей явной аппроксимации 3-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов при различных параметрах гамма-распределения объемов потребления

A	0,5	1	2	2,5	3
Δ_3	0,005	0,003	0,008	0,002	0,003

Из представленных данных видно, что аппроксимация обладает высокой точностью $\Delta < 0.01$.

Аналогичное исследование было проведено для логнормального распределения $B(x)$ объемов потребления с параметрами $\mu = -\sigma^2/2$, результаты которого представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Сравнение точностей явной аппроксимации 3-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов для логнормального распределения объемов потребления

$\exp(\sigma^2)$	1,2	1,3	1,49	2,01	2,5	5
Δ_3	0,003	0,035	-	0,110	0,006	0,022

Представленные в таблице 5 результаты свидетельствуют о том, что аппроксимация 3-го порядка недопустима при $\exp(\sigma^2)=1,49$, вследствие отрицательных значений параметров аппроксимирующей функции z_1 или z_2 , поэтому рассмотрим аппроксимацию 4-го порядка.

2.4.4 Явная аппроксимация четвертого порядка

Представим функцию $P_1(x)$ в следующем виде

$$P_1(x) = A_1 z_1 e^{z_1 x} + A_2 z_2 e^{z_2 x}. \quad (72)$$

Для того, чтобы повысить точность аппроксимации, откажемся от условия непрерывности решения уравнения (45). Значения параметров A_1 , A_2 , z_1 и z_2 функции (72) найдем из системы равенств моментов функции (72) найденным выше моментам a_1 , a_2 и a_3 .

Нетрудно показать, что моменты функции (72) имеют вид

$$\int_{-\infty}^0 x^k (A_1 z_1 e^{z_1 x} + A_2 z_2 e^{z_2 x}) dx = (-1)^k k! \left(\frac{A_1}{z_1^k} + \frac{A_2}{z_2^k} \right),$$

Следовательно, для нахождения значений параметров A_1 , A_2 , z_1 и z_2 имеем систему, состоящую из четырех уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = a_0, \\ A_1 z_1^{-1} + A_2 z_2^{-1} = -a_1, \\ A_1 z_1^{-2} + A_2 z_2^{-2} = a_2, \\ A_1 z_1^{-3} + A_2 z_2^{-3} = -a_3. \end{cases} \quad (73)$$

Как было показано выше, первое уравнение системы (73), является условием нормировки, в силу равенства $a_0 = R_1$.

Введем обозначения

$$q = \frac{A_1}{A_1 + A_2}, \quad 1 - q = \frac{A_2}{A_1 + A_2}, \quad x = 1/z_1, \quad y = 1/z_2, \quad (74)$$

тогда три последних уравнения системы (73) можем записать в виде системы

$$\begin{cases} qx + (1 - q)y = f_1, \\ qx^2 + (1 - q)y^2 = f_2, \\ qx^3 + (1 - q)y^3 = f_3, \end{cases}$$

совпадающей с (67), однако величины f_1 , f_2 и f_3 определяются следующими равенствами

$$f_1 = -a_1 a_0^{-1}, \quad f_2 = a_2 (2a_0)^{-1}, \quad f_3 = -a_3 (6a_0)^{-1}, \quad (75)$$

отличными от (68), тем не менее, решение системы (73) имеет вид (69). Учитывая (74), аналогично (70) для параметров A_1 , A_2 , z_1 и z_2 функции (72) можем записать

$$A_1 = a_0 q, \quad A_2 = a_0(1 - q), \quad z_1 = x^{-1}, \quad z_2 = y^{-1}.$$

Так как значения параметров A_1, A_2, z_1 и z_2 функции (72) определяются первыми четырьмя моментами b_1, b_2, b_3 и b_4 функции распределения $B(x)$, то предлагаемую аппроксимацию будем называть аппроксимацией четвертого порядка.

Предлагаемая аппроксимация четвертого порядка непрерывного решения $P(s)$ уравнения (45) является разрывной функцией. Несмотря на это, применение аппроксимации обосновано в случаях, когда она обладает более высокой точностью, чем аппроксимация третьего порядка или когда аппроксимация третьего порядка не применима. Аппроксимация третьего порядка не может быть применена при недопустимых значениях параметров аппроксимирующей функции, например, при отрицательных значениях параметров z_1 или z_2 .

2.4.5 Численные эксперименты применения аппроксимации четвертого порядка

Аналогично параграфу 2.5.3 оценим качество аппроксимации четвертого порядка путем сравнения результатов, полученных на основе приближенных формул с точными результатами, полученными для некоторых частных случаев функции $B(x)$.

Рассмотрим в качестве распределения $B(x)$ объемов потребления распределение Эрланга n -го порядка при $\nu_1 = \nu_2 = 1$,

Рассмотрим следующий набор параметров

$$S = 40, \nu = 1, \lambda_1 = 0.8 \text{ и } \lambda_2 = 1.2, \mu = t.$$

Поскольку решение $P(s)$ уравнения (45) определено в явном виде для произвольной функции распределения $B(x)$, то в качестве результатов приведем сравнение функций распределения, полученных на основе точного решения $F(x)$ и аппроксимации 4-го порядка $F_4(x)$ с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta_4 = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_4(x)|.$$

В таблице 6 отражена точность аппроксимации решения уравнения (45) для различных порядков распределения Эрланга.

Таблица 6 – Сравнение точностей явной аппроксимации 4-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов для m -фазного распределения Эрланга

Порядок m	5	6	7	8
Δ_4	0,003	0,003	0,003	0,003

Из представленных в таблице 6 данных можно сделать вывод о том, что точность аппроксимации 3-го порядка выше, чем 4-го, однако даже точность аппроксимации $\Delta < 0,01$, что свидетельствует о высокой точности аппроксимации.

Далее рассмотрим функции распределения $V(x)$ объемов потребления, для которых точные решения не найдены. В качестве такового рассмотрим гамма-распределение с параметрами формы α и масштаба β , причем $\alpha = \beta$.

Для того, чтобы оценить качество аппроксимации в этом случае воспользуемся аппаратом имитационного моделирования.

Рассмотрим следующий набор параметров

$$S = 40, \nu = 1, \lambda_1 = 0.8 \text{ и } \lambda_2 = 1.2, \alpha = \beta.$$

В таблице 7 представлены результаты сравнения, а именно расстояния Колмогорова между эмпирической функцией распределения, полученной на основе имитационного моделирования и функцией распределения, полученной путем аппроксимации 4-го порядка.

Таблица 7 – Сравнение точностей явной аппроксимации 4-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов при различных параметрах гамма-распределения объемов потребления

A	0,5	1	2	2,5	3
Δ_4	0,005	0,003	0,008	0,002	0,003

Из представленных данных видно, что аппроксимации 3-го и 4-го порядков обеспечивают аналогичную точность до третьего знака включительно.

Далее рассмотрим логнормальное распределения $B(x)$ объемов потребления с параметрами $\mu = -\sigma^2/2$. Результаты исследования при указанной функции распределения объемов потребления представлены в таблице 8.

Таблица 8 – Сравнение точностей явной аппроксимации 4-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов при различных параметрах логнормального распределения

$\exp(\sigma^2)$	1,2	1,3	1,49	2,01	2,5	5
Δ_4	0,003	-	0,005	0,004	0,005	0,013

Представленные в таблице 8 результаты говорят о том, что аппроксимация 4-го порядка имеет высокую точность и применима в случае $\exp(\sigma^2)=1,49$, при котором аппроксимация 3-го порядка не может быть применена.

2.4.6 Явная аппроксимация пятого порядка

Стремление увеличить точность аппроксимации, оправдывает рассмотрение функции $P_1(x)$ в следующем виде

$$P_1(x) = B_1 z_1^2 e^{z_1 x} + B_2 z_2^2 e^{z_2 x}. \quad (76)$$

Отказавшись от условия непрерывности функции $P(s)$, которая является решением уравнения (45), значения параметров B_1 , B_2 , z_1 и z_2 функции (76)

найдем из системы равенств моментов функции (76) определенным выше моментам a_1, a_2, a_3 и a_4 , которые определяются моментами $b_n, n = \overline{1,5}$ функции распределения $B(x)$ до пятого порядка, поэтому предлагаемую аппроксимацию будем называть аппроксимацией пятого порядка.

Так как моменты функции (76) имеют вид

$$\int_{-\infty}^0 x^k \left(B_1 z_1^{-2} e^{z_1 x} + B_2 z_2^{-2} e^{z_2 x} \right) dx = (-1)^k k! \left(\frac{A_1}{z_1^{k-1}} + \frac{A_2}{z_2^{k-1}} \right),$$

то для нахождения значений параметров B_1, B_2, z_1 и z_2 имеем систему, уравнений

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = -a_1, \\ 2B_1 z_1^{-1} + 2B_2 z_2^{-1} = a_2, \\ 3!B_1 z_1^{-2} + 3!B_2 z_2^{-2} = -a_3, \\ 4!B_1 z_1^{-3} + 4!B_2 z_2^{-3} = a_4. \end{cases} \quad (77)$$

Обозначим

$$q = \frac{B_1}{B_1 + B_2}, \quad 1 - q = \frac{B_2}{B_1 + B_2}, \quad x = 1/z_1, \quad y = 1/z_2, \quad (78)$$

Тогда систему (77) перепишем в виде (67), где величины f_1, f_2 и f_3 определяются следующими равенствами

$$f_1 = a_2(2a_1)^{-1}, \quad f_2 = -a_3(6a_1)^{-1}, \quad f_3 = -a_4(24a_1)^{-1}, \quad (79)$$

отличными от (67), тем не менее, решение системы (73) имеет вид (69).

Тогда в силу (78), аналогично (70)

$$B_1 = -a_1 q, \quad B_2 = -a_1(1 - q), \quad z_1 = x^{-1}, \quad z_2 = y^{-1},$$

где x, y, q определяются равенствами (69), в которых f_1, f_2 и f_3 взяты из (79)

Так как решение $P(s)$ уравнения (45) является плотностью распределения вероятностей значений объема накопленных ресурсов то найденную аппроксимацию пятого порядка

$$P(s) = \begin{cases} P_1(s - S), & s \leq S, \\ C e^{-\gamma(s-S)}, & s \geq S, \end{cases} \quad (80)$$

необходимо нормировать, то есть найти значение

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} P(s)ds \quad (81)$$

и поделить функцию (80) на (81), при этом будет нарушено равенство моментов функции $P_I(x)$. Тем не менее, указанную процедуру необходимо исполнить для сохранения вероятностного смысла функции $P(s)$.

2.4.7 Численные эксперименты применения аппроксимации пятого порядка

Аналогично параграфу 2.5.3 для оценки качества аппроксимации сравним результаты, полученные на основе приближенных формул с точными результатами, полученными для некоторых частных случаев функции $B(x)$.

Рассмотрим в качестве распределения $B(x)$ объемов потребления распределение Эрланга n -го порядка при $\nu_1 = \nu_2 = 1$,

Рассмотрим следующий набор параметров

$$S = 40, \nu = 1, \lambda_1 = 0.8 \text{ и } \lambda_2 = 1.2, \mu = m.$$

Поскольку решение $P(s)$ уравнения (45) определено в явном виде для произвольной функции распределения $B(x)$, то в качестве результатов приведем сравнение функций распределения, полученных на основе точного решения $F(x)$ и аппроксимации 4-го порядка $F_3(x)$ с помощью расстояния Колмогорова

$$\Delta_4 = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_4(x)|.$$

В таблице 9 отражена точность аппроксимации решения уравнения (45) для различных порядков распределения Эрланга.

Таблица 9 – Сравнение точностей явной аппроксимации 5-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов для m -фазного распределения Эрланга объемов потребления

Порядок m	5	6	7	8
Δ_5	0,003	0,004	0,004	0,005

Из представленных в таблице данных можно сделать вывод о том, что для распределения Эрланга аппроксимация 5-го порядка, как и 4-го, обеспечивают высокую точность.

Далее рассмотрим функции распределения $B(x)$ объемов потребления, для которых точные решения не найдены. В качестве такового рассмотрим гамма-распределение с параметрами формы α и масштаба β , причем $\alpha = \beta$.

Оценку качества аппроксимации будем проводить с помощью имитационного моделирования для набора параметров

$$S = 40, v = 1, \lambda_1 = 0,8 \text{ и } \lambda_2 = 1,2, \alpha = \beta.$$

В таблице 10 представлены результаты сравнения, а именно расстояния Колмогорова между эмпирической функцией распределения, полученной на основе имитационного моделирования и функцией распределения, полученной путем аппроксимации 5-го порядка.

Таблица 10 – Сравнение точностей явной аппроксимации 5-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов при различных параметрах гамма-распределения объемов потребления

α	0,5	1	2	2,5	3
Δ_5	0,004	0,003	0,003	0,003	0,003

Из представленных данных видно, что аппроксимация 5-го порядка имеет лучший результат, по сравнению с аппроксимациями 3-го и 4-го порядков.

Аналогичное исследование было проведено для логнормального распределения $B(x)$ объемов потребления с параметрами $\mu = -\sigma^2/2$, результаты которого представлены в таблице 11.

Таблица 11 – Сравнение точностей явной аппроксимации 5-го порядка распределения $P(s)$ вероятностей значений объемов накопленных запасов при различных распределениях параметров логнормального распределения объемов потребления

$\text{Exp}(\sigma^2)$	1,2	1,3	1,49	2,01	2,5	5
Δ_5	-	-	0,004	0,005	0,005	0,010

Представленные в таблице 11 результаты свидетельствуют о высокой точности аппроксимации.

2.5 Выводы по Главе 2

Таким образом, во второй главе рассмотрен частный случай математической модели, описанной в первой главе при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. В связи с тем, что найти решение интегро-дифференциального уравнения (45) при произвольной функции распределения $B(x)$ затруднительно, в данной главе предлагаются методы аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения (45).

В параграфе 2.3 данной главы описывается оригинальный метод неявной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения (45), основанный на R -аппроксимации функции распределения $B(x)$. Несмотря на невысокую точность R -аппроксимации функции распределения $B(x)$, неявная аппроксимация решения интегро-дифференциального уравнения (45) обеспечивает высокую точность.

В параграфе 2.5 изложен метод явной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения (45) третьего, четвертого и пятого порядков.

Аппроксимация третьего порядка имеет высокую точность, как это показано в численных примерах.

Предлагаемые аппроксимации четвертого и пятого порядков непрерывного решения $P(s)$ уравнения (45) являются разрывными функциями, однако их применение является обоснованным, в силу того, что когда одна из трех аппроксимаций не применима, другая позволяет получить аппроксимацию высокой точности.

Результаты данной главы опубликованы в работах [2, 27, 28, 33].

Глава 3 Метод преобразования Фурье для решения интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

В главе 1 найдено стационарное распределение вероятностей $P(s)$ значений уровня запасов, накопленных в системе, при различных фазовых распределениях $B(x)$ объемов потребления. Поскольку нахождение стационарного распределения $P(s)$ при произвольном распределении $B(x)$ объемов потребления задача затруднительная, то рассмотрим частный случай системы управления запасами, описанной в главе 1.

3.1 Случай произвольного распределения объемов потребления

Рассмотрим математическую модель, описанную в главе 1. В связи с тем, что основное уравнение (4) для стационарной плотности распределения $P(s)$ вероятностей значений уровня запасов, накопленных в системе, является интегро-дифференциальным с кусочно-постоянными коэффициентами, то найти его решение в явном виде при произвольной функции распределения $B(x)$ затруднительно. Однако, в силу того, что частичное решение $P_2(s)$ при $s > S$ уравнения (48) известно в полной мере, то воспользуемся методом преобразования Фурье для определения частичного решения $P_1(s)$ при $s < S$ основного интегро-дифференциального уравнения (4).

Сформулируем теорему о решении $P(s)$ основного уравнения (48) при произвольной функции $B(x)$.

Теорема 6. Решение уравнения (4) при произвольном распределении объемов потребления имеет вид

$$P(s) = \gamma \frac{1 - \lambda_1 b}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jus} \frac{1}{ju - \gamma} \frac{juv_2 - \lambda_2 + \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{jux} dB(x)}{juv_1 - \lambda_1 + \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{jux} dB(x)} du, & s < S, \\ e^{-\gamma(s-S)}, & s \geq S. \end{cases}$$

Доказательство.

Для доказательства рассмотрим уравнение (4), домножив его на $e^{ju(s-S)}$, затем проинтегрировав полученное равенство, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(s) e^{ju(s-S)} P'(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(s-S)} \lambda(s) P(s) ds = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(s-S)} \int_0^{\infty} \lambda(s+x) P(s+x) dB(x) ds. \end{aligned} \quad (82)$$

Далее преобразуем правую часть уравнения (82)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(s-S)} \int_0^{\infty} \lambda(s+x) P(s+x) dB(x) ds &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(s-S)} \lambda(s+x) P(s+x) ds dB(x) \\ &= [s+x=y] \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(y-x-S)} \lambda(y) P(y) dy dB(x) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{ju(x-S)} dB(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{juy} \lambda(y) P(y) dy. \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших преобразований разобьем функцию $P(s)$ на две функции следующего вида

$$P_1(s) = \begin{cases} P(s), & s < S, \\ 0, & s > S, \end{cases} \quad P_2(s) = \begin{cases} 0, & s < S, \\ P(s), & s > S. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(s-S)} \int_0^{\infty} \lambda(s+x) P(s+x) dB(x) ds = \\ = \int_0^{\infty} e^{ju(x-S)} dB(x) \left(\lambda_1 \int_{-\infty}^S e^{juy} P_1(y) dy + \lambda_2 \int_S^{\infty} e^{juy} P_2(y) dy \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения для преобразования Фурье функций $P_1(s)$ и $P_2(s)$

$$P_1^*(u) = \int_S^\infty e^{juy} P_1(y) dy, P_2^*(u) = \int_S^\infty e^{juy} P_2(y) dy.$$

Преобразуем интеграл в правой части уравнения (82)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ju(s-S)} \int_0^\infty \lambda(s+x) P(s+x) dB(x) ds = e^{-juS} \int_0^\infty e^{jux} dB(x) \left(\lambda_1 P_1^*(u) + \lambda_2 P_2^*(u) \right).$$

Аналогично преобразуем интеграл в левой части уравнения (82)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{ju(s-S)} \lambda(s) P(s) ds &= e^{-juS} \left(\lambda_1 \int_{-\infty}^S e^{juy} P_1(y) dy + \lambda_2 \int_S^\infty e^{juy} P_1(y) dy \right) = \\ &= e^{-juS} \left(\lambda_1 P_1^*(u) + \lambda_2 P_2^*(u) \right) \end{aligned}$$

Используя метод интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty v(s) e^{ju(s-S)} P'(s) ds &= \int_{-\infty}^S v_1 e^{ju(s-S)} P'(s) ds + \int_S^\infty v_2 e^{ju(s-S)} P'(s) ds = \\ &= v_1 e^{ju(s-S)} P(s) \Big|_{-\infty}^S + v_2 e^{ju(s-S)} P(s) \Big|_S^\infty - \\ &\quad - juv_1 \int_{-\infty}^S e^{ju(s-S)} P(s) ds - juv_2 \int_S^\infty e^{ju(s-S)} P(s) ds = \\ &= v_1 e^{ju(s-S)} P(S) - v_2 e^{ju(s-S)} P(S) - jue^{-juS} \left(v_1 P_1^*(u) - v_2 P_2^*(u) \right), \end{aligned}$$

В силу того, что в первой главе доказано, что имеет место равенство

$$v_1 P(S) = v_2 P(S),$$

то

$$\int_{-\infty}^\infty v(s) e^{ju(s-S)} P'(s) ds = -jue^{-juS} \left(v_1 P_1^*(u) - v_2 P_2^*(u) \right)$$

Таким образом, уравнение (82) примет следующий вид

$$\begin{aligned} -jue^{-juS} \left(v_1 P_1^*(u) - v_2 P_2^*(u) \right) + e^{-juS} \left(\lambda_1 P_1^*(u) + \lambda_2 P_2^*(u) \right) &= \\ &= e^{-juS} \int_0^\infty e^{jux} dB(x) \left(\lambda_1 P_1^*(u) + \lambda_2 P_2^*(u) \right). \end{aligned} \tag{83}$$

Выполняя преобразования, получим

$$P_1^*(u) = \frac{j\nu\nu_2 - \lambda_2 \left\{ 1 - \int_0^\infty e^{jux} dB(x) \right\}}{\lambda_1 \left\{ 1 - \int_0^\infty e^{jux} dB(x) \right\} - j\nu\nu_1} P_2^*(u).$$

Принимая во внимание, что функция $P_2(s)$ определена в явном виде для произвольного распределения $B(x)$ объемов потребления, то $P_2^*(u)$ можно определить явно

$$P_2^*(u) = \int_S^\infty e^{juy} P_2(y) dy = C e^{\gamma S} \int_S^\infty e^{(ju-\gamma)y} dy = -\frac{C}{ju-\gamma} e^{juS},$$

тогда

$$P_1^*(u) = \frac{j\nu\nu_2 - \lambda_2 \left\{ 1 - \int_0^\infty e^{jux} dB(x) \right\}}{j\nu\nu_1 - \lambda_1 \left\{ 1 - \int_0^\infty e^{jux} dB(x) \right\}} \frac{C}{ju-\gamma} e^{juS}. \quad (84)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (84) и подставляя выражение (11) для константы C , получим

$$P_1(s) = \gamma \frac{1 - \lambda_1 b}{b(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-jus} \frac{1}{ju-\gamma} \frac{j\nu\nu_2 - \lambda_2 + \lambda_2 \int_0^\infty e^{jux} dB(x)}{j\nu\nu_1 - \lambda_1 + \lambda_1 \int_0^\infty e^{jux} dB(x)} du, s < S.$$

Теорема доказана.

В силу (84) решение основного уравнения (4) может быть найдено для произвольной функции распределения $B(x)$.

Однако, не смотря на то, что решение основного уравнения (4) найдено в явном виде, в большинстве случаев, кроме известных, часто используемых рас-

пределений, интеграл $\int_0^\infty e^{jux} dB(x)$, который имеет смысл характеристической

функции случайных объемов потребления распределенных по закону $B(x)$, можно вычислить только численно, что может требовать больших вычислительных мощностей. В силу того, что мощность персонального компьютера яв-

ляется ограниченной, то применение методов явной и неявной аппроксимаций, описанных в предыдущей главе, является обоснованным.

Рассмотрим некоторые частные случаи функций распределения $B(x)$.

3.2 Случай фазового распределения объемов потребления

Рассмотрим случай фазового распределения $B(x)$ объемов потребления, а именно гиперэкспоненциальное распределение m -го порядка с функцией плотности

$$b(x) = \sum_{n=1}^m b_n \mu_n e^{-\mu_n x},$$

тогда характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{jux} b(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{jux} \sum_{n=1}^m b_n \mu_n e^{-\mu_n x} dx = \\ &= \sum_{n=1}^m b_n \mu_n \int_0^{\infty} e^{(ju - \mu_n)x} dx = \sum_{n=1}^m \frac{b_n \mu_n}{(ju - \mu_n)}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства получим

$$P_1^*(u) = \frac{juv_2 - \lambda_2 + \lambda_2 \sum_{n=1}^m b_n \mu_n / (ju - \mu_n)}{juv_1 - \lambda_1 + \lambda_1 \sum_{n=1}^m b_n \mu_n / (ju - \mu_n)} \frac{C}{ju - \gamma} e^{juS},$$

Следовательно, можно определить частичное решение $P_1(s)$ в явном виде

$$P_1(u) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{juv_2 - \lambda_2 + \lambda_2 \sum_{n=1}^m b_n \mu_n / (ju - \mu_n)}{juv_1 - \lambda_1 + \lambda_1 \sum_{n=1}^m b_n \mu_n / (ju - \mu_n)} \frac{e^{-ju(s-S)}}{ju - \gamma} du.$$

В качестве примера рассмотрим двухфазное гиперэкспоненциальное распределение, тогда

$$\int_0^{\infty} e^{jux} b(x) dx = \frac{b_1 \mu_1}{(ju - \mu_1)} + \frac{b_2 \mu_2}{(ju - \mu_2)}$$

и

$$P_1(u) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\nu v_2 - \lambda_2 + \lambda_2 (b_1 \mu_1 / (ju - \mu_1) + b_2 \mu_2 / (ju - \mu_2)) e^{-ju(s-S)}}{j\nu v_1 - \lambda_1 + \lambda_1 (b_1 \mu_1 / (ju - \mu_1) + b_2 \mu_2 / (ju - \mu_2))} \frac{e^{-ju(s-S)}}{ju - \gamma} du =$$

$$= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(j\nu v_2 - \lambda_2)(ju - \mu_1)(ju - \mu_2) + \lambda_2 (b_1 \mu_1 (ju - \mu_2) + b_2 \mu_2 (ju - \mu_1)) e^{-ju(s-S)}}{(j\nu v_1 - \lambda_1)(ju - \mu_1)(ju - \mu_2) + \lambda_1 (b_1 \mu_1 (ju - \mu_2) + b_2 \mu_2 (ju - \mu_1))} \frac{e^{-ju(s-S)}}{ju - \gamma} du$$

Для следующего набора параметров

$$S = 40, v = 1, \lambda_1 = 0,8 \text{ и } \lambda_2 = 1,2, b_1 = 0,4 \text{ и } b_2 = 0,6, \mu_1 = 0,8 \text{ и } \mu_2 = 1,2$$

найдем распределение вероятностей значений процесса $s(t)$ при двухфазных гиперэкспоненциальных объемах потребления, которое представлено на рисунке 13.

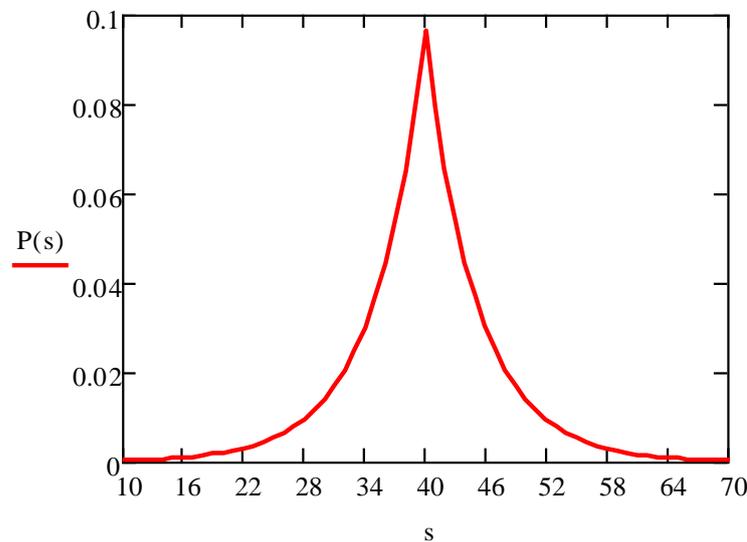


Рисунок 13 – Плотность распределения вероятностей значений процесса $s(t)$, полученная на основе метода преобразования Фурье при двухфазном гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления

3.3 Случай гамма-распределения объемов потребления

Рассмотрим распределение $B(x)$ объемов потребления не являющееся фазовым. В качестве такового возьмем гамма-распределение с параметрами α и β .

Плотность гамма-распределения имеет вид

$$b(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}.$$

Характеристическая функция гамма-распределения определена следующим выражением

$$\int_0^{\infty} e^{jux} b(x) dx = \left(1 - \frac{ju}{\alpha}\right)^{-\beta},$$

тогда частичное решение при гамма-распределенных объемах потребления будет иметь следующий вид

$$P_1^*(u) = \frac{j\nu v_2 - \lambda_2 + \lambda_2 (1 - ju/\alpha)^{-\beta}}{j\nu v_1 - \lambda_1 + \lambda_1 (1 - ju/\alpha)^{-\beta}} \frac{C}{ju - \gamma} e^{juS}.$$

$$P_1(u) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\nu v_2 - \lambda_2 + \lambda_2 (1 - ju/\alpha)^{-\beta}}{j\nu v_1 - \lambda_1 + \lambda_1 (1 - ju/\alpha)^{-\beta}} \frac{e^{-ju(s-S)}}{ju - \gamma} du$$

Рассмотрим численные результаты.

В качестве примера рассмотрим гамма-распределение объемов потребления с параметром масштаба $\alpha = \beta = 3$.

Для следующего набора параметров

$$S = 40, \nu = 1, \lambda_1 = 0,8 \text{ и } \lambda_2 = 1,2$$

Найдем распределение вероятностей значений процесса $s(t)$ при двухфазных гиперэкспоненциальных объемах потребления, которое представлено на рисунке 14.

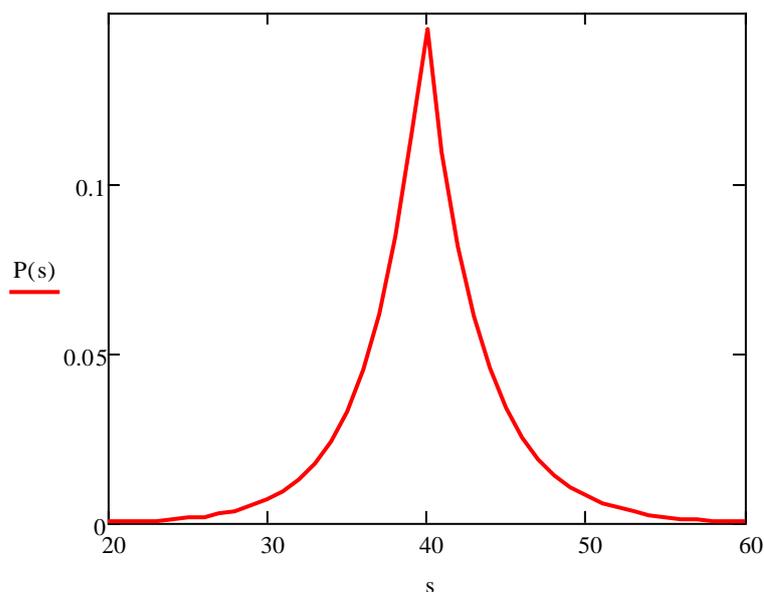


Рисунок 14 – Плотность распределения вероятностей значений процесса $s(t)$, полученная на основе метода преобразования Фурье при гамма-распределении объемов потребления

Таким образом, с помощью модифицированного метода преобразования Фурье численно удастся найти решение интегро-дифференциального уравнения (4) с кусочно-постоянными коэффициентами при гамма-распределении объемов потребления, а также для любого распределения для которого существует характеристическая функция.

3.4 Случай логнормального распределения объемов потребления

Рассмотрим одно из наиболее неудобных распределений – логнормальное распределение $B(x)$ объемов потребления с логарифмическими математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2

$$b(x) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)^2 / 2\right)}{x\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Для данного распределения функцию распределения можно записать только в виде следующего ряда

$$\int_0^{\infty} e^{jux} dB(x) = \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(jux - \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)^2 / 2\right)}{x\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^{-n}}{n!} e^{n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}},$$

что затрудняет получение результатов, однако, данный интеграл вычисляется численно.

Рассмотрим численные результаты.

В качестве примера рассмотрим логнормальное распределение объемов потребления с параметрами $\mu = -\sigma^2/2 = -0,199$.

Для следующего набора параметров

$$S = 40, \nu = 1, \lambda_1 = 0,8 \text{ и } \lambda_2 = 1,2$$

найдем распределение вероятностей значений процесса $s(t)$ при двухфазных гиперэкспоненциальных объемах потребления, которое представлено на рисунке 15.

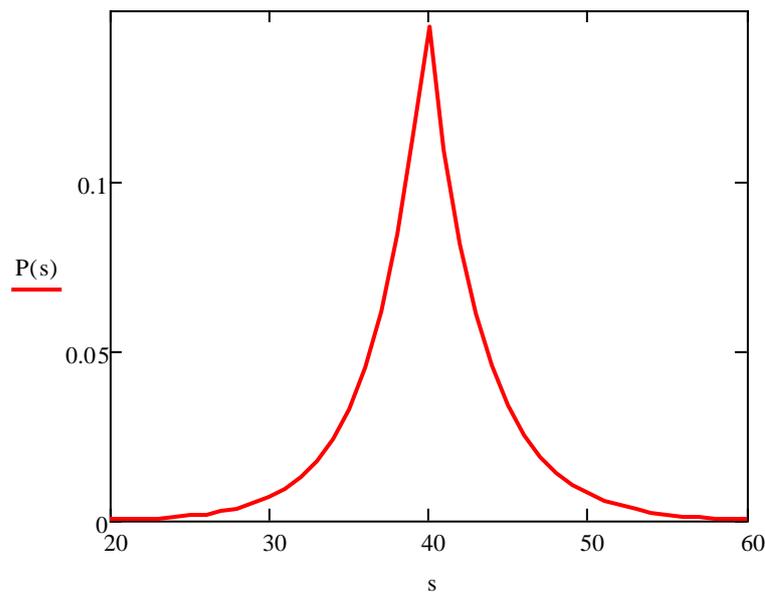


Рисунок 15 – Плотность распределения вероятностей значений процесса $s(t)$, полученная на основе метода преобразования Фурье при логнормальном распределении объемов потребления

Таким образом, численное решение основного уравнения (4) возможно для произвольной функции распределения $B(x)$ объемов потребления.

3.5 Выводы по Главе 3

В данной главе рассматривается математическая модель, описанная в главе 1 в наиболее общем случае, а именно при произвольном распределении $B(x)$ объемов потребления.

В силу того, что частичное решение основного уравнения (4) при $s > S$ найдено в явном виде в главе 1, то применяя предложенный в данной главе модифицированный метод преобразования Фурье к решению интегродифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами удалось найти частичное решение основного уравнения (4) при $s < S$.

Таким образом, численное решение основного уравнения (4) возможно для произвольной функции распределения $B(x)$ объемов потребления.

Однако на основе численных экспериментов было обнаружено, что применение данного метода, несмотря на его универсальность, ограничено, поскольку, частичное решение основного уравнения при $s < S$ записывается как обратное преобразование Фурье от сложной функции, вычисление которого на персональном компьютере возможно только при ограниченном наборе параметров, поэтому в таких случаях оправдано применение методов аппроксимаций, разработанных в главе 2 данной диссертации.

Результаты данной главы опубликованы в работах [29, 30, 87, 90].

Глава 4 Комплекс проблемно-ориентированных программ для исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами и численный анализ результатов

В данной главе приведено описание комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для исследования представленных в диссертации стохастических моделей систем управления запасами с релейным управлением, а также численный анализ полученных результатов. В состав комплекса входят:

1. Программы для численной реализации результатов исследований стохастических моделей систем релейного управления запасами и кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления при фазовых распределениях объемов потреблений, полученных точно.

2. Программы для численной реализации результатов исследований стохастических моделей систем релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при произвольном распределении объемов потреблений, полученных методами аппроксимаций.

3. Программы для численной реализации результатов исследований стохастических моделей систем релейного управления запасами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления при произвольном распределении объемов потреблений, полученных модифицированным методом преобразования Фурье.

4. Программа для имитационного моделирования динамической стохастических моделей систем релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления.

4.1 Программы численной реализации стохастических моделей систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при фазовых распределениях его объемов

4.1.1 Стохастические модели систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при гиперэкспоненциальном распределении его объемов

Данная программа предназначена для численной реализации стохастических моделей систем управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления и гиперэкспоненциальным распределением его объемов (глава 2).

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- число m фаз гиперэкспоненциального распределения, исходя из которого автоматически рассчитываются параметры гиперэкспоненциального распределения b_k и μ_k таким образом, чтобы среднее значение b функции распределения $V(x)$ было равно 1;

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

Ниже в таблицах 12 и 13 приведены элементы программы численной реализации стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянным поступлением, релейным управлением интенсивностью случайного потока потребления и гиперэкспоненциальным распределением его объемов.

Таблица 12 – Задание исходных параметров

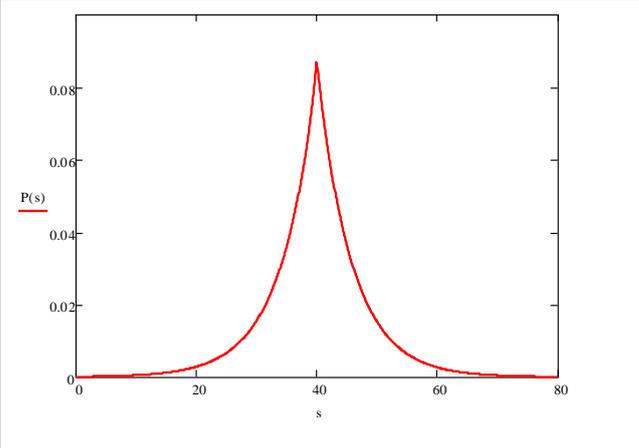
$m := 5$	– число m фаз гиперэкспоненциального распределения;
$\lambda_1 := 0.8$ $\lambda_2 := 1.2$	– интенсивности случайного потока потребления;
$S := 40$	– пороговое значение S ;

По заданным значениям параметров, и рассчитанным значениям b_k и μ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, вычисляются корни γ и z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, уравнений (10) и (19) соответственно, значения константы C и параметров x_k , $k = 1, 2, \dots, m$, определяющих решение $P(s)$ основного уравнения (4). Далее строится график определяющих решения $P(s)$ основного уравнения (4), то есть распределения вероятностей значений объемов накопленных запасов в системе в стационарном режиме.

Таблица 13 – Блок расчета характеристик стационарной плотности распределения вероятностей процесса $s(t)$ при гиперэкспоненциальных объемах потребления

1. Расчет параметров гиперэкспоненциального распределения b_k и μ_k	
$n := m - 1$ $k := 0..n$ $b1_k := \frac{n - k + 1}{k + 1}$ $E_k := 1$ $b := b1 \cdot (b1 \cdot E)^{-1}$ $\mu1_k := k + 1$ $\mu := \mu1 \cdot \left(\sum_{v=0}^n \frac{b_v}{\mu1_v} \right)$	$\mu^T = (0.747 \ 1.494 \ 2.241 \ 2.988 \ 3.735)$ $b^T = (0.575 \ 0.23 \ 0.115 \ 0.057 \ 0.023)$

Продолжение таблицы 13

2. Вычисление корней γ и z_k, $k = 1, 2, \dots, m$	
$f2(x) := \lambda 2 \cdot \sum_{v=0}^n \left(b_v \cdot \frac{\mu_v}{\mu_v + x} \right) + x - \lambda 2$ $\gamma := \text{root}(f2(x), x, 0.01, 1)$ $f1(x) := \lambda 1 \cdot \sum_{v=0}^n \left(b_v \cdot \frac{\mu_v}{\mu_v - x} \right) - x - \lambda 1$ $\varepsilon := 10^{-6}$ $z_k := \text{root}(f1(x), x, \mu_{k-1} + \varepsilon, \mu_k - \varepsilon)$ $z_0 := \text{root}(f1(x), x, \varepsilon, \mu_0 - \varepsilon)$	$\gamma = 0.173$ $z^T = (0.169 \ 1.378 \ 2.18 \ 2.956 \ 3.721)$
3. Вычисление параметров x_k	
$v := 0..n$ $k := 0..n$ $A_{k,v} := \frac{\lambda 1}{\mu_k - z_v}$ $H_k := \frac{\lambda 2}{\mu_k + \gamma}$ $x := A^{-1} \cdot H$	$A = \begin{pmatrix} 1.384 & -1.268 & -0.558 & -0.362 & -0.269 \\ 0.604 & 6.898 & -1.165 & -0.547 & -0.359 \\ 0.386 & 0.927 & 13.225 & -1.119 & -0.54 \\ 0.284 & 0.497 & 0.991 & 25.041 & -1.091 \\ 0.224 & 0.339 & 0.515 & 1.027 & 59.249 \end{pmatrix}$ $H^T = (1.304 \ 0.72 \ 0.497 \ 0.38 \ 0.307)$ $x^T = (0.966 \ 0.021 \ 0.008 \ 0.004 \ 0.001)$
4. Вычисление константы C	
$R1 := \frac{\lambda 2 \cdot 1 - 1}{(\lambda 2 - \lambda 1) \cdot 1}$ $R2 := 1 - R1$ $C := \gamma \cdot R2$	$R2 = 0.5$ $C = 0.087$
4. Функция $P(s)$	
$P1(s) := C \cdot \sum_{k=0}^n \left[x_k \cdot e^{z_k \cdot (s-S)} \right]$ $P2(s) := C \cdot e^{-\gamma \cdot (s-S)}$ $P(s) := \text{if}(s \leq S, P1(s), P2(s))$	

4.1.2 Стохастическая модель системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при эрланговском распределении его объемов

Данная программа предназначена для численной реализации стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при эрланговском распределением его объемов (глава 2).

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- число m фаз эрланговского распределения, исходя из которого автоматически фиксируется параметр $\mu = m$, чтобы среднее значение b функции распределения $B(x)$ было равно 1;

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

Ниже Таблицах 14 и 15 приведены элементы программы численной реализации динамической модели Крамера-Лундберга с постоянным поступлением, релейным управлением интенсивностью случайного потока потребления и распределением Эрланга его объемов.

Таблица 14 – Задание исходных параметров

$m := 5$	– число m фаз распределения Эрланга;
$\lambda_1 := 0.8$ $\lambda_2 := 2$	– интенсивности случайного потока потребления;
$S := 40$	– пороговое значение S ;

По заданным значениям параметров, и рассчитанным значениям b_k и μ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, вычисляются корни γ и z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, уравнений (10) и (26) соответственно, значения константы C и параметров x_k , $k = 1, 2, \dots, m$, определяющих решение $P(s)$ основного уравнения (4). Далее строится график определяющих решения $P(s)$ основного уравнения (4), то есть распределения вероятностей значений объемов накопленных запасов в системе в стационарном режиме.

Таблица 15 – Блок расчета характеристик стационарной плотности распределения вероятностей процесса $s(t)$ при гиперэкспоненциальных объемах потребления

1. Расчет параметра распределения μ	
$\mu := m$	$\mu = 5$
2. Вычисление корней γ и z_k , $k = 1, 2, \dots, m$	
$f2(x) := \lambda 2 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu + x} \right)^m + x - \lambda 2$ $\gamma := \text{root}(f2(x), x, 1, 2)$ $f1(x) := \lambda 1 \cdot \left(\frac{\mu}{\mu - x} \right)^m - x - \lambda 1$ $n := 0.. m - 1$ $v_n := (-\mu)^{m-n-1} \cdot \frac{m!}{n! \cdot (m-n-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda 1}{n+1} - \frac{m}{m-n} \right)$ $v_m := 1$ $z := \text{polyroots}(v)$	$\gamma = 1.432$ $z = \begin{pmatrix} 0.350 \\ 4.335 + 3.265i \\ 4.335 - 3.265i \\ 7.590 + 1.726i \\ 7.590 - 1.726i \end{pmatrix}$
3. Вычисление параметров x_k	
$v := 0.. m - 1$ $A_{n,v} := \frac{\lambda 1}{\lambda 2} \cdot \left(\frac{\mu + \gamma}{\mu - z_v} \right)^{m-n}$ $E1_n := 1$ $x := A^{-1} \cdot E1$	$A = \begin{pmatrix} 2.03 & 9.05 + 5.75i & 9.05 - 5.75i & 14.78 + 3.04i & 14.78 - 3.04i \\ 1.47 & 3.86 - 4.00i & 3.86 + 4.00i & -5.14 - 5.19i & -5.14 + 5.19i \\ 1.06 & -1.63 - 2.37i & -1.63 + 2.37i & 0.68 + 3.47i & 0.68 - 3.47i \\ 0.77 & -1.37 + 0.58i & -1.37 - 0.58i & 0.66 - 1.58i & 0.66 + 1.58i \\ 0.55 & 0.15 + 0.76i & 0.15 - 0.76i & -0.69 + 0.46i & -0.69 - 0.46i \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 1.244 - 0.000i \\ -0.042 - 0.122i \\ -0.042 + 0.122i \\ -0.080 - 0.033i \\ -0.080 + 0.033i \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 15

4. Вычисление константы C	
$R1 := \frac{\lambda 2 \cdot 1 - 1}{(\lambda 2 - \lambda 1) \cdot 1}$ $R2 := 1 - R1$ $C := \gamma \cdot R2$	$R2 = 0.5$ $C = 0.239$
4. Функция P(s)	
$P1(s) := C \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left[x_k \cdot e^{z_k \cdot (s-S)} \right]$ $P2(s) := C \cdot e^{-\gamma \cdot (s-S)}$ $P(s) := \text{if}(s \leq S, P1(s), P2(s))$	

4.1.3 Стохастическая модель системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при РН-распределении его объемов

Данная программа предназначена для численной реализации стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при РН-распределением его объемов (глава 2).

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- вектор вероятностей β ;
- субгенератор цепи Маркова G1, на основе которого рассчитывается субгенератор цепи Маркова G удовлетворяющий условию: среднее значение функции распределения $b(x)$ равно 1;

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

По заданным вектору β и субгенератору цепи Маркова $G1$ вычисляется субгенератор цепи Маркова G , такой что среднее значение b функции распределения $B(x)$ было равно 1.

Ниже Таблицах 16 и 17 приведены элементы программы численной реализации стохастической системы релейного управления запасами с постоянным поступлением, релейным управлением интенсивностью случайного потока потребления и РН-распределением его объемов.

Таблица 16 – Задание исходных параметров

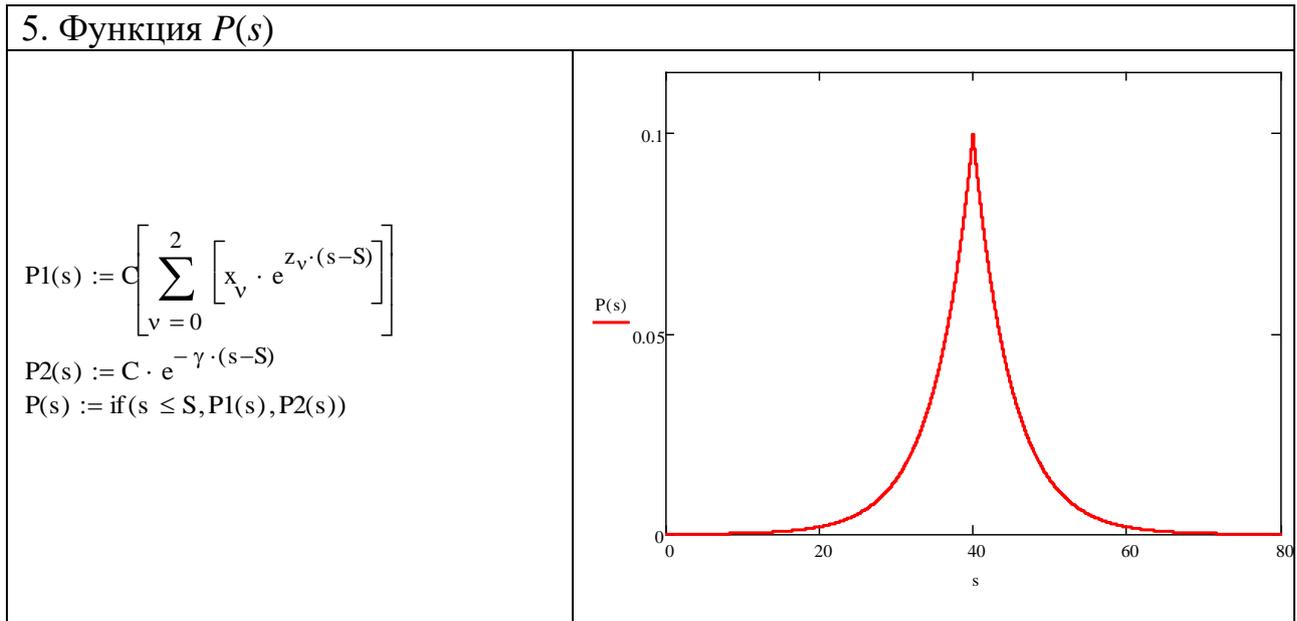
$\beta := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $G1 := \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix}$	– вектор вероятностей β и субгенератор цепи Маркова $G1$;
$\lambda_1 := 0.8$ $\lambda_2 := 1.2$	– интенсивности случайного потока потребления;
$S := 10$	– пороговое значение S ;

Далее вычисляются корни γ и z_k , $k = 1, 2 \dots m$, уравнений (10) и (41) соответственно, значения константы C и параметров x_k , $k = 1, 2 \dots m$, определяющих решение $P(s)$ основного уравнения (4). Далее строится график определяющих решения $P(s)$ основного уравнения (4), то есть распределения вероятностей значений объемов накопленных запасов в системе в стационарном режиме.

Таблица 17 – Блок расчета характеристик стационарной плотности распределения вероятностей процесса $s(t)$ при гиперэкспоненциальных объемах потребления

1. Расчет субгенератора цепи Маркова G удовлетворяющего условию: среднее значение функции распределения $b(x)$ равно 1	
$E := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $d := -\beta \cdot G1^{-1} \cdot E$ $G := d \cdot G1$	$G = \begin{pmatrix} -8.871 & 5.914 & 1.774 \\ 2.218 & -5.914 & 2.957 \\ 8.871 & 4.435 & -14.784 \end{pmatrix}$ $-\beta \cdot G^{-1} E = 1$
2. Вычисление корней γ и $z_k, k = 1, 2 \dots m$	
$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f2(x) := \lambda_2 \cdot \beta \cdot (G - x \cdot I)^{-1} \cdot G \cdot E + x - \lambda_2$ $\gamma := \text{root}(f2(x), x, 0.01, 1)$ $f1(x) := \lambda_1 \cdot \beta \cdot (G + x \cdot I)^{-1} \cdot G \cdot E - x - \lambda_1$ $z_0 := \text{root}(f1(x), x, 0.01, 0.4)$ $z_1 := \text{root}(f1(x), x, 11, 12.42)$ $z_2 := \text{root}(f1(x), x, 16.15, 16.152)$	$\gamma = 0.199$ $z_0 = 0.199$ $z_1 = 12.418$ $z_2 = 16.151$
3. Вычисление параметров x_k	
$v := 0..2$ $A^{(v)} := \lambda_1 \cdot (G + z_v \cdot I)^{-1} \cdot G \cdot E$ $H := \lambda_2 \cdot (G - \gamma \cdot I)^{-1} \cdot G \cdot E$ $x := A^{-1} \cdot H$	$A = \begin{pmatrix} 0.997 & 75.996 & -1.094 \\ 1.004 & -84.092 & -25.879 \\ 0.993 & 127.795 & 90.218 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 1.003 \\ 0.996 \\ 1.007 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 8.014 \times 10^{-5} \\ 4.525 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$
4. Вычисление константы C	
$R1 := \frac{\lambda_2 \cdot 1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot 1}$ $R2 := 1 - R1$ $C := \gamma \cdot R2$	$R2 = 0.5$ $C = 0.1$

Продолжение таблицы 17



4.2 Программы для исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при произвольном распределении его объемов методом неявной аппроксимации

4.2.1 Реализация метода неявной аппроксимации для гамма-распределения объемов потребления

Данная программа предназначена для исследования стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при гамма-распределении его объемов методом неявной аппроксимации (глава 2).

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- параметр формы α , при этом для удобства полагается, что параметр масштаба $\beta = \alpha$, чтобы среднее значение b функции распределения $B(x)$ было равно 1;

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

Ниже в таблицах 18-20 приведены элементы программы численной реализации метода неявной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения Колмогорова для стационарной плотности распределения вероятностей значений накопленного объема в стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при гамма-распределении его объемов.

Таблица 18 – Задание исходных параметров

$\alpha := 1.2$ $\beta := \alpha$	– параметр формы α ;
$\lambda_1 := 0.3$ $\lambda_2 := 1.2$	– интенсивности случайного потока потребления;
$S := 10$	– пороговое значение S ;

На основе введенных данных производится расчет первых трех моментов функции распределения $B(x)$, на основе которых реализуется метод R -аппроксимации функции распределения $B(x)$, описанный во второй главе, строятся графики функции распределения $B(x)$ и $R(x)$, при этом для оценки качества аппроксимации вычисляется расстояние Колмогорова между $B(x)$ и $R(x)$.

Таблица 19 – Реализация метода R -аппроксимации

1. Расчет первых трех моментов гамма-распределения	
$a1 := \frac{\alpha}{\beta}$ $a2 := \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1)}{\beta^2}$ $a3 := \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2)}{\beta^3}$	$a1 = 1$ $a2 = 1.833$ $a3 = 4.889$
2. Нахождение параметров аппроксимирующей функции $R(x)$	
$u := \frac{3 \cdot a1 \cdot a2 - a3}{3(2 \cdot a1^2 - a2)}$ $v := \frac{3 \cdot a2^2 - 2a1 \cdot a3}{6(2 \cdot a1^2 - a2)}$ $x := \frac{1}{2} \left(u + \sqrt{u^2 - 4 \cdot v} \right)$ $y := \frac{1}{2} \left(u - \sqrt{u^2 - 4 \cdot v} \right)$ $m1 := \frac{1}{x}$ $m2 := \frac{1}{y}$ $q := \frac{a1 - y}{x - y}$	$m1 = 1.147$ $m2 = 2.853$ $q = 1.246$
2. R -аппроксимации функции $B(x)$ функцией $R(x)$	
$R(x) := q \cdot (1 - e^{-m1 \cdot x}) + (1 - q) \cdot (1 - e^{-m2 \cdot x})$ $B(x) := \text{pgamma}(\beta \cdot x, \alpha)$	

Далее реализуется этап непосредственно неявной аппроксимации, рассчитываются параметры функции аппроксимирующей решение $P(s)$ основного уравнения (4), строится график и таблица значений аппроксимирующей функции.

Таблица 20 – Реализация метода неявной аппроксимации

1. Нахождение параметров аппроксимирующей функции $P_R(s)$	
$z_1 := \frac{1}{2} \left[m_1 + m_2 - \lambda_1 + \sqrt{(m_1 + m_2 - \lambda_1)^2 - 4m_1 \cdot m_2 \cdot (1 - \lambda_1 \cdot b)} \right]$ $z_2 := \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2 - \lambda_1) - \sqrt{(m_1 + m_2 - \lambda_1)^2 - 4m_1 \cdot m_2 \cdot (1 - \lambda_1 \cdot b)} \right]$ $\gamma := \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2 - \lambda_2) - \sqrt{(m_1 + m_2 - \lambda_2)^2 - 4m_1 \cdot m_2 \cdot (1 - \lambda_2 \cdot b)} \right]$	$z_1 = 2.914$ $z_2 = 0.786$ $\gamma = -0.217$
2. Нахождение параметров аппроксимирующей функции $P_R(s)$	
$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{z_1 - m_1} & \frac{1}{z_2 - m_1} & \frac{1}{\gamma - m_1} \\ \frac{1}{z_1 - m_2} & \frac{1}{z_2 - m_2} & \left(\frac{1}{\gamma - m_2} \right) \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 0.566 & -2.77 & -0.733 \\ 16.404 & -0.484 & -0.326 \\ 0.343 & 1.272 & -4.609 \end{pmatrix}$
$M := \left(A_{3,1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{A_{2,3} \cdot A_{1,2} - A_{1,3} \cdot A_{2,2}}{A_{2,1} \cdot A_{1,2} - A_{1,1} \cdot A_{2,2}} + A_{3,2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{A_{1,3} \cdot A_{2,1} - A_{1,1} \cdot A_{2,3}}{A_{2,1} \cdot A_{1,2} - A_{1,1} \cdot A_{2,2}} - A_{3,3} \right)$ $C_1 := \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{A_{2,3} \cdot A_{1,2} - A_{1,3} \cdot A_{2,2}}{A_{2,1} \cdot A_{1,2} - A_{1,1} \cdot A_{2,2}}$ $C_2 := \frac{1}{M} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{A_{1,3} \cdot A_{2,1} - A_{1,1} \cdot A_{2,3}}{A_{2,1} \cdot A_{1,2} - A_{1,1} \cdot A_{2,2}}$ $C_3 := \frac{1}{M}$	$C_1 = -8.185 \times 10^{-3}$ $C_2 = 0.177$ $C_3 = 0.169$
4. Аппроксимирующая функция $P_R(s)$	
$p(s) := \begin{cases} C_1 \cdot e^{z_1 \cdot (s)} + C_2 \cdot e^{z_2 \cdot (s)} & \text{if } s < S \\ C_3 \cdot e^{\gamma \cdot (s)} & \text{if } s \geq S \end{cases}$	

Для оценки качества аппроксимации полученные данные сравниваются с данными имитационного моделирования.

4.2.2 Реализация метода неявной аппроксимации для логнормального распределения объемов потребления

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- Параметр z , имеющий смысл $z = e^{\sigma^2}$, логарифмическое среднее μ выбирается автоматически так, чтобы среднее значение b функции распределения $B(x)$ было равно 1.

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

Далее реализуется метод неявной аппроксимации, аналогично предыдущему параграфу.

4.3 Программы для исследования стохастических моделей систем релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления методом явной аппроксимации при эрланговском, гамма и логнормальном распределениях объемов потребления

Данные программы предназначены для исследования стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при эрланговском, гамма и логнормальном распределениях его объемов методом явной аппроксимации (глава 2).

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- число m фаз эрланговского распределения, исходя из которого автоматически фиксируется параметр $\mu = m$, чтобы среднее значение b функции рас-

предела $B(x)$ было равно 1; параметр формы $\alpha = \beta$ гамма-распределения; параметр $z = e^{\sigma^2}$ логнормального распределения;

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

На основе введенных данных производится расчет первых пяти моментов функции распределения $B(x)$, необходимых для реализации аппроксимаций третьего, четвертого и пятого порядков. Далее строится аппроксимация решения основного уравнения (4), описанная во второй главе, строятся графики функции распределения, полученных на основе аппроксимаций третьего, четвертого и пятого порядков, при этом для оценки качества аппроксимации вычисляется расстояние Колмогорова между полученными данными и данными имитационного моделирования.

4.3.1 Реализация метода явной аппроксимации для гамма-распределения объемов потребления

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- параметр формы α , при этом для удобства полагается, что параметр масштаба $\beta = \alpha$, чтобы среднее значение b функции распределения $B(x)$ было равно 1;

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

Ниже в таблицах 21-23 приведены элементы программы численной реализации метода явной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения Колмогорова для стационарной плотности распределения вероятно-

стей значений накопленного объема в стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при гамма-распределении его объемов.

Таблица 21 – Задание исходных параметров

$\alpha := 1.2$ $\beta := \alpha$	– Параметр формы α ;
$\lambda_1 := 0.8$ $\lambda_2 := 1.2$	– интенсивности случайного потока потребления;
$S := 10$	– пороговое значение S ;

Далее используется метод моментов для аппроксимации функции $P_1(x)$. В данной работе был разработан численный алгоритм, реализованный в виде программы, блоки которой представлены в таблице 22.

Таблица 22 – Реализация метода моментов

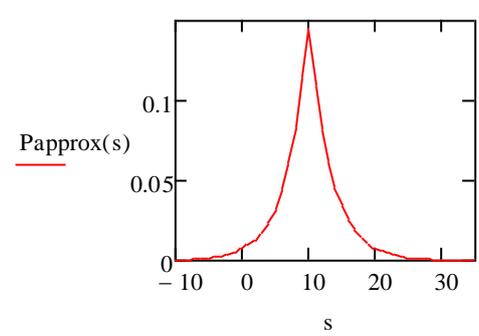
1. Определение моментов функции $B(x)$	
$b_1 := \frac{\alpha}{\beta}$ $b_2 := \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1)}{\beta^2}$ $b_3 := \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2)}{\beta^3}$ $b_4 := \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2) \cdot (\alpha + 3)}{\beta^4}$ $b_5 := \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2) \cdot (\alpha + 3) \cdot (\alpha + 4)}{\beta^5}$	$b_1 = 1$ $b_2 = 1.333$ $b_3 = 2.222$ $b_4 = 4.444$ $b_5 = 10.37$

Продолжение таблицы 22

2. Нахождение параметров функции $P_2(s)$	
$f(x) := \lambda_2 - x - \lambda_2 \cdot BL(x)$ $\gamma := \text{root}(f(x), x, 10^{-3}, 1)$ $R1 := \frac{\lambda_2 \cdot b_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot b_1}$ $R2 := 1 - R1$ $C := \gamma \cdot R2$	$\gamma = 0.291$ $R1 = 0.5$ $R2 = 0.5$ $C = 0.146$
3. Моменты функции $P_1(s)$	
$a_0 := R1$ $a_0 = 0.5$ $k := 1..4$ $D := C \cdot (\lambda_2 \cdot b_1 - 1)$ $a_k := \frac{D \cdot (k+1)! - \sum_{n=0}^{k-1} \left[\frac{(k+1)! \cdot (-1)^{k+1-n} \cdot b_{k+1-n}}{n! \cdot (k+1-n)!} \cdot \left(\gamma^{k+1} \cdot \lambda_1 \cdot a_n + \lambda_2 \cdot C \cdot n! \cdot \gamma^{k-n} \right) \right]}{\gamma^{k+1} \cdot (k+1) \cdot (1 - \lambda_1 \cdot b_1)}$ $a = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.615 \\ 10.381 \\ -100.029 \\ 1.285 \times 10^3 \end{pmatrix}$	

Далее осуществим аппроксимацию третьего порядка. Блоки программы представлены в таблице 23.

Таблица 23 – Реализация метода явной аппроксимации третьего порядка

1. Вычисление параметров аппроксимирующей функции	
$f1 := a_0 \cdot C^{-1}$ $f2 := -a_1 \cdot C^{-1}$ $f3 := \frac{a_2}{2 \cdot C}$ $u := \frac{f3 - f1 \cdot f2}{f2 - f1^2}$ $v := \frac{f1 \cdot f3 - f2^2}{f2 - f1^2}$ $z1 := \frac{u - \sqrt{u^2 - 4 \cdot v}}{2 \cdot v}$ $z2 := \frac{u + \sqrt{u^2 - 4 \cdot v}}{2 \cdot v}$ $q := 0.5 \cdot \left(1 - \frac{u - 2 \cdot f1}{\sqrt{u^2 - 4 \cdot v}} \right)$ $C1 := C \cdot q$ $C2 := C \cdot (1 - q)$	$f1 = 3.436$ $f2 = 11.101$ $f3 = 35.67$ $u = 3.503$ $v = 0.934$ $z1 = 0.311$ $z2 = 3.437$ $q = 1.077$ $C1 = 0.157$ $C2 = -0.011$
2. Построение аппроксимирующей функции $P(s)$	
$P1approx(x) := C1 \cdot e^{z1 \cdot x} + C2 \cdot e^{z2 \cdot x}$ $P2(s) := C \cdot e^{-\gamma \cdot (s-S)}$ $Papprox(s) := \text{if}(s < S, P1approx(s - S), P2(s))$	

Аналогичным образом определяются аппроксимации четвертого и пятого порядков.

4.3.2 Реализация метода явной аппроксимации для логнормального распределения объемов потребления

Для начала работы программы необходимо задать следующие параметры:

- Параметр z , имеющий смысл $z = e^{\sigma^2}$, логарифмическое среднее μ выбирается автоматически так, чтобы среднее значение b функции распределения $B(x)$ было равно 1.

- интенсивности случайного потока потребления λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию существования стационарного режима $\lambda_1 b < 1 < \lambda_2 b$, поскольку $b = 1$, то параметры задаются из условия $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$;

- пороговое значение S .

Далее реализуется метод явной аппроксимации, аналогично предыдущему параграфу.

4.4 Имитационное моделирование стохастической модели системы релейного управления ресурсами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при различных распределениях его объемов

В данном параграфе описывается имитационное моделирование стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления.

Ставятся следующие задачи

- построение реализаций случайного процесса (уровня накопленных запасов в системе в стационарном режиме) методом имитационного моделирования,

- исследование характеристик реализаций, полученных методом имитационного моделирования,

- сравнение полученных в главе 2 результатов, полученных на основе метода аппроксимации с результатами, полученными на основе имитационного моделирования,

- оценка применимости методов аппроксимаций.

4.4.1. Математическая модель

Рассмотрим водохранилище промышленного предприятия. Будем считать, что в начале рассматриваемого периода водохранилище пусто. При этом с начала отсчета в систему начинает поступать вода с непрерывной скоростью v в единицу времени. Для удобства будем рассматривать случай $v = 1$. В водохранилище в моменты времени, соответствующие пуассоновскому потоку с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, поступают запросы на потребление воды в случайном объеме, распределенном по закону $B(x)$. Кусочно-постоянная интенсивность $\lambda(s)$ зависит от значений процесса $s(t) = s$ – объема накопленной воды в водохранилище следующим образом

$$\lambda(s) = \begin{cases} \lambda_1, s < S, \\ \lambda_2, s \geq S. \end{cases}$$

Рассматриваемый случайный процесс $s(t)$ является марковским с непрерывным временем t и непрерывным множеством значений $-\infty < s < \infty$.

При этих условиях процесс $s(t)$ описывается интегро-дифференциальным уравнение Колмогорова с кусочно-постоянными коэффициентами для стационарной плотности распределения вероятностей данного процесса

$$P'(s) + \lambda(s)P(s) = \int_0^{\infty} \lambda(s+x)P(s+x)dB(x),$$

решение $P(s)$ которого удовлетворяет краевым условиям

$$P(-\infty) = P(\infty) = 0.$$

В главе 2 получены следующие результаты:

1) В параграфе 2.3 данной диссертации описывается оригинальный метод неявной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения (45), основанный на R -аппроксимации функции распределения $B(x)$.

2) В параграфе 2.5 изложен метод явной аппроксимации решения интегро-дифференциального уравнения (45) третьего, четвертого и пятого порядков.

В параграфе 4.4.2 приводится описание имитационного моделирования процесса $s(t)$, на основе которого получены реализации этого процесса, используемые для проверки полученных в главе 2 результатов методов аппроксимаций.

4.4.2. Имитационная модель

Рассматривается случайный процесс $s(t)$ – объем ресурса, накопленного в системе к моменту времени t . Будем осуществлять имитационное моделирование этого процесса на основе дискретно-событийного подхода. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- 1) задать входящий поток ресурса,
- 2) задать интенсивность выходящего потока ресурса,
- 3) сгенерировать выходящий поток ресурса,
- 4) сгенерировать величину каждого запроса на ресурс.

Моделирование входящего потока заключается в том, что фиксируется скорость v , то есть объем поступающего ресурса в единицу времени.

Интенсивность случайного потока потребления задается исходя из условия существования стационарного режима

$$\lambda_1 b < v < \lambda_2 b,$$

Моделирование выходящего потока сводится к нахождению последовательности случайных моментов времени t_j поступления запросов на потребление ресурса. Для пуассоновского потока событий с кусочно-постоянной интенсивностью $\lambda(s)$, длины интервалов между наступлением его событий

$\tau_1 = t_1 - t_0, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_j = t_j - t_{j-1}, \dots$, являются независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения с кусочно-постоянным параметром $\lambda(s)$.

Моделирование значений экспоненциально распределенной случайной величины τ производится встроенной функцией-генератором случайных чисел.

После того, как построена последовательность t_j моментов наступления событий, а именно моментов прихода заявки на потребление, генерируется случайная величина ξ запроса на потребление ресурса с функцией распределения $B(x)$.

В данном случае значение случайной величины ξ_j генерируется с помощью встроенных в Mathcad 14.0 функций или метода обратной функции.

Графические иллюстрации процесса $s(t)$ при $\nu = 1$, $\lambda_1 = 0,8$ и $\lambda_2 = 1,2$ приведены при различных распределениях объемов потребления на рисунках 16-18.

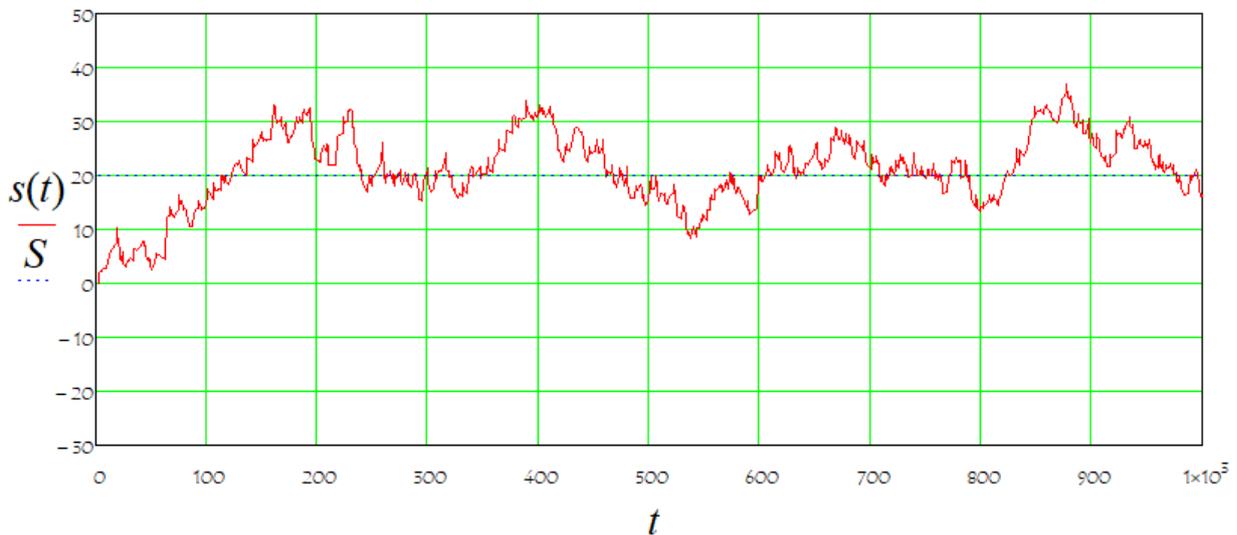


Рисунок 16 – Реализация процесса $s(t)$ при равномерно распределенных на интервале $[0,1]$ объемах потребления и $S = 20$

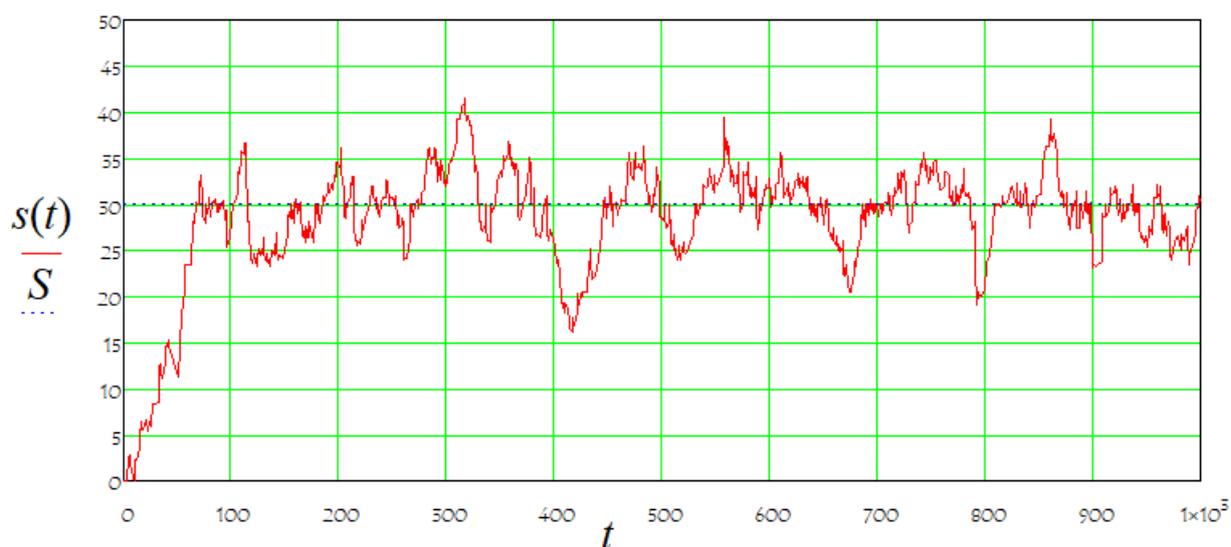


Рисунок 17 – Реализация процесса $s(t)$ при гамма-распределенных с параметрами $\alpha = \beta = 1,5$ объемах потребления и $S = 30$

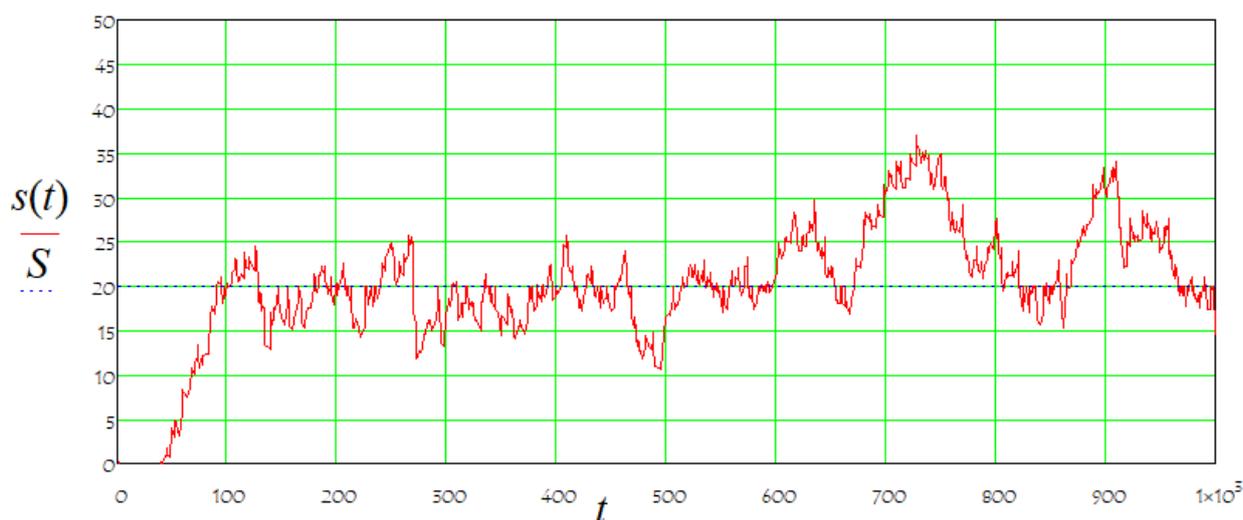


Рисунок 18 – Реализация процесса $s(t)$ при логнормально распределенных с параметрами $\mu = -\sigma^2/2$, $\exp(\sigma^2) = 1,46$ объемах потребления и $S = 20$

Для построения эмпирической функции распределения вероятностей необходимо провести анализ полученных данных.

4.4.3. Анализ данных

В результате имитационного моделирования получена 1 реализация случайного процесса на 10^6 событий выходящего потока.

В качестве данных о реализации имеем три массива значений, в первом – моменты поступления заявки на потребление, во втором – объем ресурса в системе до прихода запроса, в третьем – объем ресурса после исполнения запроса на потребление.

Далее для построения гистограммы реализации случайного процесса исследуется размах значений этого процесса $R = \max(s_i) - \min(s_i)$, выбирается шаг h и в соответствии каждому интервалу длины $[\min(s_i), \min(s_i)+h)$, $[\min(s_i)+h, \min(s_i)+2h)$, ..., $[\min(s_i)+kh, \max(s_i)]$ ставится в соответствие длительность пребывания значений процесса в заданном интервале.

На рисунках 19-21 ниже приведены примеры построения гистограмм для случайного процесса $s(t)$ при двухфазном гиперэкспоненциальном распределении объемов потребления и следующем наборе параметров: $\nu = 1$, $S = 7$, $q = 0.8$, $\mu_1 = 1,1$, $\mu_2 = 0,8$.

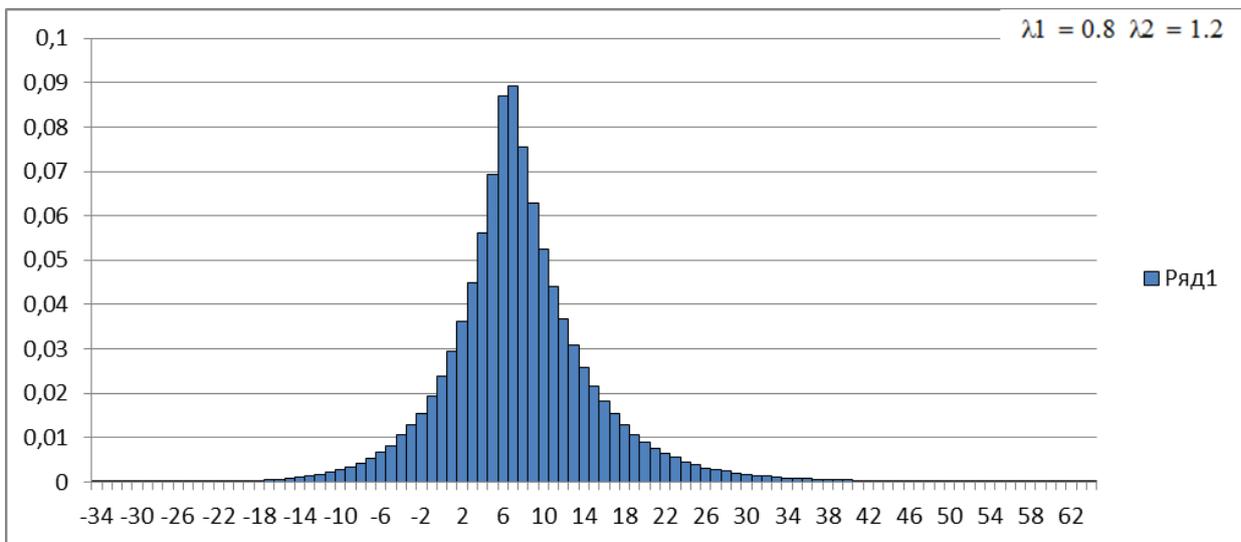


Рисунок 19 – Гистограмма реализации случайного процесса $s(t)$ при

$$\lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 1,2$$

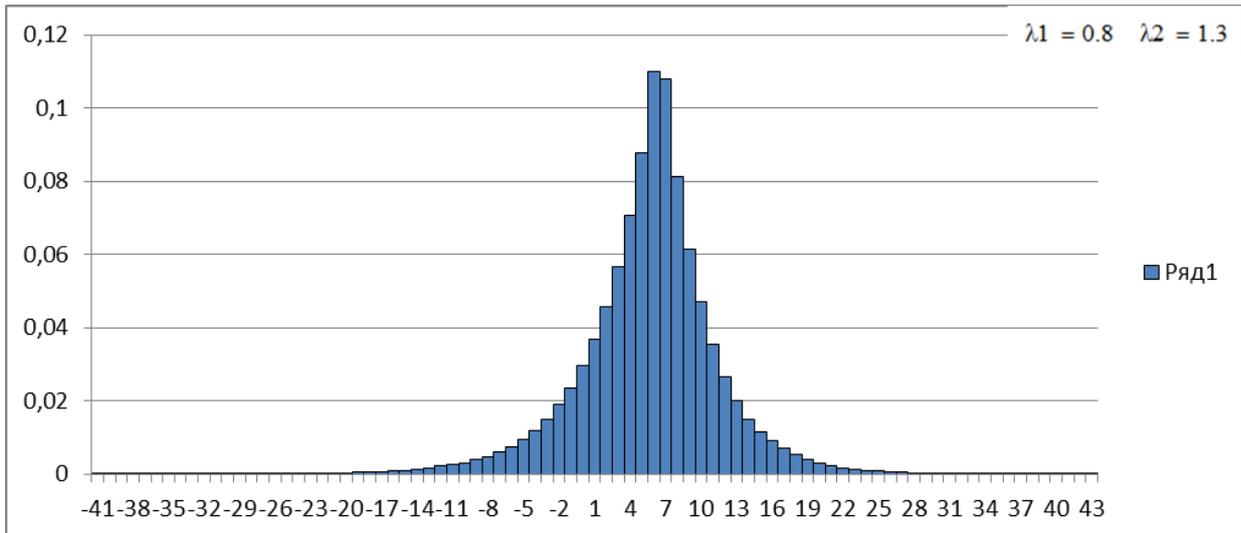


Рисунок 20 – Гистограмма реализации случайного процесса $s(t)$ при $\lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 1,3$

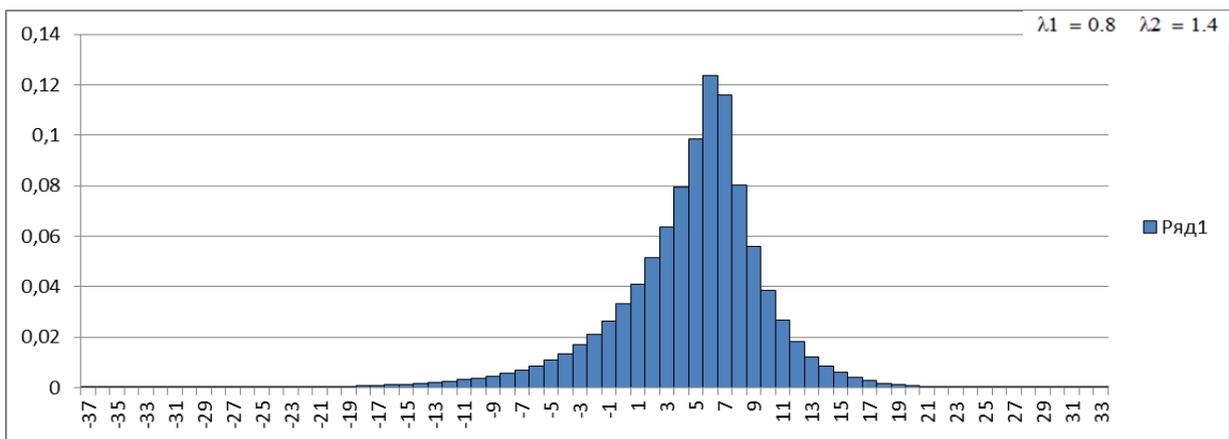


Рисунок 21 – Гистограмма реализации случайного процесса $s(t)$ при $\lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 1,4$

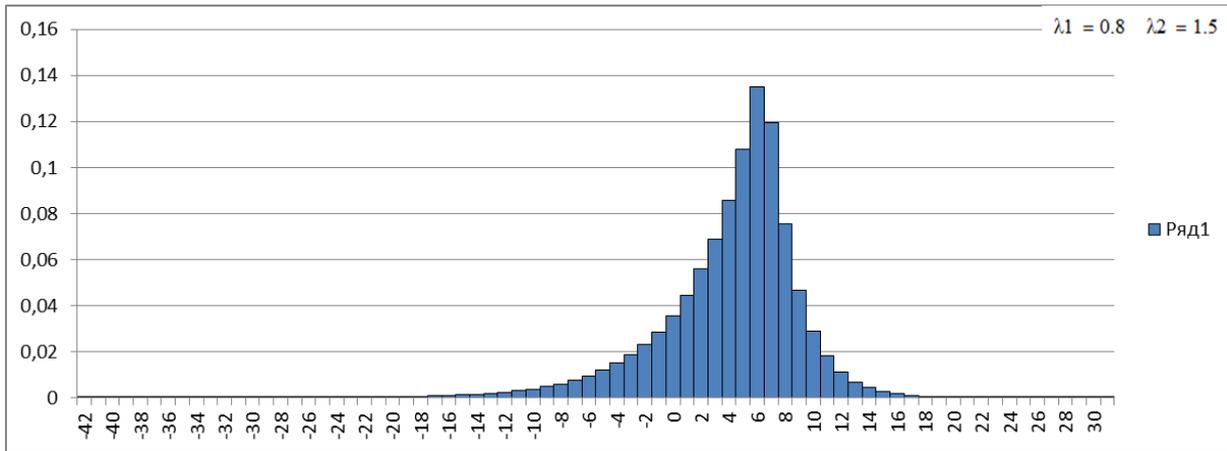


Рисунок 22– Гистограмма реализации случайного процесса $s(t)$ при $\lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 1,5$

Данные, представленные на гистограммах свидетельствуют о сильном влиянии интенсивности потребления на поведение процесса.

Далее на основе гистограммы строится эмпирическая функция распределения. Приведем пример эмпирических функций распределения (рисунки 23-24), построенных на основе имитационного моделирования при m -фазном распределении Эрланга объемов потребления и следующем наборе значений параметров $\nu = 1, S = 0, \mu = m, \lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 1,2$.

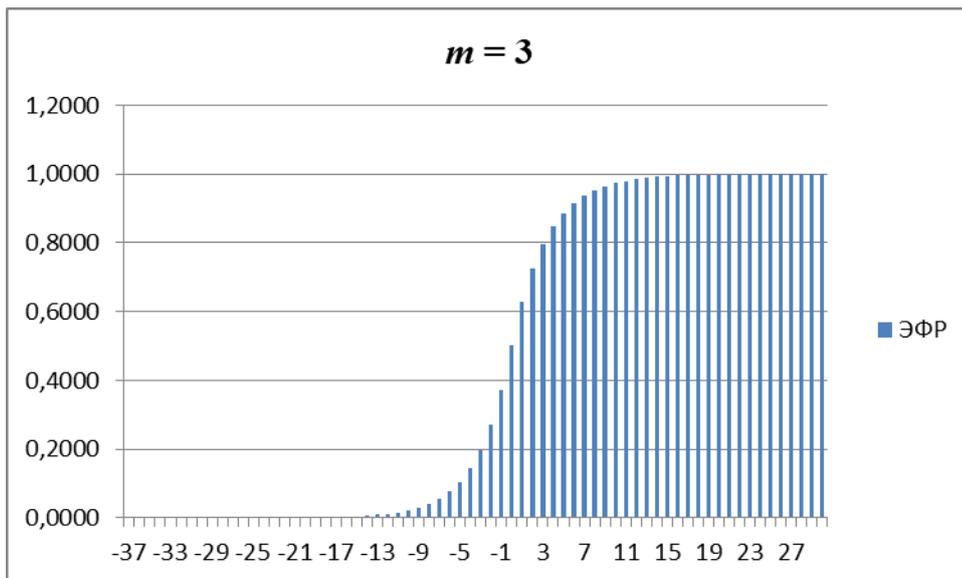


Рисунок 23 – Эмпирическая функция распределения, при 3-фазном распределении Эрланга объемов потребления и $\lambda_1 = 0,8, \lambda_2 = 1,2$

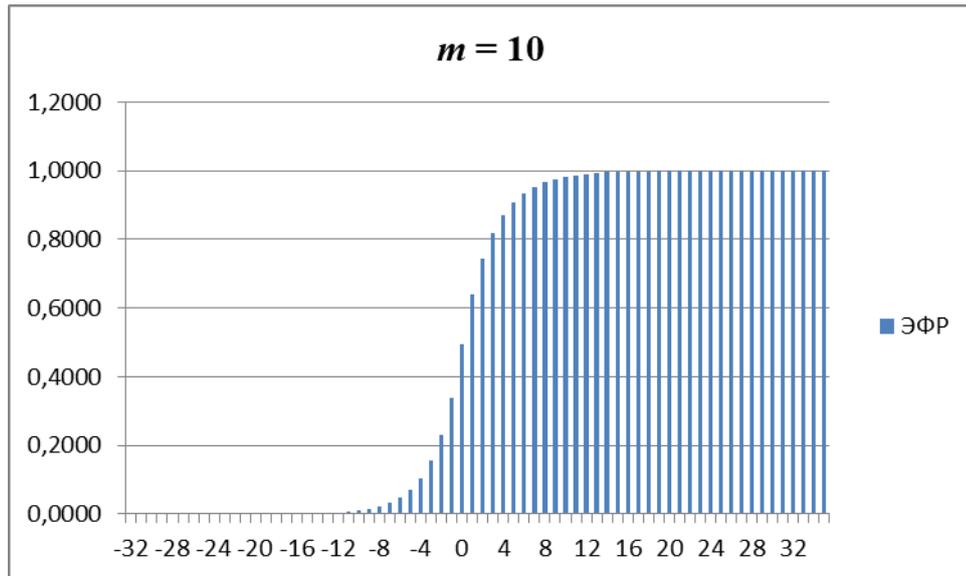


Рисунок 24 – Эмпирическая функция распределения, при 3-фазном распределении Эрланга объемов потребления и $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_2 = 1,2$

4.5 Выводы по Главе 4

В настоящей главе был разработан комплекс программ для численной реализации результатов математического и имитационного моделирования стохастической модели системы релейного управления запасами, а именно:

1. Разработан комплекс программ для
 - численной реализации результатов исследования стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления при фазовых распределениях объемов потребления;
 - реализации методов неявной и явной аппроксимаций решения основного уравнения.

2. Разработан комплекс программ, реализующих имитационное моделирование деятельности водохранилища в виде стохастической модели системы релейного управления запасами с постоянной скоростью поступления и кусочно-постоянной интенсивностью случайного потока потребления.

Была проведена оценка применимости аппроксимаций, полученных в диссертации, путем сравнения результатов, полученных на основе методов аппроксимаций и имитационного моделирования.

Результаты данной главы опубликованы в работах [2, 27–30, 32, 33, 35, 87–90].

Заключение

В данной диссертации построены и впервые исследованы модификации стохастических моделей систем релейного управления запасами с кусочно-постоянными скоростью поступления и интенсивностью случайного потока потребления. Исследования проводились разработанными в диссертации методами характеристических чисел, неявной и явной аппроксимации, модифицированным методом преобразования Фурье.

Основные результаты проведенного исследования заключаются в следующем:

1. Предложены модификации стохастических моделей систем релейного управления ресурсами, основные отличия которых от существующих заключаются в следующем: и скорость поступления ресурса и интенсивность случайного потока потребления совместно представляют собой кусочно-постоянные функции с двумя значениями.

2. Предложен метод характеристических чисел для решения интегродифференциальных уравнений Колмогорова с m -фазными гиперэкспоненциальными, эрланговскими и РН-распределениями объемов потребления.

3. Предложен метод неявной аппроксимации решения интегродифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями, основанный на R -аппроксимации распределений объемов потребления.

4. Предложен метод явной аппроксимации третьего, четвертого и пятого порядков решения интегро-дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями.

5. Предложена модификация метода преобразования Фурье для исследования интегро-дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами с двумя значениями при произвольном распределении объемов потребления.

6. Приведены результаты применения разработанных методов к исследованию стохастических моделей релейного управления ресурсами.

7. Разработан комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа стохастических моделей систем релейного управления запасами.

Построенные математические модели систем управления ресурсами являются достаточно общими, что позволяет решить различные прикладные задачи в области управления запасами. Предложенные в работе методы можно применить при исследовании ряда более сложных математических моделей в областях управления запасами, теории массового обслуживания, актуарной математики. Полученные результаты в перспективе будут использованы для дальнейшей разработки темы, а именно для исследования класса систем релейного управления ресурсами с пуассоновскими потоками поступления и потребления с кусочно-постоянными интенсивностями.

Список литературы

1. Бигильдеева Т. Б. Условия оптимальности для двухпериодной задачи управления запасами со стохастическим спросом / Т. Б. Бигильдеева, М. В. Сопко // Челябинский физико–математический журнал. – 2016. – Т. 1, Вып. 1. – С. 24–34.
2. Бронер В. И. Численная реализация метода R -аппроксимации для системы управления запасами с релейным управлением / В.И. Бронер // Материалы XX Всероссийской научно–практической конференции Научное творчество молодежи. Математика. Информатика. Томск, 28–29 апреля 2016 г. – Томск: издательство Томского университета, 2016. – Ч. 1. – С. 49–52.
3. Бублик Я. С. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда / Я. С. Бублик // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всероссийской научно–практической конференции. Анжеро-Судженск, 15–16 апреля 2010 г. – Томск, 2010. – Ч. 1. – С. 16–19.
4. Вальц О. В. Релейно–гистерезисное управление капиталом Фонда социального страхования / О. В. Вальц // Управление в социальных и экономических системах: сборник материалов 2–ой Всероссийской научно–практической конференции. Пенза, 27 декабря 2004 г. – Пенза, 2004. – С. 6–7.
5. Вальц О. В. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах и со случайными расходами на социальные программы / О. В. Вальц, О. А. Змеев // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 37–41.
6. Давыдов К. А. Основные подходы к реализации оптимальной стратегии управления запасами / К. А. Давыдов // УЭКС. – 2012. – № 2 (38). – С. 8.
7. Домбровский В. В. Применение интервальных методов в управлении запасами / В. В. Домбровский, Е. В. Чаусова // ЖВТ. – 2002. – № 2. – С. 50–58.

8. Доможирова И. В. Использование экономико математических моделей в управлении товарными запасами организации / И. В. Доможирова // Известия ТулГУ. Экономические и юридические науки. – 2013. – № 2 (1). – С. 165–171.

9. Змеев О. А. Диффузионное приближение в математической модели фонда социального страхования со случайными расходами на социальные программы / О. А. Змеев // II Всероссийская ФАМ конференция: Тезисы докладов. Красноярск, 28 февраля–2 марта 2003 г – Красноярск, 2003. – С. 62.

10. Змеев О. А. Математическая модель деятельности фонда социального страхования при экспоненциальных страховых выплатах / О. А. Змеев // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 280. – С. 130–135.

11. Карлова М. Ю. Разработка обобщенной математической модели управления материальными запасами / М. Ю. Карлова // Вестник ВГТУ. – 2011. – № 3. – С. 89–91.

12. Китаева А. В. Управление опционными ресурсами / А. В. Китаева, Н. В. Степанова // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – № 5. – С. 23–28

13. Китаева А. В. Модель фонда социального страхования при релейном управлении капиталом и экспоненциально распределенных страховых выплатах и выплатах по социальным программам / А. В. Китаева, А. Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 35–37.

14. Китаева А. В. Управление капиталом фонда социального страхования / А. В. Китаева, А. Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 167–168.

15. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971. – 256 С.

16. Шифердекер И. Ю. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда / И. Ю. Шифердекер, Я. С. Бублик // Научное творчество молодежи : материалы XII Всероссийской

научно–практической конференции. г. Анжеро-Судженск, 18 – 19 апреля 2008 г. – Томск, 2008. – Ч. 1. – С. 4–7.

17. Лившиц К. И. Математическая модель деятельности внебюджетного фонда при дважды стохастическом потоке страховых премий и экспоненциальных распределений поступлений и выплат / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2008) : материалы VII Всероссийской научно–практической конференции с международным участием. г. Анжеро-Судженск, 14 – 15 ноября 2008 г. – Томск, 2008. – Ч. 1. – С. 145–149.

18. Лившиц К. И. Диффузионная аппроксимация пуассоновской модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Седьмой Российской конференции с международным участием. Томск, 2–5 сентября 2008 г. – Томск, 2008. – С. 91.

19. Лившиц К. И. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2009) : материалы VIII Всероссийской научно–практической конференции с международным участием. Анжеро-Судженск, 13 – 14 ноября 2009 г. – Томск, 2009. – Ч. 1. – С. 234–238.

20. Лившиц К. И. Плотность распределения капитала некоммерческого фонда при гистерезисном управлении капиталом / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315, № 5. – С. 174–178.

21. Лившиц К. И. Плотность распределения капитала некоммерческого фонда для пуассоновской модели при гистерезисном управлении капиталом / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Вестник Томского государственного университе-

та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3 (12). – С. 12–20.

22. Лившиц К. И. Диффузионная аппроксимация пуассоновской модели деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей / К. И. Лившиц, Я. С. Бублик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 48–58.

23. Лившиц К. И. Пуассоновская модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом / К. И. Лившиц, Л. Ю. Сухотина, И. Ю. Шифердекер // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 302–312.

24. Лившиц К. И. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом / К. И. Лившиц, И. Ю. Шифердекер // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 302–308.

25. Лившиц К. И. Диффузионная аппроксимация математической модели деятельности некоммерческого фонда при релейном управлении капиталом / К. И. Лившиц, И. Ю. Шифердекер // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 38–44.

26. Мухина О. О. Локально–оптимальное управление запасами с учетом запаздываний в поставках и транспортных ограничений / О. О. Мухина, В. И. Смагин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 2 (19). – С. 42–50.

27. Назаров А.А. Исследование потоковых моделей управления запасами методом R -аппроксимации / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Информационно–управляющие системы, 2016. – № 5 (84). – С. 91–97.

28. Назаров А.А. Управление ресурсами физических экспериментов в модели Крамера–Лундберга / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Известия высших учебных заведений. Физика, 2016. – Т. 59, № 7. – С. 99–108.

29. Назаров А.А. Модифицированная модель Крамера–Лундберга с релейным управлением и произвольными объемами потребления ресурса / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Материалы Международной научной конференции Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях (АВМТВ 2017) под общей редакцией А.В. Лебедева. Москва, 23–27 октября 2017 г. – Москва, 2017. – С. 350–354.

30. Назаров А.А. Модифицированная модель Крамера–Лундберга при релейном управлении и произвольном распределении объемов потребления / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Тезисы, Марчуковские научные чтения 2017. Академгородок, Новосибирск, 25 июня – 14 июля 2017 г. – Академгородок, Новосибирск, 2017. – С. 158.

31. Назаров А. Модифицированная модель Крамера–Лундберга с релейным управлением поступлением ресурса / А. Назаров, В. Бронер // Материалы Всероссийской конференции Информационно–телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Москва, 24 апреля 2017 г. – Москва, 2017. – С. 41–43.

32. Назаров А. А. Система управления запасами с распределением Эрланга объемов потребления ресурсов / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Материалы XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Пос. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 2. – С.53–59.

33. Назаров А. Метод R–аппроксимации для системы управления запасами с релейным управлением / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Материалы Всероссийской конференции Информационно–телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Москва, 18–22 апреля 2016 г. – Москва, 2016. – С. 40–42.

34. Назаров А. Модифицированная модель Крамера–Лундберга релейного управления запасами с пуассоновскими потоками моментов поступления и потребления ресурсов / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Труды международной кон-

ференции Актуальные проблемы прикладной математики и информатики. Ташкент, 9–10 октября 2016 г. – Ташкент, 2016. – С. 213–217.

35. Назаров А.А. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов / А.А. Назаров, В.И. Бронер // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2016. – № 1(34). – С. 43–49.

36. Погибельский А. Ю. Многопродуктовая модель управления запасами с нечетко заданными начальными данными / А. Ю. Погибельский // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 7. – С. 159–162.

37. Погибельский А. Ю. Статическая модель управления запасами с нечеткими начальными условиями/ Погибельский А. Ю. // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 4. – С. 237–240.

38. Рыжиков Ю. И. Управление запасами / Ю. И. Рыжиков. – М. : Наука, 2001. – 384 С.

39. Самарцева А. В. Модели управления запасами в условиях изменяющейся потребности / А. В. Самарцева, Н. Е. Гильц // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2011. – № 7. – С. 242–243.

40. Серая О. В. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами / О. В. Серая, Т. А. Клименко, В. Б. Самородов // Вестник ХНАДУ. – 2009. – № 45.

41. Сергеев А. В. Разработка системы управления запасами методами классической теории автоматического управления / А. В. Сергеев, А. А. Новиков // УЭКС. – 2013. – № 7 (55). – С. 32.

42. Смагин В. И. Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний / В. И. Смагин, С. В. Смагин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 3 (4). – С. 19–26.

43. Смагин В. И. Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений / В. И. Смагин, С. В. Смагин // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 244–246.

44. Тюнин Д. К. Эволюция развития систем управления запасами / Д. К. Тюнин // УЭКС. – 2013. – № 3 (51). – С. 29.

45. Чаусова Е. В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервально заданным спросом и задержками поставок / Е. В. Чаусова // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 294. – С. 207–211.

46. Чаусова Е. В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запасов в узлах сети / Е. В. Чаусова // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 101–106.

47. Чаусова Е. В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и потерь запаса / Е. В. Чаусова // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 208–215.

48. Abdel–Malek L. Exact, approximate, and generic iterative models for the multi–product Newsboy problem with budget constraint / L. Abdel–Malek, R. Montanari, L. C. Morales // International Journal of Production Economics. – 2004. – Vol. 91. – P. 189–198.

49. Abdel–Malek L. L. An analysis of the multi–product Newsboy problem with a budget constraint / L. L. Abdel–Malek, R. Montanari // International Journal of Production Economics. – 2005. – Vol. 97. – P. 296–307.

50. Abdel–Malek L. L. On the multi–product Newsboy problem with two constraints / L. L. Abdel–Malek, R. Montanari // Computers & Operations Research– 2005. – Vol. 32. – P. 2095–2116.

51. Anvari M. Optimality criteria and risk in inventory models: the case of the newsboy problem. / M. Anvari // Journal of the Operational Research Society. – 1987. – Vol. 38. – P. 625–632.

52. Arrow K. J. Optimal Inventory Policy / K. J. Arrow, T. Harris, J. Marshak // *Econometrica*. – 1951. – Vol. 19, № 3. – P. 250–272.

53. Atkinson A. A. Incentives, uncertainty, and risk in the newsboy problem / A. A. Atkinson // *Decision Sciences*. – 1979. – Vol. 10. – P. 341–357.

54. Ataka S. Study on Multi-Period Transportation Problem Considering Opportunity Loss and Inventory. / S. Ataka, H. Horioka // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. – 2016. – Vol. 45. – P. 149–159.

55. Bassok Y. Single-Period Multi-product Inventory models with Substitution / Y. Bassok, R. Anupindi, R. Akella // *Operations Research*. – 1999. – Vol. 47. – P. 632–642.

56. Bhunia A. K. Deterministic inventory model for deteriorating items with finite rate of replenishment dependent on inventory level / A. K. Bhunia, M. Maiti // *Computers & Operations Research*. – 1998. – Vol. 25 (11). – P. 997–1006.

57. Bhattacharjee S. A multi-period profit maximizing model for retail supply chain management: an integration of demand and supply-side mechanisms / S. Bhattacharjee, R. Ramesh // *European Journal of Operational Research*. – 2000. – Vol. 122 (3). – P. 584–601.

58. Cardenas-Barron L. E. A new approach to solve the multi-product multi-period inventory lot sizing with supplier selection problem / L. E. Cardenas-Barron, J. L. Gonzalez-Velarde, J. Trevino-Garza // *Computers & Operations Research*. – 2015. – Vol. 64. – P. 225–232.

59. Casimir R. J. The value of information in the multi-item Newsboy problem / R. J. Casimir // *Omega*. – 2002. – Vol. 30. P. 45–50.

60. Chang C. T. On the inventory model with variable lead time and price-quantity discount / C. T. Chang, S. C. Chang // *Journal of the Operational Research Society*. – 2001. – Vol. 52. – P. 1151–1158

61. Chiu C. H. Optimal pricing and stocking decisions for newsvendor problem with value-at-risk consideration / C. H. Chiu, T. M. Choi // *IEEE Transactions on*

Systems, Man and Cybernetics. Part A. Systems and Humans. – 2010. – Vol. 40. – P. 1116–1119.

62. Chio T. M. Periodic review multiperiod inventory control under a mean–variance optimization objective / T. M. Chio, C. H. Chiu, P. L. Fu // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans.* – 2011. – Vol. 41 – P. 678–682.

63. Choi T. M. Mean–downside–risk and mean–variance newsvendor models: implications for sustainable fashion retailing / T. M. Choi, C. H. Chiu // *International Journal of Production Economics.* – 2012. – Vol. 135. – P. 552–560.

64. Choi T. M. Mean–variance analysis for the newsvendor problem / T. M. Choi, D. Li, H. Yan // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part A. Systems and Humans.* – 2008. – Vol. 38. – P. 1169–1180.

65. Choi T. M. Periodic review multi–period inventory control under a mean–variance optimization objective / T. M. Choi, C. H. Chiu, P. Fu // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part A. Systems and Humans.* – 2011. – Vol. 41. P. 678–682.

66. Choi T. M. Multi–period risk minimization purchasing models for fashion products with interest rate, budget, and profit target considerations / T. M. Choi // *Annals of Operations Research.* – 2016. – Vol. 237. – P. 77–98.

67. De S. K. A multi–periods production–inventory model with capacity constraints for multi–manufacturers – A global optimality in intuitionistic fuzzy environment / S. K. De, S. S. Sana // *Applied Mathematics and Computation.* – 2014. – Vol. 242. – P. 825–841.

68. Edgeworth F. Y. *The Mathematical Theory of Banking* / F. Y. Edgeworth // *Journal of the Royal Statistical Society.* 1888. – Vol. 51, issue 1. – P. 113–127.

69. Eeckhoudt L. The risk–averse (and prudent) newsboy / L. Eeckhoudt, C. Gollier, H. Schlesinger // *Management Science.* – 1995. – Vol. 41. – P. 786–794.

70. *Handbook of Newsvendor Problems: Models, Extensions and Applications* / Tsan–Ming Choi (ed.) // New York: Springer. – 2012. – 142 p.

71. Hongfang S. Multi-period optimization with loss-averse customer behavior: Joint pricing and inventory decisions with stochastic demand / S. Hongfang, R. Lun, S. Jennifer // *Expert Systems with Applications*. – 2017. – Vol. 72. – P. 421–429.

72. Silver E.A. Inventory management and production planning and scheduling / E. A. Silver, D. F. Pyke, R. Peterson. – 3rd ed. – New York: John Wiley & Sons, 1998. – 784 p.

73. Ismail B. Optimizing and satisfying in stochastic cost-volume-profit Analysis / B. Ismail, J. Louderback // *Decision Sciences*. – 1979. – Vol. 10. – P. 205–2017.

74. Kabak I. Inventory models and management objectives. / I. Kabak, A. Schiff // *Sloan Management Review*. – 1978. – Vol. 10. – P. 53–59.

75. Khouja M. The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research / M. Khouja // *Omega*. – 1999. – Vol. 27, issue 5. – P. 537–553

76. Kim J. U. A Lagrangian relaxation approach to multi-period inventory/distribution planning / J. U. Kim, Y. D. Kim // *Journal of the Operational Research Society*. – 2000. – Vol. 51. – P. 364–370.

77. Kitaeva A. The Newsvendor Problem with Fast Moving Items and a Compound Poisson Price Dependent Demand / A. Kitaeva, V. Subbotina, O. Zmeev // In: *15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2015*, Elsevier, (IFAC-PapersOnLine). – 2015. – Vol. 48. – P. 1375–1379.

78. Kitaeva A. Estimating the Compound Poisson Demand's Parameters for Single Period Problem for Large Lot Size / A. Kitaeva, V. Subbotina, V. Stepanova // In: *15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2015*, Elsevier, (IFAC-PapersOnLine). – 2015. – Vol. 48. – P. 1357–1361.

79. Kogan K. Supply chain games: modeling in a multi-period framework / K. Kogan, C. S. Tapiero // In: *Supply Chain Games: Operations Management And*

Risk Valuation. International Series In Operations Research & Management Science. – 2007. – Vol 113. – P. 119–155.

80. Lau A. Maximizing the probability of achieving a target profit level in a two-product newsboy problem / A. Lau, H. Lau // Decision Science. – 1988. – Vol. 19. – P. 392–408.

81. Lau H. Some extensions of Ismail–Louderback’s stochastic CVP model under optimizing and satisfying criteria / H. Lau // Decision Science. – 1980. – Vol. 11. – P. 557–561.

82. Lau H. The newsboy problem under alternative optimization objectives / H. Lau // Journal of the Operational Research Society. – 1980. – Vol. 31. – P. 525–535.

83. Li J. A two-product newsboy problem with satisfying objective and independent exponential demands / J. Li, H. Lau, A. Lau // IIE Transaction. – 1991. – Vol. 23, P. 29–39.

84. Mandal S. Multi-item multi-period optimal production problem with variable preparation time in fuzzy stochastic environment / S. Mandal, A. K. Maity, K. Maity, S. Mondal, M. Maiti // Applied Mathematical Modelling. – 2011. – Vol. 35, issue 9. – P. 4341–4353.

85. Mousavi S. M. Optimizing multi-item multi-period inventory control system with discounted cash flow and inflation: Two calibrated meta-heuristic algorithms / S. M. Mousavi, V. Hajipour, S. T. A. Niaki, N. Alikar // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, issue 4. – P. 2241–2256.

86. Nahmias S. Production and operations management / S. Nahmias // 3rd ed. Boston, MA: Irwin. – 1996. – 787 p.

87. Nazarov A. Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow / A. Nazarov, V. Broner // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 800. – P. 370–381. – DOI : 10.1007/978-3-319-68069-9_30.

88. Nazarov A. Modified Cramer–Lundberg Models with On/Off Control and Hyperexponential Distribution of Demands Purchases Values / A. Nazarov, V. Broner // *Communications in Computer and Information Science*. – 2017. – Vol. 700. – P. 380–394. – DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_32.

89. Nazarov A. Inventory Management System with Erlang Distribution of Batch Sizes / A. Nazarov, V. Broner // *Communications in Computer and Information Science*. – 2016. – Vol. 638. – P. 273–280. – DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8_24.

90. Nazarov A. Inventory Management System with On/Off Control of Output Product Flow / A. Nazarov, V. Broner // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2017. – Vol. 10684. – P. 132–144. – DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9_13.

91. Nazarov A.A. Inventory management system with On/Off control and phase–type distribution of purchases quantity / A. A. Nazarov, V. I. Broner // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) : материалы Девятнадцатой международной научной конференции. Москва, 21–25 ноября 2016 г. – М., 2016. – Т. 3 : Молодежная школа-семинар. – С. 349–355.*

92. Perakis G. Competitive Multi–period Pricing for Perishable Products: A Robust Optimization Approach / G. Perakis, A. Sood // *Mathematical Programming*. – 2006. – Vol. 107. – P. 295–335.

93. Puranam K. S. On optimal bidding and inventory control in sequential procurement auctions: the multi period case / K. S. Puranam, M. N. Katehakis // *Annals of Operation Research* (2014) 217: 447–462

94. Qin Y. The newsvendor problem: review and directions for future research / Y. Qin, R. Wang, A. Vakharia, Y. Chen, M. Hanna–Seref // *European Journal of Operational Research*. – 2011. – Vol. 213. – P. 361–374.

95. Ramalhinho Dias Lourenço H. Multi–Period Vendor Managed Inventory Systems / H. Ramalhinho Dias Lourenço, R. Ribeiro // *UPF Economics and Business Working Paper*. – 2004. – № 724.

96. Ramalhinho Dias Lourenço H. Inventory–Routing Model, for a Multi–Period Problem with Stochastic and Deterministic Demand / H. Ramalhinho Dias Lourenço, R. Ribeiro // UPF Economics and Business Working Paper. – 2003. – № 725.

97. Robinson L. Optimal and Approximate Policies in Multiperiod Multilocation Inventory Models with Transhipments / L. Robinson // Operations Research. – 1990. – Vol. 38. – P. 278–295.

98. Romeijn H. E. A probabilistic analysis of the multi–period single–sourcing problem / H. E. Romeijn, D. R. Morales // Discrete Applied Mathematics. – 2001. – Vol. 112(13). – P. 301–328.

99. Sepehri M. Cost and inventory benefits of cooperation in multi–period and multi–product supply / M. Sepehri // Scientia Iranica. – 2001. – Vol. 18. – P. 731–741.

100. Sankarasubramanian E. Optimal order quantity for pre–determined level of profit / E. Sankarasubramanian, S. Kumaraswamy // Management Science. – 1983. – Vol. 29. – P. 512–514.

101. Shih W. A general decision model for cost–volume–profit analysis under uncertainty / W. Shih // The Accounting Review. – 1979. – Vol. 54, issue 4. – P. 687–706.

102. Shao Z. Fuzzy multi–product constraint Newsboy problem / Z. Shao, X. Ji // Applied Mathematics and Computation. – 2006. – Vol. 180. – P. 7–15.

103. Taleizadeh A. A. Optimizing multi–product multi–constraint bi–objective Newsboy problem constrained with discount by a hybrid method of goal programming and genetic algorithm / A. A. Taleizadeh, S. T. A. Niaki, V. Hoseini // Optimization and Engineering. – 2009. – Vol. 41. – P. 437–457.

104. Tijms H. F. A. van der Duyn Schouten Inventory control with two switch–over levels for a class of M/G/1 queueing systems with variable arrival and service rate / H. Tijms, H. F. A. van der Duyn Schouten // Stochastic Processes and their Applications. 1978. – Vol. 6, issue 2. – P. 213–222.

105. Veinott A. F. Optimal Policy for A Multi-product, Dynamic, Nonstationary Inventory Problem / A. F. Veinott // *Management Science*. – 1965. – Vol. 12. P. 206–222.

106. Vicente J. J. Multi-period and Multi-product Inventory Management Model with Lateral Transshipments / J. J. Vicente, S. Relvas, A. P. Barbosa Póvoa // *Operational Research. CIM Series in Mathematical Sciences* – 2015. – Vol 4. – P. 425–444.

107. Yao D. D. Optimal Inventory Control with Substitution: Single- and Multi-Period Models / D. D. Yao, S. Zheng // *International Series in Operations Research & Management Science* – 2003. – Vol 63. – P. 177–201.

108. Zabel E. Multi-period monopoly under uncertainty / E. Zabel // *Journal of Economic Theory*. – 1972. – Vol. 37. P. 524–536.

109. Zhang D. Single and multi-period optimal inventory control models with risk-averse constraints / D. Zhang, H. Xu, Y. Wu // *European Journal of Operational Research*. – 2009. – Vol. 199. – P. 420–434.

110. Zhang J. A multi-period pricing and inventory control model / J. Zhang, J. Chen // *Journal of Systems Science and Complexity*. – 2009. – Vol. 23. P. 249–260.