Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Шишмарев Алексей Александрович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СИЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ, ЗАДАННОГО ПОТЕНЦИАЛАМИ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
доцент Гаврилов Сергей Петрович

Томск – 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Традиционно считалось, что квантовая теория предназначается для описания феноменов микромира, тогда как макроскопические явления должны описываться классической теорией. Однако, развитие квантово-полевой теории привело к пониманию того факта, что существуют нетривиальные квантовые явления (такие как поляризация вакуума, парадокс Клейна, излучение Хокинга для черных дыр и рождение электрон-позитронных пар из вакуума внешними полями), которые не могут быть описаны классически. Уже на заре развития релятивистской квантовой механики эти эффекты послужили причиной возникновения ряда парадоксов, поставив под вопрос корректность ее наивного применения к описанию процессов в сильных полях. Стало ясно, что квантовые эффекты могут, в определенных условиях, изменять классическую эволюцию сильных полей из-за эффекта обратного влияния (backreaction). Этот факт отмечался еще такими гигантами теоретической физики, как Фейнман и Швингер. Случай однородного и постоянного электрического поля, взаимодействующего с электронами, был изучен Швингером [1], который вычислил вероятность вакуумного состояния остаться вакуумным, используя разработанный им метод эффективного действия. Это поле допускает нахождение точного решения соответствующего уравнения Дирака, и часто используется в различных квантово-полевых вычислениях; подробный обзор можно найти, например, в работе [2]. Было показано, что рождение электрон-позитронных пар должно наблюдаться в полях, напряженность которых достигает так называемой критической величины. Предложенный Фейнманом подход с использованием причинного пропагатора [3, 4] был обобщен Никишовым и Нарожным [5–7] для изучения рождения и рассеяния пар в нулевом порядке приближения по радиационному взаимодействию. Были предложены и другие различные подходы к учету эффекта рождения пар в рамках в релятивистской квантовой механики в зависимости от структуры внешнего поля [8–11]. Также эффект рождения частиц гравитационными полями изучался в контексте физики черных дыр [12, 13].

Вышеупомянутый эффект рождения частиц сильным электромагнитным и гравитационным полями имеет существенно квантовую природу. Впервые он был изучен в рамках релятивистской квантовой механики с пониманием того факта, что ответы на все поставленные вопросы могут быть найдены только при помощи квантовой теории поля (КТП). КТП с внешними фоновыми полями является, в определенной мере, подходящей для таких вычислений моделью. В ней рождение частиц тесно связано с нарушением стабильности вакуума с течением времени. Фоновые (внешние) поля, нарушающие стабильность вакуума, являются электроподобными полями, производящими ненулевую работу при взаимодействии с заряженными частицами. Были предложены и реализованы различные подходы к изучению данных физических систем в зависимости от структуры таких полей.

Как известно из общей теории, частицы, рождающиеся в парах под действием внешнего поля, обладают свойством квантовой запутанности. Состояния, обладающие таким свойством, являются широко используемым инструментом в изучении различных проблем квантовой теории информации и в квантовых вычислениях [14–17]. Более детальное изучение характеристик квантовой запутанности, однако, требует рассмотрения соответствующих физических систем не только при помощи нерелятивистской квантовой механики, но и в рамках КТП. Это объясняет до сих пор существующий интерес к изучению вопросов квантовой запутанности и энтропии в системах с нестабильным вакуумом [19–22].

Хорошо известным примером КТП с сильными полями является так называемая картина Фарри квантовой электродинамики, в которой поле материи (дираковское поле) квантуется при помощи точных решений уравнения Дирака в магнитных полях; таким образом, соответствующие диаграммы Фейнмана точно учитывают взаимодействие с этими магнитными полями [23]. В работах [24–31] было предложено обобщение подхода Фарри на широкий класс электроподобных внешних полей, нарушающих стабильность вакуума (или, другими словами, создающих из вакуума электрон-позитронные пары). Данный класс фоновых полей ограничен полями, включающимися и выключающимися в некие начальный и конечный момент времени соответственно. В рамках этой обобщенной картины Фарри были получены многие общие результаты [32–39] и изучены конкретные квантовые эффекты; более подробный обзор может быть найден в работе [40] и более поздних исследованиях [41–45].

По аналогии с оригинальным подходом Фарри, новая формулировка основывается на квантовании дираковского поля с помощью неких подходящих точных решений уравнения Дирака, имеющих определенные однородные асимптотики на $t \to \infty$. В том случае, когда уравнение Дирака может быть решено точно для конкретного вида потенциала, общая теория [24–31] позволяет изучать, учитывая взаимодействие с внешним полем непертурбативно, любые процессы КЭД, как в нулевом порядке по радиационному взаимодействию (без фотонов), так и с любым количеством фотонов. Случаи, когда точное решение уравнения Дирака может быть найдено явно, аналитически, называются точно решаемыми случаями. Полный список известных точных решений релятивистских волновых уравнений может быть найден в работе [46]. В КЭД с электрическими потенциалами, представляющими собой временные ступени, существует несколько точно решаемых случаев, имеющих реальное физическое значение. Это так называемое заутеровское (Sauter-like), или адиабатическое, электрическое поле [6, 42, 47], T-постоянное электрическое поле (однородное электрическое поле, эффективно действующее на протяжении достаточно долгого, но конечного временного интервала T) [37–39, 42–45, 48, 49], экспоненциально убывающее электрическое поле [50], и некоторые их комбинации.

Однако, существует множество физически интересных ситуаций, когда внешнее поле формально не включается и не выключается при $t \to \pm\infty$, и, таким образом, соответствующий потенциал не является зависящей от времени ступенью. В качестве примера можно привести не зависящие от времени неоднородные поля, сконцентрированные в ограниченных областях пространства. Такие поля представляют собой некие потенциальные ступени для заряженных частиц, или, как они будут условно именоваться в дальнейшем, ступенчатые потенциалы. Электрические ступенчатые потенциалы также могут создавать частицы из вакуума (парадокс Клейна тесно связан с этим процессом [51–54]). Сразу же после оригинальной работы Клейна эта проблема была изучена Заутером, который рассмотрел как ступень Клейна [53], так и более реалистичную сглаженную потенциальную ступень [54]. Во избежание путаницы, следует различать парадокс Клейна и клейновское туннелирование через прямоугольный потенциальный барьер (см., к примеру, работы [55, 56] и включенные в них ссылки). Такое туннелирование происходит без экспоненциального подавления, когда электрон налетает на высокий потенциальный барьер, даже если его высота недостаточна для рождения частиц. Подходы, развитые для зависящих от времени электрических полей, не могут быть напрямую применены к постоянным электрическим полям, заданным потенциальными ступенями. Некоторые эвристические вычисления, касающиеся рождения частиц такими потенциальными ступенями в рамках релятивистской квантовой механики, были проделаны Никишовым [7, 57]. Позднее это исследование было продолжено Хансеном и Равндалом в работе [58]. Необходимо также упомянуть работу Дамура [59], внесшего существенный вклад в применение квазиклассических методов к изучению проблем сильных полей в астрофизике. Фактически, эта работа представляет собой первый шаг по установлению связи между подходами к изучению квантовых эффектов в потенциальных ступенях, используемыми в релятивистской квантовой механике и КТП. Используя подход Дамура, Ванг и Вонг [60] вычислили средние числа частиц, порождаемых сильным однородным электрическим полем, заключенным между двумя разнесенными на некое конечное расстояние пластинами конденсатора. Подробный исторический обзор может быть найден в работах [55, 56, 58]. Никишов протестировал свой собственный способ вычислений, используя специальный случай постоянного и однородного электрического поля, что возможно как для зависящих от времени потенциалов, так и потенциальных ступеней [7, 57, 61, 62]. На тот момент, однако, не было известно никакого обоснования таких вычислений с точки зрения КТП. В недавней работе [63], Гаврилову и Гитману удалось построить согласованную версию КЭД с электрическими полями, заданными потенциалами ступенчатого типа.

Цель и задачи

Целью диссертационной работы является изучение различных проблем сильного электрического поля в рамках квантовой электродинамики с внешними полями.

Задачи исследования:

1. Построить явный вид редуцированной измерением числа частиц матрицы плотности с вакуумным начальным условием для квантованных дираковских или

клейн-гордоновских полей в присутствии зависящего от времени электрического поля, и рассмотреть деформацию вакуумного квантового состояния, возникающую в процессе измерения классическим прибором. Вычислить сопутствующую различным редукциям потерю информации и меру квантовой запутанности соответствующих квантовых подсистем.

2. Рассмотреть конкретный пример постоянного пикового электрического поля, заданного потенциальной ступенью, состоящего из экспоненциально возрастающей и экспоненциально убывающей частей, и исследовать его различные конфигурации. Изучить дифференциальные и интегральные характеристики поля, связанные с рождением пар из вакуума.

3. Продемонстрировать унитарную эквивалентность in- и out-пространств Фока в КЭД с постоянными неоднородными внешними электрическими полями, заданными потенциальной ступенью.

4. Изучить деформацию вакуумного начального состояния под действием постоянного неоднородного внешнего электрического поля, заданного потенциальной ступенью. Построить явный вид для общей матрицы плотности, соответствующий данной системе, а также для подсистем позитронов и электронов. Найти потерю информации, спровоцированную редукцией общей матрицы плотности по одной из подсистем.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

1. Явный вид редуцированной измерением числа рожденных из вакуума частиц матрицы плотности для квантованных дираковских или клейн-гордоновских полей в присутствии зависящего от времени электрического поля. Энтропия фон Неймана для редуцированных матриц плотности, описывающих подсистемы электронов и позитронов, для различных начальных состояний системы. Энтропия фон Неймана, вычисленная для редуцированной матрицы плотности после измерения числа электронов, позитронов или пар в системе в случае вакуумного начального состояния.

2. Дифференциальные и интегральные числа частиц, рождающихся из вакуума под действием постоянного пикового электрического поля, вычисленные для трех

различных его конфигураций: медленно меняющегося поля, острого пика и существенно асимметричного пика.

3. Условие унитарной эквивалентности фоковских in- и out-пространств для квантовой электродинамики в присутствии постоянных неоднородных электрических полей, заданных потенциалами ступенчатого типа. Показано, что для реалистичных полей, ограниченных в пространстве и времени, это условие всегда выполняется.

4. Явный вид общей матрицы плотности, описывающей квантовое состояние, возникшее из начального вакуумного состояния под действием постоянного неоднородного электрического поля. Редуцированные матрицы плотности для подсистем электронов и позитронов такой системы. Энтропия фон Неймана этих матриц плотности как мера потери информации при соответствующих редукциях и как мера квантовой запутанности подсистем электронов и позитронов.

Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

В настоящее время, теория сильных полей имеет множество важных физических приложений в астрофизике, космологии, физике нейтрино, ядерной физике и физике наноструктур. Недавний прогресс в лазерной физике позволяет надеяться, что эффекты сильного поля скоро можно будет наблюдать в лабораторных условиях [64–68]. Благодаря синтезу графена и других наноматериалов, рождение частиц внешними полями теперь стало наблюдаемым эффектом [69, 70].

Случай постоянного однородного электрического поля имеет много схожих черт со случаем фона де Ситтера, см., например, работы [41, 71] и ссылки в них. В частности, эффект рождения частиц имеет решающее значение для понимания проводимости графена в нелинейном режиме [48, 72], и некоторых других эффектов [73]. Как оказалось, в определенной области, физика таких структур описывается моделью квантового поля с нестабильным вакуумом, где практически любые электрические поля могут рассматриваться как сильные. Таким образом, методы, развитые в рамках КЭД с нестабильным вакуумом, позволяют проводить непертурбативные вычисления для этих физических систем.

Все вышесказанное делает рассматриваемую теорию сильных полей не только академически интересной, но также важной и актуальной для физики конденсированного состояния.

Методология и методы исследования

При изучении эффектов сильного поля как для зависящих от времени, так и для постоянных электрических полей использовался формализм КТП, а именно так называемая обощенная картина Фарри, позволяющая точно учитывать взаимодействие квантованных полей с внешним электрическим полем в том случае, когда известны точные решения соответствующего уравнения Дирака.

Анализ потерь информации и запутанности квантовых подсистем при построении различных редукций общей матрицы плотности проводился с помощью вычисления энтропии фон Неймана.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов объясняется их внутренней самосогласованностью, а также совпадением в частных случаях с уже известными результатами.

Основные результаты диссертации докладывались на XII Международной научной конференции по гравитации, астрофизике и космологии (г. Москва, 2015), Международной конференции «Теоретическая физика и ее приложения» (г. Москва, 2015), на 17-ой Международной Байкальской летней Школе по Физике Элементарных Частиц и Астрофизике (г. Иркутск, 2015), а также научных семинарах кафедры квантовой теории поля и лаборатории квантовой теории интенсивных полей Томского государственного университета.

Публикации по материалам диссертации

По материалам диссертации опубликовано 3 статьи [39, 74, 75] в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 3 статьи в высокорейтинговых зарубежных журналах: 1 статья в журнале «Physical Review A» (импакт-фактор 2,925, квартиль 1), и 2 статьи в журнале «Physical Review D» (импакт-фактор 4,568, квартиль 1), индексируемых Web of Science и Scopus).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе обсуждаются проблемы КЭД с зависящими от времени внешними электрическими полями. После краткого обзора общего формализма квантовой электродинамики с внешним полем приводятся некоторые необходимые детали квантования полей Дирака с зависящими от времени потенциалами. После этого, приводится явный вид матриц плотности для различных начальных состояний системы с зависящими от времени электрическими полями, и редукции этих матриц плотности. Для каждого из рассматриваемых начальных состояний вычисляется энтропия, и в качестве конкретного примера рассматривается так называемое T-постоянное поле.

Вторая глава посвящена изучению проблем КЭД с постоянными неоднородными электрическими полями, заданными потенциалами ступенчатого типа. Как и в первой главе, после обзора общего формализма этой КЭД обсуждаются некоторые важные моменты квантования. На основе общей теории рассматривается пример так называемого пикового поля; кроме того, демонстрируется унитарная эквивалентность фоковских in- и out-пространств в данной КЭД. Изучается деформация начального вакуумного состояния под действием внешнего поля и строится соответствующая такой системе матрица плотности. Вычисляются ее различные редукции и сопутствующая им потеря информации при помощи энтропии фон Неймана. Полученные результаты иллюстрируются при помощи так называемого L-постоянного электрического поля.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в работе и выносимые на защиту, а также предложены возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Я глубоко признателен Сергею Петровичу Гаврилову и Дмитрию Максимовичу Гитману за помощь, оказанную в создании этой работы. Также я хотел бы выразить признательность всем сотрудникам кафедры квантовой теории поля и лаборатории квантовой теории интенсивных полей ТГУ за дружественную атмосферу и благоприятные условия труда.

Глава 1 КЭД в однородном электрическом поле, заданном зависящим от времени потенциалом

Как упоминалось во Введении, детальный формализм квантовой электродинамики с внешними полями был развит Гитманом и другими (см. работы [24, 25, 40]). Полезно, однако, будет привести наиболее важные моменты данной теории для ясности изложения.

Лагранжиан рассматриваемой теории имеет следующий общий вид:

$$
\begin{aligned}
&L = L_\gamma + L_e + L_{\text{int}}, \quad L_{\text{int}} = -j_\mu A^\mu, \quad j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\
&L_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\
&L_e = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0,
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

где $A^\mu(x)$ – это потенциалы электромагнитного поля, тогда как $\psi(x)$ – спинорное, или дираковское поле. Соответствующие уравнения движения таковы:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\nu F^{\nu\mu} - j^\mu = \Box A^\mu - \partial^\mu\left(\partial_\nu A^\nu\right) - j^\mu = 0, \\
&\left(i\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m\right)\psi = 0.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Рассматриваемая теория является калибровочной и обладает Абелевым калибровочным преобразованием вида

$$
A^\mu \to A^\mu = A^\mu + \partial^\mu\xi, \quad \psi \to \psi' = \exp\left\{-ie\xi\right\}\psi. \tag{1.3}
$$

При квантовании теорий, обладающих калибровочной симметрией, возникает рядом хорошо известных проблем, решать которые можно различными способами. Одним из таких способов является переход от исходного калибровочно-инвариантного лагранжиана (1.3) к другому, который, хотя и описывает физически эквивалентную теорию, не является более калибровочно-инвариантным. Поэтому, в дальнейшем выражение

$$L_\gamma = -\frac{1}{2}A^{\mu,\nu}A_{\mu,\nu},\ A^{\mu,\nu} = \partial^\nu A^\mu \tag{1.4}$$

будет использоваться в качестве лагранжиана для электромагнитного поля. Оно на четыре-дивергенцию отличается от лагранжиана

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2, \tag{1.5}$$

соответствующего фейнмановской калибровке. Тогда уравнения движения в электромагнитном секторе меняются и принимают вид

$$\Box A^\mu - j^\mu = 0, \tag{1.6}$$

откуда, ввиду закона сохранения тока $\partial_\mu j^\mu = 0$, следует, что

$$\Box\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{1.7}$$

Для перехода к гамильтонову формализму необходимо определить обобщенные импульсы:

$$\begin{aligned} &\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^\mu} = -\dot{A}^\mu, \\ &p_\psi = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma^0,\ p_{\bar{\psi}} = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

В данной теории есть две связи второго рода, которые, в данном случае, исчерпывают все связи:

$$p_\psi - i\bar{\psi}\gamma^0 = 0,\quad p_{\bar{\psi}} = 0. \tag{1.9}$$

Гамильтониан системы с учетом вышесказанного принимает вид

$$H = H_\gamma + H_e + H_{\text{int}}, \tag{1.10}$$

где его слагаемые определены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
H_\gamma &= \frac{1}{2}\int \left(-\pi^2 + A^{\mu,i}A_{\mu,i}\right) d\mathbf{x},\ i = 0,1,2;\\
H_e &= \int \bar{\psi}\left(x\right)\left(-\gamma\bar{\nabla} + m\right)\psi d\mathbf{x},\\
H_{\text{int}} &= \int j_\mu\left(x\right) A^\mu\left(x\right) d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Отличные от нуля одновременные коммутационные соотношения можно записать как

$$
\begin{aligned}
&\left[A^\mu(x), \pi_\nu(y)\right]_- = i\delta^\mu_\nu \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right),\\
&\left[\psi\left(x\right), \bar{\psi}\left(y\right)\right]_+ = \gamma^0\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right),\ x^0 = y^0.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Операторы поля $\varphi\left(x\right)$ в представлении взаимодействия связаны с соответствующими операторами $\varphi\left(\mathbf{x}\right)$ в представлении Шредингера следующим образом:

$$
\varphi\left(x\right) = e^{iH_0t}\varphi\left(\mathbf{x}\right)e^{-iH_0t}. \tag{1.12}
$$

Выбирая теперь в качестве H_0 сумму гамильтонианов H_γ и H_e,

$$
H_0 = H_\gamma + H_e, \tag{1.13}
$$

можно видеть, что в представлении взаимодействия операторы электромагнитного $A^\mu(x)$ и спинорного $\psi(x)$ полей удовлетворяют свободным уравнениям движения. Так, для оператора $A^\mu(x)$ это уравнение имеет вид

$$
\Box A^\mu(x) = 0. \tag{1.14}
$$

Следовательно, его можно представить в виде

$$
A^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{3}\int\left[c_n f_n^\mu(x) + c_n^\dagger f_n^{\mu *}(x)\right] d\mathbf{k},\quad n = \left(\mathbf{k},\lambda\right), \tag{1.15}
$$

где $f_n^{\mu}(x)$ – волновая функция фотона,

$$f_n^{\mu}(x) = \frac{\exp\left(-ikx\right)}{\sqrt{\left(2\pi\right)^3 2k_0}} e^{\mu}\left(\mathbf{k}, \lambda\right), \ k_0 = \left|\mathbf{k}\right|; \tag{1.16}$$

$e^{\mu}\left(\mathbf{k}, \lambda\right)$ – четыре линейно независимых вектора поляризации, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} e_{\mu}\left(\mathbf{k}, \lambda\right) e^{\mu *}\left(\mathbf{k}, \lambda'\right) = \eta_{\lambda\lambda'}, \\ \sum_{\lambda} e_{\mu}\left(\mathbf{k}, \lambda\right) \eta_{\lambda\lambda} e_{\nu}^{*}\left(\mathbf{k}, \lambda\right) = \eta_{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Отсюда следуют соотношения ортонормальности для волновых функций фотона

$$\begin{gathered} \left(f_n, f_{n'}\right) = \eta_{\lambda\lambda'} \delta\left(\mathbf{k} - \mathbf{k}'\right), \ \left(f_n, f_{n'}^{*}\right) = 0, \\ (f, g) = i \int f^{*}(x) \left(\overleftarrow{\partial}_0 - \overrightarrow{\partial}_0\right) g(x) d\mathbf{x}. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Коммутационные соотношения (1.11) для шредингеровых операторов с учетом связей, наличествующих в системе, приводят к одновременным коммутационным соотношениям для операторов $A^{\mu}(x)$ в представлении взаимодействия

$$\begin{gathered} \left[\dot{A}_{\mu}(x), A_{\nu}(y)\right]_{-} = i\eta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)\right]_{-} = 0, \ x^0 = y^0, \end{gathered} \tag{1.19}$$

из которых следуют коммутационные соотношения для фотонных операторов $c_n^{\dagger}$, c_n:

$$\begin{gathered} \left[c_n, c_{n'}^{\dagger}\right]_{-} = -\eta_{\lambda\lambda'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \left[c_n, c_{n'}\right]_{-} = \left[c_n^{\dagger}, c_{n'}^{\dagger}\right]_{-} = 0. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Здесь операторы c_n интерпретируются как операторы уничтожения фотонов, а операторы $c_n^{\dagger}$ как операторы рождения фотонов.

Гамильтониан H_γ можно выразить через операторы $A^\mu(x)$ как

$$H_\gamma = \frac{1}{2}\int(\dot{A}_i^2 - \dot{A}_0^2 + A_{k,i}^2 - A_{0,i}^2)d\mathbf{x},$$

а его нормальная форма в терминах фоковских операторов рождения и уничтожения c_n и $c_n^\dagger$ имеет вид

$$H_\gamma = -\sum_{\lambda=0}^{3}\eta_{\lambda\lambda}\int k_0 c_n^\dagger c_n d\mathbf{k}. \tag{1.21}$$

Физическое подпространство состояний при этом выделяется условием

$$(c_{\mathbf{k}0} - c_{\mathbf{k}3})\,|\Psi\rangle = 0. \tag{1.22}$$

Спинорное поле $\psi\,(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi\,(x) = 0. \tag{1.23}$$

Пусть ${}_\pm\varphi_n(x)$ – решения уравнения Дирака, соответствующие положительной $(+)$ и отрицательной $(-)$ энергиям. Например, если квантовые числа n представляют собой импульс $\mathbf{p}$ и спиновое квантовое число s, то решения ${}_\pm\varphi_n(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&{}_+\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,p_0}}e^{-ipx}u_s(\mathbf{p}),\\
&{}_-\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\,p_0}}e^{ipx}v_s(\mathbf{p}),\\
&p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},\\
&(\gamma^\mu p_\mu - m)\,u_s(\mathbf{p}) = (\gamma^\mu p_\mu + m)\,v_s(\mathbf{p}) = 0.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Спиноры $u_s(\mathbf{p})$ и $v_s(\mathbf{p})$ нормируются при помощи условий

$$\begin{aligned}
&u_s^\dagger(\mathbf{p})u_{s'}(\mathbf{p}) = v_s^\dagger(\mathbf{p})v_{s'}(\mathbf{p}) = \delta_{ss'}\frac{p_0}{m},\\
&u_s^\dagger(\mathbf{p})v_{s'}(\mathbf{p}) = 0,
\end{aligned} \tag{1.25}$$

и, таким образом, условия ортонормальности для решений (1.24) принимают вид

$$\int {}_{\lambda}\varphi_n^{\dagger}(x)\ {}_{\lambda'}\varphi_{n'}(x)d\mathbf{x} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{nn'},\ \delta_{nn'} = \delta_{ss'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{1.26}$$

Кроме того, для функций $\varphi_n(x)$ имеет место соотношение полноты

$$\sum_{\lambda n}\ {}_{\lambda}\varphi_n(x)\ {}_{\lambda}\varphi_n^{\dagger}(y) = \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\right),\quad x^0 = y^0. \tag{1.27}$$

В этом выражении (и далее) суммирование по полному набору квантовых чисел n подразумевает, в частности, интегрирование по импульсу $\mathbf{p}$.

Спинорное поле $\psi\left(x\right)$ можно разложить по решениям (1.24) следующим образом:

$$\psi\left(x\right) = \sum_n\left[a_n\ {}_{+}\varphi_n(x) + b_n^{+}\ {}_{-}\varphi_n(x)\right]. \tag{1.28}$$

Коммутационные соотношения (1.11) для спинорного поля $\psi\left(x\right)$ подразумевают, что a_n, $a_n^{\dagger}$ и b_n, b_n^{+} являются фермионными операторами рождения и уничтожения,

$$\begin{aligned}&\left[a_n, a_m^{\dagger}\right]_+ = \left[b_n, b_m^{+}\right]_+ = \delta_{nm},\\&\left[a_n, a_m\right]_+ = \left[b_n, b_m\right]_+ = 0.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Операторы $a_n^{\dagger}$, a_n можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения электронов, а операторы b_n^{+}, b_n как операторы рождения и уничтожения позитронов. С помощью этих операторов и операторов рождения и уничтожения фотонов (1.20), $c_n^{\dagger}$ и c_n, строится фоковское пространство, которое интерпретируется как пространство начальных (in) и конечных (out) состояний. Общий вид вектора с определенным числом частиц в этом пространстве таков:

$$b_n^{+}\ldots a_m^{\dagger}\ldots c_k^{\dagger}\ldots|0\rangle, \tag{1.30}$$

где $|0\rangle$ соответствует вакуумному вектору, определенному условиями

$$c_n|0\rangle = a_n|0\rangle = b_n|0\rangle = 0. \tag{1.31}$$

Оператор рассеяния, или S-матрица, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\substack{t\to\infty,\\ t'\to-\infty}} \exp\{iH_0 t\} \exp\{-iH(t-t')\} \exp\{-iH_0 t'\} \\ &= T\exp\left\{-i\int j_\mu(x) A^\mu dx\right\},\ j^\mu(x) = \frac{e}{2}\left[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu, \psi(x)\right]_-, \end{aligned} \tag{1.32}$$

где операторы $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ приведены в представлении взаимодействия. Матричные элементы S-матрицы по состояниям (1.30) определяют амплитуды вероятностей рассеяния частиц. Приводя S-матрицу к нормальной форме с помощью теоремы Вика, можно получить явный вид разложения в ряд по радиационному взаимодействию для этих амплитуд.

Лагранжиан КЭД с внешним полем формально получается из лагранжиана КЭД путем замены

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + A_\mu^{\text{ext}}(x), \tag{1.33}$$

где $A_\mu^{\text{ext}}(x)$ – внешнее электромагнитное поле. Процедура квантования, описанная выше, может быть повторена без каких-либо изменений и в этом случае. Коммутационные соотношения (1.29) при этом не меняют своего вида. Гамильтониан КЭД с внешним полем принимает вид:

$$H = H_\gamma + H_e + H_{\text{int}} + \int j^\mu(x) A_\mu^{\text{ext}}(x) d\mathbf{x}. \tag{1.34}$$

Очевидно, что он отличается от гамильтониана (1.10) только последним слагаемым, ответственным за взаимодействие с внешним полем.

1.1 Зависящее от времени электрическое поле, заданное потенциальной ступенью

Рассмотрим кратко специальный случай КЭД с нестабильным вакуумом для квантованного дираковского или клейн-гордоновского поля с зависящими от времени электроподобным фоновым полем которое включается и выключается в бесконечно удаленные моменты времени, $t \to \pm\infty$. В качестве примера используем спинорное поле $\psi(x)$, взаимодействующее с внешним электромагнитным полем $A_\mu^{\text{ext}}(x)$. Лагранжиан такой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\partial_\mu - eA_\mu^{\text{ext}}(x)\right)\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{1.1.1}$$

а уравнение движения для поля $\psi(x)$ представляет собой уравнение Дирака во внешнем поле:

$$D\left(A_\mu^{\text{ext}}(x)\right)\psi(x) = 0,\ D\left(A_\mu^{\text{ext}}(x)\right) = \gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu^{\text{ext}}(x)\right) - m. \tag{1.1.2}$$

Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned} H_e(t) &= \int \bar{\psi}(x)\left(-i\gamma\nabla + e\gamma^\mu A_\mu^{\text{ext}}(x) + m\right)\psi(x)\,d\mathbf{x} \\ &= \int \psi^\dagger(\mathbf{x})\,\mathrm{H}_e(t)\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

где $\mathrm{H}_e(t)$ и коммутационные соотношения для шредингеровых операторов есть

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}_e(t) = \alpha\left(-i\nabla - e\mathbf{A}^{\text{ext}}(x)\right) + e\mathbf{A}_0^{\text{ext}}(x) + m\beta, \\ &\left[\psi(x), \bar{\psi}(y)\right]_+ = \gamma^0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Здесь явно подчеркнута зависимость гамильтонианов $H_e(t)$ и $\mathrm{H}_e(t)$ от времени, обусловлена возможной зависимостью от времени внешнего поля. Рассмотрим теперь задачу о рассеянии частиц в данной системе. Для этого необходимо построить состояния, соответствующие частицам в некий начальный t_{in} и конечный t_{out} моменты времени. Следует понимать, что в конечных выражениях эти моменты времени необходимо считать бесконечно удаленными в прошлое и будущее. В общем случае, однако, можно считать, что потенциалы поля не выключаются в моменты t_{in} и t_{out}. Такая ситуация может возникнуть, даже если напряженность самого поля обращается в нуль при t_{in} и t_{out}. Так, к примеру, электрическое поле вида $E_x = E_y = 0$, $E_z = E\cosh^{-2} t$ исчезает при $t \to \pm\infty$. Его потенциалы, тем не менее, отличны от нуля и друг от друга при $t \to \pm\infty$. Тогда можно видеть, что гамильтонианы $H_e(t_{\text{in}})$ и $H_e(t_{\text{out}})$ различны. В диагональном виде они принимают следующие формы:

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_e(t_{\text{in}})\ {}_{\pm}\varphi_n(\mathbf{x}) = \ {}_{\pm}\varepsilon(t_{\text{in}})\ {}_{\pm}\varphi_n(\mathbf{x}), \\
&\hat{H}_e(t_{\text{out}})\ {}^{\pm}\varphi_n(\mathbf{x}) = \ {}^{\pm}\varepsilon(t_{\text{out}})\ {}^{\pm}\varphi_n(\mathbf{x}),
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

где ${}_{\pm}\varepsilon(t_{\text{in}})$ и ${}^{\pm}\varepsilon(t_{\text{out}})$ есть соответствующие энергии в моменты t_{in} и t_{out}. Предполагается также, что наборы спиноров $\{{}_{\pm}\varphi_n(x)\}$ and $\{{}^{\pm}\varphi_n(x)\}$ полны и ортонормальны:

$$\begin{aligned}
&({}_{\zeta}\varphi_n, {}_{\zeta'}\varphi_{n'}) = \left({}^{\zeta}\varphi_n, {}^{\zeta'}\varphi_{n'}\right) = \delta_{\zeta\zeta'}\delta_{nn'},\ \zeta, \zeta' = \pm, \\
&(\varphi, \chi) = \int \varphi^{\dagger}(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \\
&\sum_{n\zeta}\ {}_{\zeta}\varphi_n(\mathbf{x})\ {}_{\zeta}\varphi_n^{\dagger}(\mathbf{y}) = \sum_{n\zeta}\ {}^{\zeta}\varphi_n(\mathbf{x})\ {}^{\zeta}\varphi_n^{\dagger}(\mathbf{y}) = \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\right).
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Шредингеров оператор поля $\psi(x)$ может быть разложен по системам $\{{}_{\pm}\varphi_n(x)\}$ и $\{{}^{\pm}\varphi_n(x)\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \sum_n \left\{a_n(t_{\text{in}})\ {}_{+}\varphi_n(\mathbf{x}) + b_n^{\dagger}(t_{\text{in}})\ {}_{-}\varphi_n(\mathbf{x})\right\}, \\
&\psi(x) = \sum_n \left\{a_n(t_{\text{out}})\ {}^{+}\varphi_n(\mathbf{x}) + b_n^{\dagger}(t_{\text{out}})\ {}^{-}\varphi_n(\mathbf{x})\right\}.
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Тогда можно построить коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения $a_n(t_{\text{in}})$, $a_n^{\dagger}(t_{\text{in}})$, $b_n(t_{\text{in}})$, $b_n^{\dagger}(t_{\text{in}})$ и $a_n(t_{\text{out}})$, $a_n^{\dagger}(t_{\text{out}})$, $b_n(t_{\text{out}})$, $b_n^{\dagger}(t_{\text{out}})$, исходя из выражений (1.1.3) и (1.1.5):

$$\begin{aligned}\left[a_n(t_{\rm in}), a_m^\dagger(t_{\rm in})\right]_+ &= \left[a_n(t_{\rm out}), a_m^\dagger(t_{\rm out})\right]_+ = \left[b_n(t_{\rm in}), b_m^\dagger(t_{\rm in})\right]_+ \\ &= \left[b_n(t_{\rm out}), b_m^\dagger(t_{\rm out})\right]_+ = \delta_{nm},\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

тогда как все остальные антикоммутаторы обращаются в нуль. В терминах этих операторов гамильтонианы $H_e(t_{\rm in})$ и $H_e(t_{\rm out})$ диагональны и имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{H}_e(t_{\rm in}) &= \sum_n \left\{ {}_+\varepsilon(t_{\rm in}) a_n^\dagger(t_{\rm in}) a_n(t_{\rm in}) + \left| {}_-\varepsilon(t_{\rm in})\right| b_n^\dagger(t_{\rm in}) b_n(t_{\rm in}) \right\}, \\ \hat{H}_e(t_{\rm out}) &= \sum_n \left\{ {}^+\varepsilon(t_{\rm out}) a_n^\dagger(t_{\rm out}) a_n(t_{\rm out}) + \left| {}^-\varepsilon(t_{\rm out})\right| b_n^\dagger(t_{\rm out}) b_n(t_{\rm out}) \right\}.\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

В дальнейшем, операторы наблюдаемых величин в шредингеровском представлении будут обозначаться как операторы со шляпой, $\hat{A}$, тогда как операторы в гейзенберговском представлении будут обозначены перевернутой шляпой, $\check{A}$.

Итак, после проведения процедуры квантования в шредингеровском представлении в начальный момент времени $t_{\rm in}$ имеется набор операторов рождения $a_n^\dagger(t_{\rm in})$ и уничтожения $a_n(t_{\rm in})$ электронов, и аналогичный набор операторов рождения $b_n^\dagger(t_{\rm in})$ и уничтожения $b_n(t_{\rm in})$ позитронов, а также вакуумный вектор для начального момента времени $|0, t_{\rm in}\rangle$; в конечный момент времени $t_{\rm out}$ имеется набор операторов рождения $a_n^\dagger(t_{\rm out})$ и уничтожения $a_n(t_{\rm out})$ электронов, соответствующие наборы $b_n^\dagger(t_{\rm out})$ и $b_n(t_{\rm out})$ для позитронов, и вакуумный вектор для конечного момента времени $t_{\rm out}$ is $|0, t_{\rm out}\rangle$, такие, что

$$a_n(t_{\rm in})|0, t_{\rm in}\rangle = b_n(t_{\rm in})|0, t_{\rm in}\rangle = 0\,,\ a_n(t_{\rm out})|0, t_{\rm out}\rangle = b_n(t_{\rm out})|0, t_{\rm out}\rangle = 0 \quad \forall n.$$

Амплитуда вероятности перехода от некого начального состояния к некому конечному состоянию $M_{\rm in\to out}$ в шредингеровском представлении принимает следующий вид:

$$M_{\rm in\to out} = \langle t_{\rm out}|U(t_{\rm out}, t_{\rm in})|t_{\rm in}\rangle,$$

где $U(t,t')$ является унитарным оператором эволюции для рассматриваемой системы. Матрица плотности начального состояния $\hat{\rho}\left(t_{\mathrm{in}}\right)$ задается операторно-значная функцией операторов рождения и уничтожения электронов (позитронов), определенных в начальный момент времени,

$$\hat{\rho}\left(t_{\mathrm{in}}\right)=\rho_{\mathrm{in}}\left(a^{\dagger}(t_{\mathrm{in}}),a(t_{\mathrm{in}}),b^{\dagger}(t_{\mathrm{in}}),b(t_{\mathrm{in}})\right).$$

Среднее значение физической величины F в финальный момент времени определяется следующим образом:

$$\langle F(t_{\mathrm{out}})\rangle=\mathrm{tr}\ \hat{\rho}(t_{\mathrm{out}})\hat{F}(t_{\mathrm{out}}), \tag{1.1.9}$$

где $\hat{\rho}(t)$ есть матрица плотности в представлении Шредингера в момент времени t, а tr обозначает операцию взятия полного следа, и матрицы плотности в начальный и конечный момент времени связаны соотношением

$$\hat{\rho}(t_{\mathrm{out}})=U\left(t_{\mathrm{out}},t_{\mathrm{in}}\right)\hat{\rho}\left(t_{\mathrm{in}}\right)U^{\dagger}\left(t_{\mathrm{out}},t_{\mathrm{in}}\right). \tag{1.1.10}$$

Для того, чтобы перейти к представлению Гейзенберга, необходимо определить конечно-временные операторы эволюции $\Omega_{(\pm)}$,

$$\begin{aligned}&\Omega_{(+)}=U\left(0,t_{\mathrm{in}}\right),\ \Omega_{(-)}=U\left(0,t_{\mathrm{out}}\right),\ U\left(t_{\mathrm{out}},t_{\mathrm{in}}\right)=\Omega_{(-)}^{\dagger}\Omega_{(+)},\\ &\check{\rho}=\hat{\rho}(0)=\Omega_{(+)}\hat{\rho}\left(t_{\mathrm{in}}\right)\Omega_{(+)}^{\dagger}=\Omega_{(-)}\hat{\rho}\left(t_{\mathrm{out}}\right)\Omega_{(-)}^{\dagger},\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

и наборы операторов рождения-уничтожения $a_n^{\dagger}(\mathrm{in})$, $a_n(\mathrm{in})$ для in-электронов, $b_n^{\dagger}(\mathrm{in})$, $b_n(\mathrm{in})$ для in-позитронов, и соответствующий им in-вакуумный вектор $|0,\mathrm{in}\rangle$; операторы рождения-уничтожения $a_n^{\dagger}(\mathrm{out})$, $a_n(\mathrm{out})$ для out-электронов, $b_n^{\dagger}(\mathrm{out})$, $b_n(\mathrm{out})$ для out-позитронов и соответствующий out-вакуумный вектор $|0,\mathrm{out}\rangle$,

$$\begin{aligned}&\{a(\mathrm{in}),\cdots\}=\Omega_{(+)}\{a(t_{\mathrm{in}}),\cdots\}\Omega_{(+)}^{\dagger},\ |0,\mathrm{in}\rangle=\Omega_{(+)}|0,t_{\mathrm{in}}\rangle,\\ &\{a\left(\mathrm{out}\right),\cdots\}=\Omega_{(-)}\{a(t_{\mathrm{out}}),\cdots\}\Omega_{(-)}^{\dagger},\ |0,\mathrm{out}\rangle=\Omega_{(-)}|0,t_{\mathrm{out}}\rangle,\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

а амплитуды перехода из произвольного начального в произвольное конечное состояние $M_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}}$ и вакуум-вакуумного перехода определяются с их помощью в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
& M_{\mathrm{in}\to\mathrm{out}} = \langle 0, t_{\mathrm{out}}| \cdots a(t_{\mathrm{in}})\Omega^{\dagger}_{(-)}\Omega_{(+)}a^{\dagger}_{n}(t_{\mathrm{in}}) \cdots |0, t_{\mathrm{in}}\rangle \\
& \ = \langle 0, \mathrm{out}| \cdots a(\mathrm{out})a^{\dagger}_{n}(\mathrm{in}) \cdots |0, \mathrm{in}\rangle, \\
& c_v = \langle 0, t_{\mathrm{out}}|U\left(t_{\mathrm{out}}, t_{\mathrm{in}}\right)|0, t_{\mathrm{in}}\rangle = \langle 0, \mathrm{out}|0, \mathrm{in}\rangle.
\end{aligned} \tag{1.1.13}
$$

Вся информация, касающаяся процессов рождения, уничтожения и рассеяния частиц, содержится в следующих элементарных амплитудах вероятности:

$$
\begin{aligned}
& w\left(+|+\right)_{mn} = c_v^{-1}\langle 0, \mathrm{out}\left|a_m(\mathrm{out})a^{\dagger}_n(\mathrm{in})\right| 0, \mathrm{in}\rangle, \\
& w\left(-|-\right)_{nm} = c_v^{-1}\langle 0, \mathrm{out}\left|b_m(\mathrm{out})b^{\dagger}_n(\mathrm{in})\right| 0, \mathrm{in}\rangle\,, \\
& w\left(0|-+\right)_{nm} = c_v^{-1}\langle 0, \mathrm{out}\left|b^{\dagger}_n(\mathrm{in})a^{\dagger}_m(\mathrm{in})\right| 0, \mathrm{in}\rangle\,, \\
& w\left(+-|0\right)_{mn} = c_v^{-1}\langle 0, \mathrm{out}\left|a_m(\mathrm{out})b_n(\mathrm{out})\right| 0, \mathrm{in}\rangle\,.
\end{aligned} \tag{1.1.14}
$$

Амплитуды (1.1.14) могут быть вычислены с помощью специальных подходящих наборов решений соответствующего релятивистского волнового уравнения с внешним полем (уравнений Клейна-Гордона, Дирака, и так далее) [24, 25, 40]. Наиболее интересен случай внешнего поля, которое не перемешивает различные квантовые моды (т.е. решения с различными наборами квантовых чисел n). В этом случае амплитуды (1.1.14) диагональны по квантовым числам,

$$
\begin{aligned}
& w\left(\zeta|\zeta\right)_{mn} = \delta_{mn} w\left(\zeta|\zeta\right)_{nn}\,, \\
& w\left(0|-+\right)_{nm} = \delta_{mn} w\left(0|-+\right)_{nn}\,, \\
& w\left(+-|0\right)_{nm} = \delta_{mn} w\left(+-|0\right)_{nn}\,.
\end{aligned}
$$

Наборы in- и out-операторов связаны друг с другом набором линейных канонических преобразований [76], которые могут быть переписаны в терминах амплитуд, определенных в формуле (1.1.14)[1]:

$$
\begin{aligned}
a(\text{out}) &= \left[w\left(+|+\right)^{\dagger}\right]^{-1} a(\text{in}) - \kappa w\left(+-|0\right)\left[w\left(-|-\right)\right]^{-1} b^{\dagger}(\text{in}),\\
b^{\dagger}(\text{out}) &= \left[w\left(+|+\right)^{\dagger}\right]^{-1} w\left(+-|0\right)^{\dagger} a(\text{in}) + \left[w\left(-|-\right)\right]^{-1} b^{\dagger}(\text{in}),
\end{aligned}
\tag{1.1.15}
$$

и их эрмитово-сопряженных амплитуд. Как было показано в работах [24, 25, 40]), такая связь может быть установлена при помощи унитарного оператора V,

$$
V\left\{a\left(\text{out}\right), \cdots\right\} V^{\dagger} = \left\{a\left(\text{in}\right), \cdots\right\}, \quad |0, \text{in}\rangle = V|0, \text{out}\rangle\,,
\tag{1.1.16}
$$

имеющего вид $V = v_4 v_3 v_2 v_1$, где

$$
\begin{aligned}
&v_1 = \exp\left\{-\kappa b(\text{out}) w\left(0|-+\right) a(\text{out})\right\}\,,\ v_2 = \exp\left\{a^{\dagger}(\text{out}) \ln w\left(+|+\right) a(\text{out})\right\}\,,\\
&v_3 = \exp\left\{-\kappa b(\text{out}) \ln w\left(-|-\right) b^{\dagger}(\text{out})\right\}\,,\ v_4 = \exp\left\{-\kappa a^{\dagger}(\text{out}) w\left(+-|0\right) b^{\dagger}(\text{out})\right\}\,.
\end{aligned}
\tag{1.1.17}
$$

Используя явный вид оператора данного оператора V, можно найти, что

$$
c_v = \langle 0, \text{out}|V|0, \text{out}\rangle = \exp\left\{-\kappa \text{tr} \ln w\left(-|-\right)\right\}\,.
\tag{1.1.18}
$$

1.2 Матрицы плотности

Удобно ввести производящий оператор $\check{R}(J)$, который позволяет конструировать матрицы плотности $\check{\rho}$ для различных начальных условий (для различных состояний системы в начальный момент времени t_{in}). Этот производящий оператор выгля-

[1]Здесь и далее используются сокращенные обозначения, например

$$
bw\left(0|-+\right) a = \sum_{n,m} b_n w\left(0|-+\right)_{nm} a_m\,.
$$

дит следующим образом [38]:

$$
\begin{aligned}
&\check{R}(J) = Z^{-1}(J)\underline{\check{R}}(J),\ \mathrm{tr}\check{R}(J) = 1,\ \ Z(J) = \mathrm{tr}\underline{\check{R}}(J)\ , \\
&\underline{\check{R}}(J) = :\exp\left[\sum_n \left[a_n^\dagger(\mathrm{in})\left(J_{n,+}-1\right)a_n(\mathrm{in}) + b_n^\dagger(\mathrm{in})\left(J_{n,-}-1\right)b_n(\mathrm{in})\right]\right]:\ ,
\end{aligned} \tag{1.2.1}
$$

где переменные $J_{n,\zeta}$ являются источниками для электронных ($\zeta = +$) или позитронных ($\zeta = -$) in-операторов, Z – нормировочный множитель (статистическая сумма), а двоеточия $:\cdots:$ здесь и далее означает нормальную форму по отношению к тем операторам рождения и уничтожения, которые заключены между двоеточиями.

Матрица плотности (1.2.1) может быть представлена в терминах out-операторов следующим образом [38]:

$$
\begin{aligned}
&\check{R}(J) = Z^{-1}(J)\left|c_{\mathrm{v}}\right|^2 \det\left(1+\kappa AB\right)^{\kappa}\underline{\check{R}}(J), \\
&\underline{\check{R}}(J) = :\exp\left[-a^\dagger(\mathrm{out})\left(1-D_+\right)a(\mathrm{out}) - b^\dagger(\mathrm{out})\left(1-D_-\right)b(\mathrm{out})\right. \\
&\left.\ -a^\dagger(\mathrm{out})C^\dagger b^\dagger(\mathrm{out}) - b(\mathrm{out})Ca(\mathrm{out})\right]:\ , \\
&D_+ = w\left(+|+\right)\left(1+\kappa AB\right)^{-1}\mathbb{J}_+ w\left(+|+\right)^\dagger\ , \\
&D_-^T = w\left(-|-\right)^\dagger \mathbb{J}_-\left(1+\kappa BA\right)^{-1} w\left(-|-\right)\ ,\ \ A\left(J\right) = \mathbb{J}_+ B^\dagger \mathbb{J}_-, \\
&C = w\left(-|-\right)^\dagger \mathbb{J}_- B\left(1+\kappa AB\right)^{-1}\mathbb{J}_+ w\left(+|+\right)^\dagger + \kappa w\left(+-|0\right)^\dagger\ , \\
&B = \kappa w\left(0|-+\right)\ ,\ \mathbb{J}_{mn,\zeta} = \delta_{mn}J_{n,\zeta},
\end{aligned} \tag{1.2.2}
$$

где $\kappa = +1$ для фермионного случая и $\kappa = -1$ для бозонного случая. Нормировочный множитель Z в этом случае имеет вид

$$
Z(J) = \exp\left\{\kappa\sum_{n,\zeta}\left[\ln\left(1+\kappa J_{n,\zeta}\right)\right]\right\} = \prod_{n,\zeta}\left[1+\kappa J_{n,\zeta}\right]^{\kappa}. \tag{1.2.3}
$$

Далее будут рассмотрены два важных случая для матрицы плотности, соответствующие начальному вакуумному состоянию системы и начальному равновесному состоянию системы.

а) Полагая $J = 0$ и используя хорошо известную формулу Березина для вакуумного проектора [76], можно получить выражение для матрицы плотности $\check{\rho}\,(0)$, соответствующей вакуумному начальному состоянию системы

$$\check{\rho}(0) = :\exp\left\{-\sum_n\left[a_n^\dagger(\mathrm{in})\;a_n(\mathrm{in})\;+\;b_n^\dagger(\mathrm{in})\;b_n(\mathrm{in})\right]\right\}\;: = |0,\mathrm{in}\rangle\langle 0,\mathrm{in}|. \qquad (1.2.4)$$

При помощи уравнений (1.2.2) данный оператор может быть представлен в терминах out-операторов как

$$\check{\rho}\,(0) = \;|c_{\mathrm{v}}|^2 : \exp\left\{-\sum_n\left[a_n^\dagger(\mathrm{out})a_n(\mathrm{out}) + b_n^\dagger(\mathrm{out})b_n(\mathrm{out})\right.\right.$$
$$\left.\left.+\kappa a_n^\dagger(\mathrm{out})w\,(+-|0)_{nn}\,b_n^\dagger(\mathrm{out}) + \kappa b_n(\mathrm{out})w\,(+-|0)_{nn}^\dagger\,a_n(\mathrm{out})\right]\right\} : \;. \qquad (1.2.5)$$

Дифференциальные средние числа частиц $N_{n,\zeta}(0|\mathrm{in})$ для in-электронов и позитронов в состоянии, описываемом матрицей $\check{\rho}(0)$, равны нулю,

$$N_{n,+}(0|\mathrm{in}) = \mathrm{tr}\check{\rho}(0)a_n^\dagger(\mathrm{in})a_n(\mathrm{in}) = 0, \quad N_{n,-}(0|\mathrm{in}) = \mathrm{tr}\check{\rho}(0)b_n^\dagger(\mathrm{in})b_n(\mathrm{in}) = 0,$$

тогда как дифференциальные средние числа $N_{n,\zeta}(0|\mathrm{out})$ для out-электронов и позитронов в этом состоянии,

$$N_{n,+}(0|\mathrm{out}) = \mathrm{tr}\;\check{\rho}\,(0)\,a_n^\dagger(\mathrm{out})a_n(\mathrm{out}), \quad N_{n,-}(0|\mathrm{out}) = \mathrm{tr}\;\check{\rho}\,(0)\,b_n^\dagger(\mathrm{out})b_n(\mathrm{out}),$$

равны друг другу и имеют вид

$$N_{n,+}(0|\mathrm{out}) = N_{n,-}(0|\mathrm{out}) = N_n(0|\mathrm{out})\;,\; N_n(0|\mathrm{out}) = \frac{|w\,(+-|0)_{nn}\,|^2}{1+\kappa|w\,(+-|0)_{nn}\,|^2}. \qquad (1.2.6)$$

б) Чтобы получить матрицу плотности $\check{\rho}(\beta)$, соответствующую равновесному начальному состоянию, необходимо положить источники $J_{n,\zeta} = J_{n,\zeta}\,(\beta)$ равными

$$J_{n,\zeta}\,(\beta) = e^{-E_{n,\zeta}}, \;\; E_{n,\zeta} = \beta\,(\varepsilon_{n,\zeta} - \mu_\zeta)\,, \qquad (1.2.7)$$

где $\varepsilon_{n,\zeta}$ означают энергии электронов $(\zeta = +)$ и позитронов $(\zeta = -)$ с квантовыми числами n; μ_ζ являются соответствующими химическими потенциалами, а параметр $\beta = \Theta^{-1}$ представляет собой обратную абсолютную температуру [38]. Легко проверить, что явное выражение для матрицы $\check{\rho}(\beta)$ в терминах in-операторов выглядит следующим образом:

$$\check{\rho}(\beta) = Z_{gr}^{-1} \exp\left[-\beta\left(\check{H} - \sum_\zeta \mu_\zeta \check{N}_\zeta\right)\right],$$
$$Z_{gr} = \exp\left[\kappa \sum_{n\zeta} \ln\left(1 + \kappa e^{-E_{n,\zeta}}\right)\right]. \quad (1.2.8)$$

В этом выражении величина Z_{gr} является статистической суммой большого канонического ансамбля, $\check{H}$ – гамильтониан обсуждаемой системы (записанный в терминах in-операторов)

$$\check{H} = \sum_n \left[a_n^\dagger(\text{in})\varepsilon_{n,+}a_n(\text{in}) + b_n^\dagger(\text{in})\varepsilon_{n,-}b_n(\text{in})\right],$$

при этом

$$\check{N}_+ = \sum_n \left[a_n^\dagger(\text{in})a_n(\text{in})\right], \quad \check{N}_- = \sum_n \left[b_n^\dagger(\text{in})b_n(\text{in})\right]$$

представляют собой операторы чисел in-электронов и in-позитронов, соответственно.

Пусть $\check{\rho}$ является общей матрицей плотности для некого произвольного начального состояния, $N_{n,\zeta}(\cdots|\text{in})$ – дифференциальные средние числа in-электронов и позитронов в состоянии, описываемом матрицей $\check{\rho}$, а $N_{n,\zeta}(\cdots|\text{out})$ – дифференциальные средние числа out-электронов и позитронов в состоянии $\check{\rho}$,

$$N_{n,+}(\cdots|\text{in}) = \text{tr}\ \check{\rho}a_n^\dagger(\text{in})a_n(\text{in}), \quad N_{n,-}(\cdots|\text{in}) = \text{tr}\check{\rho}b_n^\dagger(\text{in})b_n(\text{in}),$$
$$N_{n,+}(\cdots|\text{out}) = \text{tr}\ \check{\rho}a_n^\dagger(\text{out})a_n(\text{out}), \quad N_{n,-}(\cdots|\text{out}) = \text{tr}\check{\rho}b_n^\dagger(\text{out})b_n(\text{out})\ . \quad (1.2.9)$$

Вычисляя следы в этих выражениях по базису in-состояний, можно видеть, что [38]

$$N_{n,\zeta}(\cdots|\mathrm{out}) = N_{n,\zeta}(\cdots|\mathrm{in}) + N_n(0|\mathrm{out})\left\{1 - \kappa\left[N_{n,+}(\cdots|\mathrm{in}) + N_{n,-}(\cdots|\mathrm{in})\right]\right\}. \tag{1.2.10}$$

В частности, дифференциальные средние числа $N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})$ in-электронов или позитронов в состояниях $\check{\rho}(\beta)$ являются хорошо известными распределениями Ферми-Дирака ($\kappa = +1$) или Бозе-Эйнштейна ($\kappa = -1$),

$$\begin{aligned} N_{n,+}(\beta|\mathrm{in}) &= \mathrm{tr}\ \check{\rho}(\beta) a_n^\dagger(\mathrm{in}) a_n(\mathrm{in}) = (e^{E_{n,+}} + \kappa)^{-1}, \\ N_{n,-}(\beta|\mathrm{in}) &= \mathrm{tr}\ \check{\rho}(\beta) b_n^\dagger(\mathrm{in}) b_n(\mathrm{in}) = (e^{E_{n,-}} + \kappa)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Дифференциальные средние числа $N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{out})$ для out-электронов или позитронов в состоянии $\check{\rho}(\beta)$ легко получить непосредственно из уравнения (1.2.10).

1.2.1 Редуцированные матрицы плотности для электронной и позитронной подсистем

В любой выбранный момент времени полную систему частиц можно условно разделить на две подсистемы: электронов и позитронов. Пусть внешнее электрическое поле выключается в некий достаточно удаленный в будущее момент времени t_2; при этом для любого $t_{\mathrm{out}} > t_2$ рождения частиц уже не происходит, и подсистемы электронов и позитронов разделены пространственно (из-за действия внешнего поля). Таким образом, рождение частиц зависящим от времени однородным полем обеспечивает реальное разделение полной квантовой системы на две подсистемы. Можно ввести так называемые редуцированные матрицы плотности $\check{\rho}_\pm$ для электронной и позитронной подсистем. Эти матрицы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \check{\rho}_+ &= \mathrm{tr}_-\check{\rho} = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\{m\}} (M!)^{-1}\ {}_b\langle M, \mathrm{out}|\check{\rho}|M, \mathrm{out}\rangle_b\,, \\ \check{\rho}_- &= \mathrm{tr}_+\check{\rho} = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\{m\}} (M!)^{-1}\ {}_a\langle M, \mathrm{out}|\check{\rho}|M, \mathrm{out}\rangle_a, \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

с состояниями ${}_{a/b}\langle M,\mathrm{out}|$,

$$
\begin{aligned}
{}_b\langle M,\mathrm{out}| &= {}_b\langle 0,\mathrm{out}|b_{m_M}(\mathrm{out})\dots b_{m_1}(\mathrm{out}),\\
{}_a\langle M,\mathrm{out}| &= {}_a\langle 0,\mathrm{out}|a_{m_M}(\mathrm{out})\dots a_{m_1}(\mathrm{out}),
\end{aligned}
$$

где $\check{\rho}$ – матрица плотности полной системы, $|0,\mathrm{out}\rangle_a$ и $|0,\mathrm{out}\rangle_b$ – электронный и позитронный вакуум соответственно ($a_m(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_a = 0$, $b_m(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_b = 0$, $|0,\mathrm{out}\rangle = |0,\mathrm{out}\rangle_a \otimes |0,\mathrm{out}\rangle_b$), а $\mathrm{tr}_\pm$ – так называемые редуцированные следы. Очевидно, что редуцированные матрицы плотности $\check{\rho}_\pm$ описывают смешанные состояния даже в том случае, когда исходная матрица плотности $\check{\rho}$ описывает чистое состояние.

Редуцированные матрицы плотности $\check{\rho}_\pm$ можно получить из редуцированных производящих функционалов $\check{R}_\pm(J)$, определенных следующим образом:

$$
\check{R}_\pm(J) = \mathrm{tr}_\mp \check{R}(J)\ . \tag{1.2.13}
$$

В терминах out-операторов они имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\check{R}_+(J) = Z_+^{-1}(J)\ :\exp\left\{-\sum_n a_n^\dagger(\mathrm{out})\left[1-K_+(J)\right]_{nn} a_n(\mathrm{out})\right\}:,\\
&\check{R}_-(J) = Z_-^{-1}(J)\ :\exp\left\{-\sum_n b_n^\dagger(\mathrm{out})\left[1-K_-(J)\right]_{nn} b_n(\mathrm{out})\right\}:,\\
&K_\pm(J) = D_\pm + C^\dagger\left(1+\kappa D_\mp^T\right)^{-\kappa} C\,,\\
&Z_\pm^{-1}(J) = Z^{-1}(J)\left|c_\mathrm{v}\right|^2 \det(1+\kappa AB)^\kappa \det(1+\kappa D_\mp)^\kappa\ .
\end{aligned} \tag{1.2.14}
$$

Редуцированные производящие функционалы $\check{R}_\pm(J)$ позволяют получать редуцированные матрицы плотности для различных начальных состояний системы. Необходимо рассмотреть два наиболее важных случая начальных состояний для такой системы:

а) Полагая $J = 0$ в (1.2.14), получим редуцированные матрицы плотности $\check{\rho}_\zeta(0) = \check{R}_\zeta(0)$ для обеих подсистем, если полная система в начальный момент времени находилась в вакуумном состоянии. Принимая во внимание тот факт, что

$$K_{\pm}(0) = |w(+-|0)|^2 = P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1},$$
$$Z_{\pm}^{-1}(0) = |c_{\mathrm{v}}|^2 = P_{\mathrm{v}}, \quad P(+-|0) = |\langle 0, \mathrm{out}\, |a_n(\mathrm{out})b_n(\mathrm{out})|\, 0, \mathrm{in}\rangle|^2,$$

где $P(+-|0)$ и P_{v} являются вероятностями рождения пары и вероятности вакуума остаться вакуумом соответственно, получим явное выражение для $\check{\rho}_{\zeta}(0)$:

$$\check{\rho}_{+}(0) = \check{R}_{+}(0) = |c_{\mathrm{v}}|^2 \; : \exp\left\{ -\sum_n a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \left[1 - P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right]_{nn} a_n(\mathrm{out}) \right\} : ,$$
$$\check{\rho}_{-}(0) = \check{R}_{-}(0) = |c_{\mathrm{v}}|^2 \; : \exp\left\{ -\sum_n b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \left[1 - P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right]_{nn} b_n(\mathrm{out}) \right\} : . \tag{1.2.15}$$

Необходимо отметить, что редуцированные матрицы плотности (1.2.15) в первый раз были получены в работах [77].

b) Полагая источники J в выражении (1.2.14) равными $J_{n,\zeta}(\beta)$ из уравнения (1.2.7), можно увидеть, что редуцированные производящие операторы (1.2.14) превращаются в матрицы плотности системы, находившейся в термодинамическом равновесии в начальный момент времени, $\check{R}_{+}(J) = \check{\rho}_{+}(\beta)$ и $\check{R}_{-}(J) = \check{\rho}_{-}(\beta)$.

1.2.2 Декогеренция в ходе эволюции

В предыдущих разделах предполагалось, что потеря информации в системе происходит при усреднении по одной из подсистем электронов или позитронов. Однако, потеря информации может также происходить по причине взаимодействия квантовой системы с классическими (или полуклассическими) объектами – другими словами, вследствие декогеренции. Можно представить два следующих возможных сценария такого взаимодействия: во-первых, декогеренция может произойти вследствие некоего промежуточного измерения при помощи классического прибора, и, во-вторых, в результате столкновений частиц с какими-либо полуклассическими объектами (например, вкрапления в графене). Для рассматриваемого подхода, однако, нет никакого отличия между этими двумя сценариями, поэтому в дальнейшем будет предполагаться, что источником декогеренции является измерение при помощи классического инструмента.

Рассмотрим случай, когда унитарная эволюция системы прерывается единичным промежуточным измерением. Внешнее поле начинает действовать в момент времени t_{in}, система эволюционирует унитарным образом от момента t_{in} до момента t_1 (на протяжении временного интервала T_1), далее в момент времени t_1, происходит декогеренция, и затем система снова эволюционирует унитарным образом от момента t_1 до момента t_{out} на временном интервале T_2. В этом случае в гейзенберговском представлении out-набор операторов рождения и уничтожения для электронов и позитронов интервала T_1 является in-набором операторов интервала T_2.

Предположим, что на протяжении временного интервала T_1 система описывается матрицей плотности $\breve{\rho}(0)$, т.е. система находится в вакуумном состоянии в момент t_{in}. Дифференциальные средние числа электронов и позитронов в момент времени t_1 равны числу электронов (или позитронов, или пар), рожденных внешним полем из вакуума, $N_n(0|\mathrm{out})$ (1.2.6). Из общей теории известно, что электроны и позитроны, рождающиеся в парах, обладают свойством квантовой запутанности.

На временном интервале T_2 система описывается матрицей плотности, которая будет обозначаться как $\breve{\rho}'$. Последняя в терминах in-набора операторов рождения-уничтожения для электронов и позитронов должна описывать систему без квантовых корреляций между рожденными электронами и позитронами (т.е. «начальное» состояние системы на временном интервале T_2 это состояние без всякой квантовой запутанности).

Такая матрица плотности может быть получена с использованием принципа редукции фон Неймана [78]. Пусть система находится в неком чистом состоянии, описываемом вектором состояния $|\psi\rangle$, или, что эквивалентно, матрицей плотности $\hat{\rho}$, которая в данном случае представляет собой проектор $\hat{\rho} = \hat{P}_{\psi} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Пусть также $\hat{R}$ – некая самосопряженная наблюдаемая величина данной системы. В простейшем случае, когда наблюдаемая величина имеет невырожденный дискретный спектр, имеет место следующее спектральное разложение: $\hat{R} = \sum_\alpha r_\alpha P_{\varphi_\alpha}$, где r_α – возможные собственные значения наблюдаемой величины, P_{φ_α} – проекторы на соответствующие им собственные вектора $|\varphi_\alpha\rangle$, $\hat{P}_{\varphi_\alpha} = |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|$. При измерении наблюдаемой величины $\hat{R}$ ее значения r_α будут получены с соответствующими вероятностями $|\langle\varphi_\alpha|\psi\rangle|^2 = \langle\varphi_\alpha|\hat{P}_\psi|\varphi_\alpha\rangle = \langle\varphi_\alpha|\hat{\rho}|\varphi_\alpha\rangle$; сразу же после данного измерения вектор состояния $|\psi\rangle$ превращается в вектор $|\varphi_\alpha\rangle$, а матрица плотности $\hat{\rho}$ становится матрицей $\hat{\rho}' = \hat{P}_{\varphi_\alpha}$. Более общий случай, когда система изначально находилась в смешанном состоянии, описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$ с простым дискретным спектром, $\hat{\rho} = \sum_n \lambda_n P_{\psi_n}$, $P_{\psi_n} = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, где λ_n – статистические веса соответствующих состояний P_{ψ_n}, а $\hat{R}$ это рассматриваемая наблюдаемая величина. В этом случае измерение можно описать следующим образом. Вероятность обнаружить наблюдаемую $\hat{R}$ со значением r_α при измерении есть

$$\sum_n \lambda_n |\langle\varphi_\alpha|\psi_n\rangle|^2 = \langle\varphi_\alpha|\hat{\rho}|\varphi_\alpha\rangle,$$

и сразу же после измерения матрица плотности системы $\hat{\rho}$ редуцируется до матрицы $\hat{\rho}'$,

$$\hat{\rho}' = \sum_\alpha \langle\varphi_\alpha|\hat{\rho}|\varphi_\alpha\rangle \hat{P}_{\varphi_\alpha} .$$

Схожая цепочка рассуждений, разумеется, может быть проведена и для представления Гейзенберга.

Матрица плотности $\breve{\rho}(0)$ имеет вид

$$\breve{\rho}(0) = |0, \mathrm{in}\rangle\langle 0, \mathrm{in}|. \tag{1.2.16}$$

Начальный in-вакуум, $|0, \mathrm{in}\rangle$, связан с конечным out-вакуумом $|0, \mathrm{out}\rangle$ соотношением (1.1.16). Следовательно, матрица плотности $\breve{\rho}(0)$ может быть представлена в виде

$$\breve{\rho}(0) = V|0, \mathrm{out}\rangle\langle 0, \mathrm{out}|V^\dagger. \tag{1.2.17}$$

В рассматриваемом случае различные квантовые моды не смешиваются под действием внешнего поля, и амплитуды (1.1.14) являются диагональными по квантовым числам. Следовательно, можно факторизовать унитарный оператор V, определенный выражением (1.1.16), следующим образом:

$$V = \prod_n V_n , \quad V_n = v_{4n} v_{3n} v_{2n} v_{1n} , \tag{1.2.18}$$

где операторы v принимают следующую форму:

$$\begin{aligned}
v_{1n} &= \exp\left\{-\kappa b_n(\mathrm{out}) w\left(0|-+\right)_{nn} a_n(\mathrm{out})\right\} , \\
v_{2n} &= \exp\left\{a_n^\dagger(\mathrm{out}) \left[\ln w\left(+|+\right)\right]_{nn} a_n(\mathrm{out})\right\} , \\
v_{3n} &= \exp\left\{-\kappa b_n(\mathrm{out}) \left[\ln w\left(-|-\right)\right]_{nn} b_n^\dagger(\mathrm{out})\right\} , \\
v_{4n} &= \exp\left\{-\kappa a_n^\dagger(\mathrm{out}) w\left(+-|0\right)_{nn} b_n^\dagger(\mathrm{out})\right\} .
\end{aligned}$$

Теперь, используя явный вид операторов V_n и определение (1.1.16), можно записать, что

$$|0,\mathrm{in}\rangle = c_{\mathrm{v}} \prod_n \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!} \left[\kappa w\left(+-|0\right)_{nn} a_n^\dagger(\mathrm{out}) b_n^\dagger(\mathrm{out})\right]^m |0,\mathrm{out}\rangle , \tag{1.2.19}$$

и после этого легко вычислить амплитуду вероятности вакуума остаться вакуумом, c_{v},

$$c_{\mathrm{v}} = \prod_n \left[w\left(-|-\right)_{nn}\right]^{-\kappa} . \tag{1.2.20}$$

Таким образом, после всех преобразований, матрицы плотности $\check{\rho}(0)$ (1.2.17) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
\check{\rho}(0) = |c_{\mathrm{v}}|^2 \prod_n & \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[-\kappa w\left(+-|0\right)_{nn} a_n^\dagger(\mathrm{out}) b_n^\dagger(\mathrm{out})\right]^m}{m!} \right) \\
\times \check{P}_0 \prod_{n'} & \left(\sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\left[-\kappa w\left(+-|0\right)_{n'n'}^\dagger b_{n'}(\mathrm{out}) a_{n'}(\mathrm{out})\right]^{m'}}{m'!} \right) ,
\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

где $\check{P}_0 = |0, \mathrm{out}\rangle\langle 0, \mathrm{out}|$.

1.2.3 Измерение дифференциальных средних чисел частиц в системе

Предположим, что в рассматриваемой системе проводится измерение конкретной физической величины – среднего дифференциального числа частиц, в состоянии $\check{\rho}(0)$. Оператор, соответствующий этой физической величине, есть $\check{N}(\mathrm{out})$,

$$\check{N}(\mathrm{out}) = \sum_{n,\zeta} \check{N}_{n,\zeta}(\mathrm{out}) = \sum_{n} \left[a_n^\dagger(\mathrm{out}) a_n(\mathrm{out}) + b_n^\dagger(\mathrm{out}) b_n(\mathrm{out}) \right]. \quad (1.2.22)$$

Собственные состояния данного оператора являются ортонормальными векторами следующего вида

$$\begin{aligned}
&|s, \mathrm{out}\rangle = |\{i, l\}_{LP}, \mathrm{out}\rangle_a \otimes |\{j, k\}_{KQ}, \mathrm{out}\rangle_b, \\
&|\{i, l\}_{LP}, \mathrm{out}\rangle_a = \frac{\left[a_{i_1}^\dagger(\mathrm{out})\right]^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \cdots \frac{\left[a_{i_P}^\dagger(\mathrm{out})\right]^{l_P}}{\sqrt{l_P!}} |0, \mathrm{out}\rangle_a, \\
&|\{j, k\}_{KQ}, \mathrm{out}\rangle_b = \frac{\left[b_{j_1}^\dagger(\mathrm{out})\right]^{k_1}}{\sqrt{k_1!}} \cdots \frac{\left[b_{j_Q}^\dagger(\mathrm{out})\right]^{k_Q}}{\sqrt{k_Q!}} |0, \mathrm{out}\rangle_b, \\
&L = 0, 1, 2, \ldots, \quad P = 1, 2, \ldots L, \quad i = i_1, \ldots, i_P, \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_P = L, \\
&K = 0, 1, 2, \ldots, \quad Q = 1, 2, \ldots K, \quad j = j_1, \ldots, j_Q, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_Q = K,
\end{aligned}$$

и их собственные значения имеют форму

$$\hat{N}(\mathrm{out})|s, \mathrm{out}\rangle = (L + K)\, |s, \mathrm{out}\rangle,$$

где символом s обозначен полный набор квантовых чисел K, L, $\{i\}$, $\{j\}$, P, Q; при этом состояние $|\{i, l\}_{LP}, \mathrm{out}\rangle_a$ является состоянием с L электронами, распределенными в P групп $i_1, \ldots, i_P$, с l_1 электронами в группе i_1, l_2 электронами в группе i_2, и т.д. Аналогично, состояние $|\{j, k\}_{KQ}, \mathrm{out}\rangle_b$ есть состояние, в котором есть K позитронов, распределенных в Q групп $j_1, \ldots, j_Q$, с k_1 позитронов в группе j_1, k_2

позитронов в группе j_2 и т.д.

Согласно фон Нейману [78], матрица плотности $\check{\rho}(0)$ после такого измерения редуцируется до матрицы $\check{\rho}_N$, имеющей вид

$$\check{\rho}_N = \sum_s \langle s, \mathrm{out}|\check{\rho}(0)|s, \mathrm{out}\rangle \check{P}_s, \quad \check{P}_s = |s, \mathrm{out}\rangle\langle s, \mathrm{out}|. \tag{1.2.23}$$

Из-за особой структуры матрицы плотности $\check{\rho}(0)$, приведенной в уравнении (1.2.21), статистические веса $\langle s, \mathrm{out}|\check{\rho}(0)|s, \mathrm{out}\rangle$ отличны от нуля только в том случае, когда состояния $|s, \mathrm{out}\rangle$ представляют собой состояния с целым числом электрон-позитронных пар. Тогда несложно видеть, что

$$\check{\rho}_N = |c_{\mathrm{v}}|^2 \sum_f W_f \check{P}_f, \quad \sum_f = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{Z=1}^{M} \sum_{\{m,n\}}, \quad \check{P}_f = |f, \mathrm{out}\rangle\langle f, \mathrm{out}|,$$
$$W_f = |w\,(+-|0)_{n_1 n_1}|^{2m_1} \ldots |w\,(+-|0)_{n_Z n_Z}|^{2m_Z}, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_z = M,$$
$$|f, \mathrm{out}\rangle = \frac{\left[a^\dagger_{n_1}(\mathrm{out}) b^\dagger_{n_1}(\mathrm{out})\right]^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{\left[a^\dagger_{n_Z}(\mathrm{out}) b^\dagger_{n_Z}(\mathrm{out})\right]^{m_Z}}{m_Z!} |0, \mathrm{out}\rangle. \tag{1.2.24}$$

В этом выражении f – полный набор квантовых чисел M, Z, $\{m\}$, $\{n\}$. Каждое из состояний $|f, \mathrm{out}\rangle$ является состоянием с M пар, распределенных по Z группам, с m_1 парами в группе n_1, m_2 парами в группе n_2 и т.д. В отличие от выражения (1.2.21), уравнение (1.2.24) содержит только слагаемые, диагональные по f. Следовательно, можно говорить, что рассматриваемое в данном разделе измерение дифференциальных средних чисел частиц уничтожает недиагональные слагаемые матрицы плотности (1.2.21).

Вычислим редуцированные (в смысле раздела 1.2.1) матрицы плотности: $[\check{\rho}_N]_\zeta$:

$$[\check{\rho}_N]_\zeta = \mathrm{tr}_{-\zeta}\, \check{\rho}_N = |c_{\mathrm{v}}|^2 \sum_f W_f \, \mathrm{tr}_{-\zeta}\, \check{P}_f\ , \tag{1.2.25}$$

где редуцированные следы имеют вид

$$\mathrm{tr}_- \ \check{P}_f = \frac{\left[a^\dagger_{n_1}(\mathrm{out})\right]^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \cdots \frac{\left[a^\dagger_{n_Z}(\mathrm{out})\right]^{m_Z}}{\sqrt{m_Z!}} |0, \mathrm{out}\rangle_{aa}\langle 0, \mathrm{out}| \frac{\left[a_{n_Z}(\mathrm{out})\right]^{m_Z}}{\sqrt{m_Z!}} \cdots \frac{\left[a_{n_1}(\mathrm{out})\right]^{m_1}}{\sqrt{m_1!}},$$
$$\mathrm{tr}_+ \ P_f = \frac{\left[b^\dagger_{n_1}(\mathrm{out})\right]^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \cdots \frac{\left[b^\dagger_{n_Z}(\mathrm{out})\right]^{m_Z}}{\sqrt{m_Z!}} |0, \mathrm{out}\rangle_{bb}\langle 0, \mathrm{out}| \frac{\left[b_{n_Z}(\mathrm{out})\right]^{m_Z}}{\sqrt{m_Z!}} \cdots \frac{\left[b_{n_1}(\mathrm{out})\right]^{m_1}}{\sqrt{m_1!}}. \tag{1.2.26}$$

С другой стороны, можно также вычислить редуцированные матрицы плотности $\check{\rho}_\zeta(0)$, выполняя операцию взятия редуцированных следов (1.2.12) над матрицей (1.2.21), и увидеть, что они имеют абсолютно тот же самый вид:

$$\left[\check{\rho}_N\right]_\zeta = \check{\rho}_\zeta(0).$$

1.2.4 Измерение дифференциальных средних чисел электронов и позитронов

Предположим, что теперь измеряется число либо электронов, либо позитронов. Этим физическим величинам соответствуют следующие операторы:

$$\check{N}_+(\mathrm{out}) = \sum_n \check{N}_{n,+}(\mathrm{out}) = \sum_n a^\dagger_n(\mathrm{out}) a_n(\mathrm{out}),$$
$$\check{N}_-(\mathrm{out}) = \sum_n \check{N}_{n,-}(\mathrm{out}) = \sum_n b^\dagger_n(\mathrm{out}) b_n(\mathrm{out}). \tag{1.2.27}$$

Спектры операторов (1.2.27) имеют форму

$$\hat{N}_+(\mathrm{out})|s_+, \mathrm{out}\rangle_a = L|s_+, \mathrm{out}\rangle_a, \quad \hat{N}_-(\mathrm{out})|s_-, \mathrm{out}\rangle_b = K|s_-, \mathrm{out}\rangle_b\ , \tag{1.2.28}$$

где вектора состояний записываются как

$$|s_+, \mathrm{out}\rangle_a = |\{i, l\}_{LP}, \mathrm{out}\rangle_a = \frac{\left[a^\dagger_{i_1}(\mathrm{out})\right]^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \cdots \frac{\left[a^\dagger_{i_P}(\mathrm{out})\right]^{l_P}}{\sqrt{l_P!}} |0, \mathrm{out}\rangle_a,$$
$$L = 0, 1, 2, \ldots, \quad P = 1, 2, \ldots L, \quad i = i_1, \ldots, i_P, \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_P = L,$$

$$|s_-, \mathrm{out}\rangle_b = |\{j,k\}_{KQ}, \mathrm{out}\rangle_b = \frac{\left[b^\dagger_{j_1}(\mathrm{out})\right]^{k_1}}{\sqrt{k_1!}} \cdots \frac{\left[b^\dagger_{j_Q}(\mathrm{out})\right]^{k_Q}}{\sqrt{k_Q!}} |0, \mathrm{out}\rangle_b,$$
$$K = 0,1,2,\ldots, \quad Q = 1,2,\ldots K, \quad j = j_1,\ldots,j_Q, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_Q = K,$$

Состояния $|\{i,l\}_{LP}, \mathrm{out}\rangle_a$ и $|\{j,k\}_{KQ}, \mathrm{out}\rangle_b$ в этом выражении определяются тем же самым образом, что и в предыдущем разделе.

Матрицы плотностей после данных измерений, обозначенные как $\check{\rho}_{N_+}$ и $\check{\rho}_{N_-}$ соответственно, есть

$$\check{\rho}_{N_+} = \sum_{s+} {}_a\langle s_+, \mathrm{out}|\check{\rho}(0)|s_+, \mathrm{out}\rangle_a P_{s+}, \quad P_{s+} = |s_+, \mathrm{out}\rangle_{aa}\langle s_+, \mathrm{out}|,$$
$$\check{\rho}_{N_-} = \sum_{s-} {}_b\langle s_-, \mathrm{out}|\check{\rho}(0)|s_-, \mathrm{out}\rangle_b P_{s-}, \quad P_{s-} = |s_-, \mathrm{out}\rangle_{bb}\langle s_-, \mathrm{out}|,$$
$$\sum_{s+} = \sum_{L=0}^{\infty}\sum_{P=1}^{L}\sum_{\{i,l\}}, \quad \sum_{s-} = \sum_{K=0}^{\infty}\sum_{Q=1}^{K}\sum_{\{j,k\}} . \tag{1.2.29}$$

Из-за структуры исходной матрицы плотности $\check{\rho}(0)$ выражения, стоящие под знаками сумм в (1.2.29) одинаковы, и равны

$$\begin{aligned} &{}_a\langle s_+, \mathrm{out}|\check{\rho}(0)|s_+, \mathrm{out}\rangle_a P_{s_+} = {}_b\langle s_-, \mathrm{out}|\check{\rho}(0)|s_-, \mathrm{out}\rangle_b P_{s_-} \\ &= |c_{\mathrm{v}}|^2 \frac{\left[-\kappa w\left(+-|0\right)_{i_1 i_1} a^\dagger_{i_1}(\mathrm{out}) b^\dagger_{i_1}(\mathrm{out})\right]^{l_1}}{l_1!} \cdots \frac{\left[-\kappa w\left(+-|0\right)_{i_p i_p} a^\dagger_{i_p}(\mathrm{out}) b^\dagger_{i_p}(\mathrm{out})\right]^{l_p}}{l_p!} \\ &\times \check{P}_0 \frac{\left[-\kappa w\left(+-|0\right)^\dagger_{i_p i_p} b_{i_p}(\mathrm{out}) a_{i_p}(\mathrm{out})\right]^{l_p}}{l_p!} \cdots \frac{\left[-\kappa w\left(+-|0\right)^\dagger_{i_1 i_1} b_{i_1}(\mathrm{out}) a_{i_1}(\mathrm{out})\right]^{l_1}}{l_1!}. \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Несложно видеть, что матрицы плотности $\check{\rho}_{N_+}$ и $\check{\rho}_{N-}$ имеют точно такой же вид, как и матрицы (1.2.24); они являют собой сумму по всем возможным проекторам на состояния с целым числом пар,

$$\check{\rho}_{N+} = \check{\rho}_{N-} = \check{\rho}_N. \tag{1.2.31}$$

Необходимо особо подчеркнуть тот факт, что измерения средних чисел N, N_+ и N_- приводят к одинаковой редукции матрицы плотности. Редуцированные матрицы $[\check{\rho}_{N+}]_\zeta = \mathrm{tr}_{-\zeta}\ \check{\rho}_{N+}$ и $[\check{\rho}_{N-}]_\zeta = \mathrm{tr}_{-\zeta}\ \check{\rho}_{N-}$ в точности равны редуцированным матрицам плотности $\check{\rho}_\zeta(0)$, приведенным в уравнении (1.2.15).

1.3 Энтропия и квантовая запутанность электронной и позитронной подсистем

Как уже было упомянуто во введении, мера потери информации в квантовом состоянии, описываемом матрицей $\check{\rho}$, может быть ассоциирована с энтропией данного состояния, а именно, с энтропией фон Неймана [78]:

$$S\left(\check{\rho}\right) = -k_B\ \mathrm{tr}\check{\rho}\ln\check{\rho}\ . \tag{1.3.1}$$

Пусть матрица плотности состояния в начальный момент времени имеет вид $\check{\rho}\left(\beta\right)$, заданный уравнением (1.2.8); тогда энтропия принимает форму

$$S\left(\check{\rho}\left(\beta\right)\right) = k_B\left[\ln Z_{gr} + \sum_{n\zeta} E_{n,\zeta} N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})\right]. \tag{1.3.2}$$

Соответствующие дифференциальные числа частиц $N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})$ представляют собой распределения Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна (см. уравнения (1.2.11)). Энтропия (1.3.2) может быть записана в терминах Бозе- или Ферми- чисел заполнения исключительно, если принять во внимание, что

$$e^{-E_{n,\zeta}} = \frac{N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})}{1-\kappa N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})}. \tag{1.3.3}$$

Тогда несложно видеть, что энтропия может быть записана как

$$S(\check{\rho}\left(\beta\right)) = -k_B\sum_{n\zeta}\left\{\kappa\left[1-\kappa N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})\right]\ln\left[1-\kappa N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})\right] + N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})\ln N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})\right\}. \tag{1.3.4}$$

Это выражение имеет схожий вид с выражениями для энтропии большого канонического ансамбля для Ферми- или Бозе-частиц соответственно [79].

Особенно интересную информацию можно получить, вычисляя информационную энтропию фон Неймана для редуцированных матриц плотности электронной и позитронной подсистем $S\left(\hat{\rho}_{\pm}\right)$,

$$S\left(\hat{\rho}_{\pm}\right) = -k_B \mathrm{tr}_{\pm}(\hat{\rho}_{\pm} \ln \hat{\rho}_{\pm}). \tag{1.3.5}$$

Согласно общей теории, они равны $S\left(\hat{\rho}_{+}\right) = S\left(\hat{\rho}_{-}\right)$ и могут использоваться в качестве меры квантовой запутанности этих подсистем.

Также известно, что квантовую запутанность можно обнаружить, отыскивая так называемую меру Шмидта, которая представляет собой след квадратов редуцированных матриц плотности [80]

$$\tilde{S}\left(\hat{\rho}_{\pm}\right) = -\mathrm{tr}\left[\left(\hat{\rho}_{\pm}\right)^2\right]. \tag{1.3.6}$$

Вычислим далее энтропию фон Неймана электронной и позитронной подсистем для двух важных случаев начального состояния системы: вакуумного начального состояния и равновесного начального состояния, описываемых редуцированными матрицами плотности $\check{\rho}_{\zeta}(0)$ и $\check{\rho}_{\zeta}(\beta)$.

1.3.1 Вакуумное начальное состояние

Энтропия для редуцированных матриц плотности системы с начальным вакуумным состоянием имеет вид

$$S\left(\check{\rho}_{\zeta}(0)\right) = -k_B \mathrm{tr}_{\zeta}\left(\check{\rho}_{\zeta}(0) \ln \check{\rho}_{\zeta}(0)\right). \tag{1.3.7}$$

Слагаемое $\ln \check{\rho}_\zeta(0)$ в правой стороне уравнения(1.3.7) может быть записано следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\ln \check{\rho}_+(0) &= \ln \left[|c_\mathrm{v}|^2 \ :\exp\left\{ -\sum_n a_n^\dagger(\mathrm{out}) \left(1 - P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right)_{nn} a_n(\mathrm{out}) \right\} : \right], \\
\ln \check{\rho}_-(0) &= \ln \left[|c_\mathrm{v}|^2 \ :\exp\left\{ -\sum_n b_n^\dagger(\mathrm{out}) \left(1 - P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right)_{nn} b_n(\mathrm{out}) \right\} : \right]. \quad (1.3.8)
\end{aligned}
$$

Преобразуя экспоненты из нормальной формы в обыкновенные экспоненты при помощи соотношения, установленного в работе [38], и принимая во внимание, что $|c_\mathrm{v}|^2 = P_\mathrm{v}$, можно получить следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
\ln \check{\rho}_+(0) &= \ln P_\mathrm{v} + \sum_n a_n^\dagger(\mathrm{out}) \ln \left[P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right]_{nn} a_n(\mathrm{out}), \\
\ln \check{\rho}_-(0) &= \ln P_\mathrm{v} + \sum_n b_n^\dagger(\mathrm{out}) \ln \left[P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right]_{nn} b_n(\mathrm{out}). \quad (1.3.9)
\end{aligned}
$$

Так как матрицы $P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}$ диагональны по квантовым числам, можно переписать уравнение (1.3.7) как

$$
\begin{aligned}
S\left(\check{\rho}_+(0)\right) &= -k_B \left\{ \ln P_\mathrm{v} + \sum_n \mathrm{tr}_+ \left(\check{\rho}_+(0) a_n^\dagger(\mathrm{out}) a_n(\mathrm{out}) \right) \ln \left[P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right]_{nn} \right\}, \\
S\left(\check{\rho}_-(0)\right) &= -k_B \left\{ \ln P_\mathrm{v} + \sum_n \mathrm{tr}_- \left(\check{\rho}_-(0) b_n^\dagger(\mathrm{out}) b_n(\mathrm{out}) \right) \ln \left[P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right]_{nn} \right\},
\end{aligned}
\quad (1.3.10)
$$

где $\mathrm{tr}_+ \ \check{\rho}_+(0) a_n^\dagger(\mathrm{out}) a_n(\mathrm{out}) = N_n(0|\mathrm{out})$ и $\mathrm{tr}_- \ \check{\rho}_-(0) b_n^\dagger(\mathrm{out}) b_n(\mathrm{out}) = N_n(0|\mathrm{out})$ – дифференциальные средние числа out-электронов и out-позитронов, соответственно. Они, очевидно, совпадают. Таким образом, энтропия принимает вид

$$
S\left(\check{\rho}_\zeta(0)\right) = -k_B \left\{ \ln P_\mathrm{v} + \sum_n N_n(0|\mathrm{out}) \left[\ln P(+-|0)P_\mathrm{v}^{-1}\right]_{nn} \right\}. \quad (1.3.11)
$$

Можно использовать вероятность рождения пары и вероятность вакуума остаться вакуумом, выраженные в терминах дифференциальных средних чисел частиц (см., например, работу [42]))

$$P(-+|0)_{n,n'} = \delta_{n,n'}\frac{P_{\mathrm{v}}N_n(0|\mathrm{out})}{1-\kappa N_n(0|\mathrm{out})}, \quad P_{\mathrm{v}} = \exp\left\{\kappa\sum_n \ln\left[1-\kappa N_n(0|\mathrm{out})\right]\right\}, \tag{1.3.12}$$

чтобы получить

$$\begin{aligned} &S\left(\check{\rho}_\zeta(0)\right) = \sum_n S(\check{\rho}_{n,\zeta}(0)), \\ &S(\check{\rho}_{n,\zeta}(0)) = -k_B\left[\kappa\left(1-\kappa N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right)\ln\left(1-\kappa N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right) + N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\ln N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Рассмотрим также, для полноты картины, меру запутанности Шмидта, определенную уравнением (1.3.6),

$$\tilde{S}(\check{\rho}_\zeta(0)) = -\mathrm{tr}\ \left[\check{\rho}_\zeta(0)\right]^2. \tag{1.3.14}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \left[\check{\rho}_+(0)\right]^2 &= P_{\mathrm{v}}^2\left\{:\exp\left[-\sum_n a_n^\dagger(\mathrm{out})\left(1-P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right)_{nn}a_n(\mathrm{out})\right]:\right\}^2, \\ \left[\check{\rho}_-(0)\right]^2 &= P_{\mathrm{v}}^2\left\{:\exp\left[-\sum_n b_n^\dagger(\mathrm{out})\left(1-P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right)_{nn}b_n(\mathrm{out})\right]:\right\}^2. \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Используя следующее соотношение (символами D и $\tilde{D}$ обозначены некие произвольные матрицы)

$$:\exp\left[-a^\dagger Da\right]::\exp\left[-a^\dagger\tilde{D}a\right]:=:\exp\left[-a^\dagger\left(D+\tilde{D}-D\tilde{D}\right)a\right]:, \tag{1.3.16}$$

можно показать, что

$$[\check{\rho}_+(0)]^2 = P_{\mathrm{v}}^2 \colon \exp\left\{\sum_n a_n^\dagger(\mathrm{out}) \left[\left(P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right)^2 - 1\right]_{nn} a_n(\mathrm{out})\right\} \colon ,$$

$$[\check{\rho}_-(0)]^2 = P_{\mathrm{v}}^2 \colon \exp\left\{\sum_n b_n^\dagger(\mathrm{out}) \left[\left(P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right)^2 - 1\right]_{nn} b_n(\mathrm{out})\right\} \colon . \qquad (1.3.17)$$

Затем вычисляя следы в выражении (1.3.14) с учетом соотношения (1.3.12), окончательно получим

$$\tilde{S}(\check{\rho}_\zeta(0)) = -P_{\mathrm{v}}^2 \det\left[1 + \kappa\left(P(+-|0)P_{\mathrm{v}}^{-1}\right)^2\right]^\kappa$$

$$= -\prod_n \left[1 - 2\kappa N_n(0|\mathrm{out}) + (1+\kappa)\left(N_n(0|\mathrm{out})\right)^2\right]^\kappa . \qquad (1.3.18)$$

1.3.2 Равновесное начальное состояние

Энтропия для матриц плотности $\check{\rho}_\zeta(\beta)$, описывающих систему, которая в начальный момент времени находилась в термодинамическом равновесии, имеет следующий вид:

$$S\left(\check{\rho}_{\beta,\zeta}\right) = -k_B \mathrm{tr}_\zeta\ \check{\rho}_\zeta(\beta) \ln \check{\rho}_\zeta(\beta). \qquad (1.3.19)$$

Преобразуя выражения $\ln \check{\rho}_\zeta(\beta)$ как

$$\ln \check{\rho}_+(\beta) = \ln Z_\zeta(J_\beta) + \sum_n a_n^\dagger(\mathrm{out}) \ln\left[K_+(J_\beta)\right]_{nn} a_n(\mathrm{out}),$$

$$\ln \check{\rho}_-(\beta) = \ln Z_\zeta(J_\beta) + \sum_n b_n^\dagger(\mathrm{out}) \ln\left[K_-(J_\beta)\right]_{nn} b_n(\mathrm{out}), \qquad (1.3.20)$$

можно перезаписать эту энтропию:

$$S\left(\check{\rho}_{\beta,\zeta}\right) = k_B \left\{\ln Z_\zeta(J_\beta) - \sum_n N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right) \left[\ln K_\zeta(J_\beta)\right]_{nn}\right\}, \qquad (1.3.21)$$

где дифференциальные числа частиц $N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)$ даются выражением (1.2.10) при $N_{n,\zeta}(\cdots|\mathrm{in})= N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{in})$. Диагональные элементы матрицы $K_\zeta(J_\beta)$ можно выразить при помощи подходящих чисел заполнения $N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)$,

$$[K_\zeta(J_\beta)]_{nn} = \frac{N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)}{1-\kappa N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)}, \tag{1.3.22}$$

и сделать то же самое со статистической суммой $Z_\zeta(J_\beta)$ при помощи условия нормировки для матрицы плотности ($\mathrm{tr}_\zeta\ \check{\rho}_{\beta,\zeta}=1$)

$$Z_\zeta(J_\beta) = \exp\left\{-\kappa\sum_n \ln\left[1-\kappa N_{n,\zeta}(\beta|\mathrm{out})\right]\right\}. \tag{1.3.23}$$

Теперь выражение (1.3.21) для энтропии можно представить в форме

$$\begin{aligned} & S\left(\check{\rho}_\zeta(\beta)\right) = \sum_n S\left(\check{\rho}_{n,\zeta}(\beta)\right), \quad S\left(\check{\rho}_{n,\zeta}(\beta)\right) \\ & = -k_B\left\{\kappa\left[1-\kappa N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)\right]\ln\left[1-\kappa N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)\right] + N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)\ln N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.3.24}$$

Сравнивая выражения (1.3.24), (1.3.13), и (1.3.4), можно заметить, что они все имеют схожую форму.

Наконец, найдем также меру Шмидта для электронной и позитронной подсистем с равновесным состоянием в качестве начального состояния; подсистемы такого состояния описываются при помощи редуцированных матриц плотности $\check{\rho}_\zeta(\beta)$. Мера квантовой запутанности электронной и позитронной подсистем тогда определяется выражением

$$\tilde{S}(\check{\rho}_\zeta(\beta)) = -\mathrm{tr}\ \left[\check{\rho}_\zeta(\beta)\right]^2. \tag{1.3.25}$$

В этом уравнении квадрат матриц $\check{\rho}_\zeta(\beta)$ запишется

$$[\check{\rho}_+(\beta)]^2 = Z_+^{-2}(J_\beta){:}\exp\left[\sum_n a_n^\dagger(\text{out})\left[K_+^2(J_\beta)-1\right]_{nn} a_n(\text{out})\right]{:}\,,$$
$$[\check{\rho}_-(\beta)]^2 = Z_-^{-2}(J_\beta){:}\exp\left[\sum_n b_n^\dagger(\text{out})\left[K_-^2(J_\beta)-1\right]_{nn} b_n(\text{out})\right]. \quad (1.3.26)$$

В результате получим

$$\tilde{S}(\check{\rho}_\zeta(\beta)) = -\prod_n \left\{1 - 2\kappa N_{n,\zeta}\left(\beta|\text{out}\right) + (1+\kappa)\left[N_{n,\zeta}\left(\beta|\text{out}\right)\right]^2\right\}^\kappa. \quad (1.3.27)$$

1.3.3 Энтропия состояний, описываемых матрицами плотности, редуцированными в результате измерения числа частиц

Энтропия состояний, описываемых матрицей плотности $\check{\rho}_N$ (1.2.23), имеет вид

$$S(\check{\rho}_N) = -k_B\,\text{tr}\;\check{\rho}_N \ln \check{\rho}_N. \quad (1.3.28)$$

Представление (1.2.4) дает возможность факторизовать полный вакуум системы в произведение вакуумов для отдельных квантовых мод, т.е.

$$|0,\text{out}\rangle\langle 0,\text{out}| \;= \prod_n |0,\text{out}\rangle_{nn}\langle 0,\text{out}|,$$
$$a_n(\text{out})|0,\text{out}\rangle_n = 0, \quad b_n(\text{out})|0,\text{out}\rangle_n = 0. \quad (1.3.29)$$

Используя данный факт и представление для вероятности вакуума остаться вакуумом $|c_\text{v}|^2$, данное уравнением (1.2.20), можно переписать полную матрицу плотности (1.2.23) как произведение независимых одномодовых (т.е. описывающих только состояния с определенным квантовым числом n) матриц плотности:

$$\check{\rho}_N = \prod_n \check{\rho}_{N,n}, \quad \text{tr}\check{\rho}_{N,n} = 1, \;\; \check{\rho}_{N,n} = |c_\text{v}|_n^2 \sum_{f=0} W_{f,n}|f,\text{out}\rangle_{nn}\langle f,\text{out}|, \quad (1.3.30)$$

где использованы следующие обозначения:

$$|c_{\rm v}|_n^2 = |w\,(-|-)_{nn}|^{-2\kappa}, \quad W_{f,n} = |w\,(+-|0)_{nn}|^{2f},$$
$$|f, \mathrm{out}\rangle_n = \frac{\left[a_n^\dagger(\mathrm{out}) b_n^\dagger(\mathrm{out})\right]^f}{f!}|0, \mathrm{out}\rangle_n. \tag{1.3.31}$$

Величины $|c_{\rm v}|_n^2$ и $|w\,(+-|0)_{nn}|^2$ могут быть выражены через дифференциальные числа $N_n(0|\mathrm{out})$ в виде

$$|c_{\rm v}|_n^2 = (1-\kappa N_n(0|\mathrm{out}))^\kappa\,, \quad |w\,(+-|0)_{nn}|^2 = \frac{N_n(0|\mathrm{out})}{1-\kappa N_n(0|\mathrm{out})}. \tag{1.3.32}$$

Благодаря соотношению (1.3.30), энтропия (1.3.28) может быть представлена как

$$S(\check{\rho}_N) = -k_B \sum_n \mathrm{tr}\;\check{\rho}_{N,n} \ln \check{\rho}_{N,n}\;. \tag{1.3.33}$$

Для того, чтобы вычислить след оператора $\check{\rho}_{N,n} \ln \check{\rho}_{N,n}$, можно использовать формальное разложение в ряд

$$\check{\rho}_{N,n} \ln \check{\rho}_{N,n} = \check{\rho}_{N,n} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \left(\check{\rho}_{N,n} - 1\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sum_{l=0}^{k} C_k^l (\check{\rho}_{N,n})^{l+1} (-1)^{k-l}. \tag{1.3.34}$$

В данном выражении C_k^l – биномиальные коэффициенты. Благодаря тому, что состояния $|f, \mathrm{out}\rangle_n$ являются ортогональными, произведения матриц плотности $(\check{\rho}_{N,n})^{l+1}$ принимают вид

$$(\check{\rho}_{N,n})^{l+1} = |c_{\rm v}|_n^{2(l+1)} \sum_{f=0}^{\infty} (W_{f,n})^{l+1} |f, \mathrm{out}\rangle_{nn}\langle f, \mathrm{out}|. \tag{1.3.35}$$

Подставляя выражение (1.3.35) в уравнение (1.3.34), получим

$$\check{\rho}_{N,n} \ln \check{\rho}_{N,n} = |c_{\rm v}|_n^2 \sum_{f=0}^{\infty} W_{f,n} \ln \left(|c_{\rm v}|_n^2 W_{f,n}\right) |f, \mathrm{out}\rangle_{nn}\langle f, \mathrm{out}|. \tag{1.3.36}$$

Теперь легко видеть, что след матрицы плотности в терминах чисел заполнения принимает форму

$$\mathrm{tr}\ \check{\rho}_{N,n} \ln \check{\rho}_{N,n} = N_n(0|\mathrm{out}) \ln N_n(0|\mathrm{out}) + \kappa \left[1 - \kappa N_n(0|\mathrm{out})\right] \ln \left[1 - \kappa N_n(0|\mathrm{out})\right] . \tag{1.3.37}$$

Следовательно, энтропия, соответствующая матрице плотности (1.2.23), будет иметь вид

$$S(\check{\rho}_N) = -k_B \sum_n \left\{ \kappa \left[1 - \kappa N_n(0|\mathrm{out})\right] \ln \left[1 - \kappa N_n(0|\mathrm{out})\right] + N_n(0|\mathrm{out}) \ln N_n(0|\mathrm{out}) \right\} . \tag{1.3.38}$$

Этот результат в точности повторяет результат для энтропии $S\left(\check{\rho}_\zeta(0)\right)$, полученный в (1.3.13). Из этого можно заключить, что измерения физических величин N, N_+ и N_- приводят к той же самой потере информации, что и редукция по подсистемам электронов и позитронов.

В разделе 1.2.2 было продемонстрировано, что редукция матрицы плотности плотности по подсистемам электронов или позитронов превращает ее в матрицы $\left[\check{\rho}_N\right]_\zeta = \check{\rho}_\zeta(0)$. Это означает, что, вычисляя энтропии, соответствующие матрицам плотности $\left[\check{\rho}_N\right]_\zeta$, мы снова придем к выражениям (1.3.38). Условная энтропия [16], используемая в качестве меры квантовой корреляции между подсистемами, в данном случае равна нулю. Следовательно, все квантовые корреляции между электронами и позитронами будут потеряны в результате декогеренции, и какая-либо квантовая запутанность после обсуждаемого измерения отсутствует.

1.4 T-постоянное внешнее электрическое поле

Для того, чтобы проиллюстрировать полученные выше общие формулы, можно рассмотреть так называемое T-постоянное электрическое поле в качестве внешнего фонового поля. Это поле действует только на конечном временном интервале T и постоянно внутри него. Использование регуляризованного таким образом поля позволяет избежать проблем с определением in- и out-состояний, присущих внешним полям, не выключающимся на $t \to \pm\infty$. Другим важным свойством такого поля является тот факт, что оно производит конечную работу в конечном объеме пространства. Рассмотрим $d = (D+1)$-мерное пространство, в котором T-постоянное электрическое поле действует на временном промежутке $T = t_{\text{out}} - t_{\text{in}}$,

$$\mathbf{E} = (0, E(t), 0, ..., 0), \;\; E(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq t_{\text{in}} \\ E > 0, & t_{\text{in}} < t < t_{\text{out}} \\ 0, & t_{\text{out}} \leq t < \infty \end{cases}, \tag{1.4.1}$$

Процессы рождения пар в этом поле были детально изучены в работах [42, 44, 81–83]. Так же, как и в этих работах, будет предполагаться, что рассматриваемый временной интервал T действия поля достаточно долог (т.е. дифференциальные числа частиц, рождаемых полем, не являются бесконечно малыми величинами).

Так как рождения частиц не происходит после момента t_{out}, дифференциальные средние числа частиц $N_{n,\zeta}(\cdots|\text{out})$, рожденных в неком заданном состоянии с $n = \mathbf{p}, r$ ($\mathbf{p}$ означает D-мерный вектор импульса, а r – спин) зависят только от длительности временного интервала T. Электрическое поле, действующее на протяжении достаточно долгого отрезка времени, порождает значительное число пар только в конечной области импульсного пространства. Так как предполагается, что $T \gg \max\{1, E_c/E\}$, необходимо рассматривать только область

$$|p_\perp| \leq \sqrt{eE}\left[\sqrt{eE}T\right]^{1/2}, \;\; -T/2 \leq p_x/eE \leq T/2 \tag{1.4.2}$$

в импульсном пространстве (детальное обоснование этого факта дано в работе [42]). Параметры $p_\perp$ представляют собой поперечные компоненты импульса, перпендикулярные направлению поля (т.е. оси x). Необходимо также заметить, что в случае $d = 2$ поперечные компоненты отсутствуют.

1.4.1 Вакуумное начальное состояние

Рассмотрим сначала случай, когда система в начальный момент времени находилась в вакуумном состоянии. В этом случае дифференциальные средние числа частиц в области импульсов (1.4.2) имеют вид

$$N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = e^{-\pi\lambda}, \quad \lambda = (p_\perp^2 + m^2)/eE \ . \tag{1.4.3}$$

Эти числа имеют точно такую же форму, как и для случая постоянного однородного поля [5, 77], и одинаковы для бозонов и фермионов. Энтропия (2.2.68) выражается в терминах $N_n\left(0|\mathrm{out}\right)$ и не зависит от спинового квантового числа r; таким образом, суммирование по спину приводит только к появлению множителя $J_{(d)} = 2^{[\frac{d}{2}]-1}$.

Рассмотрим сначала случай статистики Дирака ($\kappa = +1$); выражение для энтропии фон Неймана в этом случае имеет форму

$$S(\check{\rho}_{n,\zeta}(0)) = -k_B\left[(1 - N_n\left(0|\mathrm{out}\right))\ln(1 - N_n\left(0|\mathrm{out}\right)) + N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\ln N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right] . \tag{1.4.4}$$

Для T-постоянного электрического поля дифференциальные средние числа рожденных частиц $N_n\left(0|\mathrm{out}\right)$ могут принимать значения только в области (0,1) и зависят только от силы внешнего приложенного поля. Выражение (1.4.4) симметрично по отношению к $N_{n,\zeta}\left(0|\mathrm{out}\right)$. Оно достигает максимума при значении $N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = 1/2$ и обращается в нуль на краях интервала, $N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = 1$ и $N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = 0$. Этот факт можно интерпретировать следующим образом. В случае $N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = 0$ внешнее поле не рождает пар и начальное вакуумное состояние в данной квантовой моде остается неизменным. Значение $N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = 1$, с другой стороны, соответствует случаю, в котором пара в данной квантовой моде рождается с достоверностью. Максимум выражения (1.4.4), соответствующий значению $N_n\left(0|\mathrm{out}\right) = 1/2$, легко ассоциировать с состоянием, обладающим максимальным значением неопределенности.

Необходимо также заметить, что мера Шмидта, (1.3.18), хотя и имеет функционально другую форму, но обладает схожими свойствами: она принимает одинаковые значения на краях рассматриваемого интервала и демонстрирует экстремум при

$N_n\,(0|\mathrm{out}) = 1/2$.

Разлагая логарифм в первом слагаемом выражения (1.4.4) в ряд Тейлора по степеням величины $N_n\,(0|\mathrm{out})$, видим, что энтропия $S(\check{\rho}_{n,\zeta}(0))$ пропорциональна числам $N_n\,(0|\mathrm{out})$. Последнее играет роль параметра обрезания для интеграла по поперечному импульсу $p_\perp$ [42]. Таким образом, сумма по квантовым числам может быть сведена к интегрированию по импульсу, удовлетворяющему ограничениям (1.4.2),

$$\sum_n \to \frac{J_{(d)}V}{(2\pi)^{d-1}} \int d\mathbf{p},$$

где V – D-мерный пространственный объем. Средние числа (1.4.3) не зависят от продольной компоненты импульса. Вне области (1.4.2), вклад подынтегрального выражения крайне мал и может быть отброшен; это позволяет устремить пределы интегрирования $p_\perp$ к бесконечности. Интегрирование по $p_\perp$ можно провести, используя формальное разложение в ряд Тейлора. В результате получим

$$S(\check{\rho}_\zeta(0)) = J_{(d)} k_B \frac{(eE)^{\frac{d}{2}}\, TV}{(2\pi)^{d-1}} A_{Dirac}\,(d, E_c/E)\,. \tag{1.4.5}$$

В данном выражении множитель TV можно рассматривать как полный d-мерный объем. Для получения конечных и корректных выражений необходимо использовать объемную регуляризацию. Множитель $A_{Dirac}\,(d, E_c/E)$ имеет вид

$$A_{Dirac}\,(d, E_c/E) = \left[\sum_{l=1}^{\infty} l^{-d/2} \exp[-\pi l E_c/E] \right.$$
$$\left. - \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1}(l+1)^{\frac{2-d}{2}} \exp[-\pi(l+1)E_c/E] + \left(\pi\frac{E_c}{E} + \frac{d-2}{2}\right) \exp\left(-\pi E_c/E\right)\right].$$

Можно оценить энтропию для сильного $E_c/E \ll 1$, критического $E_c/E = 1$ и слабого $E_c/E \gg 1$ поля. Например, для сильного поля в $d = 4$ множитель A принимает значение $A_{Dirac}\,(4, 0) = \pi^2/6$, для критического поля $A_{Dirac}\,(4, 1) \approx 0,22$. В случае слабого поля энтропия является слабой величиной со значениями порядка $(\pi E_c/E)\exp[-\pi E_c/E]$ для любой размерности пространства d. Для $d = 3$ получаем следующие оценки: $A_{Dirac}\left(3,0\right)\approx 0,93$, $A_{Dirac}\left(3,1\right)\approx 0,2$; для $d=2$ множитель $A\left(2,0\right)$ примерно равен 1, а $A\left(2,1\right)=e^{-\pi}$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая Клейна-Гордона ($\kappa=-1$). Энтропия фон Неймана дается выражением

$$S(\check{\rho}_{n,\zeta}(0))=k_B\left\{\left[1+N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right]\ln\left[1+N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right]-N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\ln N_n\left(0|\mathrm{out}\right)\right\}. \tag{1.4.6}$$

Последнее только растет с увеличением значения $N_n\left(0|\mathrm{out}\right)$. После выполнения суммирования по квантовым числам, энтропия (1.3.11) принимает вид

$$S(\check{\rho}_{\zeta}(0))=k_B\frac{(eE)^{\frac{d}{2}}TV}{(2\pi)^{d-1}}A_{K-G}\left(d,E_c/E\right), \tag{1.4.7}$$

где

$$A_{K-G}\left(d,E_c/E\right)=\left[\sum_{l=1}^{\infty}l^{-d/2}(-1)^{l-1}\exp[-\pi lE_c/E]\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty}l^{-1}(l+1)^{\frac{2-d}{2}}(-1)^{l-1}\exp[-\pi(l+1)E_c/E]+\left(\pi\frac{E_c}{E}+\frac{d-2}{2}\right)\exp\left(-\pi E_c/E\right)\right].$$

Оценки множителя A_{K-G} для различной силы внешнего поля следующие: A_{K-G} $\left(4,0\right)\approx 2,21$, $A_{K-G}\left(4,1\right)\approx 0,22$; $A_{K-G}\left(3,0\right)\approx 1,78$, $A_{K-G}\left(3,1\right)\approx 0,2$; $A_{K-G}\left(2,0\right)$ ≈ 1, $A_{K-G}\left(2,1\right)\approx e^{-\pi}$. В случае слабого поля энтропия снова оказывается малой величиной порядка $(\pi E_c/E)\exp[-\pi E_c/E]$ для любой размерности пространства d.

Ранее было упомянуто, что энтропия, соответствующая матрице плотности $\check{\rho}_N$, приведенной в уравнении (1.3.38), совпадает с энтропией, заданной выражением (1.3.13); следовательно, рассмотрение для случая редукции матрицы плотности в результате промежуточного измерения ничем не отличается от вышеприведенных рассуждений, и все вычисления могут быть проведены точно таким же образом.

1.4.2 Равновесное начальное состояние

Необходимо отметить, что энтропия (1.3.4) системы, находившейся в термодинамическом равновесии в начальный момент времени, выражается в терминах дифференциальных средних чисел $N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)$ частиц, рожденных внешнем полем, тогда как исходные дифференциальные числа частиц в этом состоянии равны

$$
\begin{aligned}
&N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{in}\right) = \left[\exp\beta(\varepsilon_n - \mu) + \kappa\right]^{-1}, \\
&\varepsilon_n = \sqrt{m^2 + p_\perp^2 + (p_x + eET/2)^2}.
\end{aligned} \tag{1.4.8}
$$

Рассмотрим два случая; первый – случай низкой температуры,

$$
\beta(\epsilon_\perp - \mu) \gg 1, \;\; \epsilon_\perp = \sqrt{m^2 + p_\perp^2},
$$

когда все энергии рожденных частиц для с неким заданным $p_\perp$ намного больше, чем температура, и случай высокой температуры $\beta eET \ll 1$, когда энергии рожденных частиц малы по сравнению с температурой. Для простоты будет предполагаться, что $eET \gg \mu$, и что промежуток времени T достаточно велик, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\left(eET\right)^2 \gg m^2 + p_\perp^2$.

В случае низкой температуры, число рожденных частиц не зависит от продольного импульса:

$$
N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{in}\right) \approx \exp\left(-\beta\varepsilon_n\right) \to 0.
$$

Несложно видеть, что в таком случае конечные дифференциальные числа рожденных частиц приближаются к значениям чисел частиц, рожденных из вакуума:

$$
N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right) \to N_{n,\zeta}\left(0|\mathrm{out}\right).
$$

В этом пределе энтропия $S(\check{\rho}_{n,\zeta}(\beta))$ стремится к энтропии системы с нулевой температурой (т.е. к энтропии случая начального вакуумного состояния). Интегрирование по поперечному импульсу выполняется также, как в случае вакуумного начального состояния.

Формальное вычисление величин $N_{n,\zeta}\left(\beta|\mathrm{out}\right)$ и энтропии для случая высокой температуры, $\beta eET \ll 1$, также не вызывает особых сложностей. Однако, как было показано в работе [44], в дираковском случае при таких условиях плотность тока существующих частиц (обозначенная $\mathrm{Re}\langle j_{\mu}\left(t\right)\rangle_{\theta}^{c}$ в работе [44]) существенно превышает плотность тока частиц, рожденных из вакуума внешним полем, из-за работы, совершаемой внешним полем над уже существующими в начальном состоянии частицами. Следовательно, в данном случае эффектами рождения частиц можно пренебречь.

Глава 2 КЭД в неоднородном электрическом поле, заданном ступенчатым потенциалом.

2.1 Общая теория

Клейн был первым, кто рассмотрел проблему отражения и рассеяния релятивистских электронов на прямоугольном потенциальном барьере и обнаружил парадокс, позже названный его именем [51–54]. На современном языке проблемы, возникающие в постоянных во времени сильных электромагнитных полях, обсуждались многими авторами, в частности, Фейнманом [84], и было установлено, что эти проблемы связаны с рождением частиц из вакуума. Более сорока лет назад Никишовым были представлены некоторые эвристические исследования рождения частиц потенциальными ступенями; он также показал, что парадокс Клейна не возникает при рассмотрении проблемы в рамках подходящей квантово-полевой теории [7, 57]. Попытка установить связь между квантово-полевыми эффектами, обнаруженными в рамках не зависящей от времени потенциальной теории рассеяния, и КТП была предпринята Хансеном и Равндалом [58]. Их интерпретация была повторена в учебнике [9] и многих последующих публикациях. Однако, было указано, что эта интерпретация отлична от использованной Никишовым [61].

Из-за новых задач, появившихся благодаря астрофизике и созданию новых материалов, таких как графен, проблема влияния стационарных неоднородных полей на физический вакуум приобрела серьезное значение. В настоящий момент уже известно, что согласованной теорией, подходящей для изучения квантовых эффектов в сильных полях, в частности, прямоугольных и почти прямоугольных потенциальных ступеней, является квантовая теория поля с соответствующим фоном. Сильные внешние поля рождают частицы из вакуума, поэтому рассматриваемая теория всегда многочастична. Изначально эффект рождения частиц рассматривался для зависящих от времени электрических полей, которые включались и выключались в некие определенные моменты времени соответственно. Рассеяние, аннигиляция и рождение частиц из вакуума под действием зависящих от времени полей рассматривались в рамках релятивистской квантовой механики [5, 7, 9, 11]; более полный список релевантных публикаций можно найти в работе [11]. Общая формулировка квантовой электродинамики и квантовой теории поля с зависящими от времени потенциальными ступенями была развита в работах [24, 25, 40]. Более сложный случай представляют собой постоянные неоднородные электрические полей, заданные потенциальными ступенями. Эти потенциальные ступени также могут создавать частицы из вакуума. Разумеется, независимость этих полей от времени является приближением; оно применимо при условии, что все измерения проводятся на протяжении макроскопического отрезка времени T, на котором внешнее поле может считаться постоянным. В работе [63] было представлено каноническое квантование дираковского и скалярного поля в присутствии такой потенциальной ступени в терминах подходящих in- и out-частиц и развиты общие вычислительные техники для различных квантовых процессов рассеяния, аннигиляции и рождения пар из вакуума. Для упрощения изложения основные моменты этой новой теории будут повторены в последующих разделах.

2.1.1 Стационарные решения

В качестве хорошо известного примера неоднородного постоянного поля, заданного потенциальной ступенью, можно привести так называемый заутеровский потенциал [54]. Для этого потенциальной ступени

$$A_0(x) = -\alpha E \tanh\left(x/\alpha\right), \quad \alpha > 0, \quad E(x) = E\cosh^{-2}\left(x/\alpha\right). \tag{2.1.1}$$

В $3+1$-мерном пространстве-времени, параметризуемом координатами $x^0 = t,\ \mathbf{r} = (x, y, z)$, потенциалы A^μ, соответствующие потенциальной ступени, выбираются как $A^\mu = A^0\left(x\right),\ \mathbf{A} = 0$. Магнитное поле $\mathbf{B}$ в этом случае равно нулю, а электрическое имеет вид $\mathbf{E} = \left(E_x\left(x\right), 0, 0\right), \quad E_x\left(x\right) = -A_0'\left(x\right) = E\left(x\right)$. Электрическое поле, таким образом, неоднородно в направлении x, и не зависит от времени t ($\mathbf{E}$ является постоянным полем).

Предполагается, что для любого поля такого типа будут справедливы выражения

$$
\begin{aligned}
&A_0(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} A_0(\pm\infty) = \text{const}, \quad E(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ или} \\
&A_0(x)|_{x\in S_{\rm L}} = A_0(-\infty), \quad E(x)|_{x\in S_{\rm L}} = 0, \quad S_{\rm L} = (-\infty, x_{\rm L}], \\
&A_0(x)|_{x\in S_{\rm R}} = A_0(+\infty), \quad E(x)|_{x\in S_{\rm R}} = 0, \quad S_{\rm R} = [x_{\rm R}, \infty).
\end{aligned} \tag{2.1.2}
$$

Величина $\mathbb{U}$ представляет собой высоту электрической ступени, $\mathbb{U} = U_{\rm R} - U_{\rm L}$, $U_{\rm L} = U(-\infty)$, $U_{\rm R} = U(+\infty)$. Величины $\pi_0(\mathrm{L/R}) = p_0 - U_{\rm L/R}$ есть асимптотические кинетические энергии в областях $S_{\rm L}$ и $S_{\rm R}$ соответственно.

Если высота рассматриваемой ступени меньше критической, $\mathbb{U} < \mathbb{U}_c = 2m$, то мы имеем дело с некритическими ступенями, т.е. рождение частиц этими полями невозможно и зона Клейна Ω_3, определение которой будет дано ниже, не существует. Если же $\mathbb{U} > \mathbb{U}_c = 2m$, то такая потенциальная ступень является критической. В этом случае в зоне Клейна происходит рождение частиц. В дальнейшем будет предполагаться, что изучаемые ступени являются критическими.

Уравнение Дирака с потенциальной ступенью имеет вид

$$
i\partial_t\psi = \check{H}\psi, \quad \check{H} = \gamma^0\left(-i\gamma^j\partial_j + m\right) + U(x), \quad U(x) = -eA_0(x), \tag{2.1.3}
$$

где H – одночастичный (не зависящий от времени) дираковский гамильтониан, а $U(x)$ – потенциальная энергия электрона в рассматриваемом поле.

Стационарные решения уравнения (2.1.3) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\psi_n = \exp(-ip_0t + i\mathbf{p}_\perp\mathbf{r}_\perp)\,\tilde{\psi}_n(x), \; \mathbf{p}_\perp = (p_y, p_z), \quad n = (p_0, \mathbf{p}_\perp, \sigma), \\
&\tilde{\psi}_n(x) = \left\{\gamma^0[p_0 - U(x)] - \gamma^1\hat{p}_x - \boldsymbol{\gamma}_\perp\mathbf{p}_\perp + m\right\}\varphi_n(x)\,v_\sigma, \\
&\left\{\hat{p}_x^2 - iU'(x) - [p_0 - U(x)]^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2\right\}\varphi_n(x) = 0, \\
&\gamma^0\gamma^1 v_\sigma = v_\sigma, \; i\gamma^2\gamma^3 v_\sigma = \sigma v_\sigma, \quad \sigma = \pm 1, \boldsymbol{\gamma}_\perp = \left(\gamma^2, \gamma^3\right), \; \hat{p}_x = -i\partial_x.
\end{aligned} \tag{2.1.4}
$$

В асимптотических областях $S_{\rm L}$ и $S_{\rm R}$ решения ψ_n являются собственными функциями оператора кинетической энергии $\check{H}^{\rm kin} = \check{H} - U(x)$.

Важной основой этой конструкции являются решения уравнения Дирака со специальными левой и правой асимптотиками:

$$
\begin{aligned}
&{}_\zeta\varphi_n(x) = {}_\zeta\mathcal{N}\exp\left(ip^{\mathrm{L}}\,x\right) \text{ as } x\in S_{\mathrm{L}}=(-\infty,x_{\mathrm{L}}]\,,\quad \zeta=\operatorname{sgn}\ \left(p^{\mathrm{L}}\right)=\pm\\
&{}^\zeta\varphi_n(x) = {}^\zeta\mathcal{N}\exp\left(ip^{\mathrm{R}}\,x\right) \text{ as } x\in S_{\mathrm{R}}=[x_{\mathrm{R}},\infty),\quad \zeta=\operatorname{sgn}\ \left(p^{\mathrm{R}}\right)=\pm.\\
&p^{\mathrm{L/R}}=\zeta\sqrt{\left[\pi_0\left(\mathrm{L/R}\right)\right]^2-\pi_\perp^2},\ \pi_\perp=\sqrt{\mathbf{p}_\perp^2+m^2},
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

где ${}_\zeta\mathcal{N}$ и ${}^\zeta\mathcal{N}$ – нормировочные множители. Соответствующие решения уравнения Дирака обозначаются как ${}_\zeta\psi_n(X)$ и ${}^\zeta\psi_n(X)$, $X=(t,\mathbf{r})$. Это состояния с определенными импульсами p^{L} при $x\to-\infty$, или импульсами p^{R} при $x\to+\infty$,

$$
\hat{p}_x\,{}_\zeta\psi_n(X)=p^{\mathrm{L}}\,{}_\zeta\psi_n(X)\,,\ \ x\to-\infty\,,\ \ \hat{p}_x\,{}^\zeta\psi_n(X)=p^{\mathrm{R}}\,{}^\zeta\psi_n(X)\,,\ \ x\to+\infty. \tag{2.1.6}
$$

Нетривиальные решения ${}_\zeta\psi_n(X)$ существуют только при определенных n, когда либо $\pi_1>\pi_\perp$, либо $\pi_1<-\pi_\perp$. Нетривиальные решения ${}^\zeta\psi_n(X)$ существуют только для n, при которых либо $\pi_2>\pi_\perp$, либо $\pi_2<-\pi_\perp$.

Существует пять областей Ω_k, $k=1,...,5$ квантовых чисел n, в которых решения $\varphi_n^{\mathrm{L/R}}(x)$ имеют схожие свойства и формы, $n_i\in\Omega_i$.

Область Ω_1 содержит квантовые числа n_1, подчиняющиеся неравенству $p_0\geq U_{\mathrm{R}}+\pi_\perp$. Два полных набора $\left\{{}^\zeta\psi_{n_1}\right\}$ и $\left\{{}_\zeta\psi_{n_1}\right\}$ могут быть интерпретированы как электронные решения.

Область Ω_5 содержит квантовые числа n_5, удовлетворяющие неравенству $p_0\leq U_{\mathrm{L}}-\pi_\perp$. Два полных набора $\left\{{}^\zeta\psi_{n_5}\right\}$ и $\left\{{}_\zeta\psi_{n_5}\right\}$ можно интерпретировать как позитронные решения.

Область $n_2\in\Omega_2$ существует для любого $\mathbb{U}$, а квантовые числа n_2 подчиняются условиям $U_{\mathrm{R}}-\pi_\perp<p_0<U_{\mathrm{R}}+\pi_\perp$, если $2\pi_\perp\leq\mathbb{U}$. Любые решения ψ_{n_2} имеют нулевые правые асимптотики и нулевой дираковский ток в направлении x. Таким образом, в этой области квантовых чисел мы имеем дело со стоячими волнами. Это также означает, что частицы с такими квантовыми числами подвергаются полному отражению от потенциальной ступени; они интерпретируются как электроны. Схожим образом дело обстоит в области Ω_4, где мы также имеем дело со стоячими волнами; позитро-

ны в этой области подвергаются полному отражению.

Зона Клейна, или область Ω_3, существует только если высота потенциальной ступени достаточно велика, $\mathbb{U} > 2m$. В ней квантовые числа p_0, $\mathbf{p}_\perp$ ограничены неравенствами $2\pi_\perp \leq \mathbb{U}$ и $U_\mathrm{L} + \pi_\perp \leq p_0 \leq U_\mathrm{R} - \pi_\perp$; существует два полных набора решений $\{\,_\zeta\psi_{n_3}(X)\}$, $\left\{\,^\zeta\psi_{n_3}(X)\right\}$, $\zeta = \pm$. В отличие от областей Ω_1 и Ω_5, наивная одночастичная трактовка этих решений становится ошибочной. Рассмотрение с точки зрения КЭД показывает, что решения $^\zeta\psi_{n_3}(X)$ в этой области описывают электроны, тогда как решения $_\zeta\psi_{n_3}(X)$ – позитроны.

2.1.2 Ортогональность и нормированность

Решения уравнения Дирака $_\zeta\psi_n(X)$ и $^\zeta\psi_n(X)$, $n \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5$ можно подвергнуть следующим условиям ортонормальности на гиперплоскости x:

$$
\begin{aligned}
&\left(\,_\zeta\psi_n,\ _{\zeta'}\psi_{n'}\right)_x = \zeta\eta_\mathrm{L}\delta_{\zeta,\zeta'}\delta_{n,n'},\ \ \eta_\mathrm{L} = \mathrm{sgn}\,\pi_0(\mathrm{L})\,,\\
&\left(\,^\zeta\psi_n,\ ^{\zeta'}\psi_{n'}\right)_x = \zeta\eta_\mathrm{R}\delta_{\zeta,\zeta'}\delta_{n,n'},\ \ \eta_\mathrm{R} = \mathrm{sgn}\,\pi_0(\mathrm{R})\ \,,\\
&(\psi,\psi')_x = \int \psi^\dagger(X)\,\gamma^0\gamma^1\psi'(X)\,dtd\mathbf{r}_\perp\,.
\end{aligned}
\tag{2.1.7}
$$

Коэффициенты $g\left(\,_\zeta\left|^{\zeta'}\right.\right) = \left(\,_\zeta\psi_n,\ ^{\zeta'}\psi_n\right)_x$ определяют взаимные переразложения этих решений:

$$
\begin{aligned}
&\eta_\mathrm{L}\,^\zeta\psi_n(X) = \,_+\psi_n(X)\,g\left(_+\left|^\zeta\right.\right) - \,_-\psi_n(X)\,g\left(_-\left|^\zeta\right.\right),\\
&\eta_\mathrm{R}\,_\zeta\psi_n(X) =^+\psi_n(X)\,g\left(^+\left|_\zeta\right.\right) - \,^-\psi_n(X)\,g\left(^-\left|_\zeta\right.\right).
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

Унитарные соотношения для коэффициентов переразложения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&g\left(\,_+\left|^{\zeta'}\right.\right)^* g\left(\,_+\left|^\zeta\right.\right) - g\left(\,_-\left|^{\zeta'}\right.\right)^* g\left(\,_-\left|^\zeta\right.\right) = \zeta\eta_\mathrm{L}\eta_\mathrm{R}\delta_{\zeta,\zeta'}\,,\\
&g\left(\,^+\left|_{\zeta'}\right.\right)^* g\left(\,^+\left|_\zeta\right.\right) - g\left(\,^-\left|_{\zeta'}\right.\right)^* g\left(\,^-\left|_\zeta\right.\right) = \zeta\eta_\mathrm{L}\eta_\mathrm{R}\delta_{\zeta,\zeta'}\,.
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

Для извлечения результатов одночастичной теории рассеяния, все важные величины этой теории, такие как коэффициенты отражения и прохождения и т.д., должны быть представлены в терминах коэффициентов g, т.е. матричных элементов тока в направлении x.

Следует отметить, что КЭД имеет дело с физическими величинами, представляющими собой объемные интегралы на гиперплоскости с фиксированным значением t:

$$(\psi, \psi') = \int_{-K^{(\mathrm{L})}}^{x_{\mathrm{L}}} \Theta dx + \int_{x_{\mathrm{L}}}^{x_{\mathrm{R}}} \Theta dx + \int_{x_{\mathrm{R}}}^{K^{(\mathrm{R})}} \Theta dx, \quad \Theta = \int \psi^{\dagger} \psi' d\mathbf{r}_{\perp}, \tag{2.1.10}$$

где в конечных выражениях подразумевается, что $K^{(\mathrm{L/R})} \to \infty$. В результате, второе слагаемое в уравнении (2.1.10) может быть отброшено, и необходимо учитывать только асимптотические вклады. Таким образом находится следующие линейно независимые части для каждого из n:

$$\begin{aligned}
&\left({}_{\zeta}\psi_n,\ {}_{\zeta}\psi_{n'} \right) = \left({}^{\zeta}\psi_n,\ {}^{\zeta}\psi_{n'} \right) = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta\left(p_0 - p_0'\right) \delta\left(\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{p}_{\perp}'\right) \mathcal{M}_n, \\
&\mathcal{M}_n = \left| g\left({}_{+}\middle|{}^{+}\right) \right|^2, \quad n \in \Omega_1 \cup \Omega_5; \quad \mathcal{M}_3 = \left| g\left({}_{+}\middle|{}^{-}\right) \right|^2, \quad n \in \Omega_3; \\
&\left({}_{\zeta}\psi_n,\ {}^{-\zeta}\psi_n \right) = 0, \quad n \in \Omega_1 \cup \Omega_5\ , \quad {}_{\zeta}\psi_n \text{ и } {}^{-\zeta}\psi_n \text{ независимы}, \\
&\left({}_{\zeta}\psi_n,\ {}^{\zeta}\psi_n \right) = 0, \quad n \in \Omega_3\ , \ {}_{\zeta}\psi_n \text{ и } {}^{\zeta}\psi_n \text{ независимы}.
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Затем, можно отождествить решения следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\text{in-решения:} \quad {}_{+}\psi_{n_1},\ {}^{-}\psi_{n_1};\ \ {}_{-}\psi_{n_5},\ {}^{+}\psi_{n_5};\ \ {}_{-}\psi_{n_3},\ {}^{-}\psi_{n_3}\ , \\
&\text{out-решения:} \quad {}_{-}\psi_{n_1},\ {}^{+}\psi_{n_1};\ \ {}_{+}\psi_{n_5},\ {}^{-}\psi_{n_5};\ \ {}_{+}\psi_{n_3},\ {}^{+}\psi_{n_3}.
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

2.1.3 Квантованное поле Дирака и In- и Out-операторы

В качестве первого шага канонического квантования, оператор дираковского поля $\check{\Psi}(X)$ в представлении Гейзенберга следует записать как

$$\Psi(X) \Longrightarrow \check{\Psi}(X)\,, \quad \left[\check{\Psi}(X)\,, \hat{\Psi}(X')\right]_{+}\Big|_{t=t'} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\check{\Psi}(X), \check{\Psi}(X')^{\dagger}\right]_{+}\Big|_{t=t'} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'); \quad \check{\Psi}(X) = \sum_{i=1}^{5} \check{\Psi}_i(X),\\
&\check{\Psi}_1(X) = \sum_{n_1} \mathcal{M}_{n_1}^{-1/2}\left[\,{}_{+}a_{n_1}(\mathrm{in})\,{}_{+}\psi_{n_1}(X) + {}^{-}a_{n_1}(\mathrm{in})\,{}^{-}\psi_{n_1}(X)\right]\\
&= \sum_{n_1} \mathcal{M}_{n_1}^{-1/2}\left[\,{}^{+}a_{n_1}(\mathrm{out})\,{}^{+}\psi_{n_1}(X) + {}_{-}a_{n_1}(\mathrm{out})\,{}_{-}\psi_{n_1}(X)\right],\\
&\check{\Psi}_2(X) = \sum_{n_2} \mathcal{M}_{n_2}^{-1/2} a_{n_2}\psi_{n_2}(X), \quad \check{\Psi}_4(X) = \sum_{n_4} \mathcal{M}_{n_4}^{-1/2} b_{n_4}^{\dagger}\psi_{n_4}(X),\\
&\check{\Psi}_3(X) = \sum_{n_3} \mathcal{M}_{n_3}^{-1/2}\left[\,{}^{-}a_{n_3}(\mathrm{in})\,{}^{-}\psi_{n_3}(X) + {}_{-}b_{n_3}^{\dagger}(\mathrm{in})\,{}_{-}\psi_{n_3}(X)\right]\\
&= \sum_{n_3} \mathcal{M}_{n_3}^{-1/2}\left[\,{}^{+}a_{n_3}(\mathrm{out})\,{}^{+}\psi_{n_3}(X) + {}_{+}b_{n_3}^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}_{+}\psi_{n_3}(X)\right],\\
&\check{\Psi}_5(X) = \sum_{n_5} \mathcal{M}_{n_5}^{-1/2}\left[\,{}^{+}b_{n_5}^{\dagger}(\mathrm{in})\,{}^{+}\psi_{n_5}(X) + {}_{-}b_{n_5}^{\dagger}(\mathrm{in})\,{}_{-}\psi_{n_5}(X)\right]\\
&= \sum_{n_5} \mathcal{M}_{n_5}^{-1/2}\left[\,{}_{+}b_{n_5}^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}_{+}\psi_{n_5}(X) + {}^{-}b_{n_5}^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}^{-}\psi_{n_5}(X)\right],
\end{aligned}
\tag{2.1.13}
$$

где все операторы a и b представляют собой Ферми-операторы уничтожения и все $a^{\dagger}$ и $b^{\dagger}$ – Ферми-операторы рождения. Оператор кинетической энергии имеет вид

$$
\check{\mathbb{H}}^{\mathrm{kin}} = \int \check{\Psi}^{\dagger}(X)\,\check{H}^{\mathrm{kin}}\,\check{\Psi}(X)\,d\mathbf{r} - \mathbb{H}_0, \quad \mathbb{H}_0 = \left\langle 0,\mathrm{in}\left|\check{\mathbb{H}}^{\mathrm{kin}}\right|0,\mathrm{in}\right\rangle. \tag{2.1.14}
$$

Раскладывая оператор $\check{\Psi}(X)$ по полному набору решений уравнения Дирака $\psi_n(X)$, из уравнения (2.1.14) можно получить, что

$$
\mathcal{H}_{nl}^{\mathrm{kin}} = \int \psi_n^{\dagger}(X)\,\check{H}^{\mathrm{kin}}\psi_l(X)\,d\mathbf{r}. \tag{2.1.15}
$$

Разделяя интеграл (2.1.15) на три части по областям S_{L}, S_{int} и S_{R}, как было сделано в уравнении (2.1.10), можно продемонстрировать, что оператор $\mathcal{H}_{nl}^{\mathrm{kin}}$ диагонален по квантовым числам n, и что выражение $\check{\mathbb{H}}^{\mathrm{kin}}$ положительно определено. Средние значения операторов заряда и кинетической энергии по начальному и конечному вакуумам, обладающим свойствами

$$a(\mathrm{in})\,|0,\mathrm{in}\rangle = b(\mathrm{in})\,|0,\mathrm{in}\rangle = 0, \quad a(\mathrm{out})\,|0,\mathrm{out}\rangle = b(\mathrm{out})\,|0,\mathrm{out}\rangle = 0, \tag{2.1.16}$$

равны нулю. Принимая во внимание средние значения заряда, можно видеть, что все операторы a соответствуют электронам, тогда как b – позитронам. In- и out-операторы связаны некими соотношениями. В области Ω_1 эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} {}^{+}a_n(\mathrm{out}) &= \eta_{\mathrm{L}} g\left({}_{+}|^{+}\right)^{-1}\ {}_{+}a_n(\mathrm{in}) + \left[g\left({}_{-}|^{-}\right)^{-1} g\left({}_{-}|^{+}\right)\right]^{*}\ {}^{-}a_n(\mathrm{in}), \\ {}_{-}a_n(\mathrm{out}) &= g\left({}_{+}|^{+}\right)^{-1} g\left({}_{-}|^{+}\right)\ {}_{+}a_n(\mathrm{in}) - \eta_{\mathrm{R}}\left[g\left({}_{-}|^{-}\right)^{-1}\right]^{*}\ {}^{-}a_n(\mathrm{in}). \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

В области Ω_5 соотношения схожи.

В области Ω_3 наборы связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^{+}a_n(\mathrm{out}) &= -g\left({}_{-}|^{+}\right)^{-1}\ {}_{-}b_n^{\dagger}(\mathrm{in}) + \left[g\left({}_{+}|^{-}\right)^{-1} g\left({}_{+}|^{+}\right)\right]^{*}\ {}^{-}a_n(\mathrm{in}), \\ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) &= g\left({}_{-}|^{+}\right)^{-1} g\left({}_{+}|^{+}\right)\ {}_{-}b_n^{\dagger}(\mathrm{in}) + \left[g\left({}_{+}|^{-}\right)^{-1}\right]^{*}\ {}^{-}a_n(\mathrm{in}). \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Из этих соотношений можно понять, что вакуумные вектора $|0,\mathrm{in}\rangle$ и $|0,\mathrm{out}\rangle$ отличаются из-за вклада области Ω_3.

Можно явно показать, что амплитуда перехода из вакуумного состояния в вакуумное состояние имеет вид [63]

$$c_v = \langle 0,\mathrm{out}|0,\mathrm{in}\rangle = \prod_{n\in\Omega_3} g\left({}_{-}|^{+}\right)^{-1} g\left({}_{+}|^{+}\right). \tag{2.1.19}$$

2.1.4 In- и Out-частицы вне зоны Клейна

Используя операторы КТП, можно вычислять характеристики одночастичных состояний и обосновывать in- и out-интерпретации. Рассмотрим эволюцию in-состояния в области Ω_1, ${}_{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{in})\,|0,\mathrm{in}\rangle$: относительная амплитуда $R_{+,n}$ отражения электрона и относительная амплитуда $T_{+,n}$ прохождения электрона через барьер имеют вид

$$\begin{aligned} R_{+,n} &= c_v^{-1}\langle 0,\mathrm{out}\left|\,{}_{-}a_n(\mathrm{out})\,{}_{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{in})\right|0,\mathrm{in}\rangle, \\ T_{+,n} &= c_v^{-1}\langle 0,\mathrm{out}\left|{}^{+}a_n(\mathrm{out})\,{}_{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{in})\right|0,\mathrm{in}\rangle. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Соответствующие им вероятности удовлетворяют соотношению полноты $|R_{\zeta,n}|^2 + |T_{\zeta,n}|^2 = 1$.

С точки зрения не зависящей от времени потенциальной теории рассеяния, необходимо вычислить два средних тока в данном in-состоянии; первый – ток J_R отраженных out-частиц ${}_{-}a_{n_1}^{\dagger}(\mathrm{out})\,|0,\mathrm{out}\rangle$, второй – ток J_T прошедших сквозь барьер out-частиц ${}^{+}a_{n_1}^{\dagger}(\mathrm{out})\,|0,\mathrm{out}\rangle$. Оба тока пропорциональны (равны) среднему числу соответствующих out-частиц в данном in-состоянии:

$$\begin{aligned} J_R &= \left\langle 0,\mathrm{in}\right|\,{}_{+}a_n(\mathrm{in})\left[\,{}_{-}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}_{-}a_n(\mathrm{out})\right]\,{}_{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{in})\left|0,\mathrm{in}\right\rangle \\ &= \left|g\left({}_{+}\left|{}^{+}\right)\right|^{-2}\left|g\left({}_{-}\left|{}^{+}\right)\right|^{2} = |R_{+,n}|^2, \\ J_T &= \left\langle 0,\mathrm{in}\right|\,{}_{+}a_n(\mathrm{in})\left[\,{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}^{+}a_n(\mathrm{out})\right]\,{}_{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{in})\left|0,\mathrm{in}\right\rangle \\ &= \left|g\left({}_{+}\left|{}^{+}\right)\right|^{-2} = |T_{+,n}|^2. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Таким образом, в области Ω_1 реализация правил потенциальной теории рассеяния в рамках КТП позволяет получить верный результат $J_R + J_T = 1$.

2.1.5 In- и Out-частицы в зоне Клейна

In- и out-электроны расположены слева от потенциальной ступени, а in- и out- позитроны – справа. Вакуум нестабилен и возможен процесс рождения пар. In-электроны движутся по направлению к ступени слева и подвергаются полному отражению. Аналогично, in-позитроны, налетающие на ступень справа, подвергаются полному отражению. Такая идентификация состояний в зоне Клейна совпадает с предложенной Никишовым в рамках релятивистской квантовой механики [57].

Относительные амплитуды рождения пары и уничтожения пары имеют вид:

$$
\begin{aligned}
& w\left(+-|0\right)_{n'n} = c_v^{-1}\langle 0,\mathrm{out}\left|\ {}^{+}a_{n'}\left(\mathrm{out}\right)\ {}_{+}b_n\left(\mathrm{out}\right)\right| 0,\mathrm{in}\rangle \\
& = \delta_{n,n'} w_n\left(+-|0\right), \quad w_n\left(+-|0\right) = g\left({}_{+}\left|{}^{+}\right.\right)^{-1} \quad , \\
& w\left(0|-+\right)_{nn'} = c_v^{-1}\langle 0,\mathrm{out}\left|\ {}_{-}b_n^{\dagger}(\mathrm{in})\ {}^{-}a_{n'}^{\dagger}(\mathrm{in})\right| 0,\mathrm{in}\rangle \\
= \ & \delta_{n,n'} w_n\left(0|-+\right), \quad w_n\left(0|-+\right) = -\left[g\left({}_{-}\left|{}^{-}\right.\right)^{*}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.1.22}
$$

Дифференциальные средние числа out-частиц в начальном вакууме $|0,\mathrm{in}\rangle$,

$$
N_n^a\left(\mathrm{out}\right) = \left\langle 0,\mathrm{in}\left|\ {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\ {}^{+}a_n(\mathrm{out})\right| 0,\mathrm{in}\right\rangle = \left|g\left({}_{-}\left|{}^{+}\right.\right)\right|^{-2}, \tag{2.1.23}
$$

равны среднему числу рожденных пар $N_n^{\mathrm{cr}} = N_n^a\left(\mathrm{out}\right)$. Полное число пар, рожденных из вакуума, есть $N = \sum_{n\in\Omega_3} N_n^{\mathrm{cr}}$. Относительные амплитуды рассеяния могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
& w\left(+|+\right)_{n'n} = c_v^{-1}\langle 0,\mathrm{out}\left|\ {}^{+}a_{n'}\left(\mathrm{out}\right)\ {}^{-}a_n^{\dagger}(\mathrm{in})\right| 0,\mathrm{in}\rangle = \delta_{n,n'} w_n\left(+|+\right), \\
& w\left(-|-\right)_{n'n} = c_v^{-1}\langle 0,\mathrm{out}\left|\ {}_{+}b_{n'}\left(\mathrm{out}\right)\ {}_{-}b_n^{\dagger}(\mathrm{in})\right| 0,\mathrm{in}\rangle = \delta_{n,n'} w_n\left(-|-\right), \\
& w_n\left(+|+\right) = g\left({}_{+}\left|{}^{-}\right.\right) g\left({}_{+}\left|{}^{+}\right.\right)^{-1}, \quad w_n\left(-|-\right) = g\left({}_{-}\left|{}^{+}\right.\right) g\left({}_{+}\left|{}^{+}\right.\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.1.24}
$$

Наконец, вероятность вакуума остаться вакуумом есть

$$
P_v = |c_v|^2 = \prod_{n\in\Omega_3} p_v^n, \quad p_v^n = \left|w_n\left(-|-\right)\right|^{-2} = \left(1 - N_n^{\mathrm{cr}}\right), \tag{2.1.25}
$$

где p_v^n – дифференциальная (для одной квантовой моды n) вероятность перехода из вакуума в вакуум. Тогда вероятность отражения электрона и позитрона с заданными квантовыми числами n при условии, что все остальные частичные (парциальные) вакуумы остаются вакуумами, равна единице, $\left|w_n\left(\pm|\pm\right)\right|^2 p_v^n = 1$. Условная вероятность рождения пары в квантовой моде n имеет вид $\left|w_n\left(+-|0\right)\right|^2 p_v^n = N_n^{\mathrm{cr}}$.

2.2 Пиковое электрическое поле, заданное потенциальной ступенью

Для того, чтобы проиллюстрировать общую теорию, рассмотрим конкретный пример так называемого пикового электрического поля, заданного потенциальной ступенью. Будем рассматривать внешнее электромагнитное поле, помещенное в $(d = D+1)$-мерное пространство Минковского, параметризованное набором координат $X = (X^\mu, \mu = 0,1,\ldots,D) = (t,\mathbf{r})$, $X^0 = t$, $\mathbf{r} = (x, \mathbf{r}_\perp)$, $\mathbf{r}_\perp = \left(X^2,\ldots,X^D\right)$. Потенциалы внешнего электромагнитного поля выбираются следующей формы, $A^\mu(X) = \delta_0^\mu A_\mu(x)$,

$$A^\mu(X) = \left(A^0 = A_0\left(x\right)\,,\quad A^k = 0\,,\quad k = 1,...,D\right), \tag{2.2.1}$$

которая соответствует нулевому магнитному полю и электрическому полю вида

$$\mathbf{E}\left(X\right) = \mathbf{E}\left(x\right) = \left(E_x\left(x\right), 0,...,0\right)\,,\quad E_x\left(t\right) = -A_0'\left(x\right) = E\left(x\right)\,. \tag{2.2.2}$$

Электрическое поле (2.2.2) направлено вдоль оси x. Главные свойства этой потенциальной ступени можно выразить следующим образом:

$$A_0\left(x\right) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} A_0\left(\pm\infty\right)\,,\quad E\left(x\right) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \tag{2.2.3}$$

где $A_0\left(\pm\infty\right)$ – некоторые постоянные величины, а производная $A_0'\left(x\right) = \partial_x A_0\left(x\right)$ не меняет знака на всем интервале $x \in \mathbb{R}$. Для определенности будет предполагаться, что

$$A_0'\left(x\right) \leq 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E\left(x\right) = -A_x'\left(x\right) \geq 0 \\ A_0\left(-\infty\right) > A_0\left(+\infty\right) \end{array} \right. . \tag{2.2.4}$$

Электрический заряд электрона равен $q = -e$, $e > 0$. Потенциальная энергия электрона в этом поле $U(x) = -eA_0(x)$, а величина соответствующей потенциальной ступени составляет

$$\mathbb{U} = U_\mathrm{R} - U_\mathrm{L} > 0,\quad U_\mathrm{R} = -eA_0(+\infty),\quad U_\mathrm{L} = -eA_0(-\infty). \tag{2.2.5}$$

Предполагается, что мы рассматриваем случай критической потенциальной ступени, для которой выполняется неравенство $\mathbb{U} >2m$ и вакуум нестабилен в зоне Клейна (т.е. происходит рождение частиц).

Рассматриваемая система состоит из дираковского поля $\psi(X)$, взаимодействующего с так называемым пиковым электрическим полем. Данное поле состоит из двух независимых частей, для каждой из которых уравнение Дирака имеет точное решение. Такое поле экспоненциально растет от минус бесконечности $x = -\infty$, достигает своего максимального значения E в точке $x = 0$ и затем экспоненциально убывает на плюс бесконечности $x = +\infty$. Максимум этого поля $E > 0$ представляет собой некий пик около точки $x = 0$, такой, что предел

$$\lim_{x\to -0} E'(x) \neq \lim_{x\to +0} E'(x) \ , \tag{2.2.6}$$

не определен. Интервал, на котором поле возрастает, будет обозначаться как $S_{\mathrm{L}} = (-\infty, 0]$, тогда как интервал, на котором поле убывает, $S_{\mathrm{R}} = (0, +\infty)$. Электрическое поле и определяющий его потенциал имеют вид

$$E(x) = E \left\{ \begin{array}{ll} e^{k_1 x} \,, & x \in S_{\mathrm{L}} \\ e^{-k_2 x} \,, & x \in S_{\mathrm{R}} \end{array} \right. , \quad A_0(x) = E \left\{ \begin{array}{ll} k_1^{-1}\left(-e^{k_1 x} + 1\right) , & x \in S_{\mathrm{L}} \\ k_2^{-1}\left(e^{-k_2 x} - 1\right) \,, & x \in S_{\mathrm{R}} \end{array} \right. , \tag{2.2.7}$$

где $eE > 0, \ k_1, k_2 > 0$.

Следует отметить, что, например, несимметричное экспоненциальное поле, заданное потенциалом

$$A_0^{\mathrm{ed}}(x) = E \left\{ \begin{array}{ll} 0 \,, & x \in S_{\mathrm{L}} \\ k_2^{-1}\left(e^{-k_2 x} - 1\right) \,, & x \in S_{\mathrm{R}} \end{array} \right. , \tag{2.2.8}$$

может рассматриваться как специальный случай резко включающегося пикового поля, т.е. когда параметр k_1 достаточно велик, $k_1 \to \infty$.

2.2.1 Уравнение Дирака для пикового электрического поля

Уравнение Дирака для изучаемого поля принимает следующий вид:

$$i\partial_0\psi(X) = \check{H}\psi(X), \quad \check{H} = \gamma^0\left(-i\gamma^j\partial_j + m\right) + U(x), \quad j = 1, \dots D, \tag{2.2.9}$$

где дираковское поле $\psi(X)$ – $2^{[d/2]}$-компонентный спинор (здесь и далее квадратные скобки в $[d/2]$ означают целую часть числа $d/2$) в d-мерном пространстве, $\check{H}$ – одночастичный гамильтониан, γ^μ это d-мерные гамма матрицы, $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$([85]):

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, -1, \dots, -1}_{d}), \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, D. \tag{2.2.10}$$

Из-за структуры внешнего поля (2.2.7), дираковский спинор $\psi(X)$ в направлениях X^0 и $X^2, \dots X^D$ представляет собой простую плоскую волну, поэтому можно рассматривать стационарные решения уравнения Дирака (2.2.9) в форме

$$\begin{aligned}
&\psi_n(X) = \exp\left[-ip_0 t + i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}_\perp\right]\psi_n(x), \quad n = (p_0, \mathbf{p}_\perp, \sigma), \\
&\psi_n(x) = \left\{\gamma^0\left[p_0 - U(x)\right] + i\gamma^1\partial_x - \gamma^\perp \mathbf{p}_\perp + m\right\}\phi_n(x), \\
&\mathbf{p}_\perp = \left(p^2, \dots, p^D\right), \quad \gamma^\perp = \left(\gamma^2, \dots, \gamma^D\right).
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Спиноры $\psi_n(x)$ и $\phi_n(x)$, приведенные в этом выражении, зависят только от x. Эти спиноры являются, фактически, стационарными состояниями с фиксированными энергиями p_0 и поперечными импульсами $\mathbf{p}_\perp$ (как и раньше, индекс $\perp$ означает перпендикулярные оси x пространственные компоненты, т.е. $\mathbf{p}_\perp = \left(p^2, \dots, p^D\right)$). Подставляя уравнение (2.2.11) в (2.2.9), получим дифференциальное уравнение второго порядка на $\phi_n(x)$:

$$\left(\hat{p}_x^2 - i\gamma^0\gamma^1\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \left[p_0 - U(x)\right]^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2\right)\phi_n(x) = 0, \quad \hat{p}_x = -i\partial_x. \tag{2.2.12}$$

Спиновые переменные отделяются подстановкой

$$\phi_n(x) = \phi_n^{(\chi)}(x) = \varphi_n(x) v_{\chi,\sigma}. \tag{2.2.13}$$

Набор постоянных ортонормальных спиноров $v_{s,\sigma}$ ($\chi = \pm 1$, $\sigma = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_{[d/2]-1}\right)$, $\sigma_j = \pm 1$,) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\gamma^0 \gamma^1 v_{\chi,\sigma} = \chi v_{\chi,\sigma}, \quad v_{\chi,\sigma}^{\dagger} v_{\chi,\sigma} = \delta_{\chi,\chi'} \delta_{\sigma,\sigma'}. \tag{2.2.14}$$

Квантовые числа s и σ описывают поляризацию спина и обеспечивают параметризацию решений. В d измерениях существует всего $J_{(d)} = 2^{[d/2]-1}$ различных спиновых состояний. В работе [86] было продемонстрировано, что достаточно рассматривать только одно значение параметра χ. Скалярные функции $\varphi_n(x)$ подчиняются дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\begin{gathered}\left(-\partial_x^2 - i\chi eE e^{k_1 x} - \left[p_0 + \frac{eE}{k_1}\left(-e^{k_1 x} + 1\right)\right]^2 + \pi_\perp^2\right) \varphi_n(x) = 0, \; x \in S_{\mathrm{L}}, \\ \left(-\partial_x^2 - i\chi eE e^{-k_2 x} - \left[p_0 + \frac{eE}{k_2}\left(e^{-k_2 x} - 1\right)\right]^2 + \pi_\perp^2\right) \varphi_n(x) = 0, \; x \in S_{\mathrm{R}},\end{gathered} \tag{2.2.15}$$

где, полагая $\mathrm{j} = 1$ если $x \in S_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{j} = 2$ если $x \in S_{\mathrm{R}}$, и $\pi_\perp^2 = p_\perp^2 + m^2$, введем новые переменные η_{j} для каждого из двух интервалов,

$$\eta_{\mathrm{j}} = i h_{\mathrm{j}} e^{(-1)^{\mathrm{j}+1} k_{\mathrm{j}} x}, \quad h_{\mathrm{j}} = \frac{2eE}{k_{\mathrm{j}}^2}, \tag{2.2.16}$$

и представим скалярные функции $\varphi_n(x)$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}\varphi_n^{\mathrm{j}}(x) = e^{-\eta_{\mathrm{j}}/2} \eta_{\mathrm{j}}^{\nu_{\mathrm{j}}} \rho_{\mathrm{j}}(x), \quad \nu_1 = i\frac{|p^{\mathrm{L}}|}{k_1}, \quad |p^{\mathrm{L}}| = \sqrt{\pi_1^2 - \pi_\perp^2}, \\ \nu_2 = i\frac{|p^{\mathrm{R}}|}{k_2}, \quad |p^{\mathrm{R}}| = \sqrt{\pi_2^2 - \pi_\perp^2}, \; \pi_{\mathrm{j}} = p_0 + (-1)^{\mathrm{j}+1} \frac{eE}{k_{\mathrm{j}}}.\end{gathered} \tag{2.2.17}$$

Функции $\rho_{\mathrm{j}}(x)$ удовлетворяют вырожденному гипергеометрическому уравнению,

$$\left(\eta_{\mathrm{j}}\frac{\partial^2}{\partial\eta_{\mathrm{j}}^2}+\left[c_{\mathrm{j}}-\eta_{\mathrm{j}}\right]\frac{\partial}{\partial\eta_{\mathrm{j}}}-a_{\mathrm{j}}\right)\rho_{\mathrm{j}}(x)=0,$$
$$c_{\mathrm{j}}=2\nu_{\mathrm{j}}+1,\quad a_{\mathrm{j}}=\frac{1}{2}\left(1-\chi\right)+(-1)^{\mathrm{j}}\frac{i\pi_{\mathrm{j}}}{k_{\mathrm{j}}}+\nu_{\mathrm{j}}. \tag{2.2.18}$$

Фундаментальный набор решений для этого уравнения состоит из двух линейно независимых вырожденных гипергеометрических функций:

$$\Phi\left(a_{\mathrm{j}},c_{\mathrm{j}};\eta_{\mathrm{j}}\right)\quad\text{and}\quad\eta_{\mathrm{j}}^{1-c_{\mathrm{j}}}e^{\eta_{\mathrm{j}}}\Phi\left(1-a_{\mathrm{j}},2-c_{\mathrm{j}};\eta_{\mathrm{j}}\right),$$

где функции Φ определяются как

$$\Phi\left(a,c;\eta\right)=1+\frac{a}{c}\frac{\eta}{1!}+\frac{a\left(a+1\right)}{c\left(c+1\right)}\frac{\eta^2}{2!}+\dots. \tag{2.2.19}$$

Общее решение для обоих интервалов S_{L} и S_{R} может быть представлено как их линейная комбинация,

$$\begin{aligned}\varphi_n^{\mathrm{j}}(x)&=A_2^{\mathrm{j}}y_1^{\mathrm{j}}\left(\eta_{\mathrm{j}}\right)+A_1^{\mathrm{j}}y_2^{\mathrm{j}}\left(\eta_{\mathrm{j}}\right),\\ y_1^{\mathrm{j}}&=e^{-\eta_{\mathrm{j}}/2}\eta_{\mathrm{j}}^{\nu_{\mathrm{j}}}\Phi\left(a_{\mathrm{j}},c_{\mathrm{j}};\eta_{\mathrm{j}}\right),\\ y_2^{\mathrm{j}}&=e^{\eta_{\mathrm{j}}/2}\eta_{\mathrm{j}}^{-\nu_{\mathrm{j}}}\Phi\left(1-a_{\mathrm{j}},2-c_{\mathrm{j}};-\eta_{\mathrm{j}}\right).\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Коэффициенты A_1^{j}, A_2^{j} должны быть найдены при помощи граничных условий.

Вронскиан функций $y_{1,2}^{\mathrm{j}}\left(\eta_{\mathrm{j}}\right)$ имеет вид

$$W=y_1^{\mathrm{j}}\frac{d}{d\eta_{\mathrm{j}}}y_2^{\mathrm{j}}-y_2^{\mathrm{j}}\frac{d}{d\eta_{\mathrm{j}}}y_1^{\mathrm{j}}=\frac{1-c_{\mathrm{j}}}{\eta_{\mathrm{j}}}. \tag{2.2.21}$$

Из выражения (2.2.7) можно видеть, что на минус $x\to-\infty$ и на плюс $x\to+\infty$ бесконечности электрическое поле отсутствует. Решения, соответствующие этой физической картине, имеют вид (2.2.11), а функции $\varphi_n(x)$ обозначаются как ${}_{\zeta}\varphi_n(x)$ и ${}^{\zeta}\varphi_n(x)$, соответственно. В этих областях решения уравнения Дирака представляют собой решения для свободных частиц, или

$$
{}_{\zeta}\varphi_n(x) = {}_{\zeta}\mathcal{N}e^{i\zeta|p^{\mathrm{L}}|x} \text{ если } x \to -\infty, \;\; {}^{\zeta}\varphi_n(x) = {}^{\zeta}\mathcal{N}e^{i\zeta|p^{\mathrm{R}}|x} \text{ если } x \to +\infty, \;\; \zeta = \pm. \tag{2.2.22}
$$

Решения ${}_{\zeta}\varphi_n(x)$ и ${}^{\zeta}\varphi_n(x)$ асимптотически описывают частицы с заданными вещественными импульсами $\zeta|p^{\mathrm{L}}|$ и $\zeta|p^{\mathrm{R}}|$ вдоль оси x. Множители ${}_{\zeta}\mathcal{N}$ и ${}^{\zeta}\mathcal{N}$ являют собой нормировочные множители по отношению к внутреннему произведению (2.1.7):

$$
\begin{aligned}
&{}_{\zeta}\mathcal{N} = {}_{\zeta}CY, \;\; {}^{\zeta}\mathcal{N} = {}^{\zeta}CY, \;\; Y = (V_{\perp}T)^{-1/2}, \\
&{}_{\zeta}C = \left[2\zeta|p^{\mathrm{L}}|\left|\left(\pi_1 - \chi\zeta|p^{\mathrm{L}}|\right)\right|\right]^{-1/2}, \;\; {}^{\zeta}C = \left[2\zeta|p^{\mathrm{R}}|\left|\left(\pi_2 - \chi\zeta|p^{\mathrm{R}}|\right)\right|\right]^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{2.2.23}
$$

В силу выполнения этих свойств, электронные/позитронные состояния могут быть выбраны следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&{}_{+}\varphi_n(x) = {}_{+}\mathcal{N}\exp(-i\pi\nu_1/2)\, y_1^1, \;\; {}_{-}\varphi_n(x) = {}_{-}\mathcal{N}\exp(i\pi\nu_1/2)\, y_2^1, \;\; x \in S_{\mathrm{L}}; \\
&{}^{+}\varphi_n(x) = {}^{+}\mathcal{N}\exp(i\pi\nu_2/2)\, y_2^2, \;\; {}^{-}\varphi_n(x) = {}^{-}\mathcal{N}\exp(-i\pi\nu_2/2)\, y_1^2, \;\; x \in S_{\mathrm{R}}.
\end{aligned} \tag{2.2.24}
$$

Принимая во внимание полный набор точных решений (2.2.20) и взаимные переразложения (2.1.8), можно представить функции ${}_{-}\varphi_n(x)$ и ${}^{+}\varphi_n(x)$ в следующем виде:

$$
{}^{+}\varphi_n(x) = \begin{cases} \eta_{\mathrm{L}}\left[{}_{+}\varphi_n(x)\, g({}_{+}|^{+}) - {}_{-}\varphi_n(x)\, g({}_{-}|^{+})\right], & x \in S_{\mathrm{L}} \\ {}^{+}\mathcal{N}\exp(i\pi\nu_2/2)\, y_2^2, & x \in S_{\mathrm{R}} \end{cases}, \tag{2.2.25}
$$

$$
{}_{-}\varphi_n(x) = \begin{cases} {}_{-}\mathcal{N}\exp(i\pi\nu_1/2)\, y_2^1, & x \in S_{\mathrm{L}} \\ \eta_{\mathrm{R}}\left[{}^{+}\varphi_n(x)\, g({}^{+}|_{-}) - {}^{-}\varphi_n(x)\, g({}^{-}|_{-})\right], & x \in S_{\mathrm{R}} \end{cases}, \tag{2.2.26}
$$

на всей оси x.

Функции ${}_{-}\varphi_n(x)$ и ${}^{+}\varphi_n(x)$ и их производные должны удовлетворять условиям склеивания на границе интервалов:

$$
{}^{+}_{-}\varphi_n(x)\big|_{x=-0} = {}^{+}_{-}\varphi_n(x)\big|_{x=+0}, \;\; \partial_x\, {}^{+}_{-}\varphi_n(x)\big|_{x=-0} = \partial_x\, {}^{+}_{-}\varphi_n(x)\big|_{x=+0}. \tag{2.2.27}
$$

Используя выражение (2.2.27) и вронскиан (2.2.21), можно отыскать коэффициенты $g\left({}_{\zeta}|^{\zeta'}\right)$ и $g\left({}^{\zeta}|_{\zeta'}\right)$ из уравнений (2.2.25) и (2.2.26). Так, к примеру, применяя условия склеивания к набору (2.2.25), найдем коэффициент $g\left({}_{-}|^{+}\right)$:

$$g\left({}_{-}|^{+}\right) = C\Delta, \quad C = \frac{-\eta_{\mathrm{L}}}{2}\sqrt{\frac{|\pi_1 + \chi|p^{\mathrm{L}}|}{|p^{\mathrm{L}}||p^{\mathrm{R}}|\,|\pi_2 - \chi|p^{\mathrm{R}}||}}\exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\nu_2 - \nu_1\right)\right],$$
$$\Delta = \left.\left[k_1 h_1 y_2^2 \frac{\partial}{\partial \eta_1} y_1^1 + k_2 h_2 y_1^1 \frac{\partial}{\partial \eta_2} y_2^2\right]\right|_{x=0}. \tag{2.2.28}$$

Проделывая ту же операцию с набором (2.2.26), получим:

$$g\left({}^{+}|_{-}\right) = C'\Delta', \quad C' = \frac{\eta_{\mathrm{R}}}{2}\sqrt{\frac{|\pi_2 - \chi|p^{\mathrm{R}}||}{|p^{\mathrm{R}}||p^{\mathrm{L}}|\,|\pi_1 + \chi|p^{\mathrm{L}}||}}\exp\left[-\frac{i\pi}{2}\left(\nu_2 - \nu_1\right)\right],$$
$$\Delta' = \left.\left[k_1 h_1 y_1^2 \frac{\partial}{\partial \eta_1} y_2^1 + k_2 h_2 y_2^1 \frac{\partial}{\partial \eta_2} y_1^2\right]\right|_{x=0}. \tag{2.2.29}$$

Легко проверить, что выражения выше симметричны относительно одновременной замены $k_1 \leftrightarrows k_2$ and $\pi_1 \leftrightarrows -\pi_2$,

$$g\left({}^{+}|_{-}\right) \leftrightarrows -\eta_{\mathrm{L}}\eta_{\mathrm{R}} g\left({}_{-}|^{+}\right). \tag{2.2.30}$$

Используя выражение для $g\left({}_{-}|^{+}\right)$, найденное в уравнении (2.2.28), можно найти дифференциальное среднее число рожденных дираковских частиц,

$$N_n^{\mathrm{cr}} = N_{n,-}^{\mathrm{cr}} = N_{n,+}^{\mathrm{cr}} = \langle 0, \mathrm{in}|\ {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\ {}^{+}a_n(\mathrm{out})|0, \mathrm{in}\rangle = \left|g\left({}_{-}|^{+}\right)\right|^{-2} = |C\Delta|^{-2}. \tag{2.2.31}$$

Ясно, что N_n^{cr} зависит от квадрата модуля поперечного импульса, $\mathbf{p}_{\perp}^2$. Из уравнения (2.2.31) следует, что выражения для N_n^{cr} инварианты относительно одновременной замены $k_1 \leftrightarrows k_2$ and $\pi_1 \leftrightarrows -\pi_2$. Тогда в случае, когда $k_1 = k_2$, числа частиц N_n^{cr} также становятся четной функцией относительно p_0.

Как следует из уравнений (2.2.28), (2.2.29), если один из параметров $|p^{\mathrm{R}}|$ или

$|p^{\mathrm{L}}|$ стремится к нулю, выполняется одно из следующих условий:

$$\left|g\left({}_{-}|{}^{+}\right)\right|^{-2} \sim \ |p^{\mathrm{R}}| \to 0, \quad \left|g\left({}^{+}|{}_{-}\right)\right|^{-2} \ \sim \ |p^{\mathrm{L}}| \to 0, \quad \forall\lambda \neq 0. \tag{2.2.32}$$

Эти свойства имеют важное значения для обоснования интерпретации in- и out-частиц в общей теории [63].

Формальный переход к случаю скалярного поля может быть выполнен, если положить $\chi = 0$ и $\eta_{\mathrm{L}} = \eta_{\mathrm{R}} = 1$ в уравнениях (2.2.28) и (2.2.29). Тогда нормировочные множители ${}_{\zeta}C$ и ${}^{\zeta}C$ записываются как

$${}_{\zeta}C = \left|2p^{\mathrm{L}}\right|^{-1/2}, \quad {}^{\zeta}C = \left|2p^{\mathrm{R}}\right|^{-1/2}. \tag{2.2.33}$$

Коэффициент $g\left({}_{-}|{}^{+}\right)$ для скалярных частиц имеет вид

$$g\left({}_{-}|{}^{+}\right) = C_{\mathrm{sc}}\, \Delta|_{\chi=0}\,, \quad C_{\mathrm{sc}} = \sqrt{\frac{1}{4\,|p^{\mathrm{L}}|\,|p^{\mathrm{R}}|}} \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\nu_2 - \nu_1\right)\right], \tag{2.2.34}$$

где Δ определяется уравнением (2.2.28). При одновременной замене $k_1 \leftrightarrows k_2$ и $\pi_1 \leftrightarrows -\pi_2$ выполняется свойство

$$g\left({}^{+}|{}_{-}\right) \leftrightarrows g\left({}_{-}|{}^{+}\right). \tag{2.2.35}$$

2.2.2 Рассеяние частиц вне зоны Клейна

Относительные амплитуды отражения $|R_{\zeta,n}|^2$ и прохождения $|T_{\zeta,n}|^2$ есть, соответственно,

$$|T_{\zeta,n}|^2 = 1 - |R_{\zeta,n}|^2, \quad |R_{\zeta,n}|^2 = \left[1 + \left|g\left({}_{-}|{}^{+}\right)\right|^{-2}\right]^{-1}, \quad \zeta = \pm. \tag{2.2.36}$$

Схожие выражения могут быть получены для позитронов из области Ω_5. В частности, для них соотношение (2.2.36) выполняется буквально в Ω_5. Очевидно, что $|R_{\zeta,n}|^2 \le 1$. Данный результат можно интерпретировать как квантово-полевое обоснование правил не зависящей от времени теории рассеяния в областях Ω_1 and

Ω_5.

Пределы (2.2.32) предполагают, что

(i) $|g\left({}_-|^+\right)|^{-2} \to 0$ в области Ω_1, когда n приближается к границе с областью Ω_2 $\left(|p^{\mathrm{R}}| \to 0\right)$;

(ii) $|g\left({}_-|^+\right)|^{-2} \to 0$ в области Ω_5, когда n приближается к границе с областью Ω_4 $\left(|p^{\mathrm{L}}| \to 0\right)$.

Таким образом, в этих двух случаях относительная вероятность отражения $|R_{\zeta,n}|^2$ стремится к единице; иными словами, эти вероятности представляют собой непрерывные функции квантовых чисел n на данных границах. Также можно видеть, что $|R_{\zeta,n}|^2 \to 0$ по мере того как $p_0 \to \pm\infty$.

2.2.3 Дифференциальные и интегральные характеристики в зоне Клейна

Дифференциальные числа пар N_n^{cr}, рожденных из вакуума, приведены в уравнении (2.2.31). Полное число пар N^{cr}, создаваемых рассматриваемым внешним полем, может быть вычислено суммированием по всем возможным квантовым числам в зоне Клейна. Вычисляя это число в фермионом случае, необходимо просуммировать соответствующие дифференциальные числа частиц N_n^{cr} по проекциям спина, поперечному импульсу $\mathbf{p}_\perp$ и энергии p_0. Так как величина N_n^{cr} не зависит от параметров поляризации σ, сумма по проекциям спина вырождается в множитель $J_{(d)} = 2^{\left[\frac{d}{2}\right]-1}$, в котором квадратные скобки снова означают целую часть числа $d/2$. Сумма же по импульсам и энергии преобразуется в интеграл:

$$N^{\mathrm{cr}} = \sum_{n\in\Omega_3} N_n^{\mathrm{cr}} = \sum_{\mathbf{p}_\perp,\ p_0\in\Omega_3} \sum_{\sigma} N_n^{\mathrm{cr}} \to \frac{V_\perp\, T J_{(d)}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\Omega_3} dp_0 d\mathbf{p}_\perp\, N_n^{\mathrm{cr}}, \tag{2.2.37}$$

в котором символом $V_\perp$ обозначен пространственный объем в $(d-1)$-мерной гиперповерхности, ортогональной направлению поля, x, и T – время действия электрического поля.

2.2.4 Медленно меняющееся пиковое поле

Обратные параметры k_1^{-1}, k_2^{-1} представляют собой масштабы роста и убывания электрического поля в соответствующих областях. В частности, случаю медленно меняющегося поля соответствуют малые значения обоих параметров $k_1, k_2 \to 0$, т.е. должны выполняться условия

$$\min(h_1, h_2) \gg \max\left(1, m^2/eE\right) . \tag{2.2.38}$$

Этот случай можно рассматривать как двухпараметрическую регуляризацию постоянного электрического поля.

Проанализируем, как числа частиц N_n^{cr} зависят от параметров p_0 и $\pi_\perp$. Из полуклассического анализа известно [63], что N_n^{cr} экспоненциально малы в области больших импульсов $\pi_\perp$,

$$\pi_\perp \gtrsim \min\left(eEk_1^{-1}, eEk_2^{-1}\right) .$$

Следовательно, основной интерес представляет область конечных $\pi_\perp$, и в дальнейшем будет предполагаться, что всегда выполняются следующие условия:

$$\min(h_1, h_2) \gg K_\perp^2 \gg \max\left(1, m^2/eE\right) . \tag{2.2.39}$$

В этом уравнении $K_\perp$ есть некое произвольное конечное число. Предположим также, что

$$\lambda < K_\perp^2,\ \lambda = \frac{\pi_\perp^2}{eE}. \tag{2.2.40}$$

В силу свойств симметрии функции N_n^{cr}, обсуждавшихся выше, можно рассматривать только случай либо отрицательных, либо положительных энергий p_0. В зоне Клейна Ω_3 для поля (2.2.7) [63] энергии частиц ограничены следующим двойным неравенством:

$$U_{\mathrm{L}} + \pi_\perp \le p_0 \le U_{\mathrm{R}} - \pi_\perp,\quad U_{\mathrm{L}} = -\frac{eE}{k_1},\quad U_{\mathrm{R}} = \frac{eE}{k_2}. \tag{2.2.41}$$

Рассмотрим, для примера, интервал $-\frac{eE}{k_1} + \pi_\perp \le p_0 \le 0$. В нем эффективная энергия

π_2 отрицательна и велика, тогда как π_1 положительна:

$$-\pi_\perp + \frac{eE}{k_2} + \frac{eE}{k_1} \geq -\pi_2 \geq eE/k_2, \quad \pi_\perp \leq \pi_1 \leq \frac{eE}{k_1}. \tag{2.2.42}$$

Удобно представить полную область изменения π_1 как

$$h_1 \geq \frac{2\pi_1}{k_1} > \frac{2\pi_\perp}{k_1}. \tag{2.2.43}$$

Необходимо обратить внимание на тот факт, что в пределах данной области величина π_1 меняется достаточно сильно: значение h_1 в левой части этого двойного неравенства существенно больше, чем $2\pi_\perp/k_1$.

Полную область изменения π_1 (2.2.43) можно условно разделить на четыре следующих диапазона:

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } h_1 \geq 2\pi_1/k_1 > h_1\left[1 - \left(\sqrt{h_1}g_2\right)^{-1}\right], \\
&\text{(b) } h_1\left[1 - \left(\sqrt{h_1}g_2\right)^{-1}\right] \geq 2\pi_1/k_1 > h_1\left(1-\varepsilon\right), \\
&\text{(c) } h_1\left(1-\varepsilon\right) \geq 2\pi_1/k_1 > h_1/g_1, \\
&\text{(d) } h_1/g_1 \geq 2\pi_1/k_1 \geq \frac{2\pi_\perp}{k_1},
\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

в которых g_1, g_2, и ε – некие произвольно заданные числа, удовлетворяющие условиям $g_1 \gg 1$, $g_2 \gg 1$, и $\left(\sqrt{h_1}g_2\right)^{-1} \ll \varepsilon \ll 1$. Необходимо отметить, что $\tau_1 = ih_1/c_1 \approx \frac{h_1 k_1}{2|\pi_1|}$ в диапазонах (a), (b), и (c), тогда как $\tau_2 = -ih_2/\left(2-c_2\right) \approx \frac{h_2 k_2}{2|\pi_2|}$ во всей области (2.2.43).

В этих диапазонах для τ_2 имеем

$$\text{(a) } 1 \leq \tau_2^{-1} < \left[1 + \left(\sqrt{h_2}g_2\right)^{-1}\right],$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(b)}\ \left[1+\left(\sqrt{h_2}g_2\right)^{-1}\right] < \tau_2^{-1} < (1+\varepsilon k_2/k_1)\,,\\
&\text{(c)}\ (1+\varepsilon k_2/k_1) < \tau_2^{-1} < [1+(1-1/g_1)\,k_2/k_1]\,,\\
&\text{(d)}\ [1+(1-1/g_1)\,k_2/k_1] < \tau_2^{-1} \lesssim (1+k_2/k_1)\,.
\end{aligned}
\tag{2.2.45}
$$

Можно видеть, что $\tau_1 - 1 \to 0$ и $\tau_2 - 1 \to 0$ в диапазоне (a), $|\tau_1 - 1| \sim 1$ в диапазоне (c), и $|\tau_2 - 1| \sim 1$ в диапазонах (c) и (d). В диапазоне (b) эти величины принимают значения, заключенные между соответствующими значениями из диапазонов (a) и (c). В диапазоне (a) можно использовать асимптотические разложения вырожденных гипергеометрических функций, приведенные в уравнении (A.1) Аппендикса. С учетом уравнений (A.6) and (A.7), ведущее слагаемое будет иметь следующий вид:

$$
N_n^{\mathrm{cr}} = e^{-\pi\lambda}\left[1+O\left(|\mathcal{Z}_1|\right)\right],
\tag{2.2.46}
$$

где максимальное значение модуля $\mathcal{Z}_1$ подчиняется условию $\max|\mathcal{Z}_1| \lesssim g_2^{-1}$.

В диапазоне (c) следует использовать асимптотические разложения (A.9). Соответственно, находим:

$$
N_n^{\mathrm{cr}} = e^{-\pi\lambda}\left[1+O\left(|\mathcal{Z}_1|\right)^{-1}+O\left(|\mathcal{Z}_2|\right)^{-1}\right],
\tag{2.2.47}
$$

где $\max|\mathcal{Z}_1|^{-1} \lesssim \sqrt{g_1/h_1}$ и $\max|\mathcal{Z}_2|^{-1} \lesssim g_2^{-1}$.

Применяя асимптотику (A.1) и учитывая соотношения (2.2.46) и (2.2.47), можно оценить числа $N_n^{\mathrm{cr}} \sim e^{-\pi\lambda}$ в диапазоне (b). В диапазоне (d), вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi\left(1-a_2, 2-c_2; -ih_2\right)$ приближенно дается уравнением (A.8), а функция $\Phi\left(a_1, c_1; ih_1\right)$ – уравнением (A.10). Таким образом, в первом приближении дифференциальные средние числа есть

$$
N_n^{\mathrm{cr}} \approx \sinh\left(2\pi|p_{\mathrm{L}}|/k_1\right)\exp\left[-\frac{\pi}{k_1}\left(\pi_1-|p_{\mathrm{L}}|\right)\right]\sinh\left[\pi\left(\pi_1+|p_{\mathrm{L}}|\right)/k_1\right]^{-1}.
\tag{2.2.48}
$$

Несложно видеть, что N_n^{cr} из уравнения (2.2.48) стремится к (2.2.47), $N_n^{\mathrm{cr}} \to e^{-\pi\lambda}$, если выполняется условие $\pi_1 \gg \pi_\perp$. Следовательно, форма (2.2.48) может быть использована во всей области (1.2.20). Наиболее значимый вклад в N_n^{cr} происходит из области $\pi_\perp < \pi_1 \leqslant eE/k_1$ и имеет вид

$$N_n^{\mathrm{cr}} \approx \exp\left[-\frac{2\pi}{k_1}\left(\pi_1 - |p_{\mathrm{L}}|\right)\right]. \tag{2.2.49}$$

Если рассматривать положительные энергии, то необходимо принять во внимание, что функции N_n^{cr} инвариантны относительно одновременной замены $k_1 \leftrightarrows k_2$ и $\pi_1 \leftrightarrows -\pi_2$. В этом случае энергия π_1 положительна и велика, $\pi_1 > eE/k_1$, тогда как π_2 отрицательна,

$$-h_2 \leq 2\pi_2/k_2 \leq -\frac{2\pi_\perp}{k_2}. \tag{2.2.50}$$

Схожим со случаем отрицательных энергий p_0 образом, в этой области дифференциальные средние числа частиц в ведущем порядке величины есть

$$N_n^{\mathrm{cr}} \approx \sinh\left(2\pi|p_{\mathrm{R}}|/k_2\right)\exp\left[-\frac{\pi}{k_2}\left(|\pi_2| - |p_{\mathrm{R}}|\right)\right]\sinh\left[\pi\left(|p_{\mathrm{R}}| - \pi_2\right)/k_2\right]^{-1}. \tag{2.2.51}$$

Предполагая, что $m/k_2 \gg 1$, можно видеть, что основной вклад в N_n^{cr} происходит из области $-eE/k_2 < \pi_2 < -\pi_\perp$ и имеет вид

$$N_n^{\mathrm{cr}} \approx \exp\left[-\frac{2\pi}{k_2}\left(|\pi_2| - |p_{\mathrm{R}}|\right)\right]. \tag{2.2.52}$$

Таким образом, можно заключить, что величина N_n^{cr} практически постоянна для широкого спектра значений энергии p_0 для любого заданного параметра λ, удовлетворяющего ограничению (2.2.40).

Анализ, приведенный выше, показывает, что доминирующий вклад в рождение частиц медленно меняющимся полем происходит из областей с большим кинетическим импульсом, дифференциальные величины которых имеют вид (2.2.49) для отрицательных энергий $p_0 < 0$ и (2.2.52) для положительных энергий $p_0 > 0$. Тогда возможно представить полное число рожденных частиц N^{cr} как

$$N^{\mathrm{cr}} = V_\perp T n^{\mathrm{cr}},$$

где n^{cr} – плотность рождаемых частиц, имеющая вид

$$
\begin{aligned}
& n^{\mathrm{cr}}=\frac{J_{(d)}}{(2\pi)^{d-1}}\int_{\sqrt{\lambda}<K_\perp} dp_0 d\mathbf{p}_\perp I_{\mathbf{p}_\perp}, \quad I_{\mathbf{p}_\perp}=I_{\mathbf{p}_\perp}^{(1)}+I_{\mathbf{p}_\perp}^{(2)}, \\
& I_{\mathbf{p}_\perp}^{(1)}=\int_{-eE/k_1+\pi_\perp}^{0} dp_0 N_n^{\mathrm{cr}} \approx \int_{\pi_\perp}^{eE/k_1} d\pi_1 \exp\left[-\frac{2\pi}{k_1}\left(\pi_1-|p_{\mathrm{L}}|\right)\right], \\
& I_{\mathbf{p}_\perp}^{(2)}=\int_{0}^{eE/k_2-\pi_\perp} dp_0 N_n^{\mathrm{cr}} \approx \int_{\pi_\perp}^{eE/k_2} d\left|\pi_2\right| \exp\left[-\frac{2\pi}{k_2}\left(\left|\pi_2\right|-|p_{\mathrm{R}}|\right)\right]. \qquad (2.2.53)
\end{aligned}
$$

Используя замену переменных

$$
s=\frac{2}{k_1\lambda}\left(\pi_1-|p_{\mathrm{L}}|\right),
$$

и пренебрегая экспоненциально малыми вкладами, представим величину $I_{\mathbf{p}_\perp}^{(1)}$ как

$$
I_{\mathbf{p}_\perp}^{(1)} \approx \int_1^\infty \frac{ds}{s}|p_{\mathrm{L}}|e^{-\pi\lambda s}. \qquad (2.2.54)
$$

Схожим образом, используя подстановку

$$
s=\frac{2}{k_2\lambda}\left(\left|\pi_2\right|-|p_{\mathrm{R}}|\right),
$$

можно представить величину $I_{\mathbf{p}_\perp}^{(2)}$ как

$$
I_{\mathbf{p}_\perp}^{(2)} \approx \int_1^\infty \frac{ds}{s}|p_{\mathrm{R}}|e^{-\pi\lambda s}. \qquad (2.2.55)
$$

Ведущий вклад для обоих интегралов (2.2.54) и (2.2.55) происходит из области $s\to 1$, где $|p_{\mathrm{L}}|$ и $|p_{\mathrm{R}}|$ примерно равны

$$
|p_{\mathrm{L}}| \approx \frac{eE}{sk_1}, \quad |p_{\mathrm{R}}| \approx \frac{eE}{sk_2}.
$$

Это означает, что ведущее слагаемое в $I_{\mathbf{p}_\perp}$ (2.2.53) окончательно принимает вид

$$I_{\mathbf{p}_\perp} \approx \left(\frac{eE}{k_1} + \frac{eE}{k_2}\right) \int_1^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\pi\lambda s} = eE \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) e^{-\pi\lambda} G\left(1, \pi\lambda\right), \tag{2.2.56}$$

где функция G имеет вид

$$G\left(\alpha, x\right) = \int_1^\infty \frac{ds}{s^{\alpha+1}} e^{-x(s-1)} = e^x x^\alpha \Gamma\left(-\alpha, x\right), \tag{2.2.57}$$

а $\Gamma\left(-\alpha, x\right)$ – неполная Гамма-функция. Отбрасывая экспоненциально малые вклады, можно представить интегрирование по $\mathbf{p}_\perp$ в уравнении (2.2.53) (где $I_{\mathbf{p}_\perp}$ определен так же, как в уравнении (2.2.56)) следующим образом:

$$\int_{\sqrt{\lambda}<K_\perp} d\mathbf{p}_\perp I_{\mathbf{p}_\perp} \approx \int_{\sqrt{\lambda}<\infty} d\mathbf{p}_\perp I_{\mathbf{p}_\perp}.$$

Вычисляя гауссов интеграл

$$\int d\mathbf{p}_\perp \exp\left(-\pi s \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{eE}\right) = \left(\frac{eE}{s}\right)^{d/2-1}, \tag{2.2.58}$$

окончательно находим

$$n^{\mathrm{cr}} = r^{\mathrm{cr}} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) G\left(\frac{d}{2}, \pi\frac{m^2}{eE}\right), \quad r^{\mathrm{cr}} = \frac{J_{(d)}\left(eE\right)^{d/2}}{(2\pi)^{d-1}} \exp\left\{-\pi\frac{m^2}{eE}\right\}. \tag{2.2.59}$$

2.2.5 Острый пик

Выбирая параметры пикового поля определенным образом, можно получить электрическое поле, которое эффективно действует только в малой области около начала координат, $x = 0$. Такое поле «резко» включается и выключается около точки $x = 0$. Рассмотрим случай, когда параметры k_1, $k_2 \to \infty$, т.е. достаточно велики, но их отношение k_1/k_2 представляет собой некое конечное небольшое число. Асимптотические потенциалы, соответствующие рассматриваемой конфигурации, определяют конечные приращения потенциальной энергии ΔU_1 и ΔU_2 для «растущей» и «убывающей» частей поля соответственно (из уравнения (2.2.7))

$$\Delta U_1 = U(0) - U(-\infty) = eEk_1^{-1}, \;\; \Delta U_2 = U(+\infty) - U(0) = eEk_2^{-1}. \qquad (2.2.60)$$

Таким образом, мы имеем дело с очень узким, или острым, пиком электрического поля. В то же время такая полевая конфигурация достаточно точно имитирует известную ступень Клейна, т.е. прямоугольную потенциальную ступень, и совпадает с ней при k_1, $k_2 \to \infty$ (см. также работу [86]). Следовательно, рассматриваемый случай восприниматься как параметрическая регуляризация прямоугольной ступени. В этом разделе будет предполагаться, что параметры k_1 и k_2 достаточно велики, чтобы удовлетворять следующим неравенствам:

$$\Delta U_1/k_1 \ll 1, \;\; \Delta U_2/k_2 \ll 1, \;\; \max\left(|p_{\mathrm{L}}|/k_1, |p_{\mathrm{R}}|/k_2\right) \ll 1 \qquad (2.2.61)$$

для любого фиксированного $\pi_\perp$, и $\pi_{1,2} = p_0 - U(\mp\infty)$. В этом случае вырожденная гипергеометрическая функция может быть аппроксимирована двумя первыми слагаемыми, приведенными в уравнении (2.2.19), имеющими вид $\Phi(a, c; \eta)$; при этом $c_{1,2} \approx 1$, $a_{1,2}$ есть малые величины порядка $\left(|p_{\mathrm{L}}| - \pi_1\right)/k_1$ и $|p_{\mathrm{R}}|/k_2$, соответственно. Для фермионов окончательно получим

$$N_n^{\mathrm{cr}} = \frac{4|p_{\mathrm{L}}||p_{\mathrm{R}}|\left|\pi_2 - |p^{\mathrm{R}}|\right|}{\left|\pi_1 + |p^{\mathrm{L}}|\right|\left(\Delta U_1 + \Delta U_2 + |p_{\mathrm{R}}| - |p_{\mathrm{L}}|\right)^2}. \qquad (2.2.62)$$

Следует обратить особое внимание на то, что окончательный результат, фактически, не зависит напрямую от параметров $k_{1,2}$.

Для бозонов соответствующий результат имеет вид

$$N_n^{\mathrm{cr}} = \frac{4|p_{\mathrm{L}}||p_{\mathrm{R}}|}{\left(|p_{\mathrm{L}}| - |p_{\mathrm{R}}|\right)^2}\;. \qquad (2.2.63)$$

Из этого уравнения можно видеть, что концепция острого пика для скалярной КЭД ограничена условием $\min(\Delta U_1/k_1, \Delta U_2/k_2) \gtrsim 1$ для рассматриваемого типа полей.

2.2.6 Существенно несимметричная полевая конфигурация

В рассмотренных выше и ранее [63, 86] примерах, возрастающая и убывающая части электрического поля были практически (или полностью) симметричны. Здесь будет рассмотрен случай, когда полевая конфигурация существенно асимметрична. Предположим, что поле возрастает от нуля до его максимального значения при $x = 0$ резко (т.е. параметр k_1 достаточно велик), тогда как параметр $k_2 > 0$ остается произвольным, т.е. может соответствовать случаю медленного убывания поля. Предполагается, что соответствующая асимптотическая потенциальная энергия U_{L}, заданная уравнением (2.2.60), определяет потенциальную ступень с конечным приращением потенциальной энергии $\Delta U_1 = -U_{\mathrm{L}}$ для возрастающей (левой) части поля. Необходимо особо отметить, что благодаря инвариантности величин N_n^{cr} относительно одновременной замены $k_1 \leftrightarrows k_2$ и $\pi_1 \leftrightarrows -\pi_2$, можно легко изменить постановку задачи на случай большого параметра k_2 и произвольного параметра $k_1 > 0$. Предполагается, что в рассматриваемом случае параметр k_1 достаточно велик, чтобы удовлетворять следующим неравенствам для фиксированных ΔU_1 and $\pi_1 = p_0 + \Delta U_1$:

$$|\pi_1| / k_1 \ll 1. \tag{2.2.64}$$

Используя условие (2.2.64), можно приближенно представить $|\Delta|^2 \approx |\Delta_{\mathrm{ap}}|^2$; тогда из уравнения (2.2.28) следует, что

$$|\Delta|^2 \approx e^{-i\pi\nu_2} \left| \left[-\chi \Delta U_1 + \left| p^{\mathrm{L}} \right| - \left| p^{\mathrm{R}} \right| + k_2 h_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{d\eta_2} \right) \right] \Phi \left(1 - a_2, 2 - c_2; -\eta_2 \right) \right|^2 \Bigg|_{x=0} . \tag{2.2.65}$$

и, наконец, получить

$$\left| g \left({}_{-} \middle| {}^{+} \right) \right|^{-2} \approx \begin{cases} \left| \mathcal{C} \Delta_{\mathrm{ap}} \right|^{-2} \text{ для фермионов} \\ \left| \mathcal{C}_{\mathrm{sc}} \, \Delta_{\mathrm{ap}} \big|_{\chi=0} \right|^{-2} \text{ для бозонов} \end{cases} \tag{2.2.66}$$

в областях Ω_1, Ω_3, и Ω_5.

В асимметричном случае при $k_1 \gg k_2$, для фиксированного ΔU_1 выполняется соотношение $eE = k_1 \Delta U_1$, которое предполагает выполнение неравенства $eE/k_2 \gg \Delta U_1$. Слагаемое ΔU_1 может быть отброшено в первом приближении $\left|g\left({}_{-}\right|{}^{+}\right)\right|^{-2}$ в областях Ω_1 и Ω_5, т.е. вне зоны Клейна. Такое приближение не зависит от того, как именно возрастает поле при $x < 0$. Можно видеть, что относительные амплитуды отражения $\left|R_{\zeta,n}\right|^2$ и прохождения $\left|T_{\zeta,n}\right|^2$ в первом приближении точно такие же, как и для экспоненциально убывающего поля, заданного потенциалом (2.2.8).

Наиболее асимметричный случай может быть достигнут, если выполняется условие (2.2.66) и параметр k_2 достаточно мал,

$$h_2 \gg \max\left(1, m^2/eE\right) . \tag{2.2.67}$$

В данном случае экспоненциально убывающее поле (2.2.8) является медленно меняющимся (полем с малым градиентом). Наибольший интерес по-прежнему представляет зона Клейна, Ω_3, в которой средние числа частиц имеют вид $N_n^{\mathrm{cr}} = \left|g\left({}_{-}\right|{}^{+}\right)\right|^{-2}$.

Принимая во внимание, что обе эффективных энергии π_1 и π_2 удовлетворяют неравенствам, следующим из ограничения на энергии частиц (2.2.41) в зоне Клейна, Ω_3, можно видеть, что π_2 может меняться в широком диапазоне,

$$\pi_\perp \leq -\pi_2 \leq eE/k_2 + \Delta U_1 - \pi_\perp . \tag{2.2.68}$$

Отметим, что в этой области $2\pi_\perp < eE/k_2 + \Delta U_1$. Из асимптотического поведения вырожденной гипергеометрической функции можно видеть, что средние числа N_n^{cr} экспоненциально малы, когда модули энергий $|\pi_2|$ и $\pi_\perp$ велики, т.е. $\sim eE/k_2$ при $\pi_\perp / |\pi_2| \sim 1$, так, что $\left|p^{\mathrm{R}}\right| \ll |\pi_2|$. Таким образом, основной интерес представляет область фиксированных $\pi_\perp$ в (2.2.68), где предполагается, что выполняется неравенство (2.2.40); параметр $K_\perp$ есть некое наперед заданное конечное число, удовлетворяющее условию

$$h_2 \gg K_\perp^2 \gg \max\left(1, m^2/eE\right) . \tag{2.2.69}$$

Полную область (2.2.68) можно условно поделить на следующие зоны:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \ (1+\varepsilon)\, h_2 \leq -2\pi_2/k_2 \leq h_2 \left[1 + \frac{2\,(\Delta U_1 - \pi_\perp)}{k_2 h_2}\right], \\
&\text{(b)}\ h_2 \left[1 + \left(\sqrt{h_2} g_2\right)^{-1}\right] \leq -2\pi_2/k_2 < (1+\varepsilon)\, h_2, \\
&\text{(c)}\ h_2 \left[1 - \left(\sqrt{h_2} g_2\right)^{-1}\right] \leq -2\pi_2/k_2 < h_2 \left[1 + \left(\sqrt{h_2} g_2\right)^{-1}\right], \\
&\text{(d)}\ \ (1-\varepsilon)\, h_2 \leq -2\pi_2/k_2 < h_2 \left[1 - \left(\sqrt{h_2} g_2\right)^{-1}\right], \\
&\text{(e)}\ h_2/g_1 < -2\pi_2/k_2 < (1-\varepsilon)\, h_2, \\
&\text{(f)}\ 2\pi_\perp/k_2 \leq -2\pi_2/k_2 < h_2/g_1,
\end{aligned}
\tag{2.2.70}
$$

где g_2, g_1 и ε – некие фиксированные (конечные) числа, удовлетворяющие неравенствам $g_2 \gg 1$, $g_1 \gg 1$ и $\varepsilon \ll 1$. Предполагается также, что $\varepsilon\sqrt{h_2} g_2 \gg 1$. Область (a) существует, если выполняется $\sqrt{2}\,(\Delta U_1 - \pi_\perp) \gg \sqrt{eE}/g_2$; при этом необходимо предположить, что $\varepsilon < 2\,(\Delta U_1 - \pi_\perp)\,/k_2 h_2$. Область (b) существует, если $\sqrt{2}\,(\Delta U_1 - \pi_\perp) > \sqrt{eE}/g_2$. Если же имеет место неравенство $\sqrt{2}\,(\Delta U_1 - \pi_\perp) < \sqrt{eE}/g_2$, то присутствует только область (c), определяемая условием $-\pi_2 < eE/k_2 + \Delta U_1 - \pi_\perp$. Нужно отметить, что $\tau_2 = -ih_2/(2-c_2) \approx h_2 k_2/2\,|\pi_2|$ в областях (a)-(e), тогда как τ_2 меняется от $1 - O\left(h_2^{-1}\right)$ до g_1.

В том случае, если область (a) существует, вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi\,(1-a_2, 2-c_2; -\eta_2)$ может быть аппроксимирована выражением (A.8). В этой области дифференциальные средние числа частиц в первом приближении крайне малы,

$$
N_n^{\rm cr} \approx \frac{2}{(h_2)^2} \left[1 + O\left(|\mathcal{Z}_2|^{-1}\right)\right] \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left|p^{\rm L}\right|}{\pi_1 + \left|p^{\rm L}\right|} \text{ для фермионов} \\ \frac{4\left|p^{\rm L}\right|}{k_2} \text{ для бозонов} \end{array} \right. , \tag{2.2.71}
$$

где $\max |\mathcal{Z}_2|^{-1} \sim \left(\varepsilon\sqrt{h_2}\right)^{-1}$.

В области (c), параметр $\tau_2 - 1 \to 0$ и, используя уравнения (A.2), (A.3) и (A.4), можно показать, что

$$N_n^{\rm cr} \approx \left|p^{\rm L}\right| \exp\left[-\frac{\pi\lambda}{4}\right]\left[1+O\left(\left|\mathcal{Z}_2\right|^{-1}\right)\right]\left\{\begin{array}{ll} \frac{2}{\left|\left|p^{\rm L}\right|+\pi_1\right|\cosh(\pi\lambda/4)} & \text{фермионы} \\ \frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\lambda}{4}\right)\right|^2}{\sqrt{eE\pi}} & \text{бозоны} \end{array}\right. . \tag{2.2.72}$$

Средние дифференциальные числа частиц $N_n^{\rm cr}$, определяемые уравнением (2.2.72), конечны и ограничены сверху, $N_n^{\rm cr} \leq 1$ для фермионов и $N_n^{\rm cr} \lesssim 1/g_2$ для бозонов. Данное выражение зависит от параметра ΔU_1. В этой области поперечный импульс весьма мал. В области (b), если она существует, значения распределений $N_n^{\rm cr}$ меняются между их соответствующими значениями из областей (a) и (c).

В области (e) параметры η_2 и c_2 велики при конечных a_2; при этом $\tau_2 > 1$ и аргумент выражения $\arg(2-c_2) < 0$ отрицателен. Это позволяет применить асимптотическое выражение (A.9) для вырожденной гипергеометрической функции, и найти, что

$$N_n^{\rm cr} = \exp\left\{\frac{2\pi}{k_2}\left[\left|p^{\rm R}\right|+\pi_2\right]\right\}\left[1+O\left(\left|\mathcal{Z}_2\right|^{-1}\right)\right], \tag{2.2.73}$$

как для фермионов, так и для бозонов. Переменная $\mathcal{Z}_2$ определяется уравнением (A.2). Значение модуля переменной $\left|\mathcal{Z}_2\right|^{-1}$ меняется в пределах от $\left|\mathcal{Z}_2\right|^{-1} \sim \left(\varepsilon\sqrt{h_2}\right)^{-1}$ to $\left|\mathcal{Z}_2\right|^{-1} \sim \left[(g_1-1)\sqrt{h_2}\right]^{-1}$. Выражение (2.2.73) может быть приближенно записано как

$$N_n^{\rm cr} \approx \exp\left(-\frac{\pi\pi_\perp^2}{k_2\left|\pi_2\right|}\right). \tag{2.2.74}$$

Заметим, что $eE/g_1 < k_2\left|\pi_2\right| < (1-\varepsilon)\, eE$ в области (e). Ясно, что распределения $N_n^{\rm cr}$ из уравнений (2.2.74) имеют следующие предельные формы:

$$N_n^{\rm cr} \to e^{-\pi\lambda} \text{ по мере того как } k_2\left|\pi_2\right| \to (1-\varepsilon)\, eE\ .$$

Таким образом, видно, что результат, неоднократно полученный ранее для постоянного однородного электрического поля,

$$N_n^{\rm cr} = e^{-\pi\lambda}, \tag{2.2.75}$$

воспроизводится в широком спектре энергий, $|\pi_2| \sim eE/k_2$. В области (d) значения распределений N_n^{cr} меняются между их соответствующими значениями из областей (c) и (e) для фермионов и бозонов.

В области (f), можно использовать асимптотические выражения для вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях h_2 и фиксированных значениях a_2 и c_2, заданные уравнением (A.10), чтобы показать, что дифференциальные числа рождаемых частиц есть

$$N_n^{\mathrm{cr}} \approx \sinh\left(2\pi\left|p^{\mathrm{R}}\right|/k_2\right)\exp\left\{\frac{\pi}{k_2}\left[\pi_2+\left|p^{\mathrm{R}}\right|\right]\right\}$$
$$\times\left\{\begin{array}{cl} \sinh\left\{\pi\left[\left|p^{\mathrm{R}}\right|-\pi_2\right]/k_2\right\}^{-1} & \text{для фермионов} \\ \cosh\left\{\pi\left[\left|p^{\mathrm{R}}\right|-\pi_2\right]/k_2\right\}^{-1} & \text{для бозонов} \end{array}\right. . \tag{2.2.76}$$

То же самое распределение было получено для медленно меняющегося поля при $p_0 > 0$, заданного уравнением (2.2.51).

Дифференциальные средние числа частиц N_n^{cr}, заданные уравнением (2.2.76), экспоненциально малы, если $|\pi_2| \sim \pi_\perp$. Тогда основной вклад в N_n^{cr} формируется в специальной зоне областей (e) и (f), определенной следующим образом:

$$K_\perp \ll K < -2\pi_2/k_2 < (1-\varepsilon)\,h_2, \tag{2.2.77}$$

где K – некое произвольно заданное число и $K_\perp$ удовлетворяет неравенствам (2.2.40) и (2.2.69). В этой области $|\pi_2| \gg \pi_\perp$ и распределения (2.2.76) аппроксимируются выражением (2.2.73) для бозонного и фермионного случаев. Тогда выражение (2.2.73) представляет собой ведущий вклад для чисел N_n^{cr} по всей области (2.2.77). Приближенные выражения (2.2.73) не зависят от ΔU_1 и, таким образом, от того, как именно растет поле при $x < 0$. Фактически, плотность рожденных пар имеет тот же вид, что и для экспоненциально убывающего поля, заданного потенциалом (2.2.8).

Используя вышеприведенные формулы, можно оценить полное число рождаемых асимметричным пиком пар N^{cr}. Для этого необходимо представить ведущие слагаемые интеграла (2.2.37) в виде суммы двух слагаемых, первое из которых формируется в областях (e) и (f), а другое – в областях (a), (b), (c), и (d):

$$N^{\rm cr} = V_{(d-1)} n^{\rm cr}\,, \quad n^{\rm cr} = \frac{V_\perp\, T J_{(d)}}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\sqrt{\lambda}<K_\perp} d\mathbf{p}_\perp\, I_{\mathbf{p}_\perp}, \quad I_{\mathbf{p}_\perp} = I^{(1)}_{\mathbf{p}_\perp} + I^{(2)}_{\mathbf{p}_\perp},$$
$$I^{(1)}_{\mathbf{p}_\perp} = \int_{\pi_2 \in {\rm (a)}\cup{\rm (b)}\cup{\rm (c)}\cup{\rm (d)}} d\pi_2 N^{\rm cr}_n\,, \quad I^{(2)}_{\mathbf{p}_\perp} = \int_{\pi_2 \in {\rm (e)}\cup{\rm (f)}} d\pi_2 N^{\rm cr}_n\,. \tag{2.2.78}$$

Главный вклад в интеграл (2.2.78) идет из широкой области (e)∪(f) с большими кинетическими энергиями $|\pi_2|$ и относительно небольшими поперечными импульсами $|\mathbf{p}_\perp|$. Вклад из сравнительно узких областей (a), (b), (c), и (d) конечен, а соответствующий ему интеграл $I^{(1)}_{\mathbf{p}_\perp}$ имеет порядок $\sqrt{eE}/g_2$. Интеграл $I^{(2)}_{\mathbf{p}_\perp}$ был найден ранее в уравнении (2.2.55). Используя результаты раздела (2.2.4), находим, что ведущее слагаемое в $I^{(2)}_{\mathbf{p}_\perp}$ имеет следующий окончательный вид:

$$I^{(2)}_{\mathbf{p}_\perp} \approx \frac{eE}{k_2} \int_1^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\pi\lambda s} = \frac{eE}{k_2} e^{-\pi\lambda} G\left(1, \pi\lambda\right), \tag{2.2.79}$$

где функция $G\left(\alpha, x\right)$ была определена в уравнении (2.2.57). Интеграл $I^{(1)}_{\mathbf{p}_\perp}$ из уравнения (2.2.78) дает намного меньший вклад, нежели интеграл (2.2.79). Таким образом, доминирующий вклад дается выражением (2.2.79), $I_{\mathbf{p}_\perp} \approx I^{(2)}_{\mathbf{p}_\perp}$. Вычисляя гауссов интеграл, окончательно находим

$$n^{\rm cr} = \frac{r^{\rm cr}}{k_2} G\left(\frac{d}{2}, \pi\frac{m^2}{eE}\right). \tag{2.2.80}$$

Функция $r^{\rm cr}$ была определена в уравнении (2.2.59). Видно, что величина $n^{\rm cr}$ из уравнения (2.2.80) представляет собой зависящую от параметра k_2 часть плотности пар, рожденных слабо неоднородным полем, определенным в выражении (2.2.59).

Наконец, можно вычислить вероятность вакуума остаться вакуумом,

$$P_v = \exp\left(-\mu N^{\rm cr}\right), \tag{2.2.81}$$

где $N^{\text{cr}} = V_{\perp}Tn^{\text{cr}}$ и n^{cr} определена в уравнении (2.2.80), а множитель μ имеет вид

$$\mu = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l \epsilon_{l+1}}{(l+1)^{d/2}} \exp\left(-l\pi\frac{m^2}{eE}\right), \quad \epsilon = G(\frac{d}{2}; l\pi\frac{m^2}{eE})\left[G(\frac{d}{2}; \frac{\pi m^2}{eE})\right]^{-1}. \tag{2.2.82}$$

Как уже упоминалось ранее, в областях (e) и (f), откуда происходит основной вклад в число рождаемых частиц, форма распределений N_n^{cr} не зависит от того, как именно растет поле при $x < 0$. Таким образом, можно говорить, что вычисления полных величин в экспоненциально убывающем поле применимы для широкого класса «резко включающихся» и затем экспоненциально убывающих полей.

2.3 Унитарность в КЭД с неоднородными внешними полями, заданными потенциальными ступенями

Рассматривая КЭД с постоянным неоднородными полями, нарушающими стабильность вакуума, можно задаться следующим важным вопросом: являются ли фоковские in- и out-пространства унитарно эквивалентными? Ответ на данный вопрос будет положительным, если каноническое преобразование (2.1.18), связывающее in- и out-пространства, является собственным. В этом случае существует некий унитарный оператор V, такой, что

$$\begin{aligned} &V\left(a(\text{out}), a^{\dagger}(\text{out}), b(\text{out}), b^{\dagger}(\text{out})\right) V^{\dagger} = \left(a(\text{in}), a^{\dagger}(\text{in}), b(\text{in}), b^{\dagger}(\text{in})\right), \\ &|0, \text{in}\rangle = V\,|0, \text{out}\rangle\,,\ V^{\dagger} = V^{-1}\,. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Обозначим все out-операторы символом α, а все in-операторы символом β. Линейное каноническое преобразование между in- и out-операторами может быть записано в виде (здесь для простоты рассматривается только случай статистики Ферми)

$$\beta = \Phi\alpha + \Psi\alpha^{+}, \quad \Phi\Phi^{+} + \Psi\Psi^{+} = 1,\ \Phi\Psi^{T} + \Psi\Phi^{T} = 0. \tag{2.3.2}$$

Согласно работам [76, 87], преобразование (2.3.2) будет собственным, если Ψ – оператор Гильберта-Шмидта, т.е. $\sum_{m,n} |\Psi_{mn}|^2 < \infty$. Легко видеть, что критерий Гильберта-Шмидта для преобразования (2.1.18) выглядит как

$$\sum_n \left[\left| \frac{w_n(+-|0)}{w_n(+|+)} \right|^2 + \left| \frac{w_n(+-|0)}{w_n(-|-)} \right|^2 \right] < \infty. \tag{2.3.3}$$

Как было показано в работе [63],

$$\left| \frac{w_n(+-|0)}{w_n(+|+)} \right|^2 = N_n^a, \ \left| \frac{w_n(+-|0)}{w_n(-|-)} \right|^2 = N_n^b, \tag{2.3.4}$$

где N_n^a и N_n^b – дифференциальные средние числа электронов и позитронов, рожденных из вакуума потенциальной ступенью. Таким образом, левая часть уравнения (2.3.3) есть полное число N частиц, рожденных из вакуума, и условие унитарности принимает вид

$$\sum_n \left(N_n^a + N_n^b\right) = N < \infty. \tag{2.3.5}$$

Следует отметить, что in- и out-пространства скалярной КЭД в присутствии критических потенциальных ступеней оказываются унитарно эквивалентны при таком же условии.

Очевидно, что для реалистичных внешних полей, заключенных в ограниченной области пространства-времени, это условие выполняется.

Неравенство (2.3.3), полученное в рамках КЭД с внешними полями, заданными потенциальными ступенями, можно рассматривать как дополнительно подтверждение согласованности теории и верной интерпретации in- и out-частиц в ней. Качественно схожее неравенство для КЭД с внешними полями, заданными зависящими потенциалами, было получено в работе [25].

2.4 Деформация начального вакуумного состояния

В этом разделе рассмотрим деформацию начального вакуумного состояния под действием внешнего электрического поля, заданного потенциальной ступенью. Следует особо отметить, что в этом разделе будет рассматриваться только случай статистики Ферми. В представлении Гейзенберга, матрица плотности системы, начальным состоянием которой являлся вакуум, имеет вид

$$\check{\rho} = |0, \mathrm{in}\rangle\langle 0, \mathrm{in}|. \tag{2.4.1}$$

Фоковские in- и out-пространства связаны при помощи унитарного оператора V, см. (2.3.1). Тогда

$$\check{\rho} = V|0, \mathrm{out}\rangle\langle 0, \mathrm{out}|V^{\dagger} \ . \tag{2.4.2}$$

Для КЭД с внешним полем, заданным потенциальной ступенью, явный вид оператора V был найден в работе [63]. Так как внешнее электрическое поле не перемешивает квантовые моды, и оператор V может быть представлен в виде произведения по ним, то и матрица плотности (2.4.2) может быть факторизована таким же образом:

$$\begin{gathered} V = \prod_{i=1}^{5} V^{(i)}, \quad |0, \mathrm{in}\rangle^{(i)} = V^{(i)}|0, \mathrm{out}\rangle^{(i)}, \\ \check{\rho} = \prod_{i=1}^{5} V^{(i)}|0, \mathrm{out}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0, \mathrm{out}|V^{(i)\dagger}. \end{gathered} \tag{2.4.3}$$

Из-за специфичной структуры операторов $V^{(i)}$, $i = 1, 2, 4, 5$, имеем, что

$$V^{(i)}|0, \mathrm{out}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0, \mathrm{out}|V^{(i)\dagger} = |0, \mathrm{out}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0, \mathrm{out}| \ = |0, \mathrm{in}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0, \mathrm{in}|, \quad i = 1, 2, 4, 5.$$

Последнее соотношение имеет ясное физическое значение – вакуумные состояния в областях квантовых чисел Ω_1, Ω_2, Ω_4, и Ω_5 не меняются под действием внешнего поля, т.е. рождения частиц в них не происходит.

Примем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} P' = \prod_{i=1,2,4,5} |0, \mathrm{out}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0, \mathrm{out}| \ = \prod_{i=1,2,4,5} |0, \mathrm{in}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0, \mathrm{in}|, \\ \check{\rho}_K = V^{(K)} P_K V^{(K)\dagger}, \quad P_K = |0, \mathrm{out}\rangle^{(K)}\ {}^{(K)}\langle 0, \mathrm{out}|. \end{gathered} \tag{2.4.4}$$

Тогда, в терминах этих обозначений, матрица плотности имеет вид

$$\check{\rho} = P' \check{\rho}_K \ . \tag{2.4.5}$$

Используя явный вид унитарного оператора $V^{(3)} = V^{(K)}$ для зоны Клейна Ω_3, найденный в работе [63],

$$\begin{aligned} V^{(K)} = \exp & \left[-\sum_{n\in\Omega_3} {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) w_n \left(+- |0\right) \ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \right] \\ \times \exp & \left[-\sum_{n\in\Omega_3} {}_{+}b_n(\mathrm{out}) \ln w_n \left(-|-\right) \ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \right] \\ \times \exp & \left[\sum_{n\in\Omega_3} {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \ln w_n \left(+|+\right) \ {}^{+}a_n(\mathrm{out}) \right] \\ \times \exp & \left[-\sum_{n\in\Omega_3} {}_{+}b_n(\mathrm{out}) w_n \left(0| -+\right) \ {}^{+}a_n(\mathrm{out}) \right] , \end{aligned}$$

можно построить два различных представления для матрицы плотности $\check{\rho}_K$.

Первое представление являет собой экспоненту, приведенную к нормальной форме по отношению к out-операторам (как и ранее, выражения, приведенные к нормальной форме, обозначаются парой двоеточий $: \ldots :$),

$$\begin{aligned} \check{\rho}_K |c_v|^{-2} = :\exp & \left\{ -\sum_{n\in\Omega_3} \left[{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \ {}^{+}a_n(\mathrm{out}) + \ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \ {}_{+}b_n(\mathrm{out}) \right.\right. \\ & \left.\left. + \ {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) w_n \left(+- |0\right) \ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) + \ {}_{+}b_n(\mathrm{out}) w_n \left(+- |0\right)^{*} \ {}^{+}a_n(\mathrm{out}) \right] \right\} : . \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Представление (2.4.6) может быть получено следующим образом. Используя уравнение (2.4.4) и явный вид оператора $V^{(K)}$, можно записать, что

$$\check{\rho}_K |c_v|^{-2} = \exp \left[-\sum_{n\in\Omega_3} {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) w_n \left(+- |0\right) \ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out}) \right]$$

$$P_K \exp\left[-\sum_{n\in\Omega_3} {}_{+}b_n(\text{out}) w_n\left(+-|0\right)^* \, {}^{+}a_n(\text{out})\right]. \tag{2.4.7}$$

Далее, применяя хорошо известное представление Березина [76] для вакуумного проектора P_K,

$$P_K = :\exp\left\{-\sum_{n\in\Omega_3}\left[\, {}^{+}a_n^\dagger(\text{out})\, {}^{+}a_n(\text{out}) + \, {}_{+}b_n^\dagger(\text{out})\, {}_{+}b_n(\text{out})\right]\right\}: \tag{2.4.8}$$

и принимая во внимание, что крайние левая и правая экспонента в выражении (2.4.7) уже приведены к нормальной форме, легко получить представление (2.4.6).

Второе представление имеет вид

$$\begin{aligned}
\check{\rho}_K |c_v|^{-2} = &\prod_{n\in\Omega_3}\left[1 - \, {}^{+}a_n^\dagger(\text{out}) w_n\left(+-|0\right) \, {}_{+}b_n^\dagger(\text{out})\right] \\
&\times P_{K,n}\left[1 - \, {}_{+}b_n(\text{out}) w_n\left(+-|0\right)^* \, {}^{+}a_n(\text{out})\right], \\
P_{K,n} = &\,|0,\text{out}\rangle_n^{(K)} \, {}_n^{(K)}\langle 0,\text{out}|.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Получить его можно следующим способом. Используя тот факт, что операторы с различными наборами квантовых чисел n коммутируют, и применяя соотношение [38]

$$\exp\left[a^\dagger D a\right] = :\exp\left[a^\dagger\left(e^D - 1\right)a\right]:, \tag{2.4.10}$$

чтобы преобразовать экспоненты в операторе $V^{(K)}$, необходимо затем разложить данные выражения в ряд. Так как out-операторы в $V^{(K)}$ являются операторами с ферми-статистикой, разложение в ряд имеет только конечное число слагаемых. Вычисляя их действие на вакуум $|0,\text{out}\rangle^{(K)}$, приходим к (2.4.9).

Наконец, рассмотрим структуру состояния $|0,\text{in}\rangle$ в терминах out-операторов. Прежде всего, необходимо принять во внимание тот факт, что рассматриваемый вектор также может быть факторизован,

$$
\begin{aligned}
&|0,\mathrm{in}\rangle = V|0,\mathrm{out}\rangle = |0,\mathrm{in}\rangle'|0,\mathrm{in}\rangle^{(K)},\\
&|0,\mathrm{in}\rangle' = \prod_{i=1,2,4,5}|0,\mathrm{in}\rangle^{(i)}, \quad |0,\mathrm{in}\rangle^{(K)} = V^{(K)}|0,\mathrm{out}\rangle^{(K)}.
\end{aligned} \tag{2.4.11}
$$

Затем, используя явный вид $V^{(K)}$, получим

$$
|0,\mathrm{in}\rangle^{(K)} = c_v \prod_{n\in\Omega_3}\left[1 - \ {}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out}) w_n\left(+-|0\right)\ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]|0,\mathrm{out}\rangle^{(K)}. \tag{2.4.12}
$$

Следовательно, в каждой заданной моде $n \in \Omega_3$, вектор $|0,\mathrm{in}\rangle_n$ представляет собой линейную комбинацию двух слагаемых – вакуумного вектора для данной моды и вектора состояния с электрон-позитронной парой.

2.4.1 Редукция по электронной и позитронной подсистемам

Полная рассматриваемая система может быть также рассмотрена как комбинация из подсистем электронов и позитронов. Можно ввести редуцированные матрицы плотности: $\check{\rho}_+$ для электронной подсистемы и $\check{\rho}_-$ для позитронной, усредняя полную матрицу плотности (2.4.1) по всем возможным позитронным или всем возможным электронным состояниям, соответственно,

$$
\begin{aligned}
&\check{\rho}_+ = \mathrm{tr}_-\check{\rho} = \sum_{i=3}^{5}\sum_{M}\sum_{\{m\}\in\Omega_i} {}_b^{(i)}\langle M,\mathrm{out}|\check{\rho}|M,\mathrm{out}\rangle_b^{(i)},\\
&\check{\rho}_- = \mathrm{tr}_+\check{\rho} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{M}\sum_{\{m\}\in\Omega_i} {}_a^{(i)}\langle M,\mathrm{out}|\check{\rho}|M,\mathrm{out}\rangle_a^{(i)},\\
&|M,\mathrm{out}\rangle_b^{(i)} = (M!)^{-1/2}\, b_{m_1}^{\dagger}(\mathrm{out})\ldots b_{m_M}^{\dagger}(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_b^{(i)},\\
&|M,\mathrm{out}\rangle_a^{(i)} = (M!)^{-1/2}\, a_{m_1}^{\dagger}(\mathrm{out})\ldots a_{m_M}^{\dagger}(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_a^{(i)}.
\end{aligned} \tag{2.4.13}
$$

Вектора $|0,\mathrm{out}\rangle_a^{(i)}$ и $|0,\mathrm{out}\rangle_b^{(i)}$ есть электронные и позитронные вакуумы в области Ω_i, и определяются соотношениями

$$a_n^{(i)}(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_a^{(i)} = 0, \quad b_n^{(i)}(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_b^{(i)} = 0, \tag{2.4.14}$$

где $a_n^{(i)}(\mathrm{out})$ и $b_n^{(i)}(\mathrm{out})$ – соответствующие операторы уничтожения и электронов и позитронов в данной области Ω_i. Дополнительно, электронные и позитронные вакуумы можно факторизовать по квантовым модам, как уже упоминалось выше. Можно видеть, что

$$\begin{aligned}
&|0,\mathrm{out}\rangle^{(1,2)} = |0,\mathrm{out}\rangle_a^{(1,2)} = \prod_{n\in\Omega_{1,2}} |0,\mathrm{out}\rangle_{n,a}^{(1,2)}, \\
&|0,\mathrm{out}\rangle^{(4,5)} = |0,\mathrm{out}\rangle_b^{(4,5)} = \prod_{n\in\Omega_{4,5}} |0,\mathrm{out}\rangle_{n,b}^{(4,5)}, \\
&|0,\mathrm{out}\rangle^{(3)} = |0,\mathrm{out}\rangle^{(K)} = |0,\mathrm{out}\rangle_a^{(K)} \otimes |0,\mathrm{out}\rangle_b^{(K)}, \\
&|0,\mathrm{out}\rangle_a^{(K)} = \prod_{n\in\Omega_3} |0,\mathrm{out}\rangle_{n,a}^{(K)}, \quad |0,\mathrm{out}\rangle_b^{(K)} = \prod_{n\in\Omega_3} |0,\mathrm{out}\rangle_{n,b}^{(K)}.
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Используя уравнение (2.4.5) и представление (2.4.9) для матрицы плотности $\check{\rho}_K$, легко вычислить следы в уравнении (2.4.13), и таким образом получить явный вид редуцированных матриц $\check{\rho}_\pm$:

$$\begin{aligned}
&\check{\rho}_+|c_v|^{-2} = \prod_{i=1,2} |0,\mathrm{out}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0,\mathrm{out}| \\
&\otimes \prod_{n\in\Omega_3} \left[P_{K,a,n} + |w_n\left(+-|0\right)|^{2+} a_n^\dagger(\mathrm{out}) P_{K,a,n}{}^{+} a_n(\mathrm{out})\right], \\
&\check{\rho}_-|c_v|^{-2} = \prod_{i=4,5} |0,\mathrm{out}\rangle^{(i)}\ {}^{(i)}\langle 0,\mathrm{out}| \\
&\otimes \prod_{n\in\Omega_3} \left[P_{K,b,n} + |w_n\left(+-|0\right)|^2{}_{+} b_n^\dagger(\mathrm{out}) P_{K,b,n+} b_n(\mathrm{out})\right], \\
&P_{K,a,n} = |0,\mathrm{out}\rangle_{n,a}^{(K)}\ {}_{n,a}^{(K)}\langle 0,\mathrm{out}|, \quad P_{K,b,n} = |0,\mathrm{out}\rangle_{n,b}^{(K)}\ {}_{n,b}^{(K)}\langle 0,\mathrm{out}|.
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Можно также рассмотреть редукцию матрицы плотности (2.4.5), происходящую в результате измерения какой-либо физической величины классическим прибором, т.е. в результате декогеренции. Предположим, что измеряется среднее число частиц $N(\mathrm{out})$ в состоянии $\check{\rho}$ рассматриваемой системы. Оператор, соответствующий данной физической величине, есть $\check{N}(\mathrm{out})=\sum_{i=1}^{5}\check{N}_i(\mathrm{out})$, где

$$
\begin{aligned}
&\check{N}_1(\mathrm{out})=\sum_{n\in\Omega_1}\left[\,{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}^{+}a_n(\mathrm{out})+\,{}_{-}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}_{-}a_n(\mathrm{out})\right],\\
&\check{N}_2(\mathrm{out})=\sum_{n\in\Omega_2}a_n^{\dagger}a_n,\quad \check{N}_4(\mathrm{out})=\sum_{n\in\Omega_4}b_n^{\dagger}b_n,\\
&\check{N}_3(\mathrm{out})=\sum_{n\in\Omega_3}\left[\,{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})+\,{}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}_{+}b_n(\mathrm{out})\right],\\
&\check{N}_5(\mathrm{out})=\sum_{n\in\Omega_5}\left[\,{}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}_{+}b_n(\mathrm{out})+\,{}^{-}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\,{}^{-}b_n(\mathrm{out})\right].
\end{aligned}
\tag{2.4.17}
$$

Согласно фон Нейману [78], матрица плотности $\check{\rho}$ после такого измерения редуцируется до матрицы $\check{\rho}_N$ вида

$$
\check{\rho}_N=\sum_{s}\langle s,\mathrm{out}|\check{\rho}|s,\mathrm{out}\rangle\check{P}_s,\quad \check{P}_s=|s,\mathrm{out}\rangle\langle s,\mathrm{out}|,
\tag{2.4.18}
$$

где вектора $|s,\mathrm{out}\rangle$ – собственные состояния оператора $\check{N}(\mathrm{out})$ с собственными значениями s, которые представляют полное число электронов и позитронов в состоянии $|s,\mathrm{out}\rangle$,

$$
\begin{aligned}
&\check{N}(\mathrm{out})|s,\mathrm{out}\rangle=s|s,\mathrm{out}\rangle,\\
&|s,\mathrm{out}\rangle=\prod_{n\in\Omega_1}\left[\,{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]^{l_{n,1}}\left[\,{}_{-}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]^{k_{n,1}}\prod_{n\in\Omega_2}\left(a_n^{\dagger}\right)^{l_{n,2}}\prod_{n\in\Omega_4}\left(b_n^{\dagger}\right)^{l_{n,4}}\\
&\times\prod_{n\in\Omega_5}\left[\,{}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]^{l_{n,5}}\left[\,{}^{-}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]^{k_{n,5}}\prod_{n\in\Omega_3}\left[\,{}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]^{l_{n,3}}\left[\,{}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})\right]^{k_{n,3}}|0,\mathrm{out}\rangle,\\
&s=\sum_{n\in\Omega_1}(l_{n,1}+k_{n,1})+\sum_{n\in\Omega_2}(l_{n,2})+\sum_{n\in\Omega_4}(l_{n,4})+\sum_{n\in\Omega_5}(l_{n,5}+k_{n,5})+\sum_{n\in\Omega_3}(l_{n,3}+k_{n,3}).
\end{aligned}
$$

Нужно отметить, что $l_{n,i},\,k_{n,i}=(0,1)$, так как рассматривается только ферми-случай.

Из-за структуры матрицы $\check{\rho}$, веса $\langle s,\mathrm{out}|\check{\rho}|s,\mathrm{out}\rangle$ будут отличны от нуля только для чистых состояний $|s,\text{out}\rangle$ с целым числом пар в Ω_3 (так как в качестве начального состояния было выбрано вакуумное состояние, и вне зоны Клейна рождения частиц не происходит). Тогда матрица $\check{\rho}_N$ принимает вид

$$\check{\rho}_N|c_v|^{-2} = P' \prod_{n\in\Omega_3} \left[P_{K,n} + |w_n\left(+-|0\right)|^2 \, {}^{+}a_n^{\dagger}(\text{out}) \, {}_{+}b_n^{\dagger}(\text{out}) P_{K,n} \, {}_{+}b_n(\text{out}) \, {}^{+}a_n(\text{out})\right], \tag{2.4.19}$$

где операторы $P_{K,n}$ и P' были определены в предыдущем разделе, см. уравнение (2.4.9). Заметим, что измерение уничтожает недиагональные элементы матрицы плотности (2.4.9).

Так как оператор V унитарен и начальное состояние рассматриваемой системы чистое (вакуумное), то матрица плотности (2.4.5) также описывает чистое состояние. Следовательно, соответствующая этому состоянию энтропия фон Неймана равна нулю. Редуцированные матрицы плотности $\check{\rho}_{\pm}$ (1.2.17), однако, уже описывают смешанные состояния; их энтропии $S(\check{\rho}_{\pm})$ отличны от нуля,

$$S(\check{\rho}_{\pm}) = -k_B \mathrm{tr}\check{\rho}_{\pm} \ln \check{\rho}_{\pm}. \tag{2.4.20}$$

Как неоднократно упоминалось выше, данная энтропия также может использоваться в качестве меры квантовой запутанности электронной и позитронной подсистем и меры потери информации в процессе редукции.

Используя условие нормировки для редуцированных матриц плотности, $\mathrm{tr}\check{\rho}_{\pm} = 1$, соотношение (2.4.10), определения дифференциальных средних чисел частиц N_n^a и античастиц N_n^b, рожденных из вакуума,

$$N_n^a = \mathrm{tr}\check{\rho}_+ a_n^{\dagger}(\text{out}) a_n(\text{out}), \;\; N_n^b = \mathrm{tr}\check{\rho}_- b_n^{\dagger}(\text{out}) b_n(\text{out}), \tag{2.4.21}$$

а также тот факт, что

$$N_n^a = N_n^b = N_n^{\text{cr}}, \quad |w_n\left(+-|0\right)|^2 = N_n^{\text{cr}}\left(1 - N_n^{\text{cr}}\right)^{-1}, \tag{2.4.22}$$

можно провести процедуру вычисления следов в уравнениях (2.4.20) и переписать их правые части как

$$S(\check{\rho}_{\pm}) = \sum_{n\in\Omega_3} S_n, \quad S_n = -k_B \left[\left(1 - N_n^{\mathrm{cr}}\right) \ln\left(1 - N_n^{\mathrm{cr}}\right) + N_n^{\mathrm{cr}} \ln N_n^{\mathrm{cr}} \right]. \qquad (2.4.23)$$

Матрица плотности (2.4.19), редуцированная методом фон Неймана, также описывает смешанное состояние; принимая во внимание ортогональность и нормированность чистых состояний $|0,\mathrm{out}\rangle_n^{(K)}$ и ${}^{+}a_n^{\dagger}(\mathrm{out})\ {}_{+}b_n^{\dagger}(\mathrm{out})|0,\mathrm{out}\rangle_n^{(K)}$, несложно продемонстрировать, что энтропия фон Неймана $S(\check{\rho}_N)$ смешанного состояния (2.4.19) совпадает с энтропиями $S(\check{\rho}_{\pm})$ состояний, описываемых редуцированными матрицами плотности $\check{\rho}_{\pm}$.

Дифференциальное среднее число рожденных полем фермионов N_n^{cr} меняется в пределах $(0,1)$. Энтропия S_n для отдельной моды n в уравнении (2.4.23) симметрична по отношению к значениям переменной N_n^{cr}. Она достигает своего максимума на значении $N_n^{\mathrm{cr}} = 1/2$ и обращается в нуль при $N_n^{\mathrm{cr}} = 1$ и $N_n^{\mathrm{cr}} = 0$. Можно говорить, что при $N_n^{\mathrm{cr}} = 0$ рождения частиц не происходит и начальное вакуумное состояние не претерпевает деформаций; случай $N_n^{\mathrm{cr}} = 1$ соответствует достоверному рождению пары в данной моде, и максимум энтропии, т.е. состояние с максимальным значением неопределенности соответствует $N_n^{\mathrm{cr}} = 1/2$.

2.4.2 Деформация вакуумного состояния между пластинами конденсатора

Можно проиллюстрировать вышеприведенные общие формулы рассмотрением деформации начального вакуумного состояния электрическим полем между пластинами конденсатора, разнесенными на конечное расстояние L. Некоторые аспекты рождения частиц таким постоянным электрическим полем (также называемым L-постоянным полем) были исследованы в работе [86]. Это поле представляет собой частный случай поля, заданного постоянной потенциальной ступенью. Будем рассматривать это поле помещенным в $d = D + 1$-мерном пространстве Минковского. Компоненты поля имеют вид $\mathbf{E}(x) = \left(E^i,\ i = 1, ..., D\right),\ E^1 = E_x(x),\ E^{2,...,D} = 0,$

т.е.

$$E_x(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (-\infty, -L/2] \\ E = \text{const} > 0, \ x \in (-L/2, L/2) \\ 0, \ x \in [L/2, \infty) \end{cases} .$$

Потенциальная энергия электрона в L-постоянном поле есть

$$U(x) = \begin{cases} U_{\mathrm{L}} = -eEL/2, & x \in (-\infty, -L/2] \\ eEx, & x \in (-L/2, L/2) \\ U_{\mathrm{R}} = eEL/2, & x \in [L/2, \infty) \end{cases} . \tag{2.4.24}$$

Величина соответствующей потенциальной ступени есть $\mathbb{U} = eEL$. Наиболее интересным является случай критической ступени, для которой выполняется соотношение

$$\mathbb{U} = eEL > 2m \tag{2.4.25}$$

и вакуум нестабилен в зоне Клейна.

Рассмотрим частный случай, когда пластины конденсатора разнесены на достаточно большое расстояние L,

$$\sqrt{eE}L \gg \max\{1, E_c/E\} . \tag{2.4.26}$$

Здесь $E_c = m^2/e$ – критическое швингеровское поле ($\hbar = c = 1$). Этот тип потенциальных ступеней представляет собой регуляризацию однородного электрического поля и подходит для имитирования медленно меняющегося поля.

В работе [86] было продемонстрировано, что основная масса рожденных частиц принадлежит внутренней области $\tilde{\Omega}_K$ зоны Клейна, $\tilde{\Omega}_K \subset \Omega_3$,

$$\begin{aligned} &\tilde{\Omega}_K: \ |p_0|/\sqrt{eE} < \sqrt{eE}L/2 - K, \ \lambda < K_\perp^2, \\ &\lambda = \frac{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2}{eE}, \ \sqrt{eE}L \gg K \gg K_\perp^2 \gg \max\{1, E_c/E\}. \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

где параметры K и $K_\perp$ есть некие наперед заданные положительные числа, удовлетворяющие условию (2.4.27).

Дифференциальные средние числа частиц с наборами квантовых чисел n, принадлежащих подобласти $\tilde{\Omega}_K$, т.е. $n \in\tilde{\Omega}_K$, имеют вид

$$
\begin{aligned}
& N_n^{\mathrm{cr}} = e^{-\pi\lambda}\left[1 + O(|\xi_1|^{-3}) + O\left(|\xi_2|^{-3}\right)\right], \\
& \xi_1 = \frac{-eEL/2 - p_0}{\sqrt{eE}},\ \xi_2 = \frac{eEL/2 - p_0}{\sqrt{eE}}.
\end{aligned} \tag{2.4.28}
$$

Вспомним, что, фактически, квантовые числа n, обозначающие электронные и позитронные состояния, состоят из нескольких квантовых параметров, а именно

$$
n = (p_0, \mathbf{p}_\perp, \sigma),\ \mathbf{p}_\perp = (p_2, \ldots, p_D), \tag{2.4.29}
$$

где энергия электрона имеет значение p_0, а энергия позитрона – $-p_0$; для электрона вектор $\mathbf{p}_\perp$ означает поперечные компоненты импульса, тогда как позитрон имеет поперечный импульс $-\mathbf{p}_\perp$. Точно таким же образом, спиновая поляризация электрона имеет значение σ, а для позитрона – $-\sigma$. Заметим, однако, что электрон и позитрон, рожденные в паре, имеют одно и то же главное квантовое число n (находятся в одной квантовой моде).

Величина (2.4.28) практически постоянна в широком спектре значений энергии p_0 для любого фиксированного $\lambda < K_\perp^2$, и для этих квантовых чисел можно положить $N_n^{\mathrm{cr}} \approx e^{-\pi\lambda}$. В предельном случае, когда работа, совершаемая полем, достаточно велика, т.е. $\sqrt{eE}L \to \infty$, приходим к хорошо известному результату для рождения частиц постоянным однородным электрическим полем $N_n^{\mathrm{cr}} = e^{-\pi\lambda}$, см. работы Никишова [5, 7, 57].

В таком приближении, полное число частиц, рожденных из вакуума, дается суммой (интегралом) по области $n \in \tilde{\Omega}_3$,

$$
N^{\mathrm{cr}} = \sum_{n\in\Omega_3} N_n^{\mathrm{cr}} \approx \sum_{\mathbf{p}_\perp,\, p_0\in\tilde{\Omega}_K} \sum_\sigma N_n^{\mathrm{cr}} = \frac{J_{(d)}TV_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\tilde{\Omega}_K} dp_0 d\mathbf{p}_\perp N_n^{\mathrm{cr}}\ . \tag{2.4.30}
$$

где $J_{(d)} = 2^{[d/2]-1}$ – спиновый множитель, $V_\perp$ – $(d-2)$-мерный пространственный объем в ортогональной к направлению электрического поля гиперплоскости, а T – время действия электрического поля. Интегрирование по энергии приводит p_0 к выражению

$$N^{\mathrm{cr}} = \frac{J_{(d)} T V_\perp L e E}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\tilde{\Omega}_K} d\mathbf{p}_\perp e^{-\pi\lambda} \,. \qquad (2.4.31)$$

Снимая в уравнении (2.4.31) интеграл по $p_\perp$, получим полное число рожденных из вакуума частиц:

$$N^{\mathrm{cr}} = \frac{J_{(d)} T V (eE)^{d/2}}{(2\pi)^{d-1}} \exp\left(-\pi \frac{E_c}{E}\right), \qquad (2.4.32)$$

где объем $V = LV_\perp$ – объем конденсатора (т.е. объем, занятый электрическим полем).

Очевидно, что $N^{\mathrm{cr}} < \infty$, когда значения V и T конечны, или, другими словами, когда используется регуляризация конечного объема и конечного времени действия поля. Глядя на условие (2.3.5), можно видеть, что рассматриваемая потенциальная ступень, таким образом, не нарушает унитарность КЭД.

Оценим потерю информации в редуцированных состояниях при деформации вакуума, которая может быть найдена как энтропия (2.4.23) этих состояний. Используя тот же способ суммирования, что и в (2.4.30), можно записать

$$S(\check{\rho}_\pm) = -k_B \frac{J_{(d)} T V_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\Omega_3} dp_0 d\mathbf{p}_\perp \left[N_n^{\mathrm{cr}} \ln N_n^{\mathrm{cr}} + (1 - N_n^{\mathrm{cr}}) \ln(1 - N_n^{\mathrm{cr}}) \right]. \qquad (2.4.33)$$

Для Ферми-частиц $N_n^{\mathrm{cr}} \leq 1$. Это позволяет формально разложить логарифм в правой части (2.4.33) по степеням N_n^{cr}. Тогда, слагаемое $(1 - N_n^{\mathrm{cr}}) \ln(1 - N_n^{\mathrm{cr}})$ может быть представлено в виде

$$(1 - N_n^{\mathrm{cr}}) \ln(1 - N_n^{\mathrm{cr}}) = -\,(1 - N_n^{\mathrm{cr}}) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} \left(N_n^{\mathrm{cr}}\right)^l. \qquad (2.4.34)$$

Подставляя (2.4.34) в уравнение (2.4.33), можно получить следующий промежуточный результат

$$S(\check{\rho}_\pm) = k_B \frac{J_{(d)} T V_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\Omega_3} dp_0 d\mathbf{p}_\perp \left[-N_n^{\mathrm{cr}} \ln N_n^{\mathrm{cr}} + (1 - N_n^{\mathrm{cr}}) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} \left(N_n^{\mathrm{cr}}\right)^l \right]. \qquad (2.4.35)$$

Как упоминалось ранее, основной вклад в число рожденных частиц происходит из-за области $\tilde{\Omega}_K \in \Omega_3$, в которой слагаемые, пропорциональные $|\xi_{1,2}|^{-3}$, малы и могут быть отброшены, позволяя использовать приближение $N_n^{\mathrm{cr}} \approx e^{-\pi\lambda}$ в правой части уравнения (2.4.35). Тогда

$$S(\check{\rho}_\pm) \approx k_B \frac{J_{(d)} TVeE}{(2\pi)^{d-1}} \int_{\tilde{\Omega}_K} d\mathbf{p}_\perp \left[\pi\lambda e^{-\pi\lambda} + (1 - e^{-\pi\lambda}) \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} e^{-\pi\lambda l} \right] \text{ если } d > 2;$$
$$S(\check{\rho}_\pm) \approx k_B \frac{TVeE}{2\pi} A\left(2, E_c/E\right) \text{ если } d = 2,$$
$$A\left(2, E_c/E\right) = \left\{ \pi E_c/E \exp\left(-\pi E_c/E\right) - \left[1 - \exp\left(-\pi E_c/E\right)\right] \ln\left[1 - \exp\left(-\pi E_c/E\right)\right] \right\}. \tag{2.4.36}$$

При числе измерений $d > 2$ интегрирование по поперечным компонентам импульса достаточно легко проделать. Вне области $\tilde{\Omega}_K$, подынтегральное выражение крайне мало, что позволяет расширить пределы интегрирования $p_\perp$ до бесконечности:

$$S(\check{\rho}_\pm) \approx k_B \frac{J_{(d)} TV(eE)^{d/2}}{(2\pi)^{d-1}} A\left(d, E_c/E\right) \text{ если } d > 2, \tag{2.4.37}$$

где множитель $A\left(d, E_c/E\right)$ имеет вид

$$A\left(d, E_c/E\right) = \left(\pi E_c/E + d/2 - 1\right) \exp\left(-\pi E_c/E\right)$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \left[l^{-d/2} - l^{-1}(l+1)^{(2-d)/2} \exp\left(-\pi E_c/E\right) \right] \exp\left(-\pi l E_c/E\right). \tag{2.4.38}$$

Для примера, проведем оценку этой величины для случаев сильного $E_c/E \ll 1$ и критического $E_c/E = 1$ поля при $d = 4, 3$: $A\left(4, 0\right) = \pi^2/6$, $A\left(4, 1\right) \approx 0,22$; $A\left(3, 0\right) \approx 0,93$, and $A\left(3, 1\right) \approx 0,20$. В случае, когда внешнее поле можно считать слабым, $E_c/E \gg 1$, энтропия экспоненциально мала при любом d,

$$A\left(d, E_c/E\right) \approx \left(\pi E_c/E + d/2\right) \exp\left(-\pi E_c/E\right).$$

Можно также отметить, что в приближении (2.4.37) значение энтропии $S(\check{\rho}_\pm)$

для потенциальной ступени совпадает со значением $S(\check{\rho}_\pm)$ в том же приближении, вычисленной для случая однородной зависящей от времени потенциальной ступени, производящей T-постоянное электрическое поле, полученным в работе [39]. Это наблюдение подтверждает тот факт, что T-постоянное и L-постоянное поля создают одинаковые физические эффекты в случае, когда работа, произведенная внешним полем, достаточно велика (или в случае, когда $T \to \infty$ и $L \to \infty$), что делает возможным рассматривать эти поля в качестве регуляризаций для постоянного однородного электрического поля, заданных двумя различными калибровочными условиями на электромагнитные потенциалы. Достаточно очевидно, однако, что точные выражения для энтропий $S(\check{\rho}_\pm)$ отличаются в общем случае.

Заключение

В диссертации рассмотрен круг проблем, касающихся эффектов сильного поля, связанных с рождением частиц. Основные результаты, полученные в диссертации, состоят в следующем:

1. В рамках КЭД с нестабильным вакуумом в присутствии однородных зависящих от времени электрических полей, заданных потенциальными ступенями, были исследованы следующие проблемы. Используя общее непертурбативное выражение для матриц плотности (квантованных дираковских или клейн-гордоновских полей), было изучено воздействие измерения на квантовую систему. Было уделено внимание тому факту, что любое измерение, проводимое внутри системы классическим прибором, приводит к декогеренции, и изучена деформация матрицы плотности, соответствующей вакуумному начальному состоянию, при измерении числа электронов, позитронов или пар в рассматриваемой системе. Был построен явный вид соответствующих редуцированных матриц плотности, и вычислена сопутствующая потеря информации. Кроме того, была найдена мера потери информации при редукции общей матрицы плотности по подсистемам электронов и позитронов, и мера квантовой запутанности этих подсистем для двух различных начальных условий. Для иллюстрации общих формул был рассмотрен пример так называемого T-постоянного внешнего электрического поля. Было установлено, что энтропия любой из двух подсистем (электронов и позитронов) для вакуумного начального состояния пропорциональна множителю $(eE)d/2$ и числу спиновых степеней свободы $J_{(d)}$; также установлено, что она растет линейно с ростом времени действия поля T. Такое поведение сохраняется также для равновесного начального состояния системы при низких температурах; фактически, в этом случае энтропия не зависит от температуры. Результаты, изложенные в первой главе диссертации, опубликованы в работе [39].

2. В рамках КЭД с нестабильным вакуумом в присутствии неоднородных постоянных полей, заданных потенциальными ступенями, было изучено так называемое пиковое поле в трех различных конфигурациях (медленно меняющееся поле,

острый пик и существенно несимметричная конфигурация). Были вычислены дифференциальные и интегральные средние числа частиц, рождаемых данным полем из вакуума [75].

3. Был изучен вопрос о унитарной эквивалентности фоковских in- и out- пространств в рамках КЭД с постоянными внешними электрическими полями, заданными потенциальными ступенями; известно, что in- и out-пространства унитарно эквивалентны, если линейное каноническое преобразование (2.1.18) (и сопряженное к нему), связывающее in- и out-наборы операторов рождения и уничтожения частиц, является собственным. Продемонстрировано, что в рассматриваемых физических системах это условие выполняется в том случае, если общее число частиц, рожденных из вакуума внешним полем, конечно [74]; для любого реалистичного поля, ограниченного в пространстве и времени, это условие, очевидно, выполняется. Данный факт может быть интерпретирован как дополнительное подтверждение состоятельности общей теории, изложенной в [63], и правильности интерпретации in- и out-частиц в ней.

4. В рамках КЭД с постоянными внешними электрическими полями для случая статистики Ферми построен явный вид матрицы плотности, соответствующей вакуумному начальному состоянию системы. Эта матрица плотности описывает деформацию начального вакуумного состояния электрическим полем, заданным потенциальной ступенью. Используя преобразования Боголюбова, были получены два различных представления для этой матрицы плотности в терминах набора out-операторов (представление в виде экспоненты нормальной формы и в терминах векторов состояний). Разумеется, оба полученных представления эквивалентны. На основе построенной общей матрицы плотности был найден явный вид редуцированных матриц плотности для электронной и позитронной подсистем. Также при помощи вычисления энтропии фон Неймана найдена потеря информации, спровоцированная этими редукциями, и мера квантовой запутанности рассматриваемых подсистем. Общее рассмотрение было проиллюстрировано на примере деформации вакуумного состояния электрическим полем между пластинами плоского конденсатора, т.е. изучено действие так называемого

L-постоянного поля на вакуум. Было продемонстрировано, что в этом случае энтропия пропорциональна множителю $(eE)d/2$, числу спиновых степеней свободы $J_{(d)}$, и объему конденсатора $V = V_{\perp}L$ (т.е. объему, занятому электрическим полем). Можно заметить, что в случае достаточно протяженного L-постоянного поля основной вклад в энтропию, полученный для такого поля, совпадает с основным вкладом в энтропию, полученным для достаточно долго действующего T-постоянного поля. Данные результаты были подробно изложены в работе [74].

Дальнейшие исследования могут быть посвящены изучению новых приложений теории, предложенной в [63], к различным физическим проблемам. В частности, представляет интерес исследование универсального характера рождения частиц в слабо неоднородных электрических полях, заданных потенциальными ступенями, и изучение физических свойств новых материалов, таких как графен.

Список литературы

[1] Schwinger, J. On Gauge invariance and Vacuum polarization / J. Schwinger // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 82. – P. 664.

[2] Dunne, G.V. Heisenberg-Euler effective Lagrangians: Basics and extensions / [Electronic resourse] // Cornell University Library. – 2004. – 82 p. – URL: http://arxiv.org/abs/hep-th/0406216 (access date: 21.05.2016).

[3] Feynman, R.P. The Theory of Positrons / R.P. Feynman // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 76. – P. 749.

[4] Feynman, R.P. Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics / R.P. Feynman // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 76. – P. 769.

[5] Nikishov, A.I. Pair Production by a Constant Electric Field / A.I. Nikishov // Sov. Phys. JETP. – 1970. – Vol. 30, is. 4. – P. 660.

[6] Narozhny, N.B. The simplest processes in the pair creating electric field / N.B. Narozhny, A.I. Nikishov // Sov. J. Nucl. Phys. – 1970. – Vol. 11, № 5. – P. 596.

[7] Никишов, А.И. Проблемы внешнего поля в квантовой электродинамике / А.И. Никишов // Труды ФИАН. – 1979. – Т. 111. – С. 152.

[8] Birrell, N.D. Quantum Fields in Curved Space / N.D. Birrell, P.C.W. Davies. – Cambridge, Cambridge University Press, 1982. – 352 p.

[9] Greiner, W. Quantum Electrodynamics of Strong Fields / W. Greiner, B. Muller, and J. Rafelski. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 596 p.

[10] Grib, A.A. Vacuum Quantum Effects in Strong Fields / A.A. Grib, S.G. Mamaev, V.M. Mostepanenko. – St. Petersburg: Friedmann Laboratory Pub., 1994. – 361 p.

[11] Ruffini, R. Electron-positron pairs in physics and astrophysics: From heavy nuclei to black holes / R. Ruffini, G. Vereshchagin, S. Xue // Phys. Rep. – 2010. – Vol. 487, is. 1-4. – P. 1.

[12] Hawking, S.W. Particle creation by black holes / S.W. Hawking // Comm. Math. Phys. – 1975. – Vol. 43, is. 3. – P. 199.

[13] Novikov, I.D. Physics of black holes / I.D. Novikov, V.P. Frolov. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1989. – 341 p.

[14] Bell, J.S. Speakable and unspeakable in quantum mechanics / J.S. Bell. – New York: Cambridge Univ. Press, 1987. – 212 p.

[15] Preskill, J. Quantum Computation / [Electronic resource]. – URL: http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph219/#lecture. (access date: 01.05.2015)

[16] Nielsen, M.A. Quantum computation and quantum information / M.A. Nielsen, I.L. Chuang. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 675 p.

[17] Alicki, R. Quantum Dynamical Systems / R. Alicki and M. Fannes. – New York: Oxford University Press, 2001. – 296 p.

[18] Andreev, V.A.Bell inequalities for two-particle compound spin states / V.A. Andreev, V.I. Man'ko // Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika. – 2004. – Vol. 140, is. 2. – P. 248.

[19] Lin, S.-Y. Quantum entanglement and entropy in particle creation / S.-Y. Lin, C.-H. Chou, B.L. Hu // Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 81, is. 8. – P. 084018.

[20] Ebadi, Z. Entanglement generation by electric field background / Z. Ebadi, B. Mirza // Ann. Phys. – 2014. – Vol. 351. – P. 363.

[21] Kiefer, C. Decoherence in quantum electrodynamics and quantum gravity / C. Kiefer // Phys. Rev. D. – 1992. – Vol. 46, is. 4. – P. 1658.

[22] Dissipation and Decoherence in Mean Field Theory / S. Habib [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76, is. 25. – P. 4660.

[23] Furry, W.H. On Bound States and Scattering in Positron Theory / W.H. Furry // Phys. Rev. – 1951. – Vol. 81, is. 1. – P. 115.

[24] Gitman, D.M. Processes of arbitrary order in quantum electrodynamics with a pair-creating external field / D.M. Gitman // J. Phys. A. – 1977. – Vol. 10, № 11 – P. 2007.

[25] Fradkin, E.S. Furry Picture for Quantum Electrodynamics with Pair-Creating External Field / E.S. Fradkin, D.M. Gitman // Fortschr. Phys. – 1981. – Vol. 29, is. 9. – P. 381.

[26] Гитман, Д.М. Квантовые процессы в интенсивном электромагнитном поле / Д.М. Гитман // Изв. ВУЗов СССР, Физика. – 1976. – Т. 19, № 10. – С. 86.

[27] Gavrilov, S.P. Quantum processes in an intense electromagnetic field producing pairs. III / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Sov. Phys. J. – 1977. - T. 20, № 1. - P. 94.

[28] Gavrilov, S.P. Green's functions in an external electric field / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, Sh. M. Shvartsman // Sov. J. Nucl. Phys. – 1979. – Vol. 29, № 4. – P. 567.

[29] Gitman, D.M. Unitarity relation in quantum electrodynamics with a pair-generating external field / D.M. Gitman, Sh.M. Shvartsman // Sov. Phys. J. – 1980. – Vol. 23, is. 3. – P. 257.

[30] Gavrilov, S.P. The Furry picture in scalar quantum electrodynamics with a strong pair-producing external field / S.P. Gavrilov, D.H. Gitman // Sov. Phys. J. – 1980. – Vol. 23, is. 6. – P. 491.

[31] Radiative processes in an external pair-producting electromagnetic field / Yu.Yu. Volfengaut [et al.] // Sov. J. Nucl. Phys. – 1981. – Vol. 33, is. 3. – P. 386.

[32] Gavrilov, S.P. Quantum Field Theory with Unstable Vacuum / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, E.S. Fradkin // Sov. J. Nucl. Phys. – 1987. – Vol. 46, is.1. – P. 107.

[33] Gavrilov, S.P. Representation of an interaction in the formalism of operator BRST quantization for the standard electroweak theory in the R_ξ-gauge / S.P. Gavrilov // Russian Phys. J. – 1992. – Vol. 35, № 7. – P. 652.

[34] Gavrilov, S.P. The furry picture for the standard electroweak theory with a free non-Abelian external field / S.P. Gavrilov // Russian Phys. J. – 1992. – Vol. 35, № 10. – P. 969.

[35] Gavrilov, S.P. A realization of physical states in the Farri representation for the electroweak theory with a non-Abelian external field in the R_ξ-gauge / S.P. Gavrilov // Russian Phys. J. – 1993. – Vol. 36, № 3. – P. 269.

[36] Gavrilov, S.P. Green's functions and matrix elements in the Furry picture for the electroweak theory with a non-Abelian external field / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Russian Phys. J. – 1993. – Vol. 36, № 5. – P. 448.

[37] Gavrilov, S.P. Consistency restrictions on maximal electric field strength in QFT / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101, is. 13. – P. 130403.

[38] Gavrilov, S.P. Density matrix of a quantum field in a particle-creating background / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, J.L. Tomazelli // Nucl. Phys. B. – 2008. – Vol. 795, is. 3. – P. 645.

[39] Gavrilov, S.P. Statistical properties of states in QED with unstable vacuum / S.P. Gavrilov, D. M. Gitman, and A.A. Shishmarev // Phys. Rev. A. – 2015. – Vol. 91, is. 5. – P. 052106.

[40] Fradkin, E.S. Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum / E.S. Fradkin, D.M. Gitman, S.M. Shvartsman. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 288 p.

[41] Anderson, P.R. On the Instability of Global de Sitter Space to Particle Creation / P.R. Anderson, E. Mottola // Phys. Rev. D. – 2014. – Vol. 89, is. 10. – P. 104038.

[42] Gavrilov, S.P. Vacuum instability in external fields / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 53, is. 12. – P. 7162.

[43] Gavrilov, S.P. Effective energy-momentum tensor of strong-field QED with unstable vacuum / S.P. Gavrilov // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – Vol. 39, № 21. – P. 6407.

[44] Gavrilov, S.P. One-loop energy-momentum tensor in QED with electric-like background/ S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 78, is. 4. – P. 045017.

[45] Dvornikov, M. Creation of Dirac neutrinos in a dense medium with a time-dependent effective potential / M. Dvornikov, S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Rev. D. – 2014. – Vol. 89, is. 10. – P. 105028.

[46] Bagrov, V.G. Dirac Equation and its Solutions / V.G. Bagrov, D.M. Gitman – Boston: de Gruyter, 2014. – 430 p.

[47] Dunne, G. QED effective action in time dependent electric backgrounds / G. Dunne, T. Hall // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58, is. 10. – P. 105022.

[48] Gavrilov, S.P. Dirac fermions in strong electric field and quantum transport in graphene / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, N. Yokomizo // Phys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86, is. 12. – P. 125022.

[49] Bagrov, V.G. Concerning the production of electron-positron pairs from vacuum / V.G. Bagrov, D.M. Gitman, Sh.M. Shvartsman // Sov. Phys. JETP. – 1975. – Vol. 41, № 2. – P. 191.

[50] Adorno, T.C. Particle creation from the vacuum by an exponentially decreasing electric field / T.C. Adorno, S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Scr. – 2015. – Vol. 90, № 7. – P. 074005.

[51] Klein, O. Die Reflexion von Elektronen einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac / O. Klein // Z. Phys. – 1929. – Vol. 53, is. 3-4. – P. 157.

[52] Klein, O. Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips / O. Klein // Z. Phys. – 1927. – Vol. 41, is. 6-7. – P. 407.

[53] Sauter, F. Uber das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs / F. Sauter // Z. Phys. – 1931. – Vol. 69, is. 11-12. – P. 742.

[54] Sauter, F. Zum "Klenschen Paradoxon" / F. Sauter // Z. Phys. – 1932. – Vol. 73, is. 7-8. – P. 547.

[55] Dombey, N. Seventy years of the Klein paradox / N. Dombey, A. Calogeracos // Phys. Rep. – 1999. – Vol. 315, is. 1-3. – P. 41.

[56] Dombey, N. History and Physics of the Klein Paradox / N. Dombey, A. Calogeracos // Contemp. Phys. – 1999. – Vol. 40, is. 5. – P. 313.

[57] Nikishov, A.I. Barrier scattering in field theory: removal of Klein paradox / A.I. Nikishov // Nucl. Phys. B. – 1970. – Vol. 21, is. 2. – P. 346.

[58] Hansen, A. Klein's Paradox and Its Resolution / A. Hansen, F. Ravndal // Phys. Scr. – 1981. – Vol. 23, № 6. – P. 1036.

[59] Damour, T. Klein paradox and vacuum polarization / T. Damour // Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. – Amsterdam: North-Holland, 1977. – P. 459.

[60] Wang, R-Ch. Finite-size effect in the Schwinger particle-production mechanism / R-Ch. Wang, Ch-Y. Wong // Phys. Rev. D. – 1988. – Vol. 38, is. 1. – P. 348.

[61] Nikishov, A.I. Scattering and pair production by a potential barrier / A.I. Nikishov // Phys. Atom. Nucl. – 2004. – Vol. 67, is. 8. – P. 1478.

[62] Nikishov, A.I. On the Theory of Scalar Pair Production by a Potential Barrier / [Electronic resource]. – URL: https://arxiv.org/pdf/hep-th/0111137.pdf. (access date: 01.07.2015)

[63] Gavrilov, S.P. Quantization of charged fields in the presence of critical potential steps / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Rev. D. – 2016. – Vol. 93, is. 4. – P. 045002.

[64] Dunne, G.V. New Strong-Field QED Effects at ELI: Nonperturbative Vacuum Pair Production / G.V. Dunne // Eur. Phys. J. D. – 2009. – Vol. 55. – P. 327.

[65] Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems / A. Di Piazza [et al.] // Rev. Mod. Phys. – 2012. – Vol. 84, is. 3. – P. 1177.

[66] Mourou, G. Summary of the IZEST science and aspiration / G. Mourou, T. Tajima // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2014. – Vol. 223, is. 6. – P. 979.

[67] Dunne, G.V. Extreme quantum field theory and particle physics with IZEST / G.V. Dunne // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2014. – Vol. 223, is. 6. – P. 1055.

[68] Hegelich, B.M. Probing the quantum vacuum with ultra intense laser pulses / B.M. Hegelich, G. Mourou, J. Rafelski // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2014. – Vol. 223, is. 6. – P. 1093.

[69] Electronic transport in two-dimensional graphene / D. Das Sarma [et al.] // Rev. Mod. Phys. – 2011. – Vol. 83, is. 2. – P. 407.

[70] Vafek, O. Dirac Fermions in Solids - from High Tc cuprates and Graphene to Topological Insulators and WeylSemimetals / O. Vafek, A. Vishwanath // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. – 2014. – Vol. 5. – P. 83.

[71] Akhmedov, E.T. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields / [Electronic resource]. – URL: https://arxiv.org/abs/1412.1554. (access date: 01.06.2015)

[72] Current-voltage characteristics of graphene devices: Interplay between Zener-Kl ein tunneling and defects / N. Vandecasteele [et al.] // Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 82, is. 4. – P. 045416.

[73] Katsnelson, M.I. Unruh effect in vacua with anisotropic scaling: Applications to multilayer graphene / M.I. Katsnelson, G.E. Volovik, M.A. Zubkov // Ann. Phys. – 2013. – Vol. 336. – P. 36.

[74] Gavrilov, S.P. Unitarity and vacuum deformation in QED with critical potential steps / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Shishmarev // Phys. Rev. D. – 2016. – Vol.93, is. 10. – P. 105040.

[75] Gavrilov, S.P. Particle scattering and vacuum instability by exponential steps / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Shishmarev // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 96, is. 9. – P. 096020.

[76] Berezin, F.A. The method of second quantization / F.A. Berezin. – New York: Academic Press, 1966. – 228 p.

[77] Gitman, D.M. Density matrix in quantum electrodynamics, equivalence principle and Hawking effect/ D.M. Gitman, V.P. Frolov // J. Phys. A. – 1978. – Vol. 11, № 7. – P. 1329.

[78] von Neumann, J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik / J. von Neumann. – Berlin: Verlag von Julius Springer-Verlag, 1996. – 262 p.

[79] Landau, L.D. Statistical Physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Reading, MA: Addison-Wesley, 1969. – 484 p.

[80] Eisert, J. Schmidt measure as a tool for quantifying multiparticle entanglement / J. Eisert, H.J. Briegel // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 64. is. 2. – P. 022306.

[81] Bagrov, V.G. Concerning the production of electron-positron pairs from vacuum / V.G. Bagrov, D.M. Gitman, Sh.M. Shvartsman // Sov. Phys. JETP. – 1975. – Vol. 41. – P. 191.

[82] Gitman, D.M. Pair creation in the electric field, acting for a finite time / D.M. Gitman, V.M. Shachmatov, and Sh. M. Shvartsman // Sov. Phys. Journ. – 1975. – Vol. 18, № 4. – P. 23.

[83] Gavrilov, S.P. Energy–momentum tensor in thermal strong-field QED with unstable vacuum / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // J. Phys. A: Math. Gen. – 2008. – Vol. 41, № 16. – P. 164046.

[84] Feynman, R.P. Quantum Electrodynamics / R.P. Feynman. – New York: W. A. Benjamin, 1961. – 198 p.

[85] Brauer, R. Spinors in n-dimensions / R. Brauer, H. Weyl // Am. J. Math. – 1935. – Vol. 57, № 2. – P. 425.

[86] Gavrilov, S.P. Scattering and pair creation by a constant electric field between two capacitor plates / S.P. Gavrilov, D.M. Gitman // Phys. Rev. D. – 2016. – Vol. 93, is. 4. – P. 045033.

[87] Kiperman, V.A. Criterion for a certain canonical Fermi transformation to be proper / V.A. Kiperman // Teor. Mat. Fiz. – 1970. – Vol. 5, № 1. – P.937.

[88] Higher Transcendental functions / edited by A. Erdelyi [et al.]. – Bateman Manuscript Project. – New York: McGraw-Hill, 1953. – Vol. 1. – 302 p.

[89] NIST Digital Library of Mathematical Functions / [Electronic resource]. – URL: http://dlmf.nist.gov/, 2015-08-07 DLMF Update; Version 1.0.10. (access date: 10.05.2015)

Приложение A
Некоторые асимптотические разложения

Асимптотические выражения для вырожденных гипергеометрических функций для больших значений параметров η и c при фиксированных значениях параметров a и $\tau = \eta/c \sim 1$ приводятся уравнением (13.8.4) из [89] в виде

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(a,c;\eta\right) \simeq c^{a/2} e^{\mathcal{Z}^2/4} F\left(a,c;\tau\right), \quad \mathcal{Z} = -\left(\tau-1\right)\mathcal{W}\left(\tau\right)\sqrt{c},\\
&F\left(a,c;\tau\right) = \tau \mathcal{W}^{1-a} D_{-a}\left(\mathcal{Z}\right) + \mathcal{R} D_{1-a}\left(\mathcal{Z}\right),\\
&\mathcal{R} = \left(\mathcal{W}^{a} - \tau\mathcal{W}^{1-a}\right)/\mathcal{Z}, \quad \mathcal{W}\left(\tau\right) = \left[2\left(\tau - 1 - \ln\tau\right)/\left(\tau-1\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

где $D_{-a}\left(\mathcal{Z}\right)$ – функция параболического цилиндра Вебера (WPCF) [88]. Используя уравнение (A.1), представим функции y_2^2, y_1^1 и их производные в точке $x=0$ как

$$\begin{aligned}
&y_1^1\Big|_{x=0} \simeq e^{-ih_1/2}\left(ih_1\right)^{\nu_1}\; c_1^{a_1/2} e^{\mathcal{Z}_1^2/4} F\left(a_1,c_1;\tau_1\right),\\
&\mathcal{Z}_1 {=} -\left(\tau_1-1\right)\mathcal{W}\left(\tau_1\right)\sqrt{c_1}, \quad \tau_1 = ih_1/c_1,\\
&\frac{\partial y_1^1}{\partial \eta_1}\bigg|_{x=0} \simeq e^{-ih_1/2}\left(ih_1\right)^{\nu_1} c_1^{a_1/2} e^{\mathcal{Z}_1^2/4}\left[-\frac{1}{2ih_1} + \frac{1}{c_1}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right] F\left(a_1,c_1;\tau_1\right);\\
&y_2^2\Big|_{x=0} \simeq e^{ih_2/2}\left(ih_2\right)^{-\nu_2}\left(2-c_2\right)^{(1-a_2)/2} e^{\mathcal{Z}_2^2/4} F\left(1-a_2, 2-c_2;\tau_2\right),\\
&\mathcal{Z}_2 {=} -\left(\tau_2-1\right)\mathcal{W}\left(\tau_2\right)\sqrt{2-c_2}, \quad \tau_2 = -ih_2/\left(2-c_2\right),\\
&\frac{\partial y_2^2}{\partial \eta_2}\bigg|_{x=0} \simeq e^{ih_2/2}\left(ih_2\right)^{-\nu_2} c_2^{(1-a_2)/2} e^{\mathcal{Z}_2^2/4}\left[-\frac{1}{2ih_2} - \frac{1}{2-c_2}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right] F\left(1-a_2, 2-c_2;\tau_2\right).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Предполагая, что $\tau - 1 \to 0$, получим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}^{1-a} \approx 1 + \frac{a-1}{3}\left(\tau-1\right), \quad \mathcal{R} \approx \frac{2\left(a+1\right)}{3\sqrt{c}}, \quad \mathcal{Z} \approx -\left(\tau-1\right)\sqrt{c},\\
&\frac{\partial F\left(a,c;\tau\right)}{\partial\tau} \approx \frac{2+a}{3} D_{-a}\left(\mathcal{Z}\right) + \frac{\partial D_{-a}\left(\mathcal{Z}\right)}{\partial\tau} + \mathcal{R}\frac{\partial D_{1-a}\left(\mathcal{Z}\right)}{\partial\tau}.
\end{aligned}$$

Разлагая WPCF-функции в окрестности $\mathcal{Z} = 0$, в первом приближении при $\mathcal{Z} \to 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F\left(a, c; \tau\right)}{\partial \tau} \approx -\sqrt{\eta} D'_{-a}\left(0\right) + O\left(\eta\right), \\
&F\left(a, c; \tau\right) \approx D_{-a}\left(0\right) + O\left(c^{-1/2}\right),
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

и

$$
D_{-a}\left(0\right) = \frac{2^{-a/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}, \quad D'_{-a}\left(0\right) = \frac{2^{(1-a)/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}, \tag{A.4}
$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. При условии (2.2.38) находим

$$
\begin{aligned}
&p^{\mathrm{L,R}} \approx \left|\pi_{1,2}\right|\left(1 - \lambda/h_{1,2}\right), \quad a_{1,2} \approx \left(1 - \chi\right)/2 - i\lambda/2, \\
&c_1 \approx 1 - i\left(\lambda - \frac{2\left|\pi_1\right|}{k_1}\right), \quad 2 - c_2 \approx 1 + i\left(\lambda - \frac{2\left|\pi_2\right|}{k_2}\right), \\
&\tau_1 - 1 \approx -\frac{1}{h_1}\left(i - \lambda + \frac{2p_0}{k_1}\right), \quad \tau_2 - 1 \approx \frac{1}{h_2}\left(i + \lambda + \frac{2p_0}{k_2}\right).
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

Используя уравнения (A.2), (A.3), и (A.5), представим (2.2.31) в виде

$$
\begin{aligned}
&N_n^{\mathrm{cr}} = e^{-\pi\lambda/2}\left[\left|\delta_0\right|^{-2} + O\left(h_1^{-1/2}\right) + O\left(h_2^{-1/2}\right)\right], \\
&\delta_0 = e^{i\pi/4} D_{-a_1}\left(0\right) D'_{a_2-1}\left(0\right) - e^{-i\pi/4} D'_{-a_1}\left(0\right) D_{a_2-1}\left(0\right).
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

Принимая $\chi = 1$ и используя соотношения для гамма-функций Эйлера, найдем

$$
\delta_0 = \exp\left(i\frac{3\pi}{4} - i\frac{\pi\chi}{2}\right) e^{\pi\lambda/4}. \tag{A.7}
$$

Полагая $|\tau - 1| \sim 1$, можно использовать асимптотические разложения для WPCF-функций в уравнении (A.1), смотри, к примеру, [88, 89]. Заметим, что $\arg\left(\mathcal{Z}\right) \approx \frac{1}{2}\arg\left(c\right)$ если $1 - \tau > 0$. Тогда

$$
\Phi\left(a, c; \eta\right) = \left(1 - \tau\right)^{-a}\left[1 + O\left(\left|\mathcal{Z}\right|^{-1}\right)\right] \quad 1 - \tau > 0. \tag{A.8}
$$

В случае $1-\tau<0$, имеем

$$\arg\left(\mathcal{Z}\right)\approx\begin{cases}\frac{1}{2}\arg\left(c\right)+\pi & \arg\left(c\right)<0\\ \frac{1}{2}\arg\left(c\right)-\pi & \arg\left(c\right)>0\end{cases}.$$

Тогда, наконец, получаем, что

$$\Phi\left(a,c;\eta\right)=\begin{cases}\left(\tau-1\right)^{-a}e^{-i\pi a}\left[1+O\left(\left|\mathcal{Z}\right|^{-1}\right)\right] & \text{если}\quad\arg\left(c\right)<0\\ \left(\tau-1\right)^{-a}e^{i\pi a}\left[1+O\left(\left|\mathcal{Z}\right|^{-1}\right)\right] & \text{если}\quad\arg\left(c\right)>0\end{cases}. \tag{A.9}$$

Асимптотические выражения, применимые для вырожденных гипергеометрических функций $\Phi\left(a,c;\pm ih\right)$ для больших вещественных значений h при фиксированных a и c, приводятся в уравнении (6.13.1(2)) из [88] в виде

$$\Phi\left(a,c;\pm ih\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-a\right)}e^{\pm i\pi a/2}h^{-a}+\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(a\right)}e^{\pm ih}\left(e^{\pm i\pi/2}h\right)^{a-c}. \tag{A.10}$$