

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



Сиротина Мария Николаевна

ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ
И СОСТОЯНИЙ МОДУЛИРОВАННОГО СИНХРОННОГО
ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор
Горцев Александр Михайлович

Томск – 2016

Оглавление

Введение.....	5
1 Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий.....	28
1.1 Постановка задачи.....	29
1.2 Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями потока.....	32
1.3 Совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов между соседними событиями потока.....	42
1.4 Условия рекуррентности модулированного синхронного потока.....	45
1.5 Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока.....	47
1.5.1 Рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей..	48
1.5.2 Явный вид апостериорных вероятностей состояний.....	50
1.6 Частные случаи соотношения параметров, определяющих поток событий.....	59
1.7 Алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий.....	60
1.8 Вероятность ошибки при оценивании состояний модулированного синхронного потока событий.....	61
1.8.1 Условная вероятность ошибочного решения о состоянии модулированного синхронного потока событий в общем случае.....	63
1.8.2 Безусловная вероятность ошибки о состоянии потока.....	67
1.9 Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени.....	70
1.9.1 Формирование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени	71
1.9.2 Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени	73

1.9.3	Алгоритм оптимального оценивания состояний потока в условиях мертвого времени	77
1.10	Результаты и выводы к разделу 1.....	78
2	Оценивание длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий.....	81
2.1	Постановка задачи.....	81
2.2	Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями потока в условиях мертвого времени.....	85
2.3	Совместная плотность вероятности значений длительности смежных интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока в условиях мертвого времени.....	93
2.3.1	Явный вид совместной плотности вероятности наблюдаемого потока в условиях мертвого времени.....	94
2.3.2	Условия рекуррентности модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени	95
2.4	Оценка длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия.....	99
2.4.1	Построение функции правдоподобия.....	99
2.4.2	Решение оптимизационной задачи.....	102
2.5	Оценка длительности мертвого времени модифицированным методом моментов.....	119
2.6	Результаты и выводы к разделу 2.....	124
3	Результаты численных экспериментов на имитационной модели модулированного синхронного потока событий.....	126
3.1	Результаты численных расчетов апостериорных вероятностей состояний и оценок состояний модулированного синхронного потока событий в условиях отсутствия мертвого времени.....	127
3.2	Результаты численных расчетов вероятности ошибки для общего случая и для случая рекуррентного потока.....	132

3.3	Результаты численных расчетов оценки состояний модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени.....	137
3.4	Результаты численных расчетов оценки длительности мертвого времени.....	143
3.5	Результаты и выводы к разделу 3.....	148
	Заключение.....	150
	Список использованных источников и литературы.....	153
Приложение А	Имитационная модель модулированного синхронного дважды стохастического потока событий.....	178
Приложение Б	Имитационная модель модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени.....	181
Приложение В	Алгоритм расчета апостериорной вероятности в условиях отсутствия мертвого времени.....	182
Приложение Г	Алгоритм расчета апостериорной вероятности в условиях мертвого времени.....	185
Приложение Д	Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ.....	188

Введение

Актуальность темы исследования. Системы массового обслуживания (СМО), задачи по их проектированию и эксплуатации являются предметом исследования одной из важных областей прикладной математики – теории массового обслуживания (ТМО). Математические модели систем массового обслуживания (СМО), основными элементами которых являются входящие потоки событий, широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем.

В связи с бурным развитием в последние десятилетия компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей, объединенных термином – цифровые сети интегрального обслуживания (ЦИО) [7, 83].

Задачи теории массового обслуживания и ее приложений легли в основу огромного количества исследований как отечественных, так и зарубежных авторов. При этом одни из самых первых фундаментальных результатов ТМО были сформулированы в начале XX века и не потеряли своей актуальности по настоящее время. А.К. Эрланг – один из первых ученых, столкнувшийся с задачами теории массового обслуживания, в 1909 году издал свою первую научную работу в данной области. Основным вывод опубликованного исследования [176] заключается в том, что телефонные звонки хаотично распределены во времени и подчиняются пуассоновскому закону распределения. Исследование А.К. Эрланга является одним из фундаментальных в теории массового обслуживания, к которому по настоящее время обращаются исследователи при изучении вопросов ТМО. Интерес к задачам подобного типа стал возрастать, так как аналогичные проблемы были актуальными и в других областях их применения таких, как исследование систем связи, транспортных система и др. Базовые результаты теории массового обслуживания

сформулированы в монографиях Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко [31], Г.И. Ивченко, В.А. Каштанова, И.Н. Коваленко [91], Д. Кенига и Д. Штойяна [92], Л. Клейнрока [93], Г.П. Климова [94], А. Кофмана и Р. Крюона [100], Д. Риордана [133], Т.Л. Саати [137], А.Я. Хинчина [152–155]. В последующем теория массового обслуживания получила развитие в сфере систем с приоритетами, которые представлены в монографиях О.И. Бронштейна и И.М. Духовного [15], М.И. Волковинского и А.Н. Кабалецкого [27], Б.В. Гнеденко, Э.А. Даниэляна, В.Н. Дмитрива, Г.П. Климова, В.Ф. Матвеева [30], Н. Джейсоула [80], Г.П. Климова и Г.К. Мишкой [95], В.В. Мова, Л.А. Пономаренко и А.М. Калиновского [115].

Обращаясь к работе [91], в которой сформулированы основные вехи развития ТМО, можно сделать вывод, что пик ее развития пришелся на 50-е – 70-е годы вместе с появлением важного направления исследований в области управляемых СМО, сетей массового обслуживания и вопросов их оптимизации. К первым работам по управляемым системам массового обслуживания можно отнести публикации 60-х годов О.И. Бронштейна и В.В. Рыкова [16, 17], Е.Б. Веклерова [22], Н.М. Воробьева [28], В.В. Рыкова [134, 135], В.В. Рыкова и Э.Е. Лемберга [136], А. А. Гриндлей [183], Р. М. Оливера, Г. Песталоззи [201], М. Яндина, П. Наора [211, 212]. К тому же многочисленные исследования касались вопросов поиска решений различного рода оптимизационных задач. Наиболее полные обзоры по управляемым СМО представлены в работах В.В. Рыкова [135] и М.А. Файнберг, Е.А. Файнберг [146], из которых можно сделать вывод, что исследования в сфере управляемых систем массового обслуживания можно классифицировать по следующему принципу:

- 1) приоритетные системы с динамическими приоритетами [78, 114, 136, 183, 202];
- 2) системы с управляемыми длительностями обслуживания [81, 144, 179, 203, 208, 212];
- 3) системы с управляемым входящим потоком заявок [90, 96, 198];
- 4) системы с формированием очередей [117, 124, 145, 187, 189];

5) системы с динамической структурой [2, 50, 87, 101, 165, 194–197, 204, 206].

Авторы в большинстве своих работ, посвященных исследованиям систем массового обслуживания, рассматривают математические модели, когда все параметры системы известны заранее и не меняются с течением времени. Однако, на практике параметры, характеризующие обслуживаемое устройство, если и известны и не меняются со временем, то параметры, определяющие входящий поток событий, изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер. Последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий, которые характеризуются наличием двух случайностей: наступление событий потока происходит в случайные моменты времени, и интенсивность потока представляет собой случайный процесс. Более того, в подавляющем большинстве исследований систем массового обслуживания в качестве входящих потоков событий рассматриваются простейшие (пуассоновские) потоки, что, в свою очередь, увеличивает интерес к изучению дважды стохастических потоков событий.

По-видимому, одними из первых исследований в этом направлении явились работы Д. Кокса [171] и У. Кингмена [190], при этом понятие «дважды стохастического» потока впервые ввел в рассмотрение Д. Кокс.

Проведенные статистические эксперименты [12, 13, 32, 83, 156] показали возможность достаточно точной аппроксимации дважды стохастическими потоками реальных потоков в информационных сетях. Исследование дважды стохастических потоков событий имеют широкое применение в других областях знаний, например, при описании экономических процессов [86, 97, 104, 169, 170, 174, 185, 188], при описании процесса обучения нейронной сети [167], при описании работы центральной нервной системы [166], при описании биофизических процессов [210], при моделировании реального трафика данных [184], при моделировании процессов плазменной турбулентности [192] и т.д.

Степень разработанности темы исследования. Дважды стохастические потоки, согласно рис. 1, можно разделить на два класса: к первому классу

относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [149, 172, 178, 207]; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным либо бесконечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 году в работах Г.П. Башарина, В.А. Кокотушкина, В.А. Наумова [8, 9] и М. Ньютса [199]. Данные потоки нашли применение в решении задач реальных телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетей связи. В работах [8, 9] введенные потоки названы МС (Markov chain)-потоками; в [199] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Отечественные и зарубежные авторы в своих работах, начиная с начала 90-х годов [160, 166, 168, 193, 199, 213], называют введенные в [8, 9, 199] потоки событий либо дважды стохастическими потоками событий, либо MAP-потоками, либо МС-потоками. В монографии А.Н. Дудина и В.П. Клименок [83] и статьях [82, 84, 160, 164, 193, 213] проведено исследование ВМАР (Batch Markovian Arrival Process)-потоков событий (потоков с кусочно-постоянной интенсивностью, в которых в момент изменения интенсивности может наступить сразу несколько событий). Стоит отметить, что впервые ВМАР-поток был введен в рассмотрение Д. Лукантони [193]. Также в статье [191] модель ВМАР-потока применена при моделировании сетевого трафика.

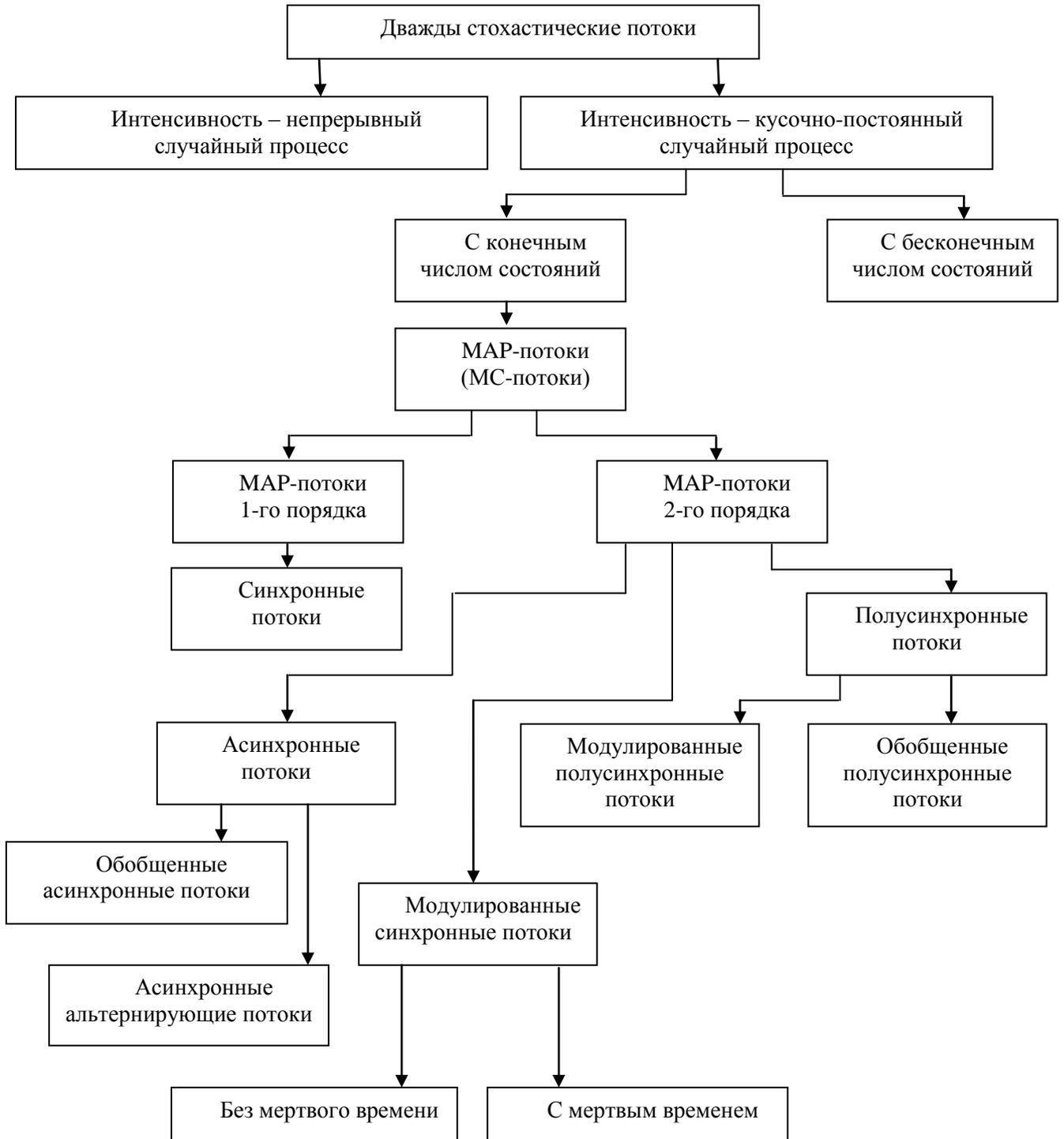


Рисунок 1 – Классификация дважды стохастических потоков событий

В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на следующие группы:

- 1) синхронные потоки событий [18, 19, 53, 54, 57, 58];
- 2) модулированные синхронные потоки событий [35–39, 68–73, 138–143, 180–182];
- 3) асинхронные (потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий [20, 21, 41–44, 48, 51, 52, 61, 63, 75–77, 205]), асинхронные альтернирующие потоки событий [40, 64–67, 129, 130] и обобщенные асинхронные потоки событий (представляют собой комбинацию асинхронных и асинхронных альтернирующих потоков событий [46, 47, 49, 102, 103, 147]);
- 4) полусинхронные потоки (потоки, в которых для одних состояний переход происходит в моменты наступления событий, а для остальных состояний – независимо от моментов наступления событий [55, 56, 59, 127, 128]) и обобщенные полусинхронные потоки событий [45]; модулированный обобщенный полусинхронный поток рассмотрен в работах [3–6, 161–163].

В [62, 74] рассмотрены МАР-потоки событий первого порядка (собственно МАР-потоки, введенные в [199]) и МАР-потоки событий второго порядка [60] (суперпозиция двух синхронизированных МАР-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [60] показывается, что синхронный МС-поток является частным случаем МАР-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный МС-потоки являются частными случаями МАР-потока второго порядка.

В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают следующие задачи:

- 1) оценка состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [3, 4, 18, 38, 41, 42, 43, 45–48,

52, 62, 63, 66, 72, 75, 76, 98, 125–129, 131, 132, 147, 149, 177, 178, 186, 187, 205, 209];

2) оценка параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [5, 6, 19–21, 37, 40, 44, 53–58, 64, 65, 67, 73, 77, 85, 99, 102, 103, 129, 142, 143, 147, 200].

Большинство ранее исследуемых СМО рассматриваются в условиях, когда все события, зарегистрированные обслуживающим прибором, доступны наблюдению. Однако, в реальных ситуациях, поступившее на прибор событие может инициировать период ненаблюдаемости последующих событий потока в течение интервала времени, пока обслуживание данного события не закончится. Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [1], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, подробно рассмотренного А.А. Назаровым в работе [122]. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети. Для того, чтобы оценить потери заявок в узле сети, необходимо оценить длительность мертвого времени.

Длительность мертвого времени, в течение которого события потока недоступны для наблюдения, может быть как фиксированной длительности (непродлевающееся мертвое время), так и быть случайным. Все регистрирующие приборы можно разделить на две группы [1, 150]:

1) устройства с непродлевающимся мертвым временем (каждое событие, наступившее за период мертвого времени, не регистрируется прибором и не вызывает продления длительности мертвого времени, по окончании которого следующее наступившее событие регистрируется прибором и снова порождает период мертвого времени и т.д.);

2) устройства с продлевающимся мертвым временем (каждое событие, наступившее за период мертвого времени, не регистрируется, но вызывает новый период мертвого времени).

Задачи по оценке состояний дважды стохастических потоков в условиях мертвого времени рассмотрены в работах [4, 47, 62, 127, 128, 138, 147, 163], задачи по оценке параметров дважды стохастических потоков событий в условиях мертвого времени – в [5, 6, 20, 21, 40, 64, 65, 67, 73, 85, 102, 103, 142, 143, 147].

Отметим, что дважды стохастические потоки событий и СМО с входящим дважды стохастическим потоком событий исследовались отечественными и зарубежными учеными. К числу значимых работ в этой области можно отнести исследования, проведенные А.Ф. Терпуговым, А.М. Горцевым, А.А. Назаровым, К.И. Лившицем, С.П. Моисеевой, Л.А. Нежелской, А.Н. Моисеевым – в Томском государственном университете [40–77, 104, 116–123, 125–128, 140, 142, 161–163, 180–182]; Г.А. Медведевым, А. Н. Дудиным, В. И. Клименок, Г. В. Царенковым – в Белорусском государственном университете [82–84, 111–113]; Ю.В. Малинковским – в Гомельском университете [105–107]; М.А. Маталыцким – в Гродненском университете [109, 110]; В.В. Рыковым – в Российском государственном университете нефти и газа [134–136]; Г.П. Башариным, П.П. Бочаровым, В.А. Наумовым, А.В. Печинкиным, К.Е. Самуйловым, Ю.В. Гайдамака – в Российском университете Дружбы народов [7–11, 14, 29]; В.М. Вишневым, М.П. Фархадовым – в Институте проблем управления РАН [24–26, 148]; В.А. Ивницким – в Московском университете путей сообщения [90]; Г.Ш. Цициашвили, Н.И. Головкин – в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения РАН [32–34, 157]; М.А. Федоткиным, А.В. Зориным – в Нижегородском государственном университете [88, 89]; Д. Ефросининым – в

университете Johannes Kepler University Linz (Austria) [175]; М. Пагано – в Пизанском университете (Pisa, Italy) [173]; M.F. Neuts, D.M. Lucantoni, A.D. Banik, U.C. Gupta – в США [164, 193, 198, 199] и другими учеными.

Вопрос оценки состояний и параметров потоков событий, а также оценки длительности мертвого времени исследовался А. М. Горцевым и его учениками. К многочисленным работам в данном направлении можно отнести [18, 19, 53, 54, 57, 58] – где получены результаты для синхронного дважды стохастического потока, в [20, 21, 41–44, 48, 75–77] – для асинхронного дважды стохастического потока, в [41–44] – для асинхронного дважды стохастического потока с произвольным числом состояний, в [55, 56, 127, 128] – для полусинхронного дважды стохастического потока, в [62] – для MAP-потока, в [63] – для MC-потока и др. При этом в [18, 19, 41, 42, 44, 48, 53, 54, 55] входящий поток событий рассматривался в условиях отсутствия мертвого времени; в [20, 21, 43, 56, 57, 58, 62, 127, 128] – в условиях непродлевающегося мертвого времени, в [21, 59, 129] – в условиях продлевающегося мертвого времени.

Можно сделать вывод, что для решения задач оценки состояний и параметров дважды стохастических потоков событий, в том числе длительности мертвого времени, проведено достаточно большое количество исследований. Но исследуемые дважды стохастические потоки событий, описывающие реальные входящие потоки, не ограничиваются построенными ранее моделями. Одной из новых моделей, описывающей функционирование реальных информационных потоков в телекоммуникационных системах, является модулированный синхронный поток, впервые исследуемый в настоящей диссертационной работе.

В настоящей диссертационной работе решается задача оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока в условиях *непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности* (далее мертвого времени) и его отсутствия, а также решается задача оценки длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке, функционирующем в условиях мертвого времени. Исследование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий является

актуальным, результаты исследования могут быть применены при решении важных прикладных задач, в частности, при моделировании информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи в условиях полной либо частичной наблюдаемости.

Цель и задачи диссертационной работы. Целью данной работы является аналитическое и численное исследование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени и его отсутствия.

В ходе исследования были поставлены и решены следующие задачи:

1) построение математических моделей и аналитическое исследование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени и его отсутствия;

2) построение оптимальных оценок состояний при полной или частичной наблюдаемости потока и длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке событий;

3) разработка алгоритмов оптимального оценивания состояний при полной или частичной наблюдаемости потока и оценивания длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке событий;

4) программная реализация разработанных алгоритмов оценивания при помощи имитационного моделирования исследуемого потока событий в условиях мертвого времени и его отсутствия;

5) проведение статистических экспериментов на базе имитационной модели модулированного синхронного потока событий с целью установления качества получаемых оценок состояний и длительности мертвого времени.

Научная новизна работы. Научная новизна работы состоит в решении задач оптимального оценивания состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени, а также задач оптимального оценивания состояний потока и оценивания длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в

условиях мертвого времени, по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость состоит в аналитическом решении задачи оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени (в условиях полной наблюдаемости), а также в аналитическом решении задач оптимальной оценки состояний потока и оценки длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях мертвого времени.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования разработанных алгоритмов оптимальной оценки состояний потока и оценки длительности мертвого времени в задачах проектирования СМО, например, информационно-вычислительных сетей, сетей связи, дисциплины обслуживания которых зависят от параметров и текущих состояний входящих потоков, а также для обработки результатов физических экспериментов, усложненных наличием мертвого времени обслуживающих устройств.

Работа выполнена в рамках следующих научных проектов:

– госзадание Минобрнауки России на проведение научных исследований в Национальном исследовательском Томском государственном университете на 2012–2013 гг.: «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации» № 8.4055.2011, номер госрегистрации 01201261193;

– научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности на 2014–2015 гг.: «Исследование и разработка вероятностных, статистических и логических методов и средств оценки качества компонентов телекоммуникационных систем» № 2.739.2014/К, номер госрегистрации 114071440030;

– научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (2016 г.).

Результаты работы используются в учебном процессе на факультете прикладной математики и кибернетики (ФПМК) Томского государственного университета при разработке курсов лекций образовательных дисциплин «Марковские системы массового обслуживания» и «Имитационное моделирование» для студентов бакалавриата 4-го курса ФПМК и дисциплины «Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков» для магистрантов 2-го курса ФПМК.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач применяются методы теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений, теории марковских процессов, математической статистики, линейной алгебры, численные методы. Проведение статистических экспериментов выполнено на основе имитационной модели модулированного синхронного потока как в условиях отсутствия мертвого времени, так и в условиях мертвого времени.

Положения, выносимые на защиту:

1) аналитическое решение задачи оптимального оценивания состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени (в условиях полной наблюдаемости) по наблюдениям за моментами наступления событий потока;

2) аналитическое решение задачи оптимального оценивания модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени, по наблюдениям за моментами наступления событий наблюдаемого потока;

3) аналитическое решение задачи оценивания длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке событий, функционирующем в

условиях мертвого времени, по наблюдениям за моментами наступления событий наблюдаемого потока;

4) алгоритм оптимального оценивания состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени;

5) алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени;

6) алгоритм оценивания длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке событий, функционирующем в условиях мертвого времени;

7) результаты статистического исследования качества полученных оценок состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени;

8) результаты статистического исследования качества полученных оценок состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени;

9) результаты статистического исследования качества полученных оценок длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена строгими математическими доказательствами с использованием аппарата теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории случайных процессов, теории дифференциальных уравнений, математической статистики, математического анализа и численными исследованиями. Также достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением используемого математического аппарата, корректностью методик исследования и проведенных расчетов, многочисленными статистическими экспериментами, проведенными на имитационной модели модулированного синхронного потока событий в условиях

мертвого времени и его отсутствия, а также согласованностью результатов диссертационной работы с результатами, полученными другими авторами.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1) Юбилейная 50-я международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс»: Математика, Новосибирск, 13 – 19 апреля 2012 г.;

2) IX Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Катунь, 5–8 июня 2012 г.;

3) 51-я международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс»: Математика, Новосибирск, 12 – 18 апреля 2013 г.;

4) I Всероссийская молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 17–18 мая 2013 г.;

5) 5-я Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы радиофизики», Томск, 1 – 6 октября 2013 г.;

6) II Всероссийская молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 16 – 17 мая 2014 г.;

7) X Российская конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Алтайский край, 9 – 11 июня 2014 г.;

8) XIII Международная научно-практическая конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ–2014), Анжеро–Судженск, 20 – 22 ноября 2014 г.;

9) Международная научная конференция, посвященная 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича

Медведева, «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения», Белоруссия, Минск, 23 – 26 февраля 2015 г.;

10) 2-ая международная летняя школа молодых ученых «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Анапа, 8 – 12 июня 2015 г.;

11) XIV Международная научно-практическая конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ–2015), Анжеро-Судженск, 18 – 22 ноября 2015 г.;

12) XV Международная научно-практическая конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ–2016), Катунь, 12 – 16 сентября 2016 г.

Публикации. Основные результаты данной диссертационной работы опубликованы в 20 научных работах, в числе которых 11 статей в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 3 статьи в зарубежных изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science), 9 публикаций вошли в сборники материалов международных и всероссийских научных конференций.

Публикации в журналах, включенных в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1) Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, **М. Н. Голофастова (Сиротина)** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2 (23). – С. 42–53.

2) Горцев А. М. Модулированный синхронный дважды стохастический поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. М. Горцев,

М. Н. Голофастова (Сиротина) // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56, № 9/2. – С. 223–225.

3) **Сиротина М. Н.** Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / М. Н. Сиротина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1(26). – С. 63–74.

4) Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между соседними событиями модулированного синхронного дважды стохастического потока в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. М. Горцев, **М. Н. Сиротина** // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 127–132.

5) **Сиротина М. Н.** Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке при непродлевающемся мертвом времени и условия рекуррентности потока / М. Н. Сиротина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2(31). – С. 53–67.

6) **Сиротина М. Н.** Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий / М. Н. Сиротина, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 1(34). – С. 50–64.

7) Горцев А. М. Вероятность ошибки при оценивании состояний модулированного синхронного потока физических событий / А. М. Горцев, **М. Н. Сиротина** // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 7. – С. 92–98.

8) **Сиротина М. Н.** Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий / М. Н. Сиротина // Вестник Томского государственного университета.

Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 3(36). – С. 66–80.

в том числе публикации в изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science:

9) Gortsev A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration / A. Gortsev, **M. Sirotina** // Communications in computer and information science. Information Technologies and Mathematical Modelling. – 2014. – V. 487. – P. 145–152.

10) Gortsev A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time / A. Gortsev, **M. Sirotina** // Communications in computer and information science. Information Technologies and Mathematical Modelling: Queueing Theory and Applications. – 2015. – V. 564. – P. 41–52.

11) Gortsev A. Maximum likelihood estimation of dead time period duration of modulated synchronous flow of events / A. Gortsev, **M. Sirotina** // Communications in computer and information science. Information Technologies and Mathematical Modelling: Queueing Theory and Applications. – 2016. – V. 638. – P. 104–119.

Публикации в других научных изданиях:

12) **Голофастова (Сиротина) М. Н.** Модулированный синхронный дважды стохастический поток событий / М. Н. Голофастова (Сиротина) // Материалы 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 13 – 19 апреля 2012 г. – Новосибирск, 2012. – С. 192.

13) **Голофастова (Сиротина) М. Н.** Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока событий / М. Н. Голофастова (Сиротина), Л. А. Нежелская // Материалы Девятой Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Катунь, 5 – 8 июня 2012 г. – Томск, 2012 – С. 83.

14) **Голофастова (Сиротина) М. Н.** Апостериорные вероятности модулированного синхронного дважды стохастического потока и результаты

статистического эксперимента / М. Н. Голофастова (Сиротина) // Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 12 – 18 апреля 2013 г. – Новосибирск, 2013. – С. 249.

15) **Сиротина М. Н.** Определение времени установления стационарного режима модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени / М. Н. Сиротина // Труды Томского государственного университета. Секция физико-математическая. – 2014. – Т. 295: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции, Томск, 16–17 мая 2014 г. – Издательский дом Томского государственного университета. – 2014. – С. 129–134.

16) Горцев А. М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке / А. М. Горцев, **М. Н. Сиротина** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы Десятой Российской конференции с международным участием, Алтайский край, 9 – 11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 89–90.

17) Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного синхронного потока событий / А. М. Горцев, **М. Н. Сиротина** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014): материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А.Ф. Терпугова. Ч. 2. Анжеро-Судженск, 20 – 22 ноября 2014 г. – Томск, 2014. – С. 147–153.

18) **Сиротина М. Н.** Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлеваемом мертвом времени / М. Н. Сиротина, А. М. Горцев // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева, Минск, 23 – 26 февраля 2015 г. – Минск, 2015. – С. 299–304.

19) Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного синхронного потока событий в условиях неполной наблюдаемости / А. М. Горцев, **М. Н. Сиротина** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): материалы XIV Международной научно-практической конференции имени А.Ф. Терпугова. Ч. 1. Анжеро-Судженск, 8 – 22 ноября 2015 г. – Томск, 2015. – С. 28–35.

20) Горцев А. М. МП-оценка длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке событий / А. М. Горцев, **М. Н. Сиротина** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016): материалы XV Международной научно-практической конференции имени А.Ф. Терпугова. Ч. 1. Катунь, 12 – 16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 50–56.

Личный вклад автора. Постановка изложенных в диссертационной работе задач сделана научным руководителем, д.т.н., профессором А.М. Горцевым. Доказательство и обоснование полученных в диссертации результатов, математические выкладки, численные расчеты выполнены лично автором. В совместных публикациях научному руководителю А.М. Горцеву принадлежат постановки задач и указания основных направлений исследований, а основные результаты, выкладки и численные расчеты выполнены автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников и литературы, пяти приложений. Общий объем работы составляет 188 страниц, включая приложения; иллюстративный материал представлен 19-ю рисунками (из них 4 в приложениях) и 20-ю таблицами; список использованных источников и литературы содержит 213 ссылок на библиографические источники.

В диссертации используется тройная нумерация разделов: первая цифра соответствует номеру раздела диссертации, вторая цифра соответствует номеру подраздела диссертации, третья цифра соответствует номеру подподраздела соответствующего подраздела диссертации. Формулы имеют тройную нумерацию: первая цифра – номер раздела диссертации, вторая цифра – номер подраздела диссертации, третья цифра – последовательный номер формулы в

рамках подраздела диссертации. Рисунки имеют сквозную нумерацию в рамках раздела диссертации: первая цифра соответствует номеру раздела, вторая – номеру рисунка. Таблицы имеют сквозную нумерацию в рамках раздела диссертации: первая цифра соответствует номеру раздела, вторая – номеру таблицы. Нумерация лемм, теорем, следствий тройная: первая цифра – номер раздела диссертации, вторая цифра – номер подраздела диссертации, третья цифра – последовательный номер леммы, теоремы, следствия, соответственно, в рамках подраздела диссертации.

Краткое содержание работы. Во введении представляется краткое описание работы, раскрывается актуальность представленной темы исследования, приводится обзор работ других авторов в рамках изучаемой проблемы, формируются цели и задачи исследования, представляется методология решения задач исследования, раскрывается теоретическая и практическая ценность результатов исследования, выносимых на защиту, а также обосновывается новизна темы исследования.

В разделе 1 диссертационной работы решается задача оптимальной оценки состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, интенсивность которого представляет собой скрытый кусочно-постоянный стационарный марковский случайный процесс с двумя состояниями.

Рассмотрены две модели функционирования потока: 1) в условиях отсутствия мертвого времени (условия полной наблюдаемости); 2) в условиях наличия мертвого времени (условия неполной (частичной) наблюдаемости).

Получен явный вид выражений для апостериорных вероятностей состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени и его отсутствия. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, согласно которому обеспечивается минимум полной (безусловной) вероятности принятия ошибочного решения. Приведен алгоритм оптимального оценивания состояний потока, функционирующего в условиях мертвого времени и его отсутствия. Получены формулы для нахождения условной вероятности ошибки принятия

решения о состоянии потока в общем случае. Для случая, когда модулированный синхронный поток является рекуррентным, найдены выражения для безусловных вероятностей ошибок принятия решения. Найден явный вид одномерной плотности вероятности длительности интервалов между моментами наступления соседних событий модулированного синхронного потока событий, а также явный вид совместной плотности вероятности рассматриваемого потока событий.

В разделе 2 диссертационной работы решается задача оценки длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления наблюдаемых событий модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени. Для решения задачи оценивания параметров потока каким-либо из статистических методов необходимо, в первую очередь, располагать информацией о вероятностных свойствах потока.

В разделе 2 диссертационной работы находятся: 1) явное выражение для плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления наблюдаемых событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени; 2) явное выражение для совместной плотности вероятности значений длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления наблюдаемых событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени; 3) условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Приводятся алгоритмы оценивания длительности мертвого времени, построенные методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

В разделе 3 диссертационной работы решается задача построения имитационной модели модулированного синхронного дважды стохастического потока событий на ЭВМ и проведения статистического эксперимента с использованием разработанной имитационной модели и алгоритмов оптимального оценивания состояний потока в условиях мертвого времени и в условиях его отсутствия, а также алгоритмов оценивания длительности мертвого

времени модифицированным методом моментов и методом максимального правдоподобия, полученных в разделе 2 данной работы.

Для изучения качества получаемых оценок состояний рассматриваемого потока в условиях мертвого времени и его отсутствия, а также оценок длительности мертвого времени проведен статистический эксперимент, поставленный на имитационной модели модулированного синхронного потока событий.

Численные результаты, полученные путем проведения статистического эксперимента, позволяет сравнить качество получаемых (по наблюдениям за моментами наступления событий потока) оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и модифицированным методом моментов (ММ-оценки). Описание работы имитационной модели, реализованной в виде блок-схемы, приведено в Приложении А и Приложении Б.

В заключении диссертации формулируются основные результаты, изложенные в пунктах научной новизны темы исследования и ее теоретической и практической значимости. Отмечается, что поставленные цели достигнуты и сформулированные задачи решены в ходе исследования.

В приложении А иллюстрируется блок-схема имитационной модели модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени, и описывается алгоритм программной реализации данной блок-схемы на ЭВМ.

В приложении Б иллюстрируется блок-схема имитационного моделирования модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени.

В приложении В иллюстрируется блок-схема расчета апостериорной вероятности состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий для случая отсутствия мертвого времени и описывается алгоритм программной реализации данной блок-схемы на ЭВМ.

В приложении Г иллюстрируется блок-схема расчета апостериорной вероятности состояний модулированного синхронного дважды стохастического

потока событий для случая функционирования потока в условиях мертвого времени и описывается алгоритм программной реализации данной блок-схемы на ЭВМ.

В приложении Д представлена копия акта о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ.

1 Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий

В разделе 1 диссертационной работы решается задача оптимальной оценки состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, интенсивность которого представляет собой скрытый кусочно-постоянный стационарный случайный процесс с двумя состояниями.

В работе рассмотрены две модели функционирования потока: 1) когда мертвое время регистрирующих приборов отсутствует (условия полной наблюдаемости); 2) когда мертвое время регистрирующих приборов присутствует (условия неполной (частичной) наблюдаемости). В разделе 1 модулированный синхронный поток событий рассмотрен в условиях мертвого времени и его отсутствия.

Получен явный вид выражений для апостериорных вероятностей состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени и его отсутствия. Полагается, что решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, согласно которому обеспечивается минимум полной (безусловной) вероятности принятия ошибочного решения. Приведен алгоритм оптимального оценивания состояний потока в условиях мертвого времени и его отсутствия. Получены формулы для условной вероятности ошибки принятия решения о состоянии потока в общем случае. Для случая, когда модулированный синхронный поток является рекуррентным, найдены выражения для безусловных вероятностей ошибок принятия решения.

Основные результаты раздела 1 опубликованы в работах [35–38, 68, 69, 72, 180].

1.1 Постановка задачи

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий (далее поток). Интенсивность исследуемого потока представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$, который имеет два состояния: λ_1, λ_2 , причем $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, имеет экспоненциальный закон распределения с параметром α_i : $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_i \tau}, i=1,2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, закончится, и с вероятностью, равной единице, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_i в состояние λ_j ($i, j=1,2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i , имеет место пуассоновский поток событий интенсивности $\lambda_i, i=1,2$. При этом в момент наступления события потока интенсивности λ_1 с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния λ_1 в состояние λ_2 ; наоборот, с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ может остаться в состоянии λ_1 ; в момент наступления события потока интенсивности λ_2 с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния λ_2 в состояние λ_1 ; наоборот, с вероятностью $1-q$ процесс $\lambda(t)$ может остаться в состоянии λ_2 . То есть смена состояний процесса $\lambda(t)$ может произойти в двух случаях: 1) в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности $\lambda_i, i=1,2$, (с вероятностью p для состояния потока λ_1 и с вероятностью q для состояния потока λ_2); 2) если переход процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_i в состояние λ_j ($i, j=1,2, i \neq j$) не осуществился в момент наступления события потока, то процесс $\lambda(t)$ выходит из своего текущего состояния $\lambda_i, i=1,2$, в момент окончания длительности случайного интервала пребывания процесса $\lambda(t)$ в этом

состоянии, распределенного по экспоненциальному закону с параметром $\alpha_i, i = 1, 2$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик [121] модулированного синхронного потока запишутся в виде

$$D_1 = \begin{vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{vmatrix}, \quad D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы D_1 соответствуют интенсивностям перехода процесса $\lambda(t)$ из одного состояния в другое в момент наступления события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 соответствуют интенсивностям перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 соответствуют интенсивностям выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятым с противоположным знаком. Если положить $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [18, 19, 53, 58].

Возможный вариант реализации модулированного синхронного потока событий приведен на рис.1.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий потока; p, q – вероятности перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 и λ_2 соответственно; $\alpha_i, i = 1, 2$, – параметр экспоненциального распределения длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i = 1, 2$.

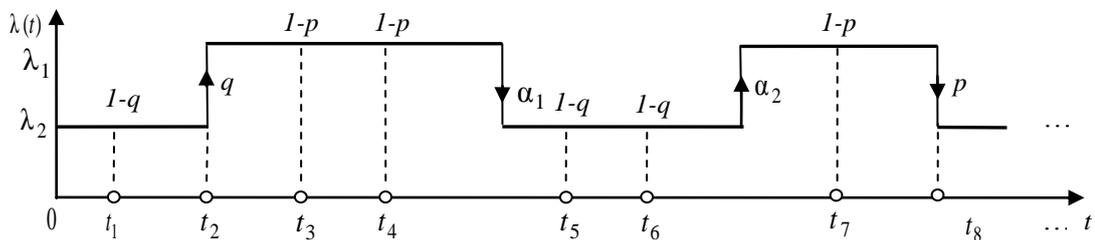


Рисунок 1.1 – Модулированный синхронный поток событий

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$), можно

пренебречь. Тогда без потери общности можно положить начальный момент времени наблюдения $t_0 = 0$.

Стоит отметить, что процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий на временной оси t_1, t_2, \dots . Основная задача – по этим наблюдениям оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений.

Для вынесения решения о том, в каком состоянии находится процесс $\lambda(t)$ в момент времени t , в работе применяется критерий максимума апостериорной вероятности, являющейся наиболее полной характеристикой состояний потока, которую можно получить, имея только моменты времени t_1, t_2, \dots наступления событий рассматриваемого потока. Используемый при оценивании критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности принятия ошибочного решения о состоянии потока. Таким образом, необходимо получить явный вид апостериорной вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t), i = 1, 2$, того, что в произвольный момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество наблюдаемых событий за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Тогда, согласно критерию максимума апостериорной вероятности, если $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t), i, j = 1, 2, i \neq j$, то оценка состояния процесса $\lambda(t)$ есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, в противном случае оценка состояния процесса $\lambda(t)$ есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

В следующем подразделе получим плотность вероятности $p(\tau)$ длительности интервала между моментами наступления соседних событий модулированного синхронного потока.

1.2 Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями потока

Свойство, наиболее полно характеризующее процесс $\lambda(t)$, описано в следующей лемме.

Лемма 1.2.1. *Случайный кусочно-постоянный процесс $\lambda(t)$ является марковским процессом.*

Доказательство. Покажем, что процесс $\lambda(t)$ обладает марковским свойством, то есть поведение процесса с момента времени t_0 не зависит от поведения процесса до момента времени t_0 (предыстории). Предположим, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t_0 находится в состоянии $\lambda_i, i=1,2$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, определяется двумя случайностями: 1) длительностями интервалов между моментами наступления событий пуассоновского потока интенсивности $\lambda_i, i=1,2$, каждый из которых распределен по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_i(\tau) = 1 - e^{-\lambda_i \tau}, i=1, 2$; тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_1 будет распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_1^{(1)}(\tau) = 1 - e^{-\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0$, в состоянии λ_2 - с функцией распределения $F_2^{(1)}(\tau) = 1 - e^{-\lambda_2 \tau}, \tau \geq 0$; 2) длительностью пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, для случая, когда смена состояния происходит в случайные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий пуассоновского потока (интервал модуляции); тогда длительность пребывания в том или ином состоянии распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения $F_i^{(2)}(\tau) = 1 - e^{-\alpha_i \tau}, i=1, 2$.

В итоге длительность пребывания в состоянии λ_1 будет распределена по экспоненциальному закону с функцией распределения

$F_1(\tau) = 1 - e^{-(\alpha_1 + p\lambda_1)\tau}$, $\tau \geq 0$, в состоянии λ_2 – с функцией распределения $F_2^{(1)}(\tau) = 1 - e^{-(\alpha_2 + q\lambda_2)\tau}$, $\tau \geq 0$.

Наличие свойства отсутствия последействия у экспоненциально распределенных случайных величин обуславливает отсутствие зависимости оставшегося времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, после момента времени t_0 от длительности пребывания процесса в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, до этого момента. Таким образом, поведение процесса $\lambda(t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_0 . Следовательно, $\lambda(t)$ – марковский процесс, а последовательность моментов $t_1, t_2 \dots t_k, \dots$ наступления событий потока образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, если эволюцию потока рассматривать с момента наступления события потока $t_k, k=1,2, \dots$. Лемма доказана.

Замечание. Так как $\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс, то $\lambda(t)$ – скрытый марковский кусочно-постоянный случайный процесс.

Лемма 1.2.2. Априорные стационарные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ имеют вид

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \pi_1 + \pi_2 = 1. \quad (1.2.1)$$

Доказательство. Поскольку процесс $\lambda(t)$ в начальный момент времени τ_0 функционирования потока событий может находиться в состоянии λ_1 либо λ_2 , то имеет место равенство $\pi_1(\tau_0) + \pi_2(\tau_0) = 1$.

Для получения явного вида апостериорных вероятностей $\pi_i, i=1,2$, воспользуемся Δt -методом, который заключается в описании всех возможных вариантов поведения процесса $\lambda(t)$ на временном полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$, где $\tau \geq \tau_0$, $\Delta\tau$ – достаточно малая положительная величина.

Обозначим $\pi_1(\tau | \tau_0)$ условную вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ окажется в состоянии λ_1 в момент времени τ при условии, что его

функционирование началось в момент времени τ_0 , а $\pi_2(\tau|\tau_0)$ – условную вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ окажется в состоянии λ_2 в момент времени τ при условии, что его функционирование началось в момент времени τ_0 .

Необходимо найти условную вероятность $\pi_1(\tau + \Delta\tau|\tau_0)$ того, что процесс $\lambda(t)$ окажется в состоянии λ_1 в момент времени $\tau + \Delta\tau$ при условии, что функционирование процесса $\lambda(t)$ началось в момент времени τ_0 . Для этого используется метод дифференциальных уравнений, который заключается в следующем: на временном полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ рассматриваются все возможные варианты поведения процесса $\lambda(t)$, вычисляются вероятности событий на этом интервале, если таковые произошли, и составляется система дифференциальных уравнений для вероятностей $\pi_i(\tau|\tau_0), i = 1, 2$.

Тогда искомая априорная стационарная вероятность $\pi_i, i = 1, 2$, того, что процесс $\lambda(t)$ будет находиться в состоянии $\lambda_i, i = 1, 2$, определится путем предельного перехода:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi_i(\tau|\tau_0) = \pi_i, i = 1, 2.$$

Итак, найдем дифференциальное уравнение относительно неизвестной $\pi_1(\tau|\tau_0)$. Для этого рассмотрим все возможные варианты поведения процесса $\lambda(t)$ на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$.

1) Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени τ находился в состоянии λ_1 , то в момент времени $\tau + \Delta\tau$ он будет находиться в этом же состоянии, если на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ не наступит ни одного события потока, и время пребывания процесса в этом состоянии не закончится (такая ситуация имеет вероятность $e^{-\lambda_1\Delta\tau} e^{-\alpha_1\Delta\tau}$), или время пребывания процесса в состоянии λ_1 не закончится, наступит событие потока интенсивности λ_1 , и с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ не сменит своего состояния (такая ситуация имеет вероятность $\lambda_1\Delta\tau e^{-\lambda_1\Delta\tau} (1-p)e^{-\alpha_1\Delta\tau}$).

Другие возможности имеют вероятность $o(\Delta\tau)$.

То есть вероятность этих ситуаций равна

$$\begin{aligned} \pi_1(\tau | \tau_0)(e^{-\lambda_1\Delta\tau} e^{-\alpha_1\Delta\tau} + \lambda_1\Delta\tau e^{-\lambda_1\Delta\tau} (1-p)e^{-\alpha_1\Delta\tau} + o(\Delta\tau)) = \\ = \pi_1(\tau | \tau_0)(1 - \alpha_1\Delta\tau - p\lambda_1\Delta\tau + o(\Delta\tau)). \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

2) Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени τ находился в состоянии λ_2 , то в момент времени $\tau + \Delta\tau$ он будет находиться в состоянии λ_1 , если на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ время пребывания процесса в состоянии λ_1 не закончится, наступит событие потока интенсивности λ_2 , и с вероятностью q процесс $\lambda(t)$ осуществит переход в состояние λ_1 (такая ситуация имеет вероятность $\lambda_2\Delta\tau e^{-\lambda_2\Delta\tau} q e^{-\alpha_2\Delta\tau}$), или время пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_2 закончится (такая ситуация имеет вероятность $1 - e^{-\alpha_2\Delta\tau}$).

Другие возможности имеют вероятность $o(\Delta\tau)$.

То есть вероятность этих ситуаций равна

$$\begin{aligned} \pi_2(\tau | \tau_0)(\lambda_2\Delta\tau e^{-\lambda_2\Delta\tau} q e^{-\alpha_2\Delta\tau} + 1 - e^{-\alpha_2\Delta\tau}) + o(\Delta\tau) = \\ = \pi_2(\tau | \tau_0)(q\lambda_2\Delta\tau + \alpha_2\Delta\tau + o(\Delta\tau)). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Суммируя полученные в (1.2.2) и (1.2.3) результаты, получим, что вероятность $\pi_1(\tau + \Delta\tau | \tau_0)$ вычисляется по формуле

$$\pi_1(\tau + \Delta\tau | \tau_0) = \pi_1(\tau | \tau_0)(1 - \alpha_1\Delta\tau - p\lambda_1\Delta\tau) + \pi_2(\tau | \tau_0)(q\lambda_2\Delta\tau + \alpha_2\Delta\tau) + o(\Delta\tau),$$

откуда, перенеся в левую часть $\pi_1(\tau | \tau_0)$, разделив обе части на $\Delta\tau$ и осуществив предельный переход при $\Delta\tau \rightarrow \infty$, получаем дифференциальное уравнение для нахождения искомой вероятности $\pi_1(\tau | \tau_0)$:

$$\pi_1'(\tau | \tau_0) = -(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(\tau | \tau_0) + (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(\tau | \tau_0). \quad (1.2.4)$$

Аналогичным образом выводится дифференциальное уравнение для вероятности $\pi_2(\tau | \tau_0)$:

$$\pi_2'(\tau | \tau_0) = (\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(\tau | \tau_0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(\tau | \tau_0). \quad (1.2.5)$$

Таким образом, для вероятностей $\pi_i(\tau | \tau_0)$, $i=1,2$, получена система дифференциальных уравнения (1.2.4) и (1.2.5) с начальными условиями

$\pi_1(\tau = \tau_0 | \tau_0) = \pi$ ($0 < \pi \leq 1$), $\pi_2(\tau = \tau_0 | \tau_0) = 1 - \pi$. Решая полученную систему методом Эйлера [110], находим явный вид вероятностей $\pi_i(\tau | \tau_0)$, $i = 1, 2$:

$$\pi_1(\tau | \tau_0) = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2} + \left(\pi - \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}\right) e^{-(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\tau - \tau_0)},$$

$$\pi_2(\tau | \tau_0) = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2} - \left(\pi - \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}\right) e^{-(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\tau - \tau_0)}.$$

Так как рассматривается стационарный режим функционирования потока, $\tau \rightarrow \infty$ ($\tau_0 \rightarrow -\infty$), то осуществив в полученных выражениях предельный переход при $\tau \rightarrow \infty$, получим явный вид стационарных априорных вероятностей π_i , $i = 1, 2$, (1.2.1). Лемма доказана.

Перейдем к определению явного вида плотности вероятности $p(\tau)$ значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока.

Пусть τ – значение случайной величины длительности интервала между моментами наступления двух соседних событий потока, $\tau \geq 0$. Тогда плотность вероятности $p(\tau)$ значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока запишется в виде

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad (1.2.6)$$

где $\pi_i(0)$ – условная стационарная апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии λ_i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1, 2$ ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$); $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ – условная плотность вероятности значений длительности интервала между двумя соседними событиями потока и вероятность того, что в момент времени τ процесс $\lambda(\tau) = \lambda_j$, при условии, что в момент времени $\tau = 0$ процесс $\lambda(0) = \lambda_i$ ($i, j = 1, 2$).

Найдем явный вид вероятностей $\pi_i(0), i=1,2$, из формулы (1.2.6).

Лемма 1.2.3. *Апостериорные вероятности $\pi_i(0), i=1,2$, состояний модулированного синхронного потока событий есть*

$$\pi_1(0) = \frac{q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + (1-p)\lambda_1\alpha_2}{(p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2}, \quad \pi_2(0) = \frac{p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) + (1-q)\lambda_2\alpha_1}{(p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2}. \quad (1.2.7)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение событие B , заключающееся в том, что на полуинтервале $(-\Delta\tau, 0]$ произошло событие потока. Тогда обозначим $(B, \lambda(0) = \lambda_1)$ – событие, заключающееся в том, что на полуинтервале $(-\Delta\tau, 0]$ произошло событие потока, и в момент времени $\tau=0$ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии λ_1 ($\lambda(0) = \lambda_1$); $(B, \lambda(0) = \lambda_1, \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1)$ – событие, заключающееся в том, что на полуинтервале $(-\Delta\tau, 0]$ произошло событие потока, и в момент времени $\tau=0$ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии λ_1 ($\lambda(0) = \lambda_1$) при условии, что в момент времени $\tau=-\Delta\tau$ процесс $\lambda(\tau)$ находился в состоянии λ_1 ($\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1$), то есть за время длительности $\Delta\tau$ процесс $\lambda(\tau)$ не перешел из состояния λ_1 в состояние λ_2 (остался в состоянии λ_1); $(B, \lambda(0) = \lambda_1, \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2)$ – событие, заключающееся в том, что на полуинтервале $(-\Delta\tau, 0]$ произошло событие потока, и в момент времени $\tau=0$ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии λ_1 ($\lambda(0) = \lambda_1$) при условии, что в момент времени $\tau=-\Delta\tau$ процесс $\lambda(\tau)$ находился в состоянии λ_2 ($\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2$), то есть за время длительности $\Delta\tau$ процесс $\lambda(\tau)$ перешел из состояния λ_2 в состояние λ_1 , $\Delta\tau$ – достаточно малая положительная величина. Тогда вероятность события $(B, \lambda(0) = \lambda_1)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} P(B, \lambda(0) = \lambda_1) &= P(B, \lambda(0) = \lambda_1, \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1) + P(B, \lambda(0) = \lambda_1, \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2) = \\ &= P(\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1)P(B, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1) + \\ &+ P(\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2)P(B, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2), \end{aligned}$$

где $P(\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1) = \pi_1, P(\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2) = \pi_2;$ $P(B, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1)$ – условная вероятность того, что за время $\Delta\tau$ наступило событие пуассоновского

потока интенсивности λ_1 , и процесс $\lambda(\tau)$ перешел из состояния λ_1 в состояние λ_1 при условии, что $\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1$:

$$\begin{aligned} P(B, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_1) &= (1-p)(\lambda_1 \Delta\tau e^{-\lambda_1 \Delta\tau}) e^{-\alpha_1 \Delta\tau} = \\ &= (1-p)[\lambda_1 \Delta\tau (1 - \lambda_1 \Delta\tau + o(\Delta\tau))] [1 - \alpha_1 \Delta\tau + o(\Delta\tau)] = (1-p)\lambda_1 \Delta\tau + o(\Delta\tau); \end{aligned}$$

$P(B, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2)$ – условная вероятность того, что за время $\Delta\tau$ наступило событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 , и процесс $\lambda(\tau)$ перешел из состояния λ_2 в состояние λ_1 при условии, что $\lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2$:

$$\begin{aligned} P(B, \lambda(0) = \lambda_1 | \lambda(-\Delta\tau) = \lambda_2) &= q(\lambda_2 \Delta\tau e^{-\lambda_2 \Delta\tau}) e^{-\alpha_2 \Delta\tau} = \\ &= q[\lambda_2 \Delta\tau (1 - \lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau))] [1 - \alpha_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)] = q\lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу для нахождения $P(B, \lambda(0) = \lambda_1)$, находим $P(B, \lambda(0) = \lambda_1) = \pi_1(1-p)\lambda_1 \Delta\tau + \pi_2 q\lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)$. Аналогичным образом можно получить выражение для $P(B, \lambda(0) = \lambda_2)$ – вероятности события, заключающегося в том, что на полуинтервале $(-\Delta\tau, 0]$ произошло событие потока, и в момент времени $\tau=0$ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии λ_2 ($\lambda(0) = \lambda_2$): $P(B, \lambda(0) = \lambda_2) = \pi_1 p\lambda_1 \Delta\tau + \pi_2(1-q)\lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau)$. Тогда получим вероятность события B :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B, \lambda(0) = \lambda_1) + P(B, \lambda(0) = \lambda_2) = \pi_1(1-p)\lambda_1 \Delta\tau + \\ &+ \pi_2 q\lambda_2 \Delta\tau + \pi_1 p\lambda_1 \Delta\tau + \pi_2(1-q)\lambda_2 \Delta\tau + o(\Delta\tau) = \Delta\tau[\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2] + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Используя формулу Байеса, получаем:

$$\begin{aligned} P(\lambda(0) = \lambda_1 | B) &= \frac{\Delta\tau[\pi_1(1-p)\lambda_1 + \pi_2 q\lambda_2] + o(\Delta\tau)}{\Delta\tau[\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2] + o(\Delta\tau)}, \\ P(\lambda(0) = \lambda_2 | B) &= \frac{\Delta\tau[\pi_1 p\lambda_1 + \pi_2(1-q)\lambda_2] + o(\Delta\tau)}{\Delta\tau[\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2] + o(\Delta\tau)}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение значения априорных вероятностей $\pi_i, i=1,2$, определенных в (1.2.1), после чего переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, приходим к (1.2.7). *Лемма доказана.*

Положив в (1.2.7) $\alpha_i = 0, i=1,2$, получаем выражения $\pi_i(0), i=1,2$, для обычного синхронного потока событий [53, 58].

Для нахождения неизвестных плотностей вероятности $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, из общей формулы (1.2.6) для плотности вероятности $p(\tau)$ введем в рассмотрение переходные вероятности $p_{ij}(\tau)$ того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока, и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_j$, при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, и значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$ ($i, j = 1, 2$).

Найдем введенные в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$.

Лемма 1.2.4. *Условные вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, определяются выражениями:*

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau) &= \frac{\lambda_2 + \alpha_2 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_1\tau} - \frac{\lambda_2 + \alpha_2 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_2\tau}, & p_{12}(\tau) &= \frac{\alpha_1}{z_2 - z_1} [e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}], \\ p_{21}(\tau) &= \frac{\alpha_2}{z_2 - z_1} [e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}], & p_{22}(\tau) &= \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_1\tau} - \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_2\tau}, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

$$\text{где } z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right], \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Доказательство. Найдем вероятность $p_{11}(\tau + \Delta\tau)$. Для этого рассмотрим все возможные варианты поведения процесса $\lambda(\tau)$ на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$:

1) пусть в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии λ_1 , и на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ не перейдет в состояние λ_2 при условии, что в момент времени $\tau = 0$ наступило событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 ($\lambda(\tau = 0) = \lambda(0) = \lambda_1$); вероятность этого события есть $p_{11}(\tau)e^{-\lambda_1\Delta\tau}e^{-\alpha_1\Delta\tau} = p_{11}(\tau)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau + o(\Delta\tau))$;

2) пусть в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии λ_2 , и на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет в состояние λ_1 при условии, что в момент времени $\tau = 0$ наступило событие пуассоновского потока интенсивности λ_1 ($\lambda(\tau = 0) = \lambda(0) = \lambda_1$); вероятность этого события есть $p_{12}(\tau)(1 - e^{-\alpha_2\Delta\tau}) = p_{12}(\tau)\alpha_2\Delta\tau + o(\Delta\tau)$.

Тогда $p_{11}(\tau + \Delta\tau) = p_{11}(\tau)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta\tau) + p_{12}(\tau)\alpha_2\Delta\tau + o(\Delta\tau)$.

Переносим в данном уравнении в левую часть $p_{11}(\tau)$, деля обе части на $\Delta\tau$ и устремляя $\Delta\tau \rightarrow 0$, получаем следующее дифференциальное уравнение для неизвестной $p_{11}(\tau)$: $p'_{11}(\tau) = -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(\tau) + \alpha_2 p_{12}(\tau)$.

Аналогично находим дифференциальные уравнения для остальных переходных вероятностей $p_{12}(\tau)$, $p_{21}(\tau)$, $p_{22}(\tau)$ и получаем следующую систему дифференциальных уравнений для $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} p'_{11}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(\tau) + \alpha_2 p_{12}(\tau), \\ p'_{12}(\tau) &= -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{12}(\tau) + \alpha_1 p_{11}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) &= -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{21}(\tau) + \alpha_2 p_{22}(\tau), \\ p'_{22}(\tau) &= -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(\tau) + \alpha_1 p_{21}(\tau), \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

граничные условия для которой запишутся в виде: $p_{11}(0) = 1$, $p_{12}(0) = 0$, $p_{22}(0) = 1$, $p_{21}(0) = 0$.

Решая систему (1.2.9), находим $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в виде (1.2.8). *Лемма доказана.*

Далее вернемся к нахождению условных плотностей вероятности $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, из формулы (1.2.6).

Лемма 1.2.5. *Условные плотности вероятности $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, определяются в виде*

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(\tau) &= p_{11}(\tau)\lambda_1(1-p) + p_{12}(\tau)\lambda_2 q, \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= p_{11}(\tau)\lambda_1 p + p_{12}(\tau)\lambda_2(1-q), \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= p_{22}(\tau)\lambda_2(1-q) + p_{21}(\tau)\lambda_1 p, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= p_{22}(\tau)\lambda_2 q + p_{21}(\tau)\lambda_1(1-p), \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

где вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, определены в (1.2.8).

Доказательство. Рассмотрим совместную вероятность $\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$ того, что без наступления событий потока на интервале $(0, \tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ на этом интервале перешел из состояния λ_1 в состояние λ_1 , и на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ состояние λ_1 процесса $\lambda(\tau)$ не закончилось, произошло событие пуассоновского интенсивности λ_1 , при этом процесс $\lambda(\tau)$ перешел в состояние

λ_1 (остался в состоянии λ_1). Совместная вероятность такой ситуации запишется, как

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) = p_{11}(\tau)e^{-\alpha_1\Delta\tau}(1-p)(1-e^{-\lambda_1\Delta\tau}) = p_{11}(\tau)(1-p)\lambda_1\Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Деля обе части полученного равенства на $\Delta\tau$ и переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, находим плотность вероятности $\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau)$ в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau) = p_{11}(\tau)(1-p)\lambda_1, \quad (1.2.11)$$

где вероятность $p_{11}(\tau)$, определена в (1.2.8).

Теперь рассмотрим совместную вероятность $\tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$ того, что без наступления событий потока на интервале $(0, \tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ на этом интервале перешел из состояния λ_1 в состояние λ_2 , и на полуинтервале $[\tau, \tau + \Delta\tau)$ состояние λ_2 процесса $\lambda(\tau)$ не закончилось, произошло событие пуассоновского потока интенсивности λ_2 , при этом процесс $\lambda(\tau)$ перешел из состояния λ_2 в состояние λ_1 . Совместная вероятность такой ситуации запишется, как

$$\tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) = p_{12}(\tau)e^{-\alpha_2\Delta\tau}q(1-e^{-\lambda_2\Delta\tau}) = p_{12}(\tau)q\lambda_2\Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Деля обе части полученного равенства на $\Delta\tau$ и переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, находим плотность вероятности $\tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau)$ в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau) = p_{12}(\tau)q\lambda_2, \quad (1.2.12)$$

где вероятность $p_{12}(\tau)$, определена в (1.2.8).

Тогда плотность вероятности $\tilde{p}_{11}(\tau)$ значений длительности интервала между двумя соседними событиями потока и вероятность того, что в момент времени τ процесс $\lambda(\tau) = \lambda_1$, при условии, что в момент времени $\tau = 0$ процесс $\lambda(0) = \lambda_1$ запишется, как $\tilde{p}_{11}(\tau) = \tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau) + \tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau)$. Суммируя выражения для плотностей $\tilde{p}_{11}^{(i)}(\tau)$, $i = 1, 2$, определенных в (1.2.11) и (1.2.12), находим выражение для $\tilde{p}_{11}(\tau)$ в виде

$$\tilde{p}_{11}(\tau) = p_{11}(\tau)\lambda_1(1-p) + p_{12}(\tau)\lambda_2q,$$

где вероятности $p_{11}(\tau)$, $p_{12}(\tau)$, определены в (1.2.8).

Аналогичным образом находятся выражения для остальных плотностей вероятности $\tilde{p}_{12}(\tau)$, $\tilde{p}_{21}(\tau)$, $\tilde{p}_{22}(\tau)$. Таким образом, приходим к формулам (1.2.10) для нахождения $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$. Лемма доказана.

Теорема 1.2.1. *Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке есть*

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (1.2.13)$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \pi_1(0)\lambda_1 - \pi_2(0)\lambda_2), \quad 1 - \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + \pi_1(0)\lambda_1 + \pi_2(0)\lambda_2),$$

где $z_{1,2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}$, $\pi_i(0), i = 1, 2$, определены в (1.2.7).

Доказательство. Подставляя (1.2.10) в общую формулу (1.2.6), затем (1.2.7) и (1.2.8) в (1.2.6), делая при этом обозначение

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \pi_1(0)\lambda_1 - \pi_2(0)\lambda_2),$$

находим плотность вероятностей $p(\tau)$ в виде

(1.2.13). Теорема доказана.

Положив в (1.2.13) $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, получаем выражение плотности $p(\tau)$ для обычного синхронного потока событий [53, 58].

1.3 Совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов между соседними событиями потока

Перейдем к определению явного вида совместной плотности вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ значений длительностей смежных интервалов между моментами наступления соседних событий потока.

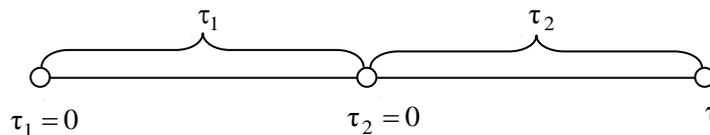


Рисунок 1.2 – Смежные интервалы между моментами наступления соседних событий потока

Пусть τ_1, τ_2 – значения случайной величины длительности смежных интервалов между моментами наступления соседних событий потока, как показано на рис. 1.2, $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$. Тогда совместная плотность $p(\tau_1, \tau_2)$ запишется в виде

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2), \quad (1.3.1)$$

где $\pi_i(0)$ – условная стационарная апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии λ_i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1, 2$ ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$), определены в (1.2.7); $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$ – условная плотность вероятности значений длительности интервала между двумя соседними событиями потока и вероятность того, что в момент времени τ_1 процесс $\lambda(\tau_1) = \lambda_j$, при условии, что в момент времени $\tau_1 = 0$ процесс $\lambda(0) = \lambda_i$ ($i, j = 1, 2$), определена в (1.2.10) для $\tau = \tau_1$; $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$ – условная плотность вероятности значений длительности интервала между двумя соседними событиями потока и вероятность того, что в момент времени τ_2 процесс $\lambda(\tau_2) = \lambda_k$, при условии, что в момент времени $\tau_2 = 0$ процесс $\lambda(0) = \lambda_j$ ($j, k = 1, 2$), определена в (1.2.10) для $\tau = \tau_2$.

При этом согласно формуле (1.2.6) плотность вероятности $p(\tau)$ значений длительности интервала между соседними событиями потока для значений $\tau = \tau_1, \tau = \tau_2$ представима в виде

$$p(\tau_k) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_k), \quad k = 1, 2, \quad (1.3.2)$$

где $\pi_i(0), i = 1, 2$, определены в (1.2.7); $\tilde{p}_{ij}(\tau_k)$ определены в (1.2.10) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Тогда разность $p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2)$ с учетом формул (1.3.1), (1.3.2) выпишется в виде

$$\begin{aligned}
& p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2) = \\
& = \pi_1(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{1j}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2) + \pi_2(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{2j}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2) - \\
& - (\pi_1(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{1j}(\tau_1) + \pi_2(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{2j}(\tau_1)) (\pi_1(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{1j}(\tau_2) + \pi_2(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{2j}(\tau_2)),
\end{aligned}$$

где $\pi_i(0), i = 1, 2$, определены в (1.2.7); $\tilde{p}_{ij}(\tau_k)$ определены в (1.2.10) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Проделав достаточно трудоемкие преобразования, разность $p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2)$ запишется в виде

$$\begin{aligned}
p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2) &= \sum_{k=1}^2 (\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)) \times \\
&\times \left[\pi_1(0)\pi_2(0)(\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)) - \pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) \right], \quad (1.3.3)
\end{aligned}$$

где $\pi_i(0), i = 1, 2$, определены в (1.2.7); $\tilde{p}_{ij}(\tau_k)$ определены в (1.2.10) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Теорема 1.3.1. *Модулированный синхронный поток событий в общем случае является коррелированным потоком, и совместная плотность вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ значений длительности смежных интервалов между соседними событиями в потоке есть*

$$\begin{aligned}
p(\tau_1, \tau_2) &= p(\tau_1)p(\tau_2) + \\
&+ \gamma(1-\gamma) \frac{\lambda_1\lambda_2(1-p-q)}{z_1z_2} (z_1e^{-z_1\tau_1} - z_2e^{-z_2\tau_1})(z_1e^{-z_1\tau_2} - z_2e^{-z_2\tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \\
\gamma(1-\gamma) &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\pi_1(0)(\alpha_1 + p\lambda_1) - \pi_2(0)(\alpha_2 + q\lambda_2))}{(p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2}, \quad (1.3.4)
\end{aligned}$$

где $z_1, z_2, \gamma, 1-\gamma$ определены в (1.2.13), $\pi_i(0), i = 1, 2$, определены в (1.2.7).

Доказательство. Первый множитель в (1.3.3) выпишется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^2 (\tilde{p}_{1k}(\tau_2) - \tilde{p}_{2k}(\tau_2)) = (\lambda_2 - \lambda_1)(z_1e^{-z_1\tau_2} - z_2e^{-z_2\tau_2}) / (z_2 - z_1), \quad (1.3.5)$$

где z_1, z_2 определены в (1.2.13).

Второй множитель в (1.3.3) согласно формулам (1.2.10) для условных плотностей вероятности $\tilde{p}_{ij}(\tau_k)$, $k = 1, 2$, примет вид

$$\begin{aligned} & \pi_1(0)\pi_2(0)(\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)) - \pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) = \\ & = -\lambda_1(p - \pi_2(0))(\pi_1(0)p_{11}(\tau_1) + \pi_2(0)p_{21}(\tau_1)) + \\ & + \lambda_2(q - \pi_1(0))(\pi_1(0)p_{12}(\tau_1) + \pi_2(0)p_{22}(\tau_1)), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

где $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, определены в (1.2.7); $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, определены в (1.2.8).

Подставляя значения $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, из формул (1.2.8) в формулу (1.3.6), получим

$$\begin{aligned} & \pi_1(0)\pi_2(0)(\tilde{p}_{11}(\tau_1) - \tilde{p}_{22}(\tau_1)) - \pi_1^2(0)\tilde{p}_{12}(\tau_1) + \pi_2^2(0)\tilde{p}_{21}(\tau_1) = \\ & = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) [\lambda_1(p - \pi_2(0))\pi_1(0) - \lambda_2(q - \pi_1(0))\pi_2(0)], \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

где $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, определены в (1.2.7).

Подставляя (1.3.5) и (1.3.7) в (1.3.3) и проделывая при этом достаточно трудоемкие преобразования, находим совместную плотность вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ в виде (1.3.4). *Теорема доказана.*

1.4 Условия рекуррентности модулированного синхронного потока

Рассмотрим частные случаи, когда модулированный синхронный поток событий становится рекуррентным потоком.

1) Из (1.3.4) следует, если $p + q = 1$, то совместная плотность вероятности приобретает вид $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. Подставляя $p + q = 1$ в (1.2.13), находим плотность

$$p(\tau_k) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau_k \geq 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 + p(\lambda_1 - \lambda_2)),$$

$$1 - \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + \lambda_1 - p(\lambda_1 - \lambda_2)),$$

где z_1, z_2 определены в (1.2.13).

2) Из (1.3.4) следует, если $(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(0) = (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0)$, то совместная плотность вероятности приобретает вид $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. Подставляя $(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(0) = (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0)$ в (1.2.13), находим плотность

$$p(\tau_k) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \tau_k \geq 0, k = 1, 2,$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \pi_1(0)(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_2 + q\lambda_2})),$$

$$1-\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + \pi_1(0)(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_2 + q\lambda_2})),$$

где z_1, z_2 определены в (1.2.13), $\pi_1(0)$ определена в (1.2.7).

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ порождает вложенную цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеперечисленных условий факторизации или их комбинации, докажем, используя метод математической индукции, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$.

Теорема 1.4.1. *При выполнении одного (либо обоих) условий факторизации совместная плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ факторизуется для любого k : $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p(\tau_1)p(\tau_2)\dots p(\tau_k)$.*

Доказательство. Пусть $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ – совместная плотность вероятностей значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, где $\tau_k = t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \dots$. Для $k=2$ имеет место $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. Сделаем предположение математической индукции: $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p(\tau_1)p(\tau_2)\dots p(\tau_k)$. Поскольку моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образуют вложенную марковскую цепь, то модулированный синхронный поток обладает марковским свойством. Тогда

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) \times p(\tau_k | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) =$$

$$= p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) p(\tau_k | \tau_{k-1}),$$

где $p(\tau_k | \tau_{k-1}) = p(\tau_k, \tau_{k-1}) / p(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов $(t_{k-1}, t_k), (t_k, t_{k+1}), k=1, 2, \dots$, местоположение которых на временной оси произвольно, справедливо $p(\tau_{k-1}, \tau_k) = p(\tau_{k-1})p(\tau_k)$, то получаем $p(\tau_k | \tau_{k-1}) =$

$= p(\tau_k)$, что доказывает факторизацию совместной плотности вероятностей $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$. Теорема доказана.

Таким образом, модулированный синхронный поток событий становится рекуррентным потоком, если выполняется одно (либо оба) из условий рекуррентности

$$p + q = 1; (\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(0) = (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0). \quad (1.4.1)$$

1.5 Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока

Взяв за основу известную методику [151], получим уравнения для апостериорных вероятностей: сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени Δt , а затем осуществим предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$. Пусть время меняется дискретно с шагом $\Delta t : t = n\Delta t, n = 0, 1, \dots$. Введем двумерный процесс $(\lambda^{(n)}, r_n)$, где $\lambda^{(n)} = \lambda(n\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $n\Delta t$ ($\lambda^{(n)} = \lambda_i, i = 1, 2$); $r_n = r_n(\Delta t) = r(n\Delta t) - r((n-1)\Delta t)$ – число событий, наблюдаемых на временном интервале $((n-1)\Delta t; n\Delta t), r_n = 0, 1$, длительности Δt . Обозначим $\lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ – последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(n\Delta t)$ в моменты времени $n\Delta t (n = \overline{0, m})$; $\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i, i = 1, 2$. Обозначим $r_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность числа событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((n-1)\Delta t; n\Delta t)$ длительности $\Delta t, n = \overline{0, m}$ (значение r_0 можно задавать произвольно, так как промежуток $(-\Delta t, 0)$ находится за пределами интервала наблюдения $(0, m\Delta t)$ и положить его, например, равным 0).

1.5.1 Рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей

Обозначим $w(\lambda^{(m)}, r_m)$ совместную вероятность значений $\lambda^{(m)}, r_m$, через $w(\lambda^{(m)} | r_m)$ – условную вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация r_m ; через $w(\lambda^{(m)} | r_m)$ – условную вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация r_m ; через $w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1})$ – условную вероятность значения $\lambda^{(m+1)}$ при условии, что наблюдалась реализация r_{m+1} . В сделанных предположениях, а также и в силу конструкции процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$, он является марковским. Действительно, $\lambda^{(n)}$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $n\Delta t$ ($\lambda^{(n)} = \lambda_i, i = 1, 2$) не зависит от компоненты r_n – числа событий, произошедших в прошлом, на временном интервале $((n-1)\Delta t; n\Delta t)$. При этом значение числа событий r_n , произошедших на временном интервале $((n-1)\Delta t; n\Delta t)$ не зависит от компоненты $\lambda^{(n)}$ – будущего значения процесса $\lambda(t)$ в момент времени $n\Delta t$ ($\lambda^{(n)} = \lambda_i, i = 1, 2$). Дальнейшее поведение процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ не зависит от предыстории (от того, что было до момента времени $n\Delta t$), так как длительность пребывания процесса в каждом состоянии распределена по экспоненциальному закону, а поток событий, функционирующий в каждом состоянии является простейшим с интенсивностями $\lambda_i, i = 1, 2$. Для марковского случайного процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ в [52] получена рекуррентная формула, связывающая апостериорные вероятности $w(\lambda^{(m)} | r_m)$ и $w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1})$:

$$w(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | r_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | r_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}, \quad (1.5.1)$$

где $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(n)}, r_n)$ за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$.

Лемма 1.5.1. *Переходная вероятность $p(\lambda^{(n)}, r_n | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1})$ может быть представлена в виде*

$$p(\lambda^{(n)}, r_n | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1}) = p(\lambda^{(n)} | \lambda^{(n-1)})p(r_n | \lambda^{(n-1)}, \lambda^{(n)}). \quad (1.5.2)$$

Доказательство. Вероятность $p(\lambda^{(n)}, r_n | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1})$ выпишется в виде

$$p(\lambda^{(n)}, r_n | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1}) = p(\lambda^{(n)} | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1})p(r_n | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1}, \lambda^{(n)}). \quad (1.5.3)$$

Преобразуем полученное равенство (1.5.3). Первый сомножитель (1.5.3) можно записать, как $p(\lambda^{(n)} | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1}) = p(\lambda^{(n)} | \lambda^{(n-1)})$, так как число наблюдаемых на полуинтервале $[(n-2)\Delta t); (n-1)\Delta t)$ событий $r_{n-1} = r((n-1)\Delta t)$ не влияет на значение процесса $\lambda^{(n)} = \lambda(n\Delta t)$, а значение процесса $\lambda^{(n-1)} = \lambda((n-1)\Delta t)$ в момент времени $(n-1)\Delta t$ не зависит от предыстории в силу марковости процесса $\lambda(t)$. Второй сомножитель в (1.5.3) преобразуется к виду $p(r_n | \lambda^{(n-1)}, r_{n-1}, \lambda^{(n)}) = p(r_n | \lambda^{(n-1)}, \lambda^{(n)})$, так как число наблюдаемых на полуинтервале $[(n-2)\Delta t); (n-1)\Delta t)$ событий $r_{n-1} = r((n-1)\Delta t)$ не влияет на число наблюдаемых на полуинтервале $[(n-1)\Delta t); n\Delta t)$ событий $r_n = r(n\Delta t)$, поскольку потоки событий в каждом состоянии $\lambda_i, i=1,2$, процесса $\lambda(t)$ – пуассоновские (обладающие свойством отсутствия последействия). Таким образом, получаем (1.5.2). *Лемма доказана.*

Теорема 1.5.1. *Для модулированного синхронного потока событий рекуррентная формула (1.5.1) преобразуется к виду*

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (1.5.4)$$

Доказательство. Так как в (1.5.1) рассматриваются временные интервалы $(0, t)$ и $(t, t + \Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, то $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m(t)) = w(\lambda^{(m)} | t)$, $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_m(t + \Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$. Тогда (1.5.1), с учетом (1.5.2) для $n=m+1$, запишется в виде (1.5.4). *Теорема доказана.*

1.5.2 Явный вид апостериорных вероятностей состояний

Сначала рассмотрим случай, когда на интервале $(t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, события потока отсутствуют, то есть рассмотрим поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на интервале между моментами наступления соседних наблюдаемых событий потока $t_k, t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$

Лемма 1.5.2. *Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ между моментами наступления соседних событий потока $t_k, t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$, в зависимости от t определяется выражением*

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_k) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_k) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}{w(\lambda_1 | t_k) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_k) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}, \quad (1.5.5)$$

$$w_1 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right) / 2(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$w_2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right) / 2(\lambda_1 - \lambda_2),$$

где $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $0 < w_1 < 1, w_2 > 1$, $t_k \leq t < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$; $w(\lambda_1 | t_k)$ – апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t_k находится в состоянии λ_1 ($\lambda(t = t_k) = \lambda_1$).

Доказательство. Для определенности положим в (1.5.4) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

В силу определения потока величина r_{m+1} в (1.5.1) на интервале $(t, t + \Delta t)$ может принимать два значения: $r_{m+1} = 0, r_{m+1} = 1$. Вероятность того, что $r_{m+1} \geq 2$ (наступления одновременно двух и более событий на интервале достаточно малой длительности Δt) есть $o(\Delta t)$. Здесь рассматривается поведение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ между соседними событиями потока, то есть $t_k \leq t < t_{k+1}, t_k \leq t + \Delta t < t_{k+1}$.

Найдем вероятности $p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})$, $p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$ из (1.5.4).

Для этого сначала рассмотрим вероятности $p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})$. В силу определения модулированного синхронного потока событий переход процесса

$\lambda(t)$ из состояния λ_1 в состояние λ_2 на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ осуществляется с вероятностью $p(\lambda_2 | \lambda_1) = \alpha_1 \Delta t + p\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$, при этом переход процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_1 в состояние λ_1 на указанном полуинтервале осуществляется с вероятностью $p(\lambda_1 | \lambda_1) = 1 - p(\lambda_2 | \lambda_1) = 1 - (\alpha_1 + p\lambda_1) \Delta t + o(\Delta t)$. Аналогично переход процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_2 в состояние λ_1 на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ осуществляется с вероятностью $p(\lambda_1 | \lambda_2) = \alpha_2 \Delta t + q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$, вероятность же перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_2 в состояние λ_2 на указанном полуинтервале определится формулой $p(\lambda_2 | \lambda_2) = 1 - p(\lambda_1 | \lambda_2) = 1 - (\alpha_2 + q\lambda_2) \Delta t + o(\Delta t)$.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 | \lambda_1) &= 1 - (\alpha_1 + p\lambda_1) \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda_1 | \lambda_2) &= \alpha_2 \Delta t + q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda_2 | \lambda_1) &= \alpha_1 \Delta t + p\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda_2 | \lambda_2) &= 1 - (\alpha_2 + q\lambda_2) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Перейдем к нахождению вероятностей $p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$ для случая, когда события потока отсутствуют, то есть $r_{m+1} = 0$. Введем A_1 – событие, заключающееся в том, что состояние процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ не закончилось, \bar{A}_1 – событие, заключающееся в том, что состояние процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ закончилось. Для нахождения вероятностей $p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$ воспользуемся формулой

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = \frac{p(\lambda^{(m+1)} | r_{m+1} = 0, \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)})}{p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})}. \quad (1.5.7)$$

Рассмотрим подробно нахождение выражения для вероятности $p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)$.

Условная вероятность в знаменателе дроби (1.5.7) определена в (1.5.6). Выведем вероятности в числителе дроби (1.5.7).

С учетом введенных событий A_1 и \bar{A}_1 , рассмотрим $P(A_1, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = P(A_1, 0, \lambda_1 | \lambda_1)$ – условная вероятность того, что состояние процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ не закончилось, не наступило ни одного события потока на этом полуинтервале, в момент времени $(m+1)\Delta t$ процесс остался в состоянии λ_1 при условии, что в момент времени $m\Delta t$ он находился в состоянии λ_1 ; $P(\bar{A}_1, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = P(\bar{A}_1, 0, \lambda_1, \lambda_1)$ – условная вероятность того, что состояние процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ закончилось, не наступило ни одного события потока на этом интервале, в момент времени $(m+1)\Delta t$ процесс остался в состоянии λ_1 при условии, что в момент времени $m\Delta t$ он находился в состоянии λ_1 . Согласно формулам для условной вероятности данные вероятности можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(A_1, 0, \lambda_1 | \lambda_1) &= P(0 | \lambda_1)P(A_1, \lambda_1 | \lambda_1, 0) = P(A_1 | \lambda_1, 0)P(\lambda_1 | \lambda_1, 0, A_1)P(0 | \lambda_1), \\ P(\bar{A}_1, 0, \lambda_1 | \lambda_1) &= P(0 | \lambda_1)P(\bar{A}_1, \lambda_1 | \lambda_1, 0) = P(\bar{A}_1 | \lambda_1, 0)P(\lambda_1 | \lambda_1, 0, \bar{A}_1)P(0 | \lambda_1), \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

причем $P(A_1, 0, \lambda_1 | \lambda_1) + P(\bar{A}_1, 0, \lambda_1 | \lambda_1) = P(\lambda_1 | \lambda_1, 0)P(0 | \lambda_1) = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$.

Формулу (1.5.7) для $r_{m+1} = 0$, $\lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1$ можно переписать в виде

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = p(0 | \lambda_1, \lambda_1) = \frac{p(\lambda_1 | 0, \lambda_1)p(0 | \lambda_1)}{p(\lambda_1 | \lambda_1)}, \quad (1.5.9)$$

где числитель (1.5.9) определен в (1.5.8), знаменатель (1.5.9) определен в (1.5.6).

Подставляя (1.5.8) и (1.5.6) в (1.5.9), получаем следующее выражение для определения $p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)$:

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = 1 - (1 - p)\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t).$$

Аналогичным образом можно найти выражения для остальных вероятностей, заданных формулой (1.5.7): $p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2)$,

$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1), \quad p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2).$ Таким образом, получаем следующие формулы:

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = p(0 | \lambda_1, \lambda_1) = 1 - (1 - p)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t), \quad (1.5.10)$$

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = p(0 | \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\alpha_1}{p\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{p\alpha_1\lambda_1}{(p\lambda_1 + \alpha_1)^2}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = p(0 | \lambda_2, \lambda_1) = \frac{\alpha_2}{q\lambda_2 + \alpha_2} - \frac{q\alpha_2\lambda_2}{(q\lambda_2 + \alpha_2)^2}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = p(0 | \lambda_2, \lambda_2) = 1 - (1 - q)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t).$$

Тогда для случая, когда $r_{m+1} = 0$, в соответствии с полученными формулами для переходных вероятностей (1.5.6), (1.5.10) на полуинтервале $[t, t + \Delta t) = [m\Delta t, (m + 1)\Delta t)$, произведения переходных вероятностей $p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$ в (1.5.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1)p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= (1 - p)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2)p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \alpha_2\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1)p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= \alpha_1\Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2)p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) &= (1 - q)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Пусть A_0 – числитель в (1.5.4), B_0 – знаменатель в (1.5.4). Подставляя полученные для произведения переходных вероятностей формулы (1.5.11) в выражения для A_0 и B_0 из (1.5.4), получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= w(\lambda_1 | t)p(\lambda_1 | \lambda_1)p(r_{m+1} = 0 | \lambda_1, \lambda_1) + w(\lambda_2 | t)p(\lambda_1 | \lambda_2)p(r_{m+1} = 0 | \lambda_2, \lambda_1) = \\ &= (1 - \alpha_1\Delta t)(1 - \lambda_1\Delta t)w(\lambda_1 | t) + \alpha_2\Delta t(1 - \lambda_2\Delta t)w(\lambda_2 | t) + o(\Delta t) = \\ &= (1 - \alpha_1\Delta t - \lambda_1\Delta t)w(\lambda_1 | t) + \alpha_2\Delta t w(\lambda_2 | t) + o(\Delta t), \\ B_0 &= w(\lambda_1 | t)p(\lambda_1 | \lambda_1)p(r_{m+1} = 0 | \lambda_1) + w(\lambda_2 | t)p(\lambda_1 | \lambda_2)p(r_{m+1} = 0 | \lambda_2) + \\ &+ w(\lambda_1 | t)p(\lambda_2 | \lambda_1)p(r_{m+1} = 0 | \lambda_1) + w(\lambda_2 | t)p(\lambda_2 | \lambda_2)p(r_{m+1} = 0 | \lambda_2) = \\ &= (1 - \alpha_1\Delta t)(1 - \lambda_1\Delta t)w(\lambda_1 | t) + \alpha_2\Delta t(1 - \lambda_2\Delta t)w(\lambda_2 | t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_1 \Delta \tau (1 - \lambda_1 \Delta t) w(\lambda_1 | t) + (1 - \alpha_2 \Delta \tau) (1 - \lambda_2 \Delta t) w(\lambda_2 | t) + o(\Delta t) = \\
& = (1 - \lambda_1 \Delta t) w(\lambda_1 | t) + (1 - \lambda_2 \Delta t) w(\lambda_2 | t) + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Подставив (1.5.12) в (1.5.4), учитывая при этом, что $B_0^{-1} = 1 + \Delta t (\lambda_1 w(\lambda_1 | t) + \lambda_2 w(\lambda_2 | t)) + o(\Delta t)$, получаем (с точностью до $o(\Delta t)$)

$$\begin{aligned}
w(\lambda_1 | t + \Delta t) &= [(1 - \alpha_1 \Delta t - \lambda_1 \Delta t) w(\lambda_1 | t) + \alpha_2 \Delta t w(\lambda_2 | t)] \times \\
&\times [1 + \Delta t (\lambda_1 w(\lambda_1 | t) + \lambda_2 w(\lambda_2 | t))] + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}
w(\lambda_1 | t + \Delta t) - w(\lambda_1 | t) &= -\Delta t (\alpha_1 + \lambda_1) w(\lambda_1 | t) + \Delta t \alpha_2 w(\lambda_2 | t) + \\
&+ \Delta t w(\lambda_1 | t) (\lambda_1 w(\lambda_1 | t) + \lambda_2 w(\lambda_2 | t)) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Разделив обе части полученного равенства на Δt , учитывая при этом условие нормировки $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$, после чего переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, находим дифференциальное уравнение относительно искомой апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$:

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) w(\lambda_1 | t) + (\lambda_1 - \lambda_2) w^2(\lambda_1 | t). \tag{1.5.13}$$

Полученное дифференциальное уравнение (1.5.13) определяет поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на интервале (t_k, t_{k+1}) , то есть между моментами наступления соседних наблюдаемых событий потока.

Поскольку дифференциальное уравнение (1.5.13) выписано для случая отсутствия событий потока на интервале $(t, t + \Delta t)$, то начальное условие для данного уравнения определяется моментом наступления события потока $t = t_k$. Таким образом, решение уравнения на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ будет зависеть от апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_k)$, $k = 1, 2, \dots$, в момент времени t_k . В силу марковости процесса $\lambda(t)$ существует предел $w(\lambda_1 | t)$ при $t \rightarrow \infty$, который не зависит от t и от начального условия, то есть $\lim_{t \rightarrow \infty} w(\lambda_1 | t) = w_1$. Переходя к пределу

при $t \rightarrow \infty$, уравнение (1.5.13) преобразуется к виду

$$\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2) w + (\lambda_1 - \lambda_2) w^2 = 0. \tag{1.5.14}$$

Корни полученного предельного уравнение (1.5.14) выписываются в виде

$$w_1 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right) / 2(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (1.5.15)$$

$$w_2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right) / 2(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (1.5.16)$$

где $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $0 < w_1 < 1$, $w_2 > 1$.

Принимая во внимание (1.5.15) и (1.5.16), дифференциальное уравнение (1.5.13) преобразуется к виду

$$\frac{d(w(\lambda_1 | t) - w_1)}{(w_1 - w_2)(w(\lambda_1 | t) - w_1)} - \frac{d(w_2 - w(\lambda_1 | t))}{(w_1 - w_2)(w_2 - w(\lambda_1 | t))} = (\lambda_1 - \lambda_2)dt. \quad (1.5.17)$$

Интегрируя [108] полученное уравнение (1.5.17) в пределах от t_k до t , $t \geq t_k$, получим следующее выражение:

$$\ln \left| \frac{w(\lambda_1 | t) - w_1}{w(\lambda_1 | t_k) - w_1} \right| - \ln \frac{w_2 - w(\lambda_1 | t)}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k)} = -(w_2 - w_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k),$$

где $w_2 - w(\lambda_1 | t_k) > 0$, $w_2 - w(\lambda_1 | t) > 0$, $w_2 - w_1 > 0$, т.к. $w_2 > 1$. $w(\lambda_1 | t) - w_1$ может быть больше нуля либо меньше нуля. Рассмотрим оба варианта.

Если $w(\lambda_1 | t) - w_1 > 0$, то $\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} < 0$, следовательно, $w(\lambda_1 | t)$ убывает к

w_1 сверху для $t \geq t_k$. Если $w(\lambda_1 | t) - w_1 < 0$, то $\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} > 0$, следовательно,

$w(\lambda_1 | t)$ возрастает к w_1 снизу для $t \geq t_k$. В силу этого знак модуля в выражении

$\left| \frac{w(\lambda_1 | t) - w_1}{w(\lambda_1 | t_k) - w_1} \right|$ можно опустить. Таким образом, получаем, что

$$\ln \frac{(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t_k))}{(w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t))} = -(w_2 - w_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k).$$

Докажем, что разность числителя и знаменателя подлогарифмического выражения $(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t_k)) - (w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t)) < 0$.

Рассмотрим случай, когда $w(\lambda_1 | t) - w_1 > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (w(\lambda_1 | t) - w_1)(w(\lambda_1 | t_k) - w_2) - (w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w(\lambda_1 | t) - w_2) = \\ = (w_2 - w_1)(w(\lambda_1 | t) - w(\lambda_1 | t_k)). \end{aligned}$$

Так как для этого случая функция $w(\lambda_1 | t)$ – убывающая, то для $t \geq t_k$ разность числителя и знаменателя будет меньше нуля. Отсюда следует, что

$$\frac{(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t_k))}{(w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t))} < 1.$$

Рассмотрим случай, когда $w(\lambda_1 | t) - w_1 < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} & (w(\lambda_1 | t) - w_1)(w(\lambda_1 | t_k) - w_2) - (w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w(\lambda_1 | t) - w_2) = \\ & = (w_2 - w_1)(w(\lambda_1 | t_k) - w(\lambda_1 | t)). \end{aligned}$$

Так как для этого случая функция $w(\lambda_1 | t)$ – возрастающая, то для $t \geq t_k$ разность числителя и знаменателя будет меньше нуля. Отсюда следует, что

$$\frac{(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t_k))}{(w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w_2 - w(\lambda_1 | t))} < 1.$$

Тогда получаем, что $\frac{(w(\lambda_1 | t) - w_1)(w(\lambda_1 | t_k) - w_2)}{(w(\lambda_1 | t_k) - w_1)(w(\lambda_1 | t) - w_2)} < 1$ для $t \geq t_k$ и решение

уравнения (1.5.13) примет вид (1.5.5). *Лемма доказана.*

Перейдем к случаю, когда на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ наступило одно событие потока (в момент времени t_k), то есть $r_{m+1} = 1$. Случаи, когда $r_{m+1} = 2, 3, \dots$, имеют вероятность $o(\Delta t)$ в силу ординарности рассматриваемого потока, то есть на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ может наступить только одно событие потока.

Лемма 1.5.3. *В момент времени t_k наступления события потока апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_1 , определяется формулой*

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + ((1-p)\lambda_1 - q\lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, k = 1, 2, \dots, \quad (1.5.18)$$

где $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ – апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_1 в момент времени $t = t_k - 0$, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Пусть на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ в момент времени t_k ($t \leq t_k < t + \Delta t$) наступает событие потока ($r_{m+1} = 1$). Имеем два смежных

полуинтервала $[t, t_k)$ и $[t_k, t + \Delta t)$. Длительность первого: $t_k - t = \Delta t'$, длительность второго: $t + \Delta t - t_k = \Delta t''$. Тогда $w(\lambda^{(m)} | t) = w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t')$, $w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'')$, и (1.5.4) примет вид ($\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$)

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda_1)}{\sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})} \quad (1.5.19)$$

Аналогично нахождению выражений для произведения переходных вероятностей $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)})$ для случая, когда $r_{m+1} = 0$, определенных в (1.5.11), произведения переходных вероятностей $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)})$ из (1.5.19) для случая $r_{m+1} = 1$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda^{(m)} = \lambda_1) &= (1-p)\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_2, \lambda^{(m)} = \lambda_2) &= (1-q)\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_1, \lambda^{(m)} = \lambda_2) &= p\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m+1)} = \lambda_2, \lambda^{(m)} = \lambda_1) &= q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

Подставляя (1.5.20) в (1.5.19), получаем числитель B_1 и знаменатель B_2 в (1.5.19):

$$\begin{aligned} B_1 &= w(\lambda_1 | t_k - t')(1-p)\lambda_1 \Delta t + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')q\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t), \\ B_2 &= w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')(1-p)\lambda_1 \Delta t + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')q\lambda_2 \Delta t + w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')p\lambda_1 \Delta t + \\ &\quad + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t')(1-q)\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя B_1 и B_2 в (1.5.19), деля числитель и знаменатель на Δt и устремляя $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ стремятся к 0 одновременно), учитывая, что $w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')$, приходим к (1.5.18). *Лемма доказана.*

Таким образом, в момент наступления события потока t_k апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок). Тогда решение уравнения (1.5.13) будет зависеть от начального условия в момент времени t_k , т. е. от $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. В свою очередь $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ зависит

от значения $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ – значение вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k , когда $w(\lambda_1 | t)$, определяемая в (1.5.13), изменяется на полуинтервале $[t_{k-1}, t_k)$, соседним с полуинтервалом $[t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, в значении $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ «сосредоточена» вся предыстория наблюдений за потоком, начиная от момента времени $t_0 = 0$ до момента времени t_k .

В качестве начального условия в момент времени $t_0 = 0$ в (1.5.13) выбирается априорная финальная вероятность состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$: $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$, определенная в (1.2.1).

Леммы 1.5.2 и 1.5.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.5.1. *Для модулированного синхронного потока событий поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временной оси определяется выражениями:*

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}{w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_k + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}, \quad (1.5.21)$$

$$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1 = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2},$$

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + ((1 - p)\lambda_1 - q\lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, \quad (1.5.22)$$

$$w(\lambda_1 | t_k - 0) = \frac{w_1(w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) - w_2) - w_2(w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t_k - t_{k-1})}}{w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) - w_2 - (w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t_k - t_{k-1})}}, \quad (1.5.23)$$

$$w_1 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right) / 2(\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$w_2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right) / 2(\lambda_1 - \lambda_2),$$

где $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $0 < w_1 < 1$, $w_2 > 1$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство осуществляется путем объединения формул (1.5.5) и (1.5.18). Теорема доказана.

1.6 Частные случаи соотношения параметров, определяющих поток событий

Представляет интерес рассмотреть частные случаи соотношения параметров входящего потока событий, представленные формулой (1.4.1), а именно, те случаи, когда модулированный синхронный поток событий становится рекуррентным (подраздел 1.4).

1) Случай $p + q = 1$.

Тогда формула пересчета (1.5.22) примет вид $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0) = q$, $k = 1, 2, \dots$, а апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в (1.5.21) примет вид

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1(q - w_2) - w_2(q - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}{q - w_2 - (q - w_1)e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}, t_k \leq t < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$$

Последнее говорит о том, что при таком соотношении параметров потока информация о моментах наступления событий t_1, t_2, \dots, t_{k-1} не оказывает влияния на апостериорную вероятность $w(\lambda_1 | t)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, $w(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от значения $w(\lambda_1 | t)$ в момент t_k , (от $w(\lambda_1 | t_k + 0) = q$ для любых k ($k = 1, 2, \dots$)), т.е. в конечном итоге предыстория не влияет на качество оценивания состояний процесса $\lambda(t)$.

2) Случай $(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(0) = (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0)$.

В данном случае формула пересчета (1.5.22) остается неизменной, что в свою очередь, говорит о зависимости апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ от предыстории.

1.7 Алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий

Формулы (1.5.21), (1.5.22), (1.5.23) позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t (алгоритм оптимальной оценки состояния λ_1 модулированного синхронного потока):

1) в момент времени $t = t_0 = 0$ по формуле (1.2.1) задается начальное значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$;

2) по формуле (1.5.21) для $k=0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($0 < t < t_1$), где t_1 – момент наступления первого события потока;

3) k увеличивается на единицу ($k=1$); в момент времени $t = t_1$ по формуле (1.5.23) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$, после чего по формуле (1.5.22) для $k=1$ вычисляется значение $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$, являющееся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (1.5.21);

4) по формуле (1.5.21) для $k=1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($t_1 < t < t_2$);

5) k увеличивается на единицу ($k=2$); по формуле (1.5.21) для $k=2$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$, после чего по формуле (1.5.22) для $k=2$ вычисляется значение $w(\lambda_1 | t_2 + 0)$, являющееся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (1.5.21) и так далее.

По ходу вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносятся решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq 0,5$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае – $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Приведенный алгоритм позволяет вычислить апостериорную вероятность $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t по наблюдаемым

моментам наступления событий потока. Апостериорная вероятность $w(\lambda_2 | t)$ состояния λ_2 процесса $\lambda(t)$ задается формулой: $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$.

При рассмотрении частного случая, когда $p+q=1$, для пунктов 3 и 5 алгоритма вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, полагается равной q .

1.8 Вероятность ошибки при оценивании состояний модулированного синхронного потока событий

Получим формулы для вероятности ошибки при вынесении решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ при использовании алгоритма оптимального оценивания состояний потока в условиях отсутствия мертвого времени.

Рассмотрим полуинтервал $(t_0, t]$ наблюдения за потоком, $t_0 = 0$. Зафиксируем момент времени t . Так как моменты наступления событий t_1, t_2, \dots, t_k ($t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$), попавшие в интервал (t_0, t) , случайны, то момент вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ лежит между моментами наступления событий потока $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда разность $t - t_k$ также носит случайный характер. Причем момент наступления события t_{k+1} может быть сколь угодно большим (разность $t_{k+1} - t$ также случайна). Таким образом, момент вынесения решения t привязан к интервалу (t_k, t_{k+1}) между моментами наступления соседних событий потока. Сам момент вынесения решения t можно трактовать, как некоторую случайную точку на оси времени Ot , которая совершенно не связана с потоком случайных событий. Поэтому момент вынесения решения t может попасть в любой интервал (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между моментами наступления соседних событий рассматриваемого потока. Стоит учесть, что начальный момент времени t_0 наблюдения за потоком (его можно положить равным нулю $t_0 = 0$) однозначно фиксируется на оси времени Ot .

Обратимся к рассмотренной ранее апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$

Обозначим $\tau_k = t - t_k, k = 1, 2, \dots$. Следующее событие потока наступит в момент времени t_{k+1} , который может быть сколь угодно большим, при этом $t_k < t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что τ_k снизу ограничено нулем, а сверху может быть в принципе неограниченным, т.е. $\tau_k \geq 0$. Тогда $w(\lambda_1 | t) = w(\lambda_1 | t_k + \tau_k), \tau_k \geq 0$. В момент времени $t = t_k$ имеем $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0), k = 1, 2, \dots$. Поскольку τ_k привязана к моменту времени t_k , то для простоты обозначим $w(\lambda_1 | t_k + \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k), \tau_k \geq 0$. Тогда алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ можно переформулировать следующим образом:

1) если в момент времени τ_k значение процесса $\lambda(\tau_k) = \lambda_1$, то правильное решение об оценке состояния процесса $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ будет приниматься, если $w(\lambda_1 | \tau_k) \geq w(\lambda_2 | \tau_k)$; ошибочное же решение об оценке состояния процесса $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ будет принимать в случае, если $w(\lambda_1 | \tau_k) < w(\lambda_2 | \tau_k)$;

2) если в момент времени τ_k значение процесса $\lambda(\tau_k) = \lambda_2$, то правильное решение об оценке состояния процесса $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ будет приниматься, если $w(\lambda_1 | \tau_k) < w(\lambda_2 | \tau_k)$; ошибочное же решение об оценке состояния процесса $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ будет принимать в случае, если $w(\lambda_1 | \tau_k) \geq w(\lambda_2 | \tau_k)$.

Пусть $w(\lambda(\tau_k), \tau_k)$ – распределение вероятностей двумерной смешанной случайной величины $(\lambda(\tau_k), \tau_k)$, где $\lambda(\tau_k)$ – значение дискретной случайной величины $\lambda(\tau_k) = \lambda_j, j = 1, 2, \tau_k$ – значение непрерывной случайной величины $\tau_k \geq 0$. Уравнение $w(\lambda(\tau_k) = \lambda_1, \tau_k) = w(\lambda(\tau_k) = \lambda_2, \tau_k)$ ($w(\lambda(\tau_k) = \lambda_1, \tau_k) = 0,5$) определяет границу τ_k^0 критической области, в которой отклоняется гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$, но принимается гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$ (либо наоборот). Корень уравнения, определяющего границу критической области τ_k^0 , если он существует и единственен, может быть меньше нуля ($\tau_k^0 < 0$), равен нулю ($\tau_k^0 = 0$) или больше

нуля ($\tau_k^0 > 0$). Помимо этого возможны варианты, когда данное уравнение имеет несколько корней (определяет множество решений) или не имеет корней вовсе (решение не существует). Если расписать в полученном уравнении совместную вероятность $w(\lambda(\tau_k), \tau_k)$ через безусловную вероятность $w(\tau_k)$ и условную вероятность $w(\lambda(\tau_k) = \lambda_j | \tau_k) = w(\lambda_j | \tau_k)$, $j = 1, 2, k = 1, 2, \dots$, получим уравнение для границы критической области τ_k^0 в виде

$$w(\lambda_1 | \tau_k) = w(\lambda_2 | \tau_k) \quad (w(\lambda_1 | \tau_k) = 0,5, k = 1, 2, \dots) \quad (1.8.1)$$

Тогда, если $w(\lambda_1 | \tau_k) \geq w(\lambda_2 | \tau_k)$, то $w(\lambda_2 | \tau_k)$ можно трактовать, как условную вероятность вынесения ошибочного решения: решение выносится в пользу $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$, хотя на самом деле имеет место $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$, $\tau_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$. Аналогичная трактовка имеет место, если $w(\lambda_1 | \tau_k) < w(\lambda_2 | \tau_k)$ ($w(\lambda_1 | \tau_k) = 1 - w(\lambda_2 | \tau_k)$ – условная вероятность вынесения ошибочного решения): решение выносится в пользу $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$, хотя на самом деле имеет место $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$, $\tau_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$.

1.8.1 Условная вероятность ошибочного решения о состоянии модулированного синхронного потока событий в общем случае

Из формулы (1.5.21) следует, что поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | \tau_k)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ определяется выражением

$$w(\lambda_1 | \tau_k) = \frac{w_1(w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0)) - w_2(w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0))e^{-b\tau_k}}{w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - (w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0))e^{-b\tau_k}}, \quad \tau_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, \\ b = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}, \quad (1.8.2)$$

где $\tau_k = t - t_k, k = 1, 2, \dots$, w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16) ($0 < w_1 < 1 < w_2$).

В момент времени $\tau_k = t - t_k = 0$, т.е. когда момент вынесения решения t совпадает с моментом наступления события потока $t_k, k = 1, 2, \dots$, апостериорная

вероятность (1.8.2) претерпевает разрыв 1-го рода. Согласно формуле (1.5.22) в момент времени $\tau_k = t - t_k = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k = 0) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$ вычисляется по формуле пересчета:

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + ((1-p)\lambda_1 - q\lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, k = 1, 2, \dots, \quad (1.8.3)$$

где $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ вычисляется по формуле (1.8.2), в которой вместо τ_k нужно подставить τ_{k-1} ($\tau_{k-1} = t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \dots$). При этом в начальный момент времени наблюдения за потоком $t_0 = 0$, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_0 + 0)$ принимается равной априорной вероятности нахождения процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_1 : $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$, где π_1 определена в (1.2.1).

Изучим поведение вероятности $w(\lambda_1 | \tau_k)$ в зависимости от τ_k . Производная функции (1.8.2) имеет вид:

$$\frac{\partial w(\lambda_1 | \tau_k)}{\partial \tau_k} = \frac{b^2 (w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0))(w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0))e^{-b\tau_k}}{(\lambda_1 - \lambda_2) \left\{ w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0) - (w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0))e^{-b\tau_k} \right\}^2}, \tau_k \geq 0, \quad (1.8.4)$$

где $k = 0, 1, \dots$, b определена в (1.8.2), $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ определена в (1.8.3) для $k = 1, 2, \dots$, $w(\lambda_1 | t_k + 0) = \pi_1$ для $k=0$; w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16). Кроме того $\lim_{\tau_k \rightarrow \infty} w(\lambda_1 | \tau_k) = w_1$.

Тогда знак производной (1.8.4) определяется знаком выражения $(w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0))$, а именно: 1) если $0 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) < w_1$, то $\partial w(\lambda_1 | \tau_k) / \partial \tau_k > 0$, т.е. вероятность $w(\lambda_1 | \tau_k)$, определенная в (1.8.2), – возрастающая функция переменной τ_k , стремящаяся при $\tau_k \rightarrow \infty$ к w_1 снизу; 2) если $w_1 < w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 1$, то $\partial w(\lambda_1 | \tau_k) / \partial \tau_k < 0$, т.е. вероятность (1.8.2) – убывающая функция переменной τ_k , стремящаяся при $\tau_k \rightarrow \infty$ к w_1 сверху; 3) если $w(\lambda_1 | t_k + 0) = w_1$, то $w(\lambda_1 | \tau_k) = w_1$ для $\tau_k \geq 0$.

Путем подстановки (1.8.2) в уравнение $w(\lambda_1 | \tau_k) = 0,5$ и разрешения этого уравнения относительно неизвестной τ_k , находится граница критической области τ_k^0 в виде

$$\tau_k^0 = \frac{1}{b} \ln \frac{(w_2 - 0,5)(w_1 - w(\lambda_1 | t_k + 0))}{(w_1 - 0,5)(w_2 - w(\lambda_1 | t_k + 0))}, k = 0, 1, \dots, \quad (1.8.5)$$

где b определена в (1.8.2); $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ определена в (1.8.3) для $k = 1, 2, \dots$, $w(\lambda_1 | t_k + 0) = \pi_1$ для $k=0$; w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16).

В зависимости от соотношения величин w_1 и $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ граница критической области τ_k^0 может принимать различные положения на временной оси Ot :

1) если $0,5 \leq w_1 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0)$, то τ_k^0 не существует, при этом условная вероятность ошибки, обозначим ее здесь и далее $P_0(\tau_k)$, определится в виде

$$P_0(\tau_k) = 1 - w(\lambda_1 | \tau_k), \tau_k \geq 0; \quad (1.8.6)$$

2) если $0,5 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0) < w_1$, то τ_k^0 существует, $\tau_k^0 < 0$, и $P_0(\tau_k)$ определяется выражением (1.8.6);

3) если $w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 0,5 < w_1$, то τ_k^0 существует, $\tau_k^0 \geq 0$, и условная вероятность ошибки

$$\begin{aligned} P_0(\tau_k) &= w(\lambda_1 | \tau_k), 0 \leq \tau_k < \tau_k^0, \\ P_0(\tau_k) &= 1 - w(\lambda_1 | \tau_k), \tau_k \geq \tau_k^0; \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

4) если $w_1 = 0,5$, $w(\lambda_1 | t_k + 0) < w_1$, то τ_k^0 не существует, и условная вероятность ошибки

$$P_0(\tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k), \tau_k \geq 0; \quad (1.8.8)$$

5) если $w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq w_1 < 0,5$, то τ_k^0 не существует, и $P_0(\tau_k)$ определяется выражением (1.8.8);

6) если $w_1 < w(\lambda_1 | t_k + 0) \leq 0,5$, то τ_k^0 существует, $\tau_k^0 < 0$, и $P_0(\tau_k)$ определяется выражением (1.8.8);

7) если $w_1 < 0,5 \leq w(\lambda_1 | t_k + 0)$, то τ_k^0 существует, $\tau_k^0 \geq 0$, и условная вероятность ошибки

$$\begin{aligned} P_0(\tau_k) &= 1 - w(\lambda_1 | \tau_k), 0 \leq \tau_k < \tau_k^0, \\ P_0(\tau_k) &= w(\lambda_1 | \tau_k), \tau_k \geq \tau_k^0; \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

8) если $w_1 = w(\lambda_1 | t_k + 0) = 0,5$, то τ_k^0 не существует, и $P_0(\tau_k) = 0,5, \tau_k \geq 0$. В этом случае $P_0(\tau_k) = P_0 = 0,5$ есть безусловная вероятность ошибки.

Формулы (1.8.2), (1.8.3), (1.8.5) – (1.8.9) позволяют сформулировать алгоритм расчета условной вероятности ошибки $P_0(\tau_k)$ в любой момент времени $\tau_k \geq 0, k=0,1,\dots$:

1) в начальный момент времени $t_0 = 0$ полагается $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$, определенная в (1.2.1);

2) по формуле (1.8.5) для $k=0$ вычисляется τ_k^0 , то есть на временной оси Ot устанавливается положение границы критической области;

3) вычисляется вероятность $P_0(\tau_k)$ в любой момент времени τ_k ($0 \leq \tau_k < t_{k+1} - t_k$) для одного из восьми вариантов соотношений величин w_1 и $w(\lambda_1 | t_k + 0)$;

4) по формуле (1.8.2) вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | \tau_k) = w(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$ в момент времени $t = t_{k+1}$ ($\tau_k = t_{k+1} - t_k$); затем по формуле (1.8.3) производится пересчет вероятности $w(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$ в момент времени $t = t_{k+1}$ ($\tau_k = t - t_k = 0$);

5) k увеличивается на 1, алгоритм переходит на шаг 2 и т.д.

Поскольку значение вероятности $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ зависит от всех предыдущих моментов наступления событий потока t_1, t_2, \dots, t_{k-1} (то есть зависит от предыстории), то условную вероятность ошибки $P_0(\tau_k)$ необходимо усреднить по моментам наступления событий. Так как функцию распределения вероятностей событий t_1, t_2, \dots, t_k для рассматриваемого потока найти в явном

виде представляется достаточно проблематичным, то определить безусловную вероятность ошибки принятия решения о состоянии потока возможно только для частного случая, когда поток становится рекуррентным, и длительности интервалов между моментами наступления соседних событий потока $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \dots, \tau_k = t_{k+1} - t_k, \dots$ представляют собой последовательность независимых случайных величин.

1.8.2 Безусловная вероятность ошибки о состоянии потока

Рассмотрим частный случай соотношения параметров потока, описанный в подразделе 1.6, при котором представляется возможным вычисление безусловной вероятности ошибки принятия решения.

Пусть $p+q=1$. В данном случае формула пересчета (1.5.22) преобразуется к виду $w(\lambda_1 | t_k + 0) = q, k = 1, 2, \dots$. Данная формула означает, что значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_k + \tau_k)$ после любого момента t_k не зависит от моментов наступления событий t_1, t_2, \dots, t_{k-1} , поэтому индекс k в обозначении апостериорной вероятности и условной вероятности ошибки можно опустить, т.е. $w(\lambda_1 | \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau), \tau \geq 0, P_0(\tau_k) = P_0(\tau), k = 0, 1, \dots$

В формуле (1.2.13) получен явный вид плотности вероятности интервалов между моментами наступления соседних событий потока $p(\tau)$, которая для рассматриваемого частного случая преобразуется к виду

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad (1.8.10)$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - q\lambda_1 - p\lambda_2), 1 - \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + q\lambda_1 + p\lambda_2),$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp b,$$

где b определена в (1.8.2).

Тогда, согласно подразделу 1.6, формула (1.8.2) для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | \tau_k)$ преобразуется к виду

$$w(\lambda_1 | \tau) = \frac{w_1(w_2 - q) - w_2(w_1 - q)e^{-b\tau}}{w_2 - q - (w_1 - q)e^{-b\tau}}, \tau \geq 0, \quad (1.8.11)$$

где b определена в (1.8.2); w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16).

При этом для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ изменения τ справедлива формула (1.8.2), где для $k=0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$.

Путем подстановки (1.8.11) в уравнение $w(\lambda_1 | \tau) = 0,5$ и разрешения этого уравнения относительно неизвестной τ находится граница критической области τ^0 в виде

$$\tau^0 = \frac{1}{b} \ln \frac{(w_2 - 0,5)(w_1 - q)}{(w_1 - 0,5)(w_2 - q)}, \quad (1.8.12)$$

где b определена в (1.8.2); w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16).

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ граница критической области τ^0 определяется выражением (1.8.5) для $k=0$, и $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$.

Для нахождения безусловной вероятности ошибки P_0 нужно знать плотность вероятности $w(\tau)$ значений длительности интервала, которому принадлежит момент вынесения решения t . Для рекуррентных потоков плотность вероятности $w(\tau)$ определяется формулой [23]:

$$w(\tau) = \frac{\tau p(\tau)}{M(\tau)}, \quad M(\tau) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau, \quad (1.8.13)$$

где $p(\tau)$ – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями рекуррентного потока, определенная в (1.8.10).

Подставляя (1.8.10) в (1.8.13), получаем явный вид плотности вероятности

$$w(\tau) = \tau(A_1 e^{-z_1 \tau} + A_2 e^{-z_2 \tau}), \tau \geq 0; \quad A_1 = \frac{\gamma z_1}{M(\tau)}, \quad A_2 = \frac{(1-\gamma)z_2}{M(\tau)}, \quad M(\tau) = \frac{\gamma}{z_1} + \frac{1-\gamma}{z_2}, \quad (1.8.14)$$

где $z_1, z_2, \gamma, (1-\gamma)$ определены в (1.8.10).

Учитывая (1.8.11), (1.8.12), (1.8.14), получаем (аналогично подподразделу 1.8.1) выражения для безусловной вероятности ошибки P_0 для различных вариантов соотношения величин w_1 и q :

1) если $0,5 \leq w_1 < q$, либо $0,5 < w_1 \leq q$, либо $0,5 \leq q < w_1$, то

$$P_0 = 1 - \int_0^{\infty} w(\tau)w(\lambda_1 | \tau)d\tau;$$

2) если $q \leq 0,5 < w_1$, то $P_0 = \int_0^{\tau^0} w(\tau)w(\lambda_1 | \tau)d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau)(1 - w(\lambda_1 | \tau))d\tau$;

3) если $q < w_1 \leq 0,5$, либо $q \leq w_1 < 0,5$, либо $w_1 < q \leq 0,5$, то

$$P_0 = \int_0^{\infty} w(\tau)w(\lambda_1 | \tau)d\tau;$$

4) если $w_1 < 0,5 \leq q$, то $P_0 = \int_0^{\tau^0} w(\tau)(1 - w(\lambda_1 | \tau))d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau)w(\lambda_1 | \tau)d\tau$;

5) если $q = w_1 = 0,5$, то $P_0 = 0,5$.

Подставляя в 1 – 4 значение $w(\lambda_1 | \tau)$ из (1.8.11), τ^0 из (1.8.12), $w(\tau)$ из (1.8.14), находим явные формулы для безусловной вероятности ошибки P_0 для случаев 1 – 4:

$$1) \quad P_0 = 1 - \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau; \quad (1.8.15)$$

$$2) \quad P_0 = \frac{1}{M(\tau)} \left[\frac{\gamma}{z_1} (1 + z_1 \tau^0) e^{-z_1 \tau^0} + \frac{1-\gamma}{z_2} (1 + z_2 \tau^0) e^{-z_2 \tau^0} \right] + \int_0^{\tau^0} f(\tau)d\tau - \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau)d\tau; \quad (1.8.16)$$

$$3) \quad P_0 = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau; \quad (1.8.17)$$

$$4) \quad P_0 = \frac{1}{M(\tau)} \left[\frac{\gamma}{z_1} \left[1 - (1 + z_1 \tau^0) e^{-z_1 \tau^0} \right] + \frac{1-\gamma}{z_2} \left[1 - (1 + z_2 \tau^0) e^{-z_2 \tau^0} \right] \right] - \int_0^{\tau^0} f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{\tau^0}^{\infty} f(\tau)d\tau, \quad (1.8.18)$$

где $f(\tau) = \tau \frac{w_1(w_2 - q) - w_2(w_1 - q)e^{-b\tau}}{w_2 - q - (w_1 - q)e^{-b\tau}} \sum_{j=1}^2 A_j e^{-z_j \tau}$, b определена в (1.8.2); w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16); $z_1, z_2, \gamma, (1-\gamma)$ определены в (1.8.10); τ^0 – в (1.8.12); $A_1, A_2, M(\tau)$ – в (1.8.14). Интегралы, входящие в выражения для P_0 , вычисляются только численно.

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ безусловная вероятность ошибки P_0 в зависимости от соотношения π_1 и w_1 определится формулой, относящейся к одному из вариантов 1–8, справедливых для границы критической области τ_0^0 , определенной в (1.8.5).

1.9 Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени

На практике возникают ситуации, когда наступившее событие потока может инициировать вслед за собой период ненаблюдаемости, когда последующая информация о событиях потока теряется. Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [1,150], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после

обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В следующем подразделе решается задача оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени.

1.9.1 Формирование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий, описанный в подразделе 1.1. Интенсивность исследуемого потока по-прежнему представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$, который имеет 2 состояния: λ_1, λ_2 , причем $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, имеет экспоненциальный закон распределения с параметром α_i : $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_i \tau}, i=1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$ закончится, и с вероятностью, равной единице, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_i в состояние λ_j ($i, j=1,2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i , имеет место пуассоновский поток событий интенсивности $\lambda_i, i=1,2$. При этом в момент наступления события потока интенсивности λ_1 с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния λ_1 в состояние λ_2 ; наоборот, с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ может остаться в состоянии λ_1 ; в момент наступления события потока интенсивности λ_2 с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$)

процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния λ_2 в состояние λ_1 ; наоборот, с вероятностью $1-q$ процесс $\lambda(t)$ может остаться в состоянии λ_2 .

После каждого зарегистрированного в момент t_k события наступает время фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время (далее мертвое время), то есть события, наступившие в течение периода мертвого времени, не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь создает период мертвого времени длительности T и т.д.

На рис. 1.8.1 показан вариант возможной реализации поведения процесса $\lambda(t)$ и наглядно продемонстрирована схема создания наблюдаемого потока событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots – моменты наступления наблюдаемых событий потока, заштрихованные линии – периоды мертвого времени длительности T , ось номер 1 отображает исходный модулированный синхронный поток событий (в условиях отсутствия мертвого времени), ось номер 2 отображает схему создания мертвого времени, ось номер 3 отображает события наблюдаемого потока.

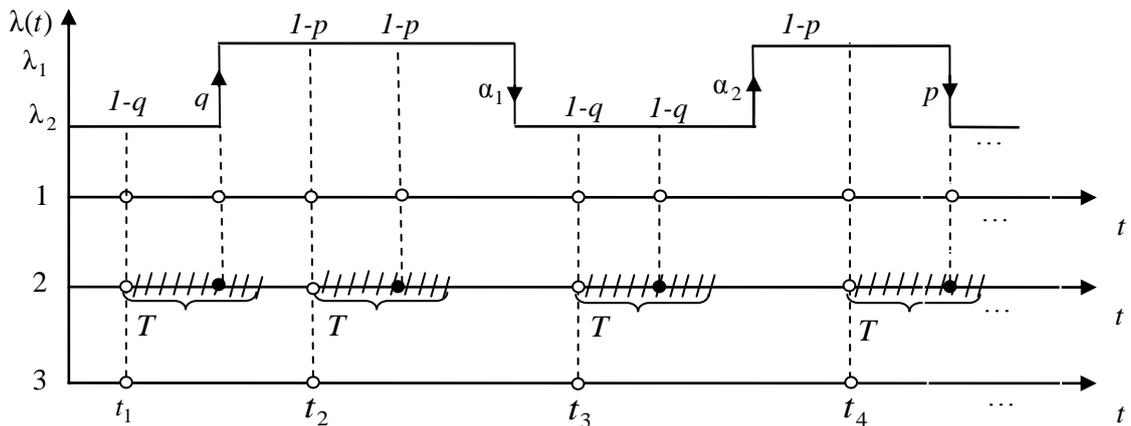


Рисунок 1.3 – Формирование наблюдаемого потока событий

Рассматривается стационарный режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t), i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m – количество наблюдаемых событий за время t), при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$, тогда, если $w(\lambda_j | t) \geq w(\lambda_i | t), i, j = 1, 2, i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

Отметим, что если $\alpha_i = 0, i = 1, 2$, то имеет место обычный синхронный поток событий [53,58].

1.9.2 Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени

Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}) между моментами наступления наблюдаемых событий потока, значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 0, 1, \dots$. С другой стороны, значение длительности этого интервала есть $\tau_k = T + \eta_k, k = 0, 1, \dots$, η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом наступления следующего события потока t_{k+1} , т.е. интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных интервала: первый полуинтервал – $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$.

Отметим, что так как поток функционирует в условиях мертвого времени фиксированной длительности T , то по окончании периода мертвого времени первое наступившее событие вновь создает период мертвого времени длительности T , в течение которого события модулированного синхронного потока недоступны наблюдению (теряются). Это значит, что условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ на интервале наблюдаемости потока $(t_k + T, t_{k+1})$ и полуинтервале ненаблюдаемости потока $(t_k, t_k + T]$ будут принципиально разными. Кроме того, для вычисления

апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ необходимо либо точно знать значение длительности периода мертвого времени T , либо, по крайней мере, осуществить ее оценку \hat{T} . В противном случае отсутствие информации о значении длительности мертвого времени T делает невозможным нахождение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в условиях мертвого времени. Здесь полагается, что значение мертвого времени T известно точно.

В подразделе 1.7 описан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для случая, когда мертвое время отсутствует ($T = 0$), то есть все события модулированного синхронного потока являются наблюдаемыми. При этом поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на интервале между моментами наступления соседних наблюдаемых событий потока $t_k, t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$, определяется формулой (1.5.21), в момент наступления наблюдаемого события модулированного синхронного потока t_k апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ претерпевает разрыв и вычисляется по формуле пересчета (1.5.22).

Таким образом, в условиях мертвого времени, когда $T \neq 0$, для интервала $(t_k + T, t_{k+1})$, длительность которого есть η_k , будет справедлива формула (1.5.21). При этом начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ привязывается к моменту $t_k + T$, то есть в формуле (1.5.21), во-первых, $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ нужно заменить на $w(\lambda_1 | t_k + T)$, $k = 1, 2, \dots$, во-вторых, $t_k + T \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Формула пересчета (1.5.22) остается неизменной, так как она предназначена для вычисления апостериорной вероятности в момент t_k наступления наблюдаемого события потока.

Рассмотрим теперь полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$. Так как на этом полуинтервале длительности T событие наблюдаемого потока имеет место в граничной точке t_k , а на самом отрезке события отсутствуют, то необходимо определить поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$.

В момент времени t_k , когда наступает наблюдаемое событие потока, и наступает период мертвого времени длительности T , события потока перестают наблюдаться. Эта ситуация аналогична той, когда в начальный момент времени $t_0 = 0$ событие потока также не наблюдается, имеются лишь априорные данные о потоке. Поэтому вывод дифференциального уравнения для нахождения вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на временном полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ аналогичен выводу дифференциального уравнения для априорной вероятности π_1 , определенной в (1.2.1). Найдем дифференциальные уравнения относительно неизвестных $w(\lambda_1 | t)$ и $w(\lambda_2 | t)$.

Определим апостериорную вероятность $w(\lambda_1 | t + \Delta t)$ того, что в момент времени $t + \Delta t$ ($t_k < t + \Delta t < t_k + T$), где Δt – достаточно малая величина, процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_1 . Рассмотрим все возможные варианты поведения процесса $\lambda(t)$ на интервале $(t, t + \Delta t)$.

1) Пусть в момент времени t процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_1 , и на интервале $(t, t + \Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ не перешел в состояние λ_2 . Вероятность такого варианта есть

$$\begin{aligned} w(\lambda_1 | t)e^{-\alpha_1 \Delta t} e^{-\lambda_1 \Delta t} + w(\lambda_1 | t)e^{-\alpha_1 \Delta t} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t})(1 - p) = \\ = w(\lambda_1 | t)(1 - \alpha_1 \Delta t - p\lambda_1 \Delta t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

2) Пусть в момент времени t процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_2 , и на интервале $(t, t + \Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ перешел в состояние λ_1 . Вероятность такого варианта есть

$$\begin{aligned} w(\lambda_2 | t)(1 - e^{-\alpha_2 \Delta t})e^{-\lambda_2 \Delta t} + w(\lambda_2 | t)e^{-\alpha_2 \Delta t} (1 - e^{-\lambda_2 \Delta t})q = \\ = w(\lambda_2 | t)(q\lambda_2 \Delta t + \alpha_2 \Delta t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Другие варианты имеют вероятность $o(\Delta t)$. Тогда

$$w(\lambda_1 | t + \Delta t) = w(\lambda_1 | t)(1 - \alpha_1 \Delta t - p\lambda_1 \Delta t) + w(\lambda_2 | t)(q\lambda_2 \Delta t + \alpha_2 \Delta t) + o(\Delta t). \quad (1.9.1)$$

Аналогично находится $w(\lambda_2 | t + \Delta t)$:

$$w(\lambda_2 | t + \Delta t) = w(\lambda_2 | t)(1 - \alpha_2 \Delta t - q\lambda_2 \Delta t) + w(\lambda_1 | t)(p\lambda_1 \Delta t + \alpha_1 \Delta t) + o(\Delta t). \quad (1.9.2)$$

Производя в (1.9.1), (1.9.2) необходимые преобразования, после чего переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$ и $w(\lambda_2 | t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)w(\lambda_1 | t) + (\alpha_2 + q\lambda_2)w(\lambda_2 | t), \\ \frac{dw(\lambda_2 | t)}{dt} &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)w(\lambda_2 | t) + (\alpha_1 + p\lambda_1)w(\lambda_1 | t) \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

с граничными условиями: $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $w(\lambda_2 | t = t_k) = w(\lambda_2 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$. Последнее вытекает из того, что на интервале $(t_{k-1} + T, t_k)$, $k = 2, 3, \dots$ смежном полуинтервалу $(t_k, t_k + T]$, апостериорная вероятность рассчитывается по формуле (1.5.21), где вместо $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ стоит $w(\lambda_1 | t_k + T)$; в точке $t = t_k$ происходит пересчет апостериорной вероятности по формуле (1.5.22), так что ее значение в этой точке есть $w(\lambda_1 | t_k + 0)$. Для граничного полуинтервала $[t_0, t_1)$ расчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ производится по формуле (1.5.21) с ее последующим пересчетом по формуле (1.5.22) в точке $t = t_1$. Решая систему (1.9.3), находим

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + (w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)(t - t_k)}, \quad (1.9.4)$$

где $t_k \leq t \leq t_k + T$ ($k = 1, 2, \dots$); вероятность π_1 определена в (1.2.1). Тогда из (1.9.4) следует, что

$$w(\lambda_1 | t_k + T) = \pi_1 + (w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, k = 1, 2, \dots \quad (1.9.5)$$

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится по критерию максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_1 | t) \geq 0,5$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

1.9.3 Алгоритм оптимального оценивания состояний потока в условиях мертвого времени

Полученные формулы (1.2.1), (1.5.21), (1.5.22), (1.5.23), (1.9.4), (1.9.5) позволяют сформулировать алгоритм расчета вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t (алгоритм оптимальной оценки состояния λ_1 модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени):

1) в момент времени $t_0 = 0$ по формуле (1.2.1) задается начальное значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$;

2) по формуле (1.5.21) для $k=0$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($0 < t < t_1$), где t_1 – момент наступления первого события потока;

3) k увеличивается на единицу ($k=1$), в момент времени $t = t_1$ по формуле (1.5.23) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$, после чего по формуле (1.5.22) для $k=1$ вычисляется значение $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$, являющееся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (1.9.4);

4) по формуле (1.9.4) для $k=1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t ($t_1 < t < t_1 + T$);

5) по формуле (1.9.5) для $k=1$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени $t = t_1 + T$, т.е. $w(\lambda_1 | t_1 + T)$; при этом $w(\lambda_1 | t_1 + T)$ является начальным условием для $w(\lambda_1 | t)$ на следующем шаге алгоритма;

6) для $k=1$ по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w_1 [w(\lambda_1 | t_k + T) - w_2] - w_2 [(w(\lambda_1 | t_k + T) - w_1) e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k - T)}]}{w(\lambda_1 | t_k + T) - w_2 - [(w(\lambda_1 | t_k + T) - w_1) e^{(w_1 - w_2)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k - T)}]}, \quad (1.9.6)$$

где $t_k + T \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$; w_1 определена в (1.5.15), w_2 – в (1.5.16), рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t

$(t_1 + T < t < t_2, k = 1, 2, \dots)$, где t_2 – момент наблюдения второго события наблюдаемого потока;

7) k увеличивается на единицу ($k=2$), по формуле (1.9.6) для $k=2$ вычисляется вероятность $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$, после чего по формуле (1.5.22) для $k=2$ вычисляется значение $w(\lambda_1 | t_2 + 0)$, являющееся начальным значением для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (1.9.4) и так далее.

По ходу вычисления $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносятся решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 | t) \geq 0,5$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

Для частного случая соотношения параметров потока ($p+q=1$), рассмотренного в подразделе 1.6, алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока идентичен приведенному алгоритму для общего случая.

1.10 Результаты и выводы к разделу 1

Сформулируем результаты, полученные в разделе 1.

1) Получены формулы (1.5.21), (1.5.22), (1.5.23) для расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий. Показано, что апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ ($w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$) в момент времени t зависит от эволюции потока от момента времени t_0 до момента наступления события $t_k, k = 1, 2, \dots$

2) В подразделе 1.6 приведен пример частного случая соотношения параметров рассматриваемого потока ($p+q=1$), для которого найдено выражение для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$. Доказано, что в данном случае апостериорная вероятность не зависит от предыстории, а зависит только от

значения вероятности $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ (равной константе) в момент t_k наступления события потока.

3) Сформулирован алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий, функционирующего в условиях отсутствия мертвого времени, в любой момент времени t на основании наблюдения за моментами наступления событий потока.

4) Получены формулы для расчета условной вероятности ошибки принятия решения о состоянии модулированного синхронного потока в условиях отсутствия мертвого времени.

5) Получены формулы для безусловной вероятности ошибки принятия решения о состоянии потока для частного случая соотношения параметров потока событий ($p+q=1$), когда модулированный синхронный поток становится рекуррентным, в условиях отсутствия мертвого времени.

6) Получены формулы (1.9.4), (1.9.5), (1.9.6) для нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени.

7) Сформулирован алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени в любой момент времени t на основании данных о моментах наступления наблюдаемых событий потока.

Основной результат раздела 1 заключается в том, что полученные формулы для расчета апостериорной вероятности состояний модулированного синхронного потока событий в случае отсутствия мертвого времени ($T = 0$) и при наличии мертвого времени ($T \neq 0$) позволили сформулировать алгоритм оптимальной оценки состояний рассматриваемого потока, обеспечивающий минимальную полную (безусловную) вероятность принятия ошибочного решения о состоянии потока. С помощью полученных алгоритмов можно оценивать состояния модулированного синхронного потока событий в режиме реального времени.

Численные результаты, полученные в ходе статистического эксперимента по оценке состояний рассматриваемого потока, приведены в разделе 3.

2 Оценивание длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий

В разделе 2 диссертационной работы решается задача оценки длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления наблюдаемых событий модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени. Для решения задачи оценивания параметров потока каким-либо из статистических методов необходимо, в первую очередь, располагать информацией о вероятностных свойствах потока.

В разделе 2 находятся: 1) явное выражение для плотности вероятности значений длительности интервала между моментами наступления наблюдаемых событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени; 2) явное выражение для совместной плотности вероятности значений длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления наблюдаемых событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени; 3) условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Приводятся алгоритмы оценивания длительности мертвого времени, построенные на базе метода максимального правдоподобия и модифицированного метода моментов.

Основные результаты раздела 2 опубликованы в работах [39, 70, 71, 73, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 181, 182].

2.1 Постановка задачи

Напомним определение модулированного синхронного дважды стохастического потока событий (далее поток). Интенсивность исследуемого потока представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный

процесс $\lambda(t)$, который имеет два состояния: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, имеет экспоненциальный закон распределения с параметром α_i : $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_i \tau}, i=1,2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, то на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt – достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i=1,2$, закончится, и с вероятностью, равной единице, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_i в состояние λ_j ($i, j=1,2, i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i , имеет место пуассоновский поток событий интенсивности $\lambda_i, i=1,2$. При этом в момент наступления события потока интенсивности λ_1 с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния λ_1 в состояние λ_2 ; наоборот, с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ может остаться в состоянии λ_1 ; в момент наступления события потока интенсивности λ_2 с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния λ_2 в состояние λ_1 ; наоборот, с вероятностью $1-q$ процесс $\lambda(t)$ может остаться в состоянии λ_2 . При этом матрицы инфинитезимальных характеристик [121] модулированного синхронного потока запишутся в виде

$$D_1 = \begin{vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{vmatrix}, D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы D_1 соответствуют интенсивностям перехода процесса $\lambda(t)$ из одного состояния в другое в момент наступления события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 соответствуют интенсивностям перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 соответствуют интенсивностям выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятым с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (далее мертвое время), в течение которого

другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, то есть события, наступившие в течение интервала мертвого времени, не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь создает период мертвого времени длительности T и т.д.

Стоит отметить, что процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1 либо λ_2) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только моменты наступления событий на временной оси t_1, t_2, \dots . Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$), можно пренебречь. Тогда без потери общности можно положить начальный момент времени наблюдения $t_0 = 0$.

Отметим, что последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления событий потока в исходном модулированном потоке в случае, когда мертвое время отсутствует ($T = 0$), образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, если эволюцию потока рассматривать с момента наступления события потока $t_k, k = 1, 2, \dots$. Пусть t_k – момент наступления события наблюдаемого потока. Тогда $\lambda(t_k) = \lambda_i, i = 1, 2$. В лемме 1.2.1 показано, что поведение процесса $\lambda(t)$ после момента t_k наступления события потока не зависит от предыстории, а зависит только от состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k в силу отсутствия последействия для экспоненциально распределенных случайных величин.

Наличие свойства отсутствия последействия у экспоненциально распределенных случайных величин обуславливает отсутствие зависимости оставшегося времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda_i, i = 1, 2$, после момента времени t_k от длительности пребывания процесса в состоянии $\lambda_i, i = 1, 2$, до этого момента. Следовательно, последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$

наступления событий исходного модулированного синхронного потока, когда мертвое время $T = 0$, образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда в наблюдаемом потоке событий ($T \neq 0$) последовательность моментов наступления наблюдаемых событий потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ также будет порождать цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока. Так как поток функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). Таким образом, без потери общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, то есть $\tau = 0$.

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, – значения длительностей смежных k -го и $k+1$ -го интервалов $((t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}), k = 1, 2, \dots)$ между соседними событиями наблюдаемого потока. В силу стационарности потока можно положить $k=1$ и рассматривать длительности интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, соответствующие смежным интервалам (t_1, t_2) , (t_2, t_3) . Тогда $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. При этом соответствующая совместная плотность вероятностей имеет вид $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Основной задачей раздела 2 является получение явного вида плотности вероятностей $p_T(\tau)$ и явного вида совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$. В ходе рассматриваемой главы находятся условия рекуррентности наблюдаемого потока событий для случая, когда поток функционирует в условиях мертвого времени ($T \neq 0$). Помимо этого находятся вероятностные характеристики наблюдаемого потока событий.

2.2 Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями потока в условиях мертвого времени

Поскольку $\lambda(t)$ – марковский процесс, и его эволюция не зависит от наличия мертвого времени, то априорные вероятности π_1 и π_2 соответствующих состояний λ_1 и λ_2 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени функционирования потока определяются формулой (1.2.1).

Пусть τ – значение случайной величины длительности интервала $(0, \tau)$ между моментами наступления двух соседних событий наблюдаемого потока. С другой стороны, значение длительности этого интервала можно представить в виде $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала $(T + t, \tau)$ между моментом окончания мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока (рис. 2.1).

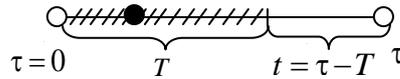


Рисунок 2.1 - Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Пусть $p_{jk}(t)$ – условная вероятность того, что на интервале $(0, t)$ нет событий наблюдаемого потока, и в момент времени t имеет место $\lambda(t) = \lambda_k$, при условии, что в момент времени $t = 0$ событие потока наступило, и значение процесса $\lambda(0) = \lambda_j$ ($j, k = 1, 2$). Этой вероятности соответствует плотность вероятности $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$.

Пусть $\pi_i(0|T)$ – условная стационарная вероятность того, что в момент $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i , $i = 1, 2$, событие потока наступило, и наступило мертвое время длительности T .

Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(t)$ перешел из состояния λ_i (момент времени $\tau = 0$) в состояние λ_j (момент времени $\tau = T$) при условии, что в момент

времени $\tau=0$ событие потока наступило и наступил период мертвого времени длительности T , $i, j=1,2$.

Тогда, согласно введенным обозначениям, искомая плотность вероятности $p_T(\tau)$ запишется в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau-T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Для определения явного вида плотности вероятностей $p_T(\tau)$ необходимо найти выражения для неизвестных $\pi_i(0|T)$, $q_{ij}(T)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau-T)$, $i, j, k=1,2$, входящих в состав формулы (2.2.1).

Лемма 2.2.1. *Условные плотности вероятности $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k=1,2$, определяются формулами*

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(t) &= \frac{\lambda_1(1-p)}{z_2-z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2 t} \right] + \frac{\alpha_1 \lambda_2 q}{z_2-z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \\ \tilde{p}_{12}(t) &= \frac{\lambda_1 p}{z_2-z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2 t} \right] + \frac{\alpha_1 \lambda_2 (1-q)}{z_2-z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \\ \tilde{p}_{21}(t) &= \frac{\lambda_2 q}{z_2-z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2 t} \right] + \frac{\alpha_2 \lambda_1 (1-p)}{z_2-z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \\ \tilde{p}_{22}(t) &= \frac{\lambda_2 (1-q)}{z_2-z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2 t} \right] + \frac{\alpha_2 \lambda_1 p}{z_2-z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \\ z_1 &= \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right], \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Доказательство. В соответствии с определением модулированного синхронного потока событий введем совместную вероятность $p_{11}(t + \Delta t)$ того, что на интервале $(0, t)$, $t = \tau - T$, $(\tau \geq T)$, событие потока не наступило, и процесс $\lambda(t)$ перешел на этом интервале из состояния λ_1 в состояние λ_1 , и на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ наступит событие потока интенсивности λ_1 , при этом процесс $\lambda(t)$ на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ не сменит своего состояния. Данная вероятность

запишется в виде $p_{11}(t)(1-p)(1-e^{-\lambda_1\Delta t}) = p_{11}(t)(1-p)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$.

Соответствующая ей плотность вероятности $\tilde{p}_{11}^{(1)}(t)$ находится из равенства

$$\int_t^{t+\Delta t} \tilde{p}_{11}^{(1)}(u)du = \tilde{p}_{11}^{(1)}(t)\Delta t + o(\Delta t) = p_{11}(t)(1-p)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделив обе части

данного равенства на Δt , и устремив $\Delta t \rightarrow 0$, находим $\tilde{p}_{11}^{(1)}(t)$ в виде

$\tilde{p}_{11}^{(1)}(t) = (1-p)\lambda_1 p_{11}(t)$. Аналогичная совместная вероятность того, что на

интервале $(0, t)$, $t = \tau - T$, ($\tau \geq T$), событие потока не наступило, и процесс $\lambda(t)$

перешел на этом интервале из состояния λ_1 в состояние λ_2 , и на полуинтервале

$[t, t + \Delta t)$ наступит событие потока интенсивности λ_2 , при этом процесс $\lambda(t)$ на

полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ вернется в состояние λ_1 запишется в виде

$p_{12}(t)q(1-e^{-\lambda_2\Delta t}) = p_{12}(t)q\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$. Таким образом, плотность вероятности

$\tilde{p}_{11}^{(2)}(t)$, соответствующая этой совместной вероятности, запишется, как

$\tilde{p}_{11}^{(2)}(t) = p_{12}(t)q\lambda_2$. Остальные совместные вероятности для других значений

$j, k = 1, 2$, выпишутся в виде

$$p_{11}(t)p\lambda_1\Delta t + o(\Delta t), p_{12}(t)(1-q)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{21}(t)p\lambda_1\Delta t + o(\Delta t), p_{21}(t)(1-p)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{22}(t)q\lambda_2\Delta t + o(\Delta t), p_{22}(t)(1-q)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t).$$

Соответствующие этим совместным вероятностям плотности вероятности выпишутся в виде

$$\tilde{p}_{12}^{(2)}(t) = p_{12}(t)(1-q)\lambda_2, \tilde{p}_{12}^{(1)}(t) = p_{11}(t)p\lambda_1,$$

$$\tilde{p}_{21}^{(2)}(t) = p_{22}(t)q\lambda_2, \tilde{p}_{21}^{(1)}(t) = p_{21}(t)(1-p)\lambda_1,$$

$$\tilde{p}_{22}^{(2)}(t) = p_{22}(t)(1-q)\lambda_2, \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) = p_{21}(t)p\lambda_1.$$

Тогда для плотностей вероятности $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, справедливы следующие формулы:

$$\tilde{p}_{11}(t) = \tilde{p}_{11}^{(1)}(t) + \tilde{p}_{11}^{(2)}(t) = p_{11}(t)(1-p)\lambda_1 + p_{12}(t)q\lambda_2$$

$$\tilde{p}_{12}(t) = \tilde{p}_{12}^{(1)}(t) + \tilde{p}_{12}^{(2)}(t) = p_{11}(t)p\lambda_1 + p_{12}(t)(1-q)\lambda_2, \quad (2.2.3)$$

$$\tilde{p}_{21}(t) = \tilde{p}_{21}^{(1)}(t) + \tilde{p}_{21}^{(2)}(t) = p_{21}(t)(1-p)\lambda_1 + p_{22}(t)q\lambda_2,$$

$$\tilde{p}_{22}(t) = \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) + \tilde{p}_{22}^{(2)}(t) = p_{21}(t)p\lambda_1 + p_{22}(t)(1-q)\lambda_2.$$

Для введенных вероятностей $p_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, справедлива следующая система дифференциальных уравнений:

$$p_{11}'(t) = -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(t) + \alpha_2 p_{12}(t),$$

$$p_{12}'(t) = -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{12}(t) + \alpha_1 p_{11}(t),$$

$$p_{21}'(t) = -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{21}(t) + \alpha_2 p_{22}(t),$$

$$p_{22}'(t) = -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(t) + \alpha_1 p_{21}(t)$$

с граничными условиями $p_{11}(0) = 1$, $p_{12}(0) = 0$, $p_{22}(0) = 1$, $p_{21}(0) = 0$, решая которые, находим в явном виде значения вероятностей $p_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$:

$$p_{11}(t) = \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2 t} \right], \quad p_{12}(t) = \frac{\alpha_1}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right],$$

$$p_{21}(t) = \frac{\alpha_2}{z_2 - z_1} \left[e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t} \right], \quad p_{22}(t) = \frac{1}{z_2 - z_1} \left[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2 t} \right],$$
(2.2.4)

где z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Подставляя (2.2.4) в (2.2.3), получаем (2.2.2). Лемма доказана.

Лемма 2.2.2. *Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, определяются в виде*

$$q_{11}(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$q_{21}(T) = \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \quad q_{22}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2}. \quad (2.2.5)$$

Доказательство. Получим систему дифференциальных уравнений для нахождения вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$. Введем в рассмотрение вероятность $q_{ij}(\tau + \Delta\tau)$, $i, j = 1, 2$. Определим вероятность $q_{11}(\tau + \Delta\tau)$. Для этого рассмотрим все возможные варианты поведения процесса $\lambda(t)$ на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ — достаточно малая величина:

1) в момент времени τ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_1 при условии, что в момент времени $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии λ_1 , и за время $\Delta\tau$ (на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$) пребывание процесса в состоянии λ_1 не закончится, и событие потока не наступит. Вероятность такой ситуации есть $q_{11}(\tau)e^{-\alpha_1\Delta\tau}e^{-\lambda_1\Delta\tau} = q_{11}(\tau)(1 - \alpha_1\Delta\tau - \lambda_1\Delta\tau) + o(\Delta\tau)$;

2) в момент времени τ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_1 при условии, что в момент времени $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии λ_1 , и за время $\Delta\tau$ (на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$) пребывание процесса в состоянии λ_1 не закончится, наступит событие потока, и с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии λ_1 . Вероятность такой ситуации есть $q_{11}(\tau)e^{-\alpha_1\Delta\tau}(1 - p)(1 - e^{-\lambda_1\Delta\tau}) = q_{11}(\tau)(1 - \alpha_1\Delta\tau)(1 - p)\lambda_1\Delta\tau + o(\Delta\tau) = q_{11}(\tau)(1 - p)\lambda_1\Delta\tau + o(\Delta\tau)$;

3) в момент времени τ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_2 при условии, что в момент времени $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии λ_1 , и за время $\Delta\tau$ (на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$) пребывание процесса в состоянии λ_2 не закончится, наступит событие потока, и с вероятностью q процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_2 в состояние λ_1 . Вероятность такой ситуации есть $q_{12}(\tau)e^{-\alpha_2\Delta\tau}q(1 - e^{-\lambda_2\Delta\tau}) = q_{12}(\tau)(1 - \alpha_2\Delta\tau)q\lambda_2\Delta\tau + o(\Delta\tau) = q_{12}(\tau)q\lambda_2\Delta\tau + o(\Delta\tau)$;

4) в момент времени τ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_2 при условии, что в момент времени $\tau = 0$ процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии λ_1 , и за время $\Delta\tau$ (на интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$) событие потока не наступит, пребывание процесса в состоянии λ_2 закончится, и процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_2 в состояние λ_1 . Вероятность такой ситуации есть $q_{12}(\tau)(1 - e^{-\alpha_2\Delta\tau})e^{-\lambda_2\Delta\tau} = q_{12}(\tau)\alpha_2\Delta\tau + o(\Delta\tau)$.

Другие ситуации имеют вероятность $o(\Delta\tau)$. Тогда

$$q_{11}(\tau + \Delta\tau) = (1 - (\alpha_1 + p\lambda_1)\Delta\tau)q_{11}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)\Delta\tau q_{12}(\tau) + o(\Delta\tau).$$

Переносим в данном равенстве $q_{11}(\tau)$ в левую часть, деля обе его части на $\Delta\tau$ и устремляя $\Delta\tau \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение для нахождения $q_{11}(\tau)$:

$$q_{11}'(\tau) = -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{11}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau).$$

Аналогичным образом находятся дифференциальные уравнения для остальных вероятностей $q_{12}(\tau)$, $q_{21}(\tau)$, $q_{22}(\tau)$. Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} q_{11}'(\tau) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{11}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau), \\ q_{12}'(\tau) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)q_{12}(\tau) + (\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau), \\ q_{21}'(\tau) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)q_{22}(\tau) + (\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau), \\ q_{22}'(\tau) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)q_{21}(\tau) + (\alpha_2 + q\lambda_2)q_{22}(\tau) \end{aligned}$$

с граничными условиями $q_{11}(0) = 1$, $q_{12}(0) = 0$, $q_{22}(0) = 1$, $q_{21}(0) = 0$. Решая данную систему дифференциальных уравнений, получаем вероятности $q_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, после чего, полагая $\tau = T$, приходим к (2.2.5). Лемма доказана.

Теперь найдем неизвестные вероятности $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, из (2.2.1).

Лемма 2.2.3. Условные (финальные вероятности) $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, определяются в виде

$$\begin{aligned} \pi_1(0|T) &= \frac{\pi_{21}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \quad \pi_2(0|T) = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \\ \pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2} \left[(1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1\alpha_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}) \right], \\ \pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2} \left[q\lambda_2\alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}) \right], \\ z_1 z_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

где π_i , $i = 1, 2$, определены в (1.2.1).

Доказательство. Для нахождения вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, в формуле (2.2.1), введем π_{ij} – вероятность того, что за время, которое пройдет от момента

$\tau = 0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_i в состояние λ_j , $i, j = 1, 2$.

Тогда относительно введенных вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, и π_{ij} , $i, j = 1, 2$, так как моменты наступления событий наблюдаемого потока порождают вложенную цепь Маркова, будет справедлива следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_1(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21}, \\ \pi_2(0|T) &= \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22}, \\ \pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) &= 1,\end{aligned}$$

выражая из которой вероятности $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, получим

$$\pi_1(0|T) = \frac{\pi_{21}}{\pi_{12} + \pi_{21}}, \quad \pi_2(0|T) = \frac{\pi_{12}}{\pi_{12} + \pi_{21}}. \quad (2.2.7)$$

При этом для вероятностей π_{ij} , $i, j = 1, 2$, выписывается следующая система линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, & \pi_{21} &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \\ \pi_{12} &= q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, & \pi_{22} &= q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \\ \pi_{11} + \pi_{12} &= 1, & \pi_{21} + \pi_{22} &= 1,\end{aligned} \quad (2.2.8)$$

где вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, определены в (2.2.5), а p_{jk} , $j, k = 1, 2$, — вероятность того, что в течение интервала между моментом времени $t = 0$ и моментом наступления следующего события потока процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_j в состояние λ_k , $j, k = 1, 2$. Вероятности p_{jk} , $j, k = 1, 2$, так как $t \geq 0$, определяются в виде

$$p_{jk} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{jk}(t) dt, \quad (2.2.9)$$

где плотности вероятности $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, определены в (2.2.2). Подставляя плотности вероятности $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, из (2.2.2) в формулу (2.2.9), находим вероятности p_{jk} , $j, k = 1, 2$, в виде

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \lambda_1(1-p) \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{z_1 z_2} + \lambda_2 q \frac{\alpha_1}{z_1 z_2}, \quad p_{12} = \lambda_1 p \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{z_1 z_2} + \lambda_2(1-q) \frac{\alpha_1}{z_1 z_2}, \\
p_{22} &= \lambda_2(1-q) \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{z_1 z_2} + \lambda_1 p \frac{\alpha_2}{z_1 z_2}, \quad p_{21} = \lambda_2 q \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{z_1 z_2} + \lambda_1(1-p) \frac{\alpha_2}{z_1 z_2}, \\
z_1 z_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Подставляя далее вероятности p_{jk} , $j, k = 1, 2$, из (2.2.10), и вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, из (2.2.5) в (2.2.8), получаем выражения для вероятностей π_{ij} , $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2} ((1-p)\lambda_1 \alpha_2 + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\
\pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2} ((1-q)\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + p\lambda_1 \alpha_2 - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\
\pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2} (q\lambda_2 \alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) - \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})), \\
\pi_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2} (p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2) + (1-q)\lambda_2 \alpha_1 + \lambda_1 \lambda_2(1-p-q)(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T})),
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

где π_i , $i = 1, 2$, определены в (1.2.1), $z_1 z_2$ определена в (2.2.10).

После подстановки полученных в (2.2.11) вероятностей π_{ij} , $i, j = 1, 2$, в формулы (2.2.7), выражения для $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, запишутся в виде (2.2.6). Лемма доказана.

Теорема 2.2.1. *Плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока имеет вид*

$$\begin{aligned}
p_T(\tau) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \\
\gamma(T) &= \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1(T) - \lambda_2 \pi_2(T)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_1(T) &= \pi_1 - (\pi_1 - \pi_1(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T}, \\ \pi_2(T) &= \pi_2 - (\pi_2 - \pi_2(0|T))e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

где $z_{1,2}$ определены в (2.2.2); $\pi_i, i=1,2$, – в (1.2.1); $\pi_i(0|T), i=1,2$, – в (2.2.6); $\pi_i(T)$ – вероятность того, что в момент времени $\tau = T$ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии $\lambda_i, i=1, 2$.

Доказательство. Подставляя сначала (2.2.2) в (2.2.1), затем (2.2.5) и (2.2.6) в (2.2.1) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, учитывая при этом, что $t = \tau - T$, получаем (2.2.12). Теорема доказана.

Заметим, что положив в (2.2.12) мертвое время $T = 0$, получим формулу (1.2.13) для плотности вероятности $p(\tau)$ в случае отсутствия мертвого времени.

2.3 Совместная плотность вероятности значений длительности смежных интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока в условиях мертвого времени

В данном подразделе приводится вывод совместной плотности вероятности значений длительностей двух смежных интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока. Показывается, что рассматриваемый поток событий в общем случае является коррелированным потоком и формулируются условия, при которых наблюдаемый поток становится рекуррентным.

Полученные в подразделах 2.2, 2.3 результаты дают возможность решить задачу оценки неизвестных параметров, определяющих модулированный синхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени.

2.3.1 Явный вид совместной плотности вероятности наблюдаемого потока в условиях мертвого времени

Пусть τ_1, τ_2 – значения случайных величин длительностей смежных интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2.2), $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$.

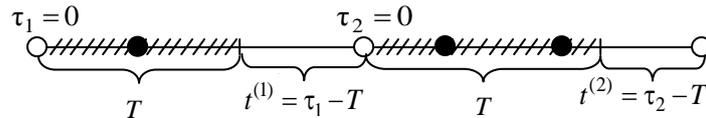


Рисунок 2.2 - Смежные интервалы между соседними наблюдаемыми событиями потока

Тогда τ_1, τ_2 можно представить, как $\tau_1 = T + t^{(1)}, \tau_2 = T + t^{(2)}$, где $t^{(i)}, i = 1, 2$, – значения длительностей интервалов $(T, \tau_i), i = 1, 2$, между моментом окончания мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока. Тогда $\tau_1 = 0$ – момент наступления первого наблюдаемого события потока, $\tau_2 = 0$ – момент наступления второго наблюдаемого события потока. Поскольку последовательность моментов $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления наблюдаемых событий потока порождает вложенную цепь Маркова, то формула для совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ запишется в виде:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), \\ \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

где $\pi_i(0|T), i = 1, 2$, определены в (2.2.6); $q_{ij}(T), q_{ks}(T), i, j, k, s = 1, 2$, определены в (2.2.5); $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, $j, k, s, n = 1, 2$, определены в (2.2.4), в которых нужно заменить t на $t^{(1)}$ либо на $t^{(2)}$.

Теорема 2.3.1. *Модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является*

коррелированным потоком, и совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ определяется в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \frac{\lambda_1 \lambda_2 (1-p-q)}{z_1 z_2} \gamma(T)(1-\gamma(T)) \times$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \quad (2.3.2)$$

где $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$, $k=1, 2$, определены в (2.2.12) для $\tau = \tau_k$, $k=1, 2$; z_1, z_2 определены в (2.2.2); $z_1 z_2$ определена в (2.2.10).

Доказательство. Подставляя в (2.3.1) сначала $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, $j, k, s, n=1, 2$, определенные в (2.2.2) для $t = t^{(i)}$, $i=1, 2$, затем $q_{ij}(T)$, $q_{ks}(T)$, $i, j, k, s=1, 2$, определенные в (2.2.5), и, наконец, $\pi_i(0|T)$, $i=1, 2$, определенные в (2.2.6), и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получаем совместную плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ в виде (2.3.2).

Из (2.3.2) следует, что модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. *Теорема доказана*

Не составляет труда получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока событий такие, как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсию и ковариацию.

$$M(\tau) = T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2}, \quad D(\tau) = 2\left(\frac{\gamma(T)}{z_1^2} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2^2}\right) - \left(\frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2}\right)^2,$$

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T} \gamma(T)(1-\gamma(T)) \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) \frac{(z_2 - z_1)^2}{(z_1 z_2)^3}.$$

2.3.2 Условия рекуррентности модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени

Рассмотрим частные случаи, когда модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится

рекуррентным потоком. Используя выражение (2.2.12) для $\gamma(T)$, $\pi_1(T)$, $\pi_2(T)$ и выражение (2.2.6) для $\pi_1(0|T)$, $\pi_2(0|T)$, получаем

$$\begin{aligned} & \gamma(T)(1-\gamma(T)) = \\ & = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)((\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0))((p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)}{\left[(z_2 - z_1)(z_1z_2 - \lambda_1\lambda_2(1-p-q)e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2) \right]^2} \times \\ & \quad \times \left\{ z_1z_2 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T} (2z_1z_2 - (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(z_1 + z_2)) + \right. \\ & \quad \left. + e^{-2(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T} (z_1z_2 - (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))) \right\} z_1z_2, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где $\pi_i(0)$, $i=1,2$, определены в формуле (1.2.7), z_1, z_2 определены в (2.2.2), z_1z_2 определена в (2.2.10).

Обозначим $\varphi(T)$ выражение в фигурной скобке формулы (2.3.3). После преобразования $\varphi(T)$ примет вид

$$\begin{aligned} \varphi(T) = & z_1z_2(1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})^2 + (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T} + \\ & + (\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T} (1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T}), \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любых $T \geq 0$ имеет место $\varphi(T) > 0$.

Тогда окончательно совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ выпишется в виде

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) = & 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ & p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \\ & + e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T} \frac{\lambda_1\lambda_2(1-p-q)}{z_1z_2} \gamma(T)(1-\gamma(T)) \times \\ & \times (z_1e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2e^{-z_2(\tau_2-T)})(z_1e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2e^{-z_2(\tau_2-T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где $\gamma(T)(1-\gamma(T))$ определена в (2.3.3), z_1, z_2 определены в (2.2.2), z_1z_2 определена в (2.2.10).

1) Из формулы (2.3.4) следует первое условие факторизации совместной плотности (2.3.4). Если $1-p-q=0$, то совместная плотность (2.3.4) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$.

При этом плотность вероятности $p_T(\tau)$ (2.2.12) примет вид:

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T,$$

$$p_T(\tau) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, \tau \geq T,$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (z_2 - \lambda_1 \pi_1 - \lambda_2 \pi_2 + (\lambda_1(\pi_1 - q) + \lambda_2(\pi_2 - p))) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

$$1 - \gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} (-z_1 + \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 - (\lambda_1(\pi_1 - q) + \lambda_2(\pi_2 - p))) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + p\lambda_1 + q\lambda_2)T},$$

где z_1, z_2 определены в (2.2.2), $\pi_i, i = 1, 2$, определены в (1.2.1).

2) Из формулы (2.3.3) для произведения $\gamma(T)(1-\gamma(T))$ следует второе условие факторизации совместной плотности (2.3.4). Если $(\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$, то совместная плотность (2.3.4) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, $\tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T$, при этом $\gamma(T) = 1$.

Тогда плотность вероятности $p_T(\tau)$ (2.2.12) примет вид:

$$p_T(\tau) = 0, 0 \leq \tau < T,$$

$$p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}, \tau \geq T, \quad (2.3.5)$$

где z_1 определена в (2.2.2).

Подчеркнем, что полученные условия факторизации идентичны условиям факторизации (рекуррентности) (1.4.1) для случая отсутствия мертвого времени.

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ порождает вложенную цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеперечисленных условий факторизации или их комбинации справедлива теорема, аналогичная теореме 1.4.1 в подразделе 1.4.

Теорема 2.3.2. Совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ при выполнении одного (либо обоих) условий (1.4.1) факторизуется для любого k :
 $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)\dots p_T(\tau_k)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4.

Таким образом, модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком, если выполняется одно (либо оба) из условий рекуррентности (1.4.1).

При обсуждении условий рекуррентности необходимо рассмотреть результаты, полученные для апостериорных вероятностей модулированного синхронного потока событий в разделе 1, подраздел 1.5.2 диссертационной работы.

1) Для первого условия факторизации наблюдаемого потока $1 - p - q = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k наступления события потока имеет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = q, k = 1, 2, \dots \quad (2.3.6)$$

Таким образом, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, а определяется лишь своим значением в момент наступления события наблюдаемого потока. В данной ситуации имеется некоторая близость рассматриваемого потока событий к простейшему потоку в том смысле, что апостериорная вероятность первого состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий потока принимает постоянное значение, равное q .

2) Для второго условия факторизации потока $(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$ апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ состояния процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k запишется в виде

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{q\lambda_2 + [(1-p)\lambda_1 - q\lambda_2]w(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)w(\lambda_1 | t_k - 0)}, k = 1, 2, \dots$$

То есть апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$, наоборот, будет зависеть от предыстории, несмотря на то, что поток рекуррентный, и плотность вероятностей $p_T(\tau)$ имеет экспоненциальное распределение (2.3.5).

При одновременном выполнении обоих условий факторизации рассматриваемого потока событий апостериорная вероятность принимает вид (2.3.6), и, следовательно, имеет место ее независимость от предыстории.

2.4 Оценка длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия

Как отмечалось выше, в течение периода мертвого времени происходит потеря сообщений потока. Вследствие этого, чтобы оценить потери (т.е. оценить количество потерянных событий потока), возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить длительность периода мертвого времени T .

В рамках подраздела 2.4 рассмотрим задачу оценки длительности мертвого времени T методом максимального правдоподобия [158, 159].

Параметры модулированного синхронного дважды стохастического потока событий $\alpha_i, \lambda_i, i = 1, 2$ ($0 \leq \lambda_2 < \lambda_1$), p ($0 \leq p \leq 1$), q ($0 \leq p \leq 1$) полагаются известными, длительность же мертвого времени T считается неизвестной. Необходимо по наблюдаемым моментам $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ наступления событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, в момент окончания наблюдений t оценить длительность мертвого времени \hat{T} , используя метод максимального правдоподобия.

2.4.1 Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока (рис. 2.3), $\tau_k > 0, k = 1, 2, \dots$

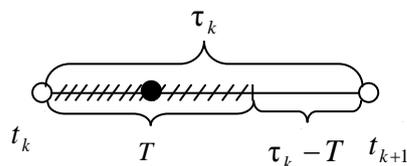


Рисунок 2.3 - Интервал между соседними наблюдаемыми событиями потока

Так как модулированный синхронный поток событий функционирует в стационарном режиме, то плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого

потока $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). Таким образом, без потери общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, то есть $\tau = 0$.

Плотность вероятности $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, определена в (2.2.12).

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \dots, \tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots,$ — последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком на интервале наблюдения (t_0, t) значений длительностей интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока.

При построении функции правдоподобия учитывается ранее полученная информация о потоке, а именно:

1) из конструкции наблюдаемого потока событий, изображенного на рис. 1.3, следует, что длительность мертвого времени $T < \tau_{\min}, \tau_{\min} = \min(\tau_j), j = 1, 2, \dots, k$;

2) наблюдаемый поток событий, согласно теореме 2.3.1, является в общем случае коррелированным потоком событий;

3) нахождение явного вида k -мерной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ для модулированного синхронного потока событий является невыполнимой задачей;

4) согласно конструкции наблюдаемого потока событий, изображенного на рис. 1.3, вместе с увеличением длительности мертвого времени T возрастает количество событий, недоступных наблюдению (возрастают потери информации), что приводит к уменьшению корреляционных связей в последовательности измеренных значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$;

5) если выполняется одно (или оба) из условий факторизации модулированного синхронного потока событий, описанных в подразделе 2.3.2 работы, то рассматриваемый поток событий становится рекуррентным, что

означает независимость величин $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$. Тогда при выполнении первого условия факторизации потока ($1 - p - q = 0$) оценка длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия удовлетворяет неравенству $\hat{T} \leq \tau_{\min}$. При выполнении второго условия факторизации потока ($(\alpha_1 + p\lambda)\pi_1(0) - (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(0) = 0$), очевидно, что оценка длительности мертвого времени, полученная методом максимального правдоподобия, есть $\hat{T} = \tau_{\min}$.

Описанные выше факты, учитывая коррелированность наблюдаемого потока событий, позволяют использовать для дальнейшей оценки длительности мертвого времени метод максимального правдоподобия, пренебрегая зависимостью величин $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, а именно: представить k -мерную плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ в виде произведения одномерных плотностей $p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)\dots p_T(\tau_k)$, явный вид которых определен формулой (2.2.12). Данный подход вносит погрешность при вычислении оценки длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия.

Упорядочим измеренные величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}, k = 1, 2, \dots$. Тогда целевая функция (функция правдоподобия) запишется в виде

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, 0 < \tau_{\min} < T,$$

$$L(\lambda_i, \alpha_i, p, q, T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), T \leq \tau_{\min}.$$

Так как основная задача исследования заключается в построении оценки значения длительности мертвого времени \hat{T} (в предположении, что все остальные параметры потока $\lambda_i, \alpha_i, i = 1, 2, p, q$ известны), то согласно методу максимального правдоподобия, ее решение есть нахождение глобального максимума функции правдоподобия по неизвестному параметру T :

$$\begin{aligned}
L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) &= \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) = \\
&= \prod_{j=1}^k \left\{ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau^{(j)}-T)} + (1-\gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau^{(j)}-T)} \right\} \Rightarrow \max_T, 0 \leq T \leq \tau_{\min},
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

где z_1, z_2 определены в (2.2.2); $\gamma(T)$ определена в (2.2.12).

Значение T , при котором (2.4.1) достигает своего глобального максимума, есть оценка \hat{T} значения длительности мертвого времени: $\hat{T} = \hat{T}_{\text{МП}}$ (МП-оценка).

2.4.2 Решение оптимизационной задачи

Сделаем переобозначение: $\tau_{\min} = \tau_m$. Так как функция правдоподобия (2.4.1) отлична от нуля при $0 \leq T \leq \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0, j = \overline{2, k}$ для $T > \tau_m$.

Изучим поведение функции $p_T(\tau_m), 0 \leq T \leq \tau_m$, как функции переменной T . В последующем изложении ситуация, когда принимается $\tau_m = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. Рассмотрим производную $p'_T(\tau_m)$ функции $p_T(\tau_m)$ по переменной T . Производная примет вид

$$\begin{aligned}
p'_T(\tau_m) &= \frac{F_1(T)e^{-z_1(\tau_m-T)} - F_2(T)e^{-z_2(\tau_m-T)}}{(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)}, \tag{2.4.2} \\
F_1(T) &= z_1[(\beta_1 + \beta_2)z_1z_2 - z_1f(T) - f'(T)], \\
F_2(T) &= z_2[(\beta_1 + \beta_2)z_1z_2 - z_2f(T) - f'(T)], \\
f(T) &= P_1 + P_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T)}, \\
f'(T) &= -(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 + \beta_2)z_1z_2 \frac{(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^2(T)}, \\
F(T) &= z_1z_2 - Pe^{-(\beta_1 + \beta_2)T} > 0, 0 \leq T \leq \tau_m,
\end{aligned}$$

где $\beta_1 = \alpha_1 + p\lambda_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + q\lambda_2$, $P_1 = \lambda_1\alpha_2(1-p) + q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1)$,
 $P_2 = \lambda_2\alpha_1(1-q) + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha_2)$, $P = \lambda_1\lambda_2(1-p-q)$, $z_1z_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1$;
 z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Лемма 2.4.1. Производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m при $T=0$ ($p'_0(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Так как τ_m – любое неотрицательное число ($\tau_m \geq 0$), то $p'_0(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m . Подставляя $T=0$ в (2.4.2), получаем

$$p'_0(\tau_m) = \frac{C}{(z_2 - z_1)A^2} \left\{ z_1 e^{-z_1\tau_m} (z_2 A - C) - z_2 e^{-z_2\tau_m} (z_1 A - C) \right\}, \tau_m \geq 0, \quad (2.4.3)$$

где $A = P_1 + P_2$, $C = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$; P_1, P_2 определены в (2.4.2), z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Значение производной (2.4.3) в точке $\tau_m = 0$ примет вид

$$p'_0(0) = p'_0(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0, \quad (2.4.4)$$

где A, C определены в (2.4.3).

Предел функции $p'_0(\tau_m)$ при $\tau_m \rightarrow \infty$ определится в виде

$$p'_0(\infty) = \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'_0(\tau_m) = \pm 0. \quad (2.4.5)$$

Исследуем функцию $p'_0(\tau_m)$ ($\tau_m > 0$) на присутствие нулей, то есть пересекает ли функция $p'_0(\tau_m)$ ось абсцисс, и сколько раз. Для этого рассмотрим уравнение $p'_0(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (2.4.3), приводится к виду

$$e^{-(z_2 - z_1)\tau_m} = \frac{z_1(z_2 A - C)}{z_2(z_1 A - C)}, \tau_m > 0. \quad (2.4.6)$$

Обозначим $B = B_1 / B_2$; $B_1 = z_1(z_2 A - C)$, $B_2 = z_2(z_1 A - C)$. Подчеркнем, что если $B_2 = 0$, то $z_1 A - C = 0$, то есть $z_1 A = C$. Тогда $z_2 A - C = (z_2 - z_1)A > 0$ и из (2.4.3) следует, что $p'_0(\tau_m) > 0$, $\tau_m \geq 0$.

Докажем, что $B_1 = z_1(z_2 A - C) > 0$ всегда.

Преобразовывая B_1 , получаем

$$B_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right\} > \\ > \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2} \right\}, \quad (2.4.7)$$

где A определена в (2.4.3); β_1, β_2 определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Покажем, что правая часть неравенства (2.4.7) всегда строго больше нуля.

Для этого рассмотрим следующие ситуации:

1) $\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2 > 0$, тогда

$$B_1 > \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2) \right\} = \\ = z_1^2 \left\{ p\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \alpha_1(\alpha_1 + p\lambda_1 + \alpha_2 + q\lambda_2) \right\} > 0;$$

2) $\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2 = 0$, тогда

$$B_1 > \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) \right\} = z_1^2 (\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2) > 0;$$

3) $\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2 < 0$, тогда

$$B_1 > \frac{1}{2} z_1^2 \left\{ -2A + (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2) + (\beta_1 + \beta_2)(-\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_1 + \alpha_2) \right\} = \\ = z_1^2 \left\{ \beta_2(\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha_2(\beta_1 + \beta_2) \right\} = z_1^2 \left\{ \beta_2(\lambda_2 - \lambda_1 + \alpha_2) + \alpha_2\beta_1 \right\} > \\ > z_1^2 (\beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_1) > 0.$$

Тогда $B_1 = z_1(z_2A - C) > 0$. Таким образом, в уравнении (2.4.6) имеют место два варианта: 1) $B_1 > 0, B_2 < 0$; 2) $B_1 > 0, B_2 > 0$.

Для первого варианта $B < 0$, и уравнение (2.4.6) не имеет решения. Для второго варианта $B > 1$, так как $B_1 - B_2 = (z_2 - z_1)C > 0$, и уравнение (2.4.6) также не имеет решения.

Отсюда следует, что производная $p'_0(\tau_m)$ не достигает нуля для $\tau_m > 0$. Тогда (2.4.5) принимает вид $p'_0(\infty) = +0$. Объединение (2.4.4), (2.4.5) и утверждения $p'_0(\tau_m) \neq 0, \tau_m > 0$ доказывает утверждение леммы. Тогда плотность

вероятности $p_T(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной T в точке $T=0$ ($\tau_m \geq 0$).

Лемма доказана.

Лемма 2.4.2. Производная $p'_T(\tau_m)$ при $T = \tau_m$ ($\tau_m \geq 0$) строго больше нуля ($p'_{T=\tau_m}(\tau_m) = p'(\tau_m) > 0$).

Доказательство. Подставляя $T = \tau_m$ в (2.4.2), получаем, что

$$p'(\tau_m) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}}{(z_1 z_2 - P e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m})^2} X(\tau_m) \right\},$$

$$X(\tau_m) = C + P(z_1 + z_2)(1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}), \tau_m \geq 0, \quad (2.4.8)$$

где $\beta_1, \beta_2, P_1, P_2, P$ определены в (2.4.2); C определена в (2.4.3), z_1, z_2 определены в (2.2.2), $z_1 z_2$ определена в (2.2.10).

Покажем, что $X(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$.

Значение $X(\tau_m)$ в точке $\tau_m = 0$ примет вид $X(\tau_m = 0) = C > 0$.

Предел функции $X(\tau_m)$ при $\tau_m \rightarrow \infty$ определится в виде

$$\begin{aligned} X(\tau_m = \infty) &= \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} X(\tau_m) = C + P(z_1 + z_2) = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + P(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 + \lambda_2) = \\ &= z_1 z_2 (\lambda_1 (1 - p) + \lambda_2 (1 - q)) \geq 0. \end{aligned}$$

Исследуем производную $X'(\tau_m)$, которая запишется в виде

$$X'(\tau_m) = P(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 + \lambda_2)(\beta_1 + \beta_2)e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}.$$

Знак производной $X'(\tau_m)$ зависит от параметра P .

1) Если $P > 0$, то $X'(\tau_m) > 0$, и $X(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$ (возрастает от $X(0) = C > 0$ до $X(\infty) = z_1 z_2 (\lambda_1 (1 - p) + \lambda_2 (1 - q)) > 0$). В данном случае, так как $P = \lambda_1 \lambda_2 (1 - p - q) > 0$, то $p + q < 1$.

2) Если $P = 0$, то $X'(\tau_m) = 0$, и $X(\tau_m) = C > 0$ для любых $\tau_m \geq 0$.

3) Если $P < 0$, то $X'(\tau_m) < 0$, и $X(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$ (убывает от $X(0) = C > 0$ до

$X(\infty) = z_1 z_2 (\lambda_1 (1-p) + \lambda_2 (1-q)) \geq 0$. В данном случае, так как $P = \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) < 0$, то $p+q > 1$.

Таким образом, получаем, что $X(\tau_m) > 0$ для $0 \leq \tau_m < \infty$. То есть знак производной $p'(\tau_m)$ определяется множителем $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$.

Рассмотрим $p'(\tau_m)$, как функцию переменной τ_m ($\tau_m \geq 0$).

Значение производной (2.4.8) в точке $\tau_m = 0$ примет вид

$$p'(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0,$$

где C, A определены в (2.4.3).

Предел функции (2.4.8) при $\tau_m \rightarrow \infty$ определится в виде

$$p'(\tau_m = \infty) = \lim_{\tau_m \rightarrow \infty} p'(\tau_m) = C/(\beta_1 + \beta_2) > 0,$$

где C определена в (2.4.3); β_1, β_2 определены в (2.4.2).

Знак разности $p'(\tau_m = 0) - p'(\tau_m = \infty) = C(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)/(A^2(\beta_1 + \beta_2))$ определяется знаком множителя $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$: если $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) > 0$, то $p'(\tau_m = 0) > p'(\tau_m = \infty)$; если $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) < 0$, то $p'(\tau_m = 0) < p'(\tau_m = \infty)$; если $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) = 0$, то $p'(\tau_m = 0) = p'(\tau_m = \infty)$.

Из вида производной (2.4.8) следует, что в случае, когда $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \geq 0$, функция $p'(\tau_m) > 0$, то есть функция $p_T(\tau_m)$ есть возрастающая функция переменной T в точке $T = \tau_m$ ($\tau_m \geq 0$). Случай $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) < 0$ требует отдельного рассмотрения. Для этого исследуем вторую производную $p''(\tau_m)$ функции $p(\tau_m)$. Производная $p''(\tau_m)$, с учетом (2.4.8), примет вид

$$p''(\tau_m) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) z_1 z_2 \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}}{F^3(\tau_m)} Y(\tau_m), \quad (2.4.9)$$

$$Y(\tau_m) = \left\{ C + (z_1 + z_2)P - (z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)P e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} \right\}, \tau_m \geq 0,$$

где C определена в (2.4.3); $\beta_1, \beta_2, P_1, P_2, P, F(T = \tau_m)$ определены в (2.4.2), z_1, z_2 определены в (2.2.2), $z_1 z_2$ определена в (2.2.10).

Так как рассматривается случай $(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) < 0$, то множитель в (2.4.9): $-(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)z_1 z_2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} / F^3(\tau_m) > 0$, так как $F(T) > 0$ для $0 \leq T \leq \tau_m$ согласно (2.4.2).

Тогда знак производной $p''(\tau_m)$ определяется знаком выражения $Y(\tau_m)$. Исследуем функцию $Y(\tau_m)$.

Значение $Y(\tau_m)$ из (2.4.9) в точке $\tau_m = 0$ примет вид

$$Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2),$$

где C определена в (2.4.3); β_1, β_2, P определены в (2.4.2). При этом $Y(0) > 0$ либо $Y(0) < 0$, либо $Y(0) = 0$.

Предел $Y(\tau_m)$ из (2.4.9) при $\tau_m \rightarrow \infty$ определится в виде

$$Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P = z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) = z_1 z_2 (\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q)) \geq 0,$$

где C определена в (2.4.3); P определена в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Производная $Y'(\tau_m)$ примет вид

$$Y'(\tau_m) = (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)P e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m}, \tau_m \geq 0,$$

где β_1, β_2, P определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Так как $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2 > 0$, $e^{-(\beta_1 + \beta_2)\tau_m} > 0$, то знак производной $Y'(\tau_m)$ зависит от множителя P .

1) Если $P < 0$, то производная $Y'(\tau_m) < 0$ для $\tau_m \geq 0$. Тогда $Y(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m (убывает от $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2)$ до $Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P \geq 0$). Тогда, так как для убывающей функции $Y(0) > Y(\infty)$, то $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) > 0$. Отсюда следует, что $Y(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m , $0 \leq \tau_m < \infty$. Тогда производная $p''(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$, и $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$ (возрастает от $p'(0) = (C/A)^2 > 0$ до $p'(\infty) = C/(\beta_1 + \beta_2) > 0$). Таким образом, $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$).

2) Если $P = 0$, то $Y(\tau_m) = C > 0$ для $\tau_m \geq 0$. Тогда производная $p''(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$, и $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$ (возрастает

от $p'(0) = (C/A)^2 > 0$ до $p'(\infty) = C/(\beta_1 + \beta_2) > 0$). Таким образом, $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$).

3) Если $P > 0$, то $Y'(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$. Тогда получим, что $Y(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m (возрастает от $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2)$ до $Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P \geq 0$). В данном случае, так как для возрастающей функции $Y(0) < Y(\infty)$, то возможны три варианта.

3.1) $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) > 0$, тогда $Y(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m (возрастает от $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) > 0$ до $Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P > 0$). Значит, $Y(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$. Тогда производная $p''(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$, и $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$ (возрастает от $p'(0) = (C/A)^2 > 0$ до $p'(\infty) = C/(\beta_1 + \beta_2) > 0$). Таким образом, $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$).

3.2) $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) = 0$, тогда $Y(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m (возрастает от $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) = 0$ до $Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P > 0$). При этом $Y(\tau_m) = 0$ в единственной точке $\tau_m = 0$. Значит, $Y(\tau_m)$ – неотрицательная функция переменной τ_m , $\tau_m \geq 0$, при этом $Y(\tau_m) = 0$ для $\tau_m = 0$. Тогда производная $p''(\tau_m) \geq 0$ для $\tau_m \geq 0$, при этом $p''(\tau_m) = 0$ для $\tau_m = 0$. Отсюда следует, что производная $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m , $\tau_m > 0$ (возрастает от $p'(0) = (C/A)^2 > 0$ до $p'(\infty) = C/(\beta_1 + \beta_2) > 0$), при этом в точке $\tau_m = 0$ производная $p'(\tau_m)$ – неубывающая (невозрастающая) функция переменной τ_m . Но так как в точке $\tau_m = 0$ имеет место $p'(\tau_m = 0) = (C/A)^2 > 0$, то производная $p'(\tau_m) > 0$ для $\tau_m \geq 0$.

3.3) $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$, тогда $Y(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m (возрастает от $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$ до $Y(\infty) = C + (z_1 + z_2)P > 0$). При этом $Y(\tau_m) = 0$ в единственной точке $\tau_m = \tau_m^*$. Следовательно, поведение производной $p''(\tau_m)$ описывается следующими

вариантами: функция $p''(\tau_m) < 0$ для $0 \leq \tau_m < \tau_m^*$; функция $p''(\tau_m) = 0$ для $\tau_m = \tau_m^*$; функция $p''(\tau_m) > 0$ для $\tau_m > \tau_m^*$.

Для $0 \leq \tau_m < \tau_m^*$ производная $p'(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m для $\tau_m > \tau_m^*$ производная $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m , в точке $\tau_m = \tau_m^*$ производная $p'(\tau_m)$ достигает своего минимума.

Таким образом, при реализации варианта $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$ производная $p'(\tau_m)$ ($\tau_m > 0$) достигает своего глобального минимума в точке $\tau_m = \tau_m^*$. При этом точка τ_m^* определяется выражением:

$$\tau_m^* = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2) P}, P > 0, \quad (2.4.10)$$

где β_1, β_2, P определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2), $z_1 z_2$ определена в (2.2.10).

Подставляя (2.4.10) в (2.4.8), находим выражение для производной $p'(\tau_m)$ в точке минимума $\tau_m = \tau_m^*$:

$$p'(\tau_m^*) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \left\{ C + (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) \frac{(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)^2}{4P(\beta_1 + \beta_2)} \right\}, P > 0, \quad (2.4.11)$$

где C определена в (2.4.3); $\beta_1, \beta_2, P_1, P_2, P$ определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Производная $p'(\tau_m^*)$, определяемая в (2.4.11), строго больше нуля ($p'(\tau_m^*) > 0, P > 0$). Отсюда следует, что при реализации варианта $Y(0) = C - P(\beta_1 + \beta_2) < 0$ производная $p'(\tau_m) > 0$ ($\tau_m \geq 0$). Лемма доказана.

Далее изучим поведение производной $p'_T(\tau_m)$, как функции переменной T на интервале $(0, \tau_m)$.

Рассмотрим на предмет существования корней уравнение $p'_T(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (2.4.2), преобразуется в выражение

$$\Psi(T) = e^{-(z_2 - z_1)(\tau_m - T)}, \Psi(T) = \frac{F_1(T)}{F_2(T)}, 0 \leq T \leq \tau_m, \quad (2.4.12)$$

где $F_1(T), F_2(T)$ определены в (2.4.2). Так как, в принципе, τ_m может быть сколь угодно большим числом, то изучим поведение функции $\Psi(T)$ при $T \geq 0$.

Отметим, что $e^{-(z_2 - z_1)\tau_m} \leq e^{-(z_2 - z_1)(\tau_m - T)} \leq 1, 0 \leq T \leq \tau_m$.

Обозначим $h = 1 - p - q$, тогда $P = \lambda_1 \lambda_2 h$. Следовательно, величину $(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) = & -(\lambda_1 \lambda_2)^2 h^2 + \lambda_1 \lambda_2 [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)]h - \\ & - z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2) = x(h), -1 \leq h \leq 1. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Функция (2.4.13) равна нулю в точках $h = h_1$ и $h = h_2$; $h_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1 \lambda_2$, $h_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1 \lambda_2$, при этом $h_1 < h_2$.

Исследуем функцию $F_1(T), T \geq 0$, из (2.4.12) и определенную в (2.4.2).

Лемма 2.4.3. Функция $F_1(T) > 0$ при $T \geq 0$.

Доказательство. Значение $F_1(T)$ в точке $T = 0$ примет вид

$$F_1(0) = z_1(\beta_1 + \beta_2)(z_2 A - C)C / A^2 > 0,$$

где C, A определены в (2.4.3); β_1, β_2 определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Предел $F_1(T)$ при $T \rightarrow \infty$ определится в виде

$$F_1(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_1(T) = z_1(z_2 A - C),$$

где C, A определены в (2.4.3); z_1, z_2 определены в (2.2.2). Так как из (2.4.7) следует, что $(z_2 A - C) > 0$, то $F_1(\infty) > 0$.

Тогда $(z_2 A - C) = \lambda_1 \lambda_2 z_1 (h - h_1) > 0$. Отсюда следует, что всегда $h > h_1$.

Для дальнейшего исследования $F_1(T)$ на знак представим ее как функцию, зависящую от параметра h ($F_1(T) = F_1(T, h)$):

$$F_1(T, h) = z_1 [(\beta_1 + \beta_2)z_1 z_2 - z_1 f(T, h) - f'(T, h)], T \geq 0, -1 \leq h \leq 1, \quad (2.4.14)$$

$$f(T, h) = A + x(h) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T, h)}, f'(T, h) = -z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) x(h) \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^2(T, h)},$$

где $x(h)$ определена в (2.4.13); A – в (2.4.3); β_1, β_2 – в (2.4.2); z_1, z_2 – в (2.2.2), $z_1 z_2$ – в (2.4.10); $F(T)$ из (2.4.2) запишется в новых обозначениях, как $F(T, h) = z_1 z_2 - \lambda_1 \lambda_2 h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} > 0, 0 \leq T \leq \tau_m$.

Знак функции $F_1(T, h)$ зависит от знака функции $x(h)$. Рассмотрим все возможные варианты.

1) Пусть $x(h) = 0$. Это возможно, как следует из (2.4.13), если $h = h_1$ либо $h = h_2$. Так как всегда $h > h_1$, то случай $h = h_1$ исключается из рассмотрения. Тогда для случая $h = h_2$ имеем $F_1(T, h = h_2) = z_1^2 (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2) > 0, T \geq 0$.

2) Пусть $x(h) > 0$. Последнее возможно, если реализуется один из следующих вариантов: $0 < h_1 < h < h_2$; $0 = h_1 < h < h_2$; $h_1 < 0 < h < h_2$; $h_1 < h = 0 < h_2$; $h_1 < h < 0 < h_2$; $h_1 < h < h_2 = 0$; $h_1 < h < h_2 < 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h < h_2$. Имеем

$$\frac{\partial F_1(T, h)}{\partial T} = \frac{z_1^2 z_2 (\beta_1 + \beta_2) x(h) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^3(T, h)} \times \left\{ z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right\} \quad (2.4.15)$$

$$T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2.$$

Знак производной (2.4.15) определяется знаком функции:

$$y_1(T, h) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \quad (2.4.16)$$

$$T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2,$$

производная которой запишется в виде $y_1'(T, h) = \lambda_1 \lambda_2 (\beta_1 + \beta_2) (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} > 0$ для $h > 0$.

Тогда функция (2.4.16) – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y_1(T = 0, h) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h$ до $y_1(T = \infty, h) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$). Исследуем $y_1(T = 0, h)$ на знак. Для этого рассмотрим $y_1(T = 0, h)$, как функцию переменной h .

2.1) В точке $h = h_1$ функция $y_1(T = 0, h)$ принимает значение $y_1(T = 0, h = h_1) = -(\beta_1 + \beta_2)(z_1 - \beta_1 - \beta_2) < 0$, так как $h_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1\lambda_2 > 0$, следовательно, $z_1 - \beta_1 - \beta_2 > 0$.

2.2) В точке $h = h_2$ функция $y_1(T = 0, h)$ принимает значение $y_1(T = 0, h = h_2) = -z_1(\beta_1 + \beta_2)(z_2 - z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) < 0$, так как $z_2 - z_1 > 0$, $h_2 = z_1(z_2 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1\lambda_2 > 0$, следовательно, $z_2 - \beta_1 - \beta_2 > 0$.

2.3) В точке $h = 0$ функция $y_1(T = 0, h)$ принимает значение $y_1(T = 0, h = 0) = z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$, так как $h_1 = z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)/\lambda_1\lambda_2 > 0$, следовательно, $z_1 - \beta_1 - \beta_2 > 0$.

Таким образом, $y_1(T = 0, h) < 0$ для $0 < h_1 < h < h_2$. Отсюда следует, что функция (2.4.16) проходит через ноль в точке

$$T_1(h) = -\frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)} \ln \frac{z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)}{\lambda_1\lambda_2(z_1 + \beta_1 + \beta_2)h}, \quad 0 < h_1 < h < h_2.$$

При этом подлогарифмическое выражение $\frac{z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)}{\lambda_1\lambda_2(z_1 + \beta_1 + \beta_2)h} < 1$, так как

$$z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1\lambda_2(z_1 + \beta_1 + \beta_2)h = -z_1\lambda_1\lambda_2(h - h_1) - \lambda_1\lambda_2(\beta_1 + \beta_2)h < 0$$

согласно соотношению параметров $0 < h_1 < h < h_2$.

В силу этого поведение производной $F_1'(T, h)$, определенной в (2.4.15), в зависимости от T будет выглядеть следующим образом: $F_1'(T, h) < 0, 0 \leq T < T_1(h)$; $F_1'(T, h) = 0, T = T_1(h)$; $F_1'(T, h) > 0, T > T_1(h)$.

Таким образом, функция $F_1(T, h)$ в точке $T = T_1(h)$ достигает своего глобального минимума, при этом $F_1(T = 0, h) > F_1(T = \infty, h), 0 < h_1 < h < h_2$. Покажем, что в точке $T = T_1(h)$ функция $F_1(T, h)$ строго больше нуля ($F_1(T = T_1, h) > 0, 0 < h_1 < h < h_2$). Имеем

$$\begin{aligned} F_1(T = T_1(h), h) = & z_1 \left\{ (\lambda_1\lambda_2)^2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2 h^2 - \lambda_1\lambda_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) \times \right. \\ & \times \left[z_1(z_1 - \beta_1 - \beta_2)(z_2 - \beta_1 - \beta_2) + z_2(z_1 + \beta_1 + \beta_2)^2 \right] h + \\ & \left. + z_1z_2(z_1 - \beta_1 - \beta_2)^3 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) \right\}, \quad 0 < h_1 < h < h_2. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Функция (2.4.17), в частности, достигает нуля в точке $h = h_1$. Тогда при $h > h_1$ имеет место $F_1(T = T_1(h)) > 0$. Используя формулы (2.4.15), (2.4.16), аналогично показывается, что $F_1(T, h) > 0, T \geq 0$, для оставшихся вариантов, реализующихся для $x(h) > 0$.

3) Пусть $x(h) < 0$. Это возможно, если реализуется один из следующих вариантов: $0 < h_1 < h_2 < h \leq 1$; $0 = h_1 < h_2 < h \leq 1$; $h_1 < 0 < h_2 < h \leq 1$; $h_1 < h_2 = 0 < h \leq 1$; $h_1 < h_2 < 0 < h \leq 1$; $h_1 < h_2 < h = 0$; $h_1 < h_2 < h < 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h_2 < h \leq 1$. Так как $h > h_1$ всегда, то область, в которой $x(h) < 0$ реализуется только для $1 \geq h > h_2$. При этом $y_1(T = 0, h) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_1 + \beta_1 + \beta_2) h$ может быть больше нуля, меньше нуля или равна нулю, $y_1(T = \infty) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$.

Исследуем $y_1(T = 0, h)$ на знак. Для этого рассмотрим $y_1(T = 0, h)$ как функцию переменной h .

3.1) В точке $h = h_2$ функция $y_1(T = 0, h)$ принимает значение $y_1(T = 0, h = h_2) = -z_1 (\beta_1 + \beta_2) (z_2 - z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) < 0$, так как $z_2 - z_1 > 0$, $h_2 = z_1 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) / \lambda_1 \lambda_2 > 0$, следовательно, $z_2 - \beta_1 - \beta_2 > 0$.

3.2) В точке $h = 0$ функция $y_1(T = 0, h)$ принимает значение $y_1(T = 0, h = 0) = z_1 z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) > 0$, так как $h_1 = z_2 (z_1 - \beta_1 - \beta_2) / \lambda_1 \lambda_2 > 0$, следовательно, $z_1 - \beta_1 - \beta_2 > 0$.

Таким образом, $y_1(T = 0, h)$ – убывающая функция переменной h для $h > h_2$.

То есть $y_1(T = 0, h) < 0$ для $h > h_2$. Отсюда следует, что производная $F_1'(T)$ в зависимости от T будет вести себя следующим образом: $F_1'(T, h > h_2) > 0$ для $0 \leq T < T(h > h_2)$; $F_1'(T, h > h_2) = 0$ для $T = T(h > h_2)$; $F_1'(T, h > h_2) < 0$ для $T > T(h > h_2)$. Значит, в точке $T(h > h_2)$ функция $F_1(T)$ достигает максимума. В силу того, что $F_1(0) > 0$, $F_1(\infty) > 0$, то $F_1(T) > 0, T \geq 0$ для случая $h > h_2$.

Используя формулы (2.4.15) – (2.4.17), аналогично показывается, что $F_1(T, h) > 0, T \geq 0, h > h_2$ для оставшихся вариантов, реализующихся для $x(h) < 0$. Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению функции $F_2(T), T \geq 0$, из (2.4.12) и определенную в (2.4.2).

Лемма 2.4.4. 1) Функция $F_2(T) = 0 (T \geq 0)$, если $x(h) = 0$; 2) функция $F_2(T) < 0 (T \geq 0)$, если $x(h) > 0$.

Доказательство. Значение $F_2(T)$ в точке $T = 0$ примет вид

$$F_2(0) = \lambda_1 \lambda_2 z_2^2 (\beta_1 + \beta_2) (h - h_2) C / A^2,$$

где $h = 1 - p - q$, h_2 определена в (2.4.13); C, A определены в (2.4.3); β_1, β_2 определены в (2.4.2); z_2 определена в (2.2.2).

Предел $F_2(T)$ при $T \rightarrow \infty$ определится в виде

$$F_2(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_2(T) = \lambda_1 \lambda_2 z_2^2 (h - h_2).$$

Для дальнейшего исследования функции $F_2(T)$ на знак представим ее как функцию, зависящую от параметра h ($F_2(T) = F_2(T, h)$):

$$F_2(T, h) = z_2 [(\beta_1 + \beta_2) z_1 z_2 - z_2 f(T, h) - f'(T, h)], T \geq 0, -1 \leq h \leq 1, \quad (2.4.18)$$

где $f(T, h), f'(T, h)$ определены в (2.4.14).

Знак функции $F_2(T, h)$ зависит от знака функции $x(h)$, определенной в (2.4.13). Рассмотрим все возможные варианты.

1) Пусть $x(h) = 0$. Это возможно, как следует из (2.4.13), если $h = h_1$ либо $h = h_2$. Так как всегда $h > h_1$, то случай $h = h_1$ исключается из рассмотрения. Тогда для случая $h = h_2$, подставляя h_2 в (2.4.18), имеем $F_2(T, h = h_2) = 0, T \geq 0$.

2) Пусть $x(h) > 0$. Неравенство выполняется, если реализуется один из вариантов: $0 < h_1 < h < h_2$; $0 = h_1 < h < h_2$; $h_1 < 0 < h < h_2$; $h_1 < h = 0 < h_2$; $h_1 < h < 0 < h_2$; $h_1 < h < h_2 = 0$; $h_1 < h < h_2 < 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h < h_2$. Имеем

$$\frac{\partial F_2(T, h)}{\partial T} = \frac{z_1 z_2^2 (\beta_1 + \beta_2) x(h) e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F^3(T, h)} \times \quad (2.4.19)$$

$$\times \left\{ z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right\},$$

$$T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2.$$

Знак производной (2.4.19) определяется знаком функции:

$$y_2(T, h) = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad (2.4.20)$$

$$T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2.$$

Тогда, т.к. $h > 0$, функция (2.4.20) – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y_2(T=0, h) = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h$ до $y_2(T=\infty, h) = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$). Здесь возможны две ситуации:

а) $y_2(T=0, h) < 0, 0 < h_1 < h < h_2$;

б) $y_2(T=0, h) > 0, 0 < h_1 < h < h_2^*$; $y_2(T=0, h) = 0, h = h_2^*, y_2(T=0, h) < 0, h_2^* < h < h_2$, где $h_2^* = z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2) [\lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2)]^{-1}$.

Рассмотрим ситуацию а). Тогда функция (2.4.20) проходит через ноль в точке

$$T_2(h) = -\frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)} \ln \frac{z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h}, 0 < h_1 < h < h_2,$$

где $\frac{z_1 z_2 (z_2 - \beta_1 - \beta_2)}{\lambda_1 \lambda_2 (z_2 + \beta_1 + \beta_2) h} < 1$.

В силу этого поведение производной $F_2'(T, h)$, определенной в (2.4.19), в зависимости от T будет выглядеть следующим образом: $F_2'(T, h) < 0, 0 \leq T < T_2(h)$; $F_2'(T, h) = 0, T = T_2(h)$; $F_2'(T, h) > 0, T > T_2(h)$. Таким образом, функция $F_2(T, h)$ в точке $T = T_2(h)$ достигает своего глобального минимума, при этом $F_2(0) = F_2(T=0, h) < 0, F_2(\infty) = F_2(T=\infty, h) < 0, F_2(T=0, h) < F_2(T=\infty, h), 0 < h_1 < h < h_2$. Все это доказывает, что $F_2(T, h) < 0, T \geq 0$, для ситуации а). Аналогично доказывается, что для ситуации б) функция $F_2(T, h) < 0, T \geq 0$.

Используя формулы (2.4.19), (2.4.20), показывается, что для оставшихся вариантов соотношения параметров $0, h, h_1, h_2$ функция $F_2(T, h) < 0, T \geq 0$.

Лемма доказана.

Для случая $x(h) < 0$ имеет место

Лемма 2.4.5. *Функция $F_2(T) > 0 (T \geq 0)$, если $x(h) < 0$.*

Доказательство осуществляется с применением формул (2.4.19), (2.4.20) аналогично доказательству леммы 2.4.4. *Лемма доказана.*

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(T, h) = F_1(T, h) - F_2(T, h) = (z_2 - z_1) \left[-z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2) + (z_1 + z_2) f(T, h) + f'(T, h) \right], \\ T \geq 0, -1 \leq h \leq 1, \quad (2.4.21)$$

где β_1, β_2 определены в (2.4.2); z_1, z_2 – в (2.2.2), $z_1 z_2$ – в (2.2.10); $F_1(T, h)$, $f(T, h)$, $f'(T, h)$ – в (2.4.14); $F_2(T, h)$ – в (2.4.18).

Лемма 2.4.6. *Функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$, если $x(h) \geq 0$.*

Доказательство. Значение $\Phi(T, h)$ из (2.4.21) в точке $T = 0$ примет вид

$$\Phi(T = 0, h) = (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)(C/A)^2 > 0.$$

где C, A определены в (2.4.3); β_1, β_2 определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2).

Предел $\Phi(T, h)$ при $T \rightarrow \infty$ определится в виде

$$\Phi(T = \infty, h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(T, h) = (z_2 - z_1)C > 0.$$

Знак функции $\Phi(T, h)$ зависит от знака функции $x(h)$, определенной в (2.4.13). Рассмотрим все возможные варианты.

1) Пусть $x(h) = 0$. Это возможно, как следует из (2.4.13), если $h = h_1$ либо $h = h_2$. Так как всегда $h > h_1$, то случай $h = h_1$ исключается из рассмотрения. Тогда для случая $h = h_2$, подставляя h_2 в (2.4.21), получаем $\Phi_2(T, h = h_2) = (z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)z_1^2 > 0, T \geq 0$.

2) Пусть $x(h) > 0$. Неравенство выполняется, если реализуется один из вариантов: $0 < h_1 < h < h_2$; $0 = h_1 < h < h_2$; $h_1 < 0 < h < h_2$; $h_1 < h = 0 < h_2$; $h_1 < h < 0 < h_2$; $h_1 < h < h_2 = 0$; $h_1 < h < h_2 < 0$.

Рассмотрим вариант $0 < h_1 < h < h_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \partial\Phi(T, h)/\partial T = & -(1/F^3(T, h))z_1z_2(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)x(h)e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \times \\ & \times \left\{ z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1\lambda_2(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)he^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \right\}, \\ & T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2, \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

где $h = 1 - p - q$; $h_1, h_2, x(h)$ определены в (2.4.13); $F(T, h)$ определена в (2.4.14); β_1, β_2 определены в (2.4.2); z_1, z_2 определены в (2.2.2), z_1z_2 определена в (2.2.10).

Знак производной (2.4.22) определяется знаком функции:

$$\begin{aligned} y(T, h) = & z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1\lambda_2(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)he^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \\ & T \geq 0, 0 < h_1 < h < h_2. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Тогда, т.к. $h > 0$, функция (2.4.23) – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y(T = 0, h) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) - \lambda_1\lambda_2(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)h$ до $y(T = \infty, h) = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2) > 0$). Здесь возможны 3 ситуации:

а) $y(T = 0, h) > 0, 0 < h_1 < h < h_2$;

б) $y(T = 0, h = h_2) = 0$;

в) $y(T = 0, h) > 0, 0 < h_1 < h^*$; $y(T = 0, h) = 0, h = h^*$; $y(T = 0, h) < 0,$

$h^* < h < h_2$, где $h^* = z_1z_2(z_1 + z_2 - \beta_1 - \beta_2)[\lambda_1\lambda_2(z_1 + z_2 + \beta_1 + \beta_2)]^{-1}$.

Рассмотрим ситуацию а). Тогда функция (2.4.23) – положительная функция переменной T ($y(T, h) > 0, T \geq 0$). В силу этого производная (2.4.22) – отрицательная функция переменной T ($T \geq 0$). Все это означает, что функция (2.4.21) убывает от $\Phi(T = 0, h) > 0$ до $\Phi(T = \infty, h) > 0$. Отсюда следует, что для ситуации а) функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$. Аналогично доказывается, что для ситуаций б), в) функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$.

Используя формулы (2.4.22), (2.4.23), аналогично показывается, что для оставшихся вариантов соотношения параметров $0, h, h_1, h_2$ функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$. Лемма доказана.

Для случая $x(h) < 0$ имеет место

Лемма 2.4.7. Функция $\Phi(T, h) > 0, T \geq 0$, если $x(h) < 0$.

Доказательство осуществляется с применением формул (2.4.22), (2.4.23) аналогично доказательству леммы 2.4.6. Лемма доказана.

Лемма 2.4.8. Функции $F_1(T, h), F_2(T, h)$ подчиняются неравенству: $F_1(T, h) > F_2(T, h), T \geq 0, -1 \leq h \leq 1$.

Доказательство осуществляется объединением результатов лемм 2.4.6, 2.4.7. Лемма доказана.

Лемма 2.4.9. Уравнение (2.4.12) решения не имеет.

Доказательство вытекает из последовательного применения лемм 2.4.3–2.4.5 и леммы 2.4.8. Лемма доказана.

Лемма 2.4.10. Производная $p'_T(\tau_m)$, определяемая формулой (2.4.2), является положительной функцией переменной T ($p'_T(\tau_m) > 0, 0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Доказательство осуществляется применением результатов лемм 2.4.1, 2.4.2, 2.4.9. Лемма доказана.

Теорема 2.4.1. Плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Доказательство осуществляется применением результата леммы 2.4.10. Теорема доказана.

Теорема 2.4.2. Плотность вероятности $p_T(\tau_m)$ достигает своего глобального максимума в точке $T = \tau_m$ ($0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Доказательство вытекает из результата теоремы 2.4.1.

Следствие 2.4.1. Из теоремы 2.4.1 следует, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{1, k}$, из (2.4.1) – возрастающие функции переменной T ($0 \leq T \leq \tau_m, \tau_m \geq 0$).

Следствие 2.4.2. Из теоремы 2.4.2 следует, что функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$, определяемая в (2.4.1), достигает своего глобального максимума в точке $T = \tau_m$, то есть решением оптимизационной задачи (2.4.1) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{МП} = \tau_m$.

Из вышесказанного вытекает алгоритм оценки длительности мертвого времени T : в течение интервала наблюдения (t_0, t) измеряются величины $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = \overline{1, n}$; находится $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = \overline{1, n}$; полагается $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$.

Замечание. Отметим, что следствие 2.4.2 имеет силу для любых значений параметров λ_1 , λ_2 , p , q , α_1 , α_2 рассматриваемого потока и их соотношений. Поэтому при выполнении одного (или обоих) из условий рекуррентности модулированного синхронного потока событий, рассмотренных в подпарадразделе 2.3.2 диссертационной работы, оценка длительности мертвого времени, найденная методом максимального правдоподобия, есть $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$, получаемая без погрешности.

Подчеркнем, что при этом оценка $\hat{T}_{МП}$ на конечном полуинтервале $(0, t]$ будет всегда смещенной, т.к. $\tau_{\min} > T$; ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t \rightarrow \infty$.

2.5 Оценка длительности мертвого времени модифицированным методом моментов

В подпарадразделе 2.3.1 показано, что модулированный синхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях, рассмотренных в подпарадразделе 2.3.2, поток становится рекуррентным.

Напомним, что согласно теореме 2.3.1 наблюдаемый поток является в общем случае коррелированным потоком событий. Только в случае выполнения одного (или обоих) условий факторизации потока (см. подпарадраздел 2.3.2),

наблюдаемые величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ становятся независимыми, что приводит к потере корреляционных связей между ними.

В связи с этим, чтобы учесть корреляционные связи в наблюдаемом потоке, будем при оценке длительности мертвого времени использовать двумерную плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$.

Рассмотрим, по-прежнему, $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ – значения длительностей смежных k -го и $k+1$ -го интервалов $((t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}), k = 1, 2, \dots)$ между соседними событиями наблюдаемого потока. В силу стационарности потока можно положить $k=1$ и рассматривать длительности интервалов $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$, соответствующие смежным интервалам $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$. Тогда $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока, а $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. При этом соответствующую совместную плотность вероятности, определенную в (2.3.2), преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \\
 + C_T e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} &(z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)})(z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}), \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \\
 C_T &= \frac{P(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 \pi_1(0) - \beta_2 \pi_2(0))(P_1 + P_2)}{\left[(z_2 - z_1)(z_1 z_2 - P e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}) (\beta_1 + \beta_2) \right]^2} \times \\
 &\left\{ z_1 z_2 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} (2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)) + \right. \\
 &\left. + e^{-2(\beta_1 + \beta_2)T} (z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))) \right\}, \\
 \pi_1(0) &= P_1 / (P_1 + P_2), \pi_2(0) = P_2 / (P_1 + P_2),
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

где z_1, z_2 определены в (2.2.2); $p_T(\tau_k)$ определены в (2.2.12) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$; $\beta_1, \beta_2, P, P_1, P_2$ – в (2.4.2).

Теоретическая ковариация значений τ_1, τ_2 запишется в виде

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[\int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2. \tag{2.5.2}$$

Подставляя плотность (2.2.12) и совместную плотность (2.5.1) в формулу для ковариации (2.5.2), находим ее явный вид:

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad (2.5.3)$$

где z_1, z_2 определены в (2.2.2); C_T определена в (2.5.1).

Пусть за время наблюдения (в течение временного интервала (t_0, t)) реализовалось n интервалов (t_k, t_{k+1}) , $k = \overline{1, n}$ длительности τ_k , $k = \overline{1, n}$. Введем статистику

$$\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \quad (2.5.4)$$

которая представляет собой оценку теоретической ковариации (2.5.2). Тогда, согласно методу моментов [159], уравнение моментов, учитывающее коррелированность потока событий, может быть записано в виде (модифицированный метод моментов)

$$\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} = \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \quad (2.5.5)$$

Подставляя в (2.5.5) значение C_T , определенное в (2.5.1), вводя новую переменную $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ и проделывая необходимые преобразования, выражение (2.5.5) преобразуется в кубическое уравнение относительно переменной x :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ a &= l [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2(1-q))], \\ b &= - \left\{ l [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] + P^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right\}, \\ c &= z_1 z_2 \left[l + 2P \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right], \quad d = -(z_1 z_2)^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2), \\ l &= P(\lambda_1 - \lambda_2)(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) / (z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2))^2, \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где z_1, z_2 определены в (2.2.2); $\beta_1, \beta_2, P, P_1, P_2$ – в (2.4.2).

При решении уравнения (2.5.6) [79] определяются три корня $x_i, i = 1, 2, 3$, которые, в свою очередь, задают три ММ-оценки длительности мертвого времени:

$$\hat{T}_{\text{ММ}}^{(i)} = -\frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln x_i, i = 1, 2, 3,$$

где β_1, β_2 определены в (2.4.2).

Используя полученные выше ММ-оценки $\hat{T}_{\text{ММ}}^{(i)}, i = 1, 2, 3$, можно определить единственную ММ-оценку $\hat{T}_{\text{ММ}}$ по следующему алгоритму:

1) для заданного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ осуществляется в течение длительности $T_m = t$ ед. времени интервала наблюдения (интервала моделирования) имитационное моделирование наблюдаемого потока событий;

2) в ходе имитационного моделирования находится оценка ковариации $\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2)$, определенная в (2.5.4), где $n \geq 2$ (n – количество наблюдаемых событий потока);

3) решается кубическое уравнение (2.5.6), то есть находятся три корня $x_i, i = 1, 2, 3$, которые могут быть как вещественными, так и комплексными;

4) если все корни $x_i, i = 1, 2, 3$, – комплексные, то $\hat{T}_{\text{ММ}} = \tau_{\min}$;

5) если среди трех корней $x_i, i = 1, 2, 3$, выделяется хотя бы один вещественный, то возможны три варианта:

5.1) вещественный корень один – x_1 , тогда:

5.1.1) если $x_1 \leq 0$, то $\hat{T}_{\text{ММ}} = \tau_{\min}$;

5.1.2) если $x_1 > 0$, то

5.1.2.1) $\hat{T}_{\text{ММ}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{ММ}}^{(1)} > \tau_{\min}$;

5.1.2.2) $\hat{T}_{\text{ММ}} = \hat{T}_{\text{ММ}}^{(1)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{ММ}}^{(1)} < \tau_{\min}$;

5.1.2.3) $\hat{T}_{\text{ММ}} = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_{\text{ММ}}^{(1)} \leq 0$;

5.2) вещественных корней два – x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), тогда:

- 5.2.1) если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$;
- 5.2.2) если $x_1 \leq 0 < x_2$, то
- 5.2.2.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} > \tau_{\text{min}}$;
- 5.2.2.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} < \tau_{\text{min}}$;
- 5.2.2.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} \leq 0$;
- 5.2.3) если $0 < x_1 < x_2$, то
- 5.2.3.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\tau_{\text{min}} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)}$;
- 5.2.3.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} \leq \tau_{\text{min}} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)}$;
- 5.2.3.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\text{min}} \leq \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)}$;
- 5.2.3.4) $\hat{T}_{\text{MM}} = (\hat{T}_{\text{MM}}^{(1)} + \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)})/2$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)} \leq \tau_{\text{min}}$;
- 5.2.3.5) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)} \leq \tau_{\text{min}}$;
- 5.2.3.6) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(1)} \leq 0$;
- 5.3) вещественных корня три – x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), тогда:
- 5.3.1) если $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$, то $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$;
- 5.3.2) если $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$, то
- 5.3.2.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} > \tau_{\text{min}}$;
- 5.3.2.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} < \tau_{\text{min}}$;
- 5.3.2.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} \leq 0$;
- 5.3.3) если $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$, то
- 5.3.3.1) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\tau_{\text{min}} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)}$;
- 5.3.3.2) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)}$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} \leq \tau_{\text{min}} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)}$;
- 5.3.3.3) $\hat{T}_{\text{MM}} = \tau_{\text{min}}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\text{min}} \leq \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)}$;
- 5.3.3.4) $\hat{T}_{\text{MM}} = (\hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} + \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)})/2$, если $0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} \leq \tau_{\text{min}}$;
- 5.3.3.5) $\hat{T}_{\text{MM}} = \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)}$, если $\hat{T}_{\text{MM}}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{\text{MM}}^{(2)} \leq \tau_{\text{min}}$;

$$5.3.3.6) \quad \hat{T}_{MM} = \tau_{\min}, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0;$$

5.3.4) если $0 < x_1 < x_2 < x_3$, то

$$5.3.4.1) \quad \hat{T}_{MM} = \tau_{\min}, \text{ если } \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)};$$

$$5.3.4.2) \quad \hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}, \text{ если } 0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)};$$

$$5.3.4.3) \quad \hat{T}_{MM} = \tau_{\min}, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)};$$

$$5.3.4.4) \quad \hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2, \text{ если } 0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)};$$

$$5.3.4.5) \quad \hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)};$$

$$5.3.4.6) \quad \hat{T}_{MM} = \tau_{\min}, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)};$$

$$5.3.4.7) \quad \hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/3, \text{ если } 0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min};$$

$$5.3.4.8) \quad \hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min};$$

$$5.3.4.9) \quad \hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min};$$

$$5.3.4.10) \quad \hat{T}_{MM} = \tau_{\min}, \text{ если } \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0 \leq \tau_{\min}.$$

В результате работы алгоритма реализуется один из вышеописанных вариантов, который определяет единственную ММ-оценку \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени.

В разделе 3 приводится численное сравнение оценок длительности мертвого времени, полученных методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

2.6 Результаты и выводы к разделу 2

Сформулируем результаты, полученные в разделе 2.

1) Получена в явном виде плотность вероятности значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном потоке событий, функционирующем в условиях мертвого времени (2.2.12).

2) Получена в явном виде совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном потоке событий, функционирующем в условиях мертвого времени (2.3.2) и сделан вывод о коррелированности потока в общем случае.

3) Рассмотрены частные случаи соотношения параметров потока, при которых поток событий становится рекуррентным потоком.

4) Получены оценки длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

5) Сформулированы алгоритмы оценивания длительности мертвого времени по методу максимального правдоподобия и модифицированному методу моментов.

Главный результат раздела 2 заключается в том, что приведенные формулы позволяют сформулировать алгоритмы оценки длительности мертвого времени \hat{T} методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

Численные результаты оценки длительности мертвого времени \hat{T} и результаты численного эксперимента по сравнению оценок методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов приведены в разделе 3.

3 Результаты численных экспериментов на имитационной модели модулированного синхронного потока событий

В разделе 3 диссертационной работы решается задача построения имитационной модели модулированного синхронного дважды стохастического потока событий на ЭВМ, получения численных результатов с использованием разработанной имитационной модели и алгоритмов оценивания состояний потока в условиях мертвого времени ($T \neq 0$) и в условиях его отсутствия ($T = 0$), а также алгоритмов оценивания длительности мертвого времени модифицированным методом моментов и методом максимального правдоподобия, полученных в разделе 2 данной работы.

Поскольку полученные в разделе 1 и разделе 2 оценки являются достаточно сложными, то аналитическое исследование качества полученных оценок не представляется возможным. Для изучения качества получаемых оценок состояний рассматриваемого потока в условиях мертвого времени ($T \neq 0$) и его отсутствия ($T = 0$), а также оценок длительности мертвого времени поставлен статистический эксперимент, поставленный на имитационной модели модулированного синхронного потока событий. Аналитические результаты получены для частного случая соотношения параметров рассматриваемого потока событий из подподраздела 1.8.2, когда поток становится рекуррентным.

Статистический эксперимент позволяет сравнить качество получаемых (по наблюдениям за моментами наступления событий потока) оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и модифицированным методом моментов (ММ-оценки). Описание работы имитационной модели, реализованной в виде блок-схемы, приведено в приложении А и приложении Б.

Основные результаты раздела 3 опубликованы в работах [37, 38, 72–75, 138, 139, 142, 143, 182].

3.1 Результаты численных расчетов апостериорных вероятностей состояний и оценок состояний модулированного синхронного потока событий в условиях отсутствия мертвого времени

В приложении А приведена блок-схема имитационной модели модулированного синхронного потока событий, в приложении В приведена блок-схема алгоритма расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 потока и алгоритм оценки состояний процесса $\lambda(t)$ в условиях отсутствия мертвого времени. Иллюстрация работы вычислительной программы приведена на рис. 3.1 и 3.2.

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ по формулам (1.3.25), (1.3.26) и (1.3.27). Программа расчета реализована на языке программирования Visual C++, Microsoft Visual Studio 2008. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование модулированного синхронного потока. Второй этап расчета – вычисление вероятностей $w(\lambda_1 | t), t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$; $w(\lambda_1 | t), t_k \leq t < t_{k+1}$, $k=1,2,\dots$ по формулам (1.3.25), (1.3.26), (1.3.27) и построение оценки $\hat{\lambda}(t)$.

Пример поведения процесса $\lambda(t)$ и его оценки изображен на рис.3.1. Данные результаты получены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,5$, $p=0,4$, $q=0,5$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, время моделирования $T_m = 100$ ед. времени.

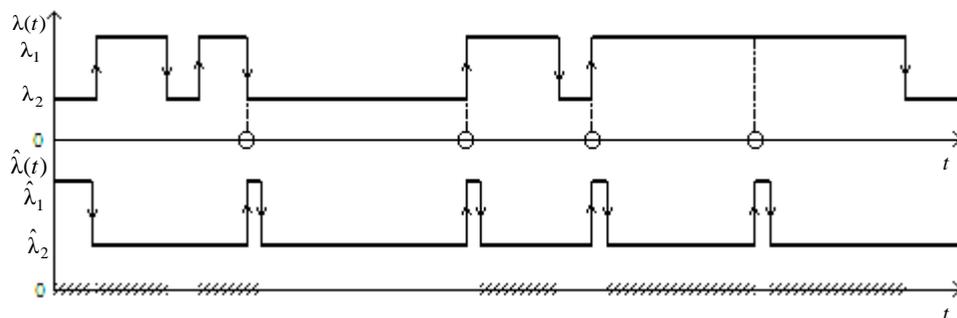


Рисунок 3.1 – Траектория процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$ при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5$,

$$p=0,4, q=0,5, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$$

В верхней части рисунка изображено истинное поведение процесса $\lambda(t)$, полученное путем имитационного моделирования, где λ_1 и λ_2 – состояния

процесса $\lambda(t)$. В нижней части рисунка изображено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$, заштрихованными линиями отмечены промежутки, на которых оценка состояния $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (области ошибочных решений).

На рис. 3.2 приведена траектория поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$, которая соответствует полученной при имитационном моделировании последовательности наступления наблюдаемых событий потока t_1, t_2, \dots

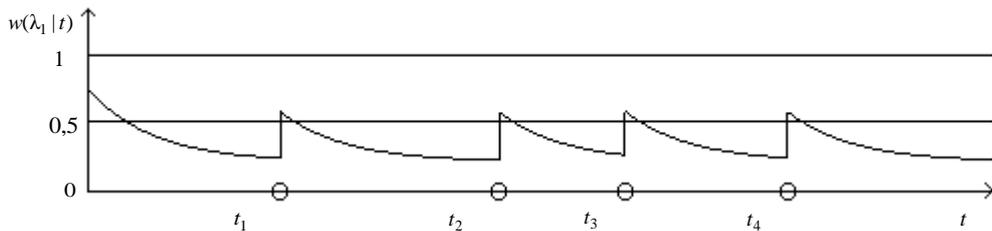


Рисунок 3.2 – Траектория поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$

$$\text{при } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p=0,4, q=0,5, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$$

В подразделе 1.5 приведен алгоритм оптимальной оценки состояний процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за моментами наступления событий. Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком, проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов:

- 1) для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, q, \alpha_1, \alpha_2, T_m$ ед. времени осуществляется моделирование потока событий на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ (отдельный j -ый эксперимент);
- 2) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на отрезке $[0, T_m]$ по формулам (1.3.25), (1.3.26), (1.3.27);
- 3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$;
- 4) осуществляется определение (для j -ого эксперимента) d_j - суммарной протяженности интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;
- 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_j = d_j / T_m$;

б) производится повторение N раз ($j = \overline{1, N}$) шагов 1 – 5 для расчета оценки безусловной (полной) вероятности принятия решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)$ долей ошибочных решений в N экспериментах. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности принятия ошибочного решения $\hat{P} = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{p}_j$ и выборочная дисперсия

$$\hat{D} = (1/(1-N)) \sum_{j=1}^N (\hat{p}_j - \hat{P})^2.$$

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 3.1 – 3.6. В первой строке таблиц указаны значения изменяющегося параметра при остальных фиксированных. Во второй и третьей строках таблиц для каждого значения изменяющегося параметра приведены численные значения оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} и выборочной дисперсии \hat{D} .

Результаты в табл. 3.1, 3.2 получены при следующих фиксированных параметрах, $p=0,6$, $q=0,6$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0,2$. При этом в табл. 3.1 параметр λ_1 меняет значения от 1 до 9 при фиксированном значении параметра $\lambda_2=0,5$, в табл. 3.2 параметр λ_2 принимает значения от 0,5 до 8 при фиксированном значении параметра $\lambda_1=10$. Результаты в табл. 3.3, 3.4 получены при $p=0,6$, $q=0,6$, $\lambda_1=10$, $\lambda_2=0,5$, причем в табл. 3.3 параметр α_1 принимает значения от 1 до 8 при фиксированном значении параметра $\alpha_2=0,2$, в табл. 3.4 параметр α_2 принимает значения от 0,2 до 7 при фиксированном значении параметра $\alpha_1=10$. Результаты в табл. 3.5 и 3.6 приведены для случая, когда $\lambda_1=5$, $\lambda_2=0,5$, $\alpha_1=5$, $\alpha_2=0,2$, при этом в табл. 3.5 параметр p меняет свое значение от 0,05 до 0,9 при фиксированном значении параметра $q=0,6$, а в табл. 3.6 параметр q варьируется от 0,05 до 0,9 при фиксированном значении параметра $p=0,6$.

Таблица 3.1 – Результаты эксперимента при $\lambda_2 = 0,5, p=0,6, q=0,6, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,2$

λ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\hat{P}	0,2525	0,2003	0,1602	0,1326	0,1171	0,1085	0,0897	0,0826	0,0763
\hat{D}	0,0017	0,0009	0,0006	0,0005	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002

Таблица 3.2 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 10, p=0,6, q=0,6, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,2$

λ_2	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{P}	0,0683	0,1046	0,1683	0,2271	0,2795	0,3066	0,3516	0,3889	0,4122
\hat{D}	0,0002	0,0003	0,0004	0,0003	0,0002	0,0007	0,0004	0,0003	0,0004

Таблица 3.3 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0,5, p=0,6, q=0, \alpha_2 = 0,2$

α_1	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{P}	0,0683	0,0610	0,0574	0,0527	0,0468	0,0423	0,0405	0,0394
\hat{D}	0,0002	0,0001	0,00004	0,00006	0,00009	0,00005	0,00006	0,00005

Таблица 3.4 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0,5, p=0,6, q=0,6, \alpha_1 = 10$

α_2	0,2	1	2	3	4	5	6	7
\hat{P}	0,0337	0,0748	0,1248	0,1648	0,2135	0,246	0,2788	0,3089
\hat{D}	0,00002	0,00008	0,00009	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0002

Таблица 3.5 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0,5, q=0,6, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 0,2$

p	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
\hat{P}	0,082	0,080	0,078	0,0741	0,0741	0,07	0,0641	0,0613
\hat{D}	0,0002	0,0001	0,0001	0,00009	0,0001	0,00009	0,0001	0,0001

Таблица 3.6 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0,5, p=0,6, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 0,2$

q	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
\hat{P}	0,0305	0,0318	0,0382	0,0415	0,0492	0,0539	0,0629	0,0708
\hat{D}	0,00005	0,00005	0,00007	0,00009	0,00009	0,0001	0,0001	0,0001

Анализ результатов, приведенных в табл. 3.1, 3.2, говорит о том, что имеется тенденция роста оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} при уменьшении разности параметров $\lambda_1 - \lambda_2$ и, наоборот, прослеживается тенденция уменьшения \hat{P} при увеличении разности параметров $\lambda_1 - \lambda_2$. Последнее вполне естественно, так как при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ условия различимости двух состояний λ_1 и λ_2 улучшаются. Аналогичная тенденция роста оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} наблюдается в табл. 3.3, 3.4 при уменьшении разности параметров $\alpha_1 - \alpha_2$, что объясняется лучшей различимостью состояний λ_1 и λ_2 процесса $\lambda(t)$ при увеличении разности $\alpha_1 - \alpha_2$, и, соответственно, приводит к уменьшению вероятности принятия ошибочного решения. Уменьшение значения \hat{P} хорошо прослеживается в табл. 3.5 и может быть объяснено тем, что при фиксированном значении вероятности перехода $q=0,6$, высокой частоте наступления событий в состоянии λ_1 ($\lambda_1 = 5$) и низкой частоте наступления событий в состоянии λ_2 ($\lambda_2 = 0,5$), время, проведенное процессом $\lambda(t)$ в состоянии λ_2 увеличивается с ростом вероятности p , что дает возможность большей различимости состояний, и, следовательно, ведет к уменьшению оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} . Обратная тенденция наблюдается в табл. 3.6. Здесь при фиксированном значении вероятности перехода $p=0,6$, низкой частоте наступления событий в состоянии λ_2 ($\lambda_2 = 0,5$) и, наоборот, высокой частоте наступления событий в состоянии λ_1 ($\lambda_1 = 5$), оценка вероятности принятия

ошибочного решения увеличивается с ростом q вследствие уравнивания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в каждом из состояний, что приводит к ухудшению условий их различимости.

3.2 Результаты численных расчетов вероятности ошибки для общего случая и для случая рекуррентного потока

В подподразделе 1.6.1 получены формулы для условной вероятности ошибки при вынесении решения о состоянии модулированного синхронного потока в общем случае, когда мертвое время отсутствует ($T=0$).

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления условной вероятности ошибки $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$ в любой момент времени $\tau_k \geq 0, k = 0, 1, \dots$, который положен в основу программы для проведения статистических экспериментов по расчету $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$ для общего случая (программа реализована в среде программирования Microsoft Visual Studio C#). Алгоритм состоит из 4-х этапов: 1) осуществляется имитационное моделирование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, в результате которого реализуется траектория поведения процесса $\lambda(t)$, а также – события потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$; 2) на втором этапе по формулам (1.3.25), (1.3.26), (1.3.27) производится вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | \tau_k)$, $w(\lambda_1 | t_k - 0)$, $w(\lambda_1 | t_k + 0)$, где $\tau_k = t - t_k$ для $k=1, 2, \dots$, для $k=0$ $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$; 3) на третьем этапе строится оценка $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности; 4) на четвертом этапе производится вычисление условной вероятности ошибки $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$, $k = 0, 1, \dots$, для общего случая.

Пример реализации первых 2-х этапов расчета представлен на рис. 3.3 для значений параметров потока $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \alpha_1 = 0,01, \alpha_2 = 0,01, p = 0,2, q = 0,5$. Ось номер 1 отображает истинную траекторию процесса $\lambda(t)$, полученную путем имитационного моделирования, белыми кружками изображены события

рассматриваемого потока. Ось номер 2 отображает траекторию оценки $\hat{\lambda}(t)$, полученную по критерию максимума апостериорной вероятности, при этом жирными линиями отображены интервалы несовпадения истинной траектории процесса $\lambda(t)$ и ее оценки $\hat{\lambda}(t)$ (область ошибочных решений).

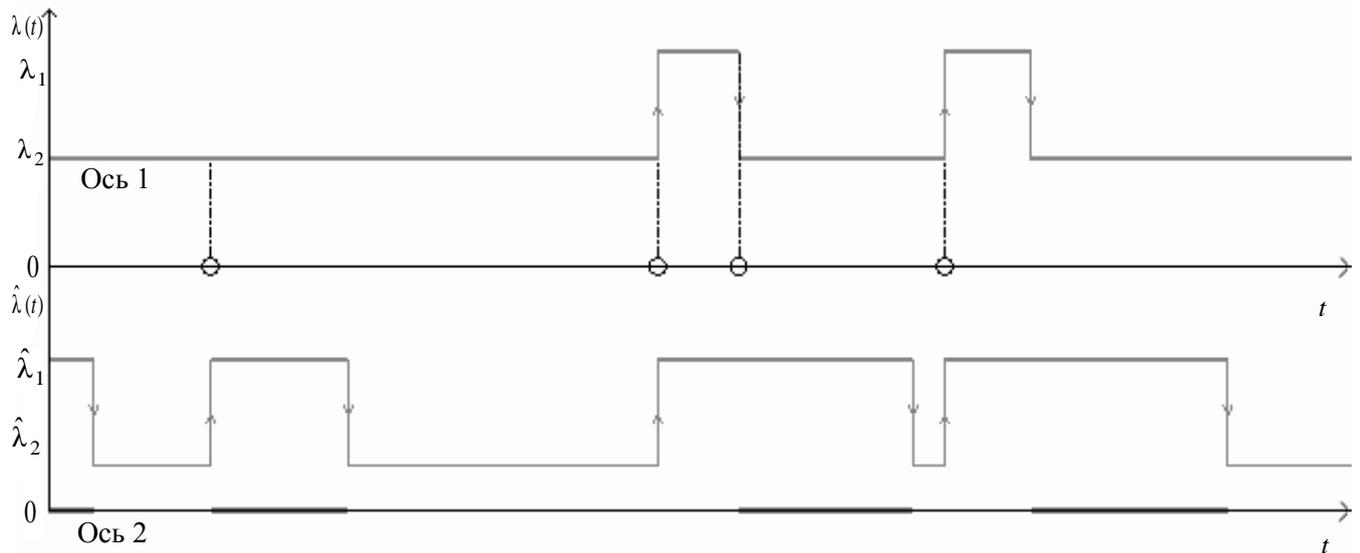


Рисунок 3.3 – Траектория процесса $\lambda(t)$ и оценка процесса $\hat{\lambda}(t)$

Рис. 3.4 демонстрирует пример реализации 3-его и 4-ого этапа программы расчета для значений параметров потока $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \alpha_1 = 0,01, \alpha_2 = 0,01, p = 0,2, q = 0,5$.

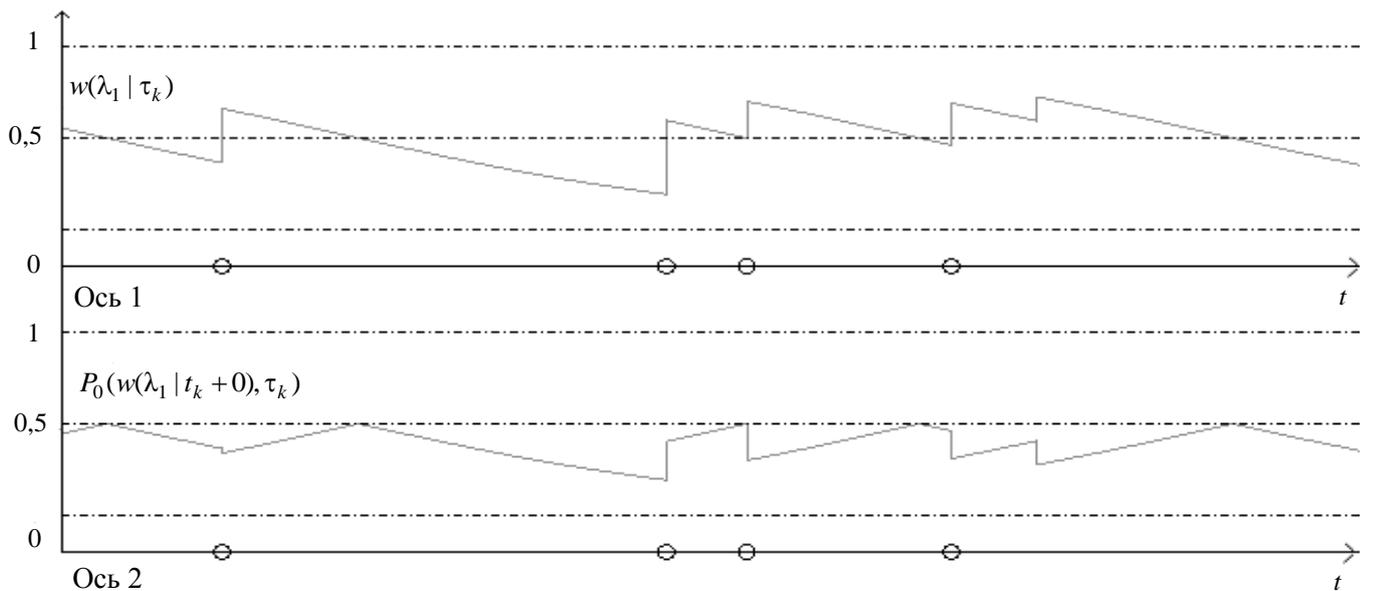


Рисунок 3.4 – График апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | \tau_k)$ и график условной вероятности $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$

На оси номер 1 (рис. 3.4) изображен график поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | \tau_k)$, $k=0,1,\dots$, полученный в результате наблюдения за потоком в течение времени моделирования (по наблюдаемым событиям $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$), на оси номер 2 (рис. 3.4) приведен график поведения условной вероятности ошибки $P_0(w(\lambda_1 | t_k + 0), \tau_k)$, $k=0,1,\dots$. Цифрами 0, 0,5, 1 обозначены возможные значения вероятностей на оси ординат.

Алгоритм оптимального оценивания состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, описанный в подразделе 1.5 настоящей работы, позволяет осуществить оценку состояний процесса $\lambda(t)$ по наблюдаемым моментам наступления событий потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$. На основании предложенного алгоритма в любой момент времени t в течение интервала наблюдения за потоком можно получить оценку $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$ по методу максимального правдоподобия и в этот же момент времени t получить условную вероятность сделанной при принятии решения о состоянии потока ошибки.

В подподразделе 1.8.2 рассмотрен частный случай соотношения параметров потока p, q , при которых исходный модулированный синхронный поток событий становится рекуррентным и возможно вычисление безусловной вероятности ошибки по интегральным формулам.

Для частного случая соотношения параметров потока случая $p+q=1$, описанного в подподразделе 1.8.2, построен график поведения безусловной вероятности ошибки P_0 в зависимости от изменения параметра потока α_1 , изображенный на рис. 3.5. Алгоритм расчета состоит из следующих этапов:

- 1) задаются значения параметров потока $\lambda_1 = 0,5, \lambda_2 = 0,4, \alpha_1 = 0,01, \alpha_2 = 0,01, p = 0,4, q = 0,6$;
- 2) вычисляются значения величин w_1 по формуле (1.5.15) и π_1 по формуле (1.2.1);

3) устанавливается один из пяти вариантов соотношений величин w_1 и π_1 и вычисляется значение P_0 для этого варианта по одной из формул (1.8.15) – (1.8.18);

4) значение α_1 увеличивается на 0,05, и алгоритм переходит на шаг 1, и т.д., пока α_1 не примет значение 0,7.

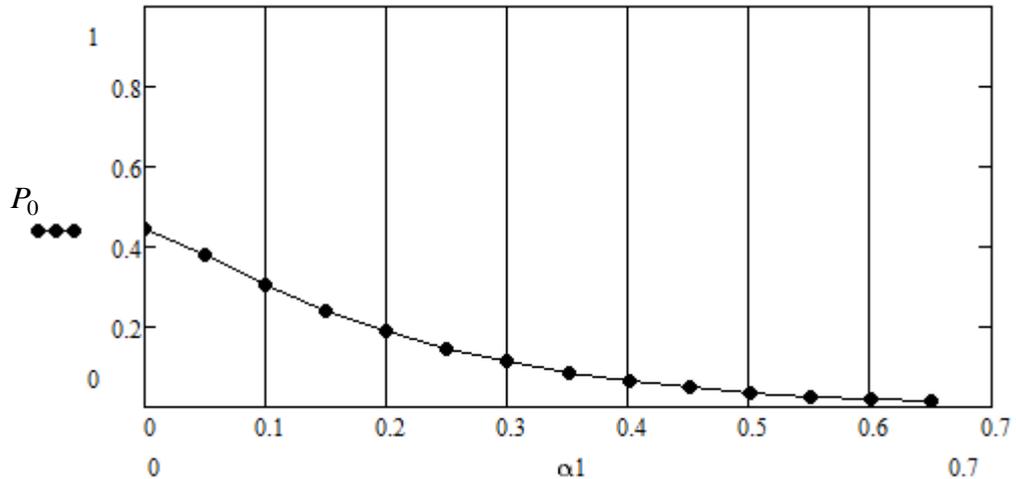


Рисунок 3.5 – График безусловной вероятности P_0 в зависимости от α_1

График безусловной вероятности P_0 , изображенный на рис. 3.5, представляет собой убывающую функцию параметра α_1 , что является вполне естественным. А именно, в связи с увеличением значения параметра α_1 время пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии λ_1 уменьшается, обеспечивая переход процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_1 в состояние λ_2 в момент окончания длительности интервала модуляции, распределенного по экспоненциальному закону с параметром α_1 . В то время как при неизменно малом значении параметра $\alpha_2 = 0,01$ переход процесса $\lambda(t)$ из состояния λ_2 в состояние λ_1 происходит по большей части в моменты наступления событий пуассоновского потока интенсивности λ_2 . Таким образом, увеличивается различимость состояний потока λ_1 и λ_2 , и, как следствие, уменьшается вероятность ошибки принятия решения о состоянии потока, что приводит к убыванию безусловной вероятности P_0 вместе с ростом параметра входящего потока α_1 .

Для частного случая соотношения параметров потока случая $p+q=1$, описанного в подпараграфе 1.8.2, построен график поведения безусловной вероятности ошибки P_0 в зависимости от изменения параметра потока λ_1 , изображенный на рис. 3.6. Алгоритм расчета состоит из следующих этапов:

- 1) задаются значения параметров потока $\lambda_1 = 0,21$, $\lambda_2 = 0,2$, $\alpha_1 = 0,01$, $\alpha_2 = 0,01$, $p = 0,3$, $q = 0,4$;
- 2) вычисляются значения величин w_1 по формуле (1.5.15) и π_1 по формуле (1.2.1);
- 3) устанавливается один из пяти вариантов соотношений величин w_1 и π_1 и вычисляется значение P_0 для этого варианта по одной из формул (1.8.15) – (1.8.18);
- 4) значение λ_1 увеличивается на 0,01, и алгоритм переходит на шаг 1, и т.д., пока λ_1 не примет значение 0,5.

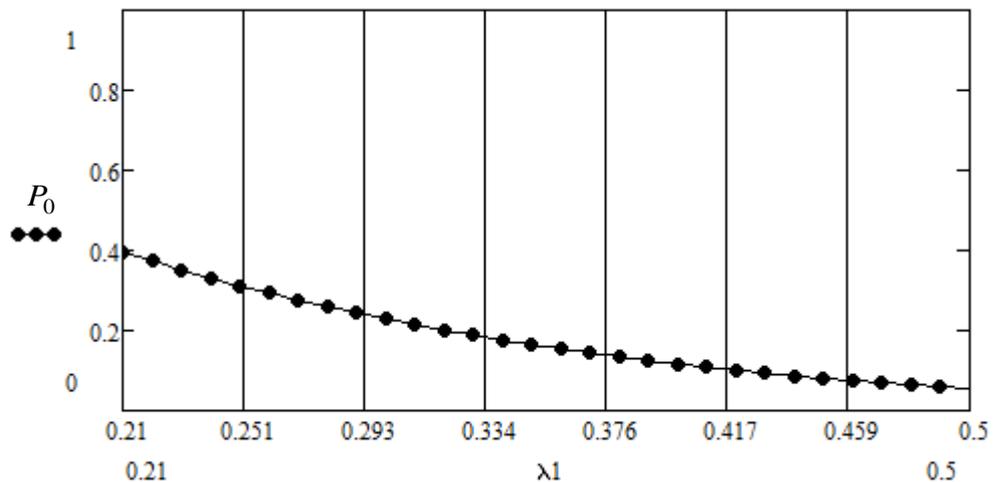


Рисунок 3.6 – График безусловной вероятности P_0 в зависимости от λ_1

График безусловной вероятности P_0 , изображенный на рис. 3.6, представляет собой убывающую функцию параметра λ_1 , что также является вполне естественным, т.к. с увеличением параметра λ_1 при зафиксированном значении параметра $\lambda_2 = 0,2$ увеличивается различимость состояний потока λ_1 и λ_2 . Это приводит к уменьшению безусловной вероятности ошибки принятия решения P_0 и, как следствие, обеспечивает убывание графика безусловной

вероятности P_0 , изображенном на рис. 3.5, вместе с увеличением значения параметра потока λ_1 .

3.3 Результаты численных расчетов оценки состояний модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени

В приложении Б приведена блок-схема имитационной модели модулированного синхронного потока событий, в приложении Г приведена блок-схема алгоритма расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 потока и алгоритм оценки состояний процесса $\lambda(t)$ в условиях мертвого времени. Для получения численных расчетов оценки состояний наблюдаемого потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени, разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ по формулам (1.3.25), (1.3.26), (1.7.4), (1.7.5).

Программа расчета реализована на языке программирования Visual C++, Microsoft Visual Studio 2008 и состоит из двух этапов. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование модулированного синхронного потока в условиях наличия мертвого времени. Второй этап расчета – вычисление вероятностей $w(\lambda_1 | t), t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$; $w(\lambda_1 | t), t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t), t_k + T < t \leq t_{k+1}$; $k=1, 2, \dots$, и построение оценки $\hat{\lambda}(t)$.

Пример поведения процесса $\lambda(t)$ и его оценки $\hat{\lambda}(t)$ изображен на рис. 3.7. Данные результаты получены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0,3$, $p=0,6$, $q=0,4$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0,4$, $T = 1$, время моделирования $T_m = 100$ ед. времени. В верхней части рисунка изображено истинное поведение процесса $\lambda(t)$, полученное путем имитационного моделирования, где λ_1 и λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$. В нижней части рисунка изображено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$, заштрихованными линиями отмечены промежутки, на которых

оценка состояния $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (области ошибочных решений).

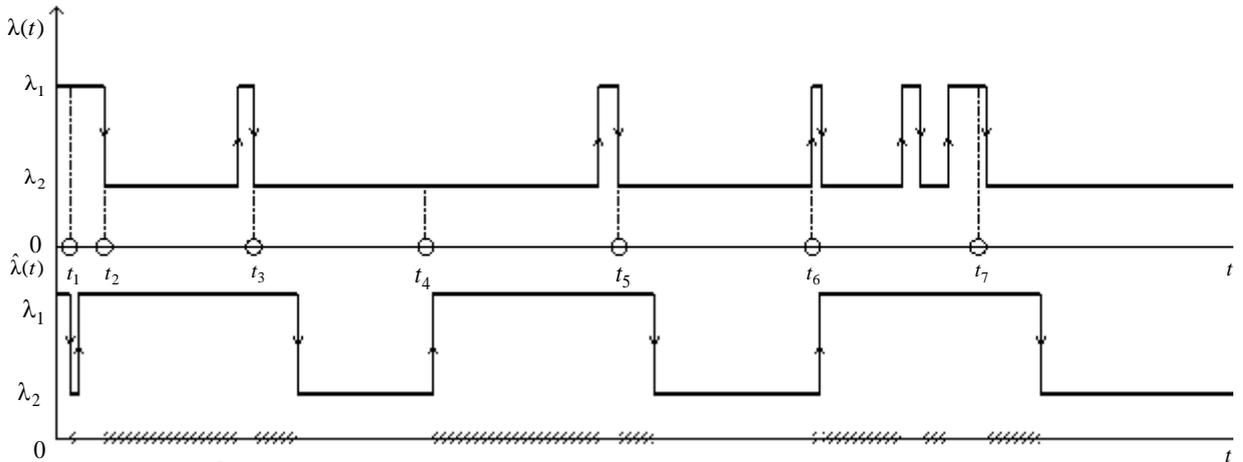


Рисунок 3.7 – Траектория процесса $\lambda(t)$ и его оценки $\hat{\lambda}(t)$ при

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0,3, p=0,6, q=0,4, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 0,4, T = 1$$

Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,01$. На рис. 3.8 приведена траектория поведения апостериорной $w(\lambda_1 | t)$, соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности моментов времени t_1, t_2, \dots наступления событий наблюдаемого потока.

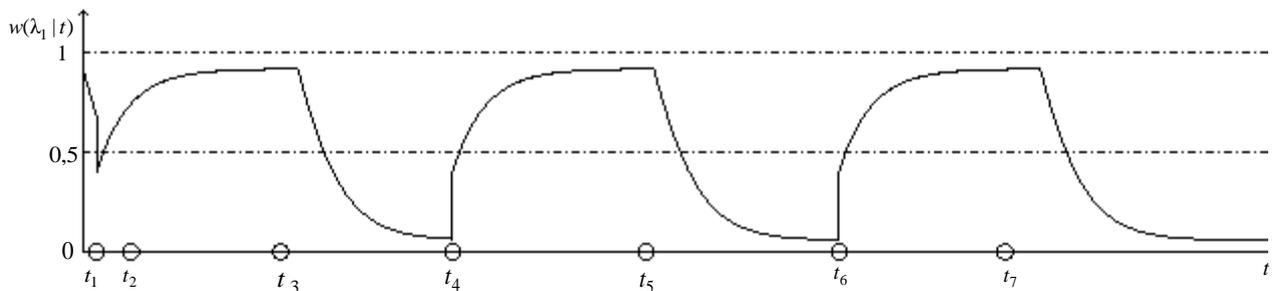


Рисунок 3.8 – Траектория поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$

В подразделе 1.7.3 приведен алгоритм оптимального оценивания состояний модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени. Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком, проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих этапов:

- 1) для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, q, \alpha_1, \alpha_2, T, T_m$ ед. времени осуществляется моделирование наблюдаемого потока событий на заданном отрезке времени $[0, T_m]$ (отдельный j -ый эксперимент);
- 2) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на отрезке $[0, T_m]$ по формулам (1.3.25), (1.3.26), (1.7.4), (1.7.5);
- 3) оценивается траектория процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$;
- 4) осуществляется определение (для j -ого эксперимента) d_j - суммарной протяженности интервалов, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$;
- 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_j = d_j / T_m$;
- 6) производится повторение N раз ($j = \overline{1, N}$) шагов 1 – 5 для расчета оценки безусловной (полной) вероятности принятия решения о состояниях процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N)$ долей ошибочных решений в N экспериментах. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности принятия ошибочного решения $\hat{P} = (1/N) \sum_{j=1}^N \hat{p}_j$ и выборочная дисперсия

$$\hat{D} = (1/(N-1)) \sum_{j=1}^N (\hat{p}_j - \hat{P})^2.$$

В таблицах 3.7 – 3.10 приведены результаты статистического эксперимента по определению длительности имитационного моделирования T_m , при котором переходные процессы заканчиваются и устанавливается стационарный режим функционирования потока событий. Для проведения данной серии экспериментов для $N=100$ зафиксированы параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, p, q, \alpha_1, \alpha_2$ и мертвое время T . При этом длительность имитационного моделирования T_m изменяется в пределах 20 до 100 единиц времени. Во второй и третьей строках

таблиц для каждого значения изменяющегося параметра приведены численные значения безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} и выборочной дисперсии \hat{D} .

Таблица 3.7 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0,5, p=0,6, q=0,6, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,2, T=0,3$

T_m	20	30	40	50	60	70	80	90	100
\hat{P}	0,2444	0,2505	0,2438	0,2404	0,2411	0,2426	0,2420	0,2414	0,2427
\hat{D}	0,0088	0,0043	0,0018	0,0015	0,0013	0,0010	0,0012	0,0009	0,0007

Таблица 3.8 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0,3, p=0,6, q=0,4, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 0,4, T=0,2$

T_m	20	30	40	50	60	70	80	90	100
\hat{P}	0,1689	0,1494	0,1626	0,1548	0,1553	0,1584	0,1559	0,1564	0,1538
\hat{D}	0,0026	0,0009	0,0009	0,0006	0,0006	0,0007	0,0004	0,0004	0,0003

Таблица 3.9 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0,5, p=0,4, q=0,6, \alpha_1 = 7, \alpha_2 = 0,8, T=0,1$

T_m	20	30	40	50	60	70	80	90	100
\hat{P}	0,1669	0,1690	0,1723	0,1738	0,1723	0,1779	0,1746	0,1734	0,1730
\hat{D}	0,0013	0,0010	0,0006	0,0006	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002

Таблица 3.10 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0,6, p=0,3, q=0,4, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 1, T=0,3$

T_m	20	30	40	50	60	70	80	90	100
\hat{P}	0,3530	0,3424	0,3453	0,3365	0,3376	0,3386	0,3378	0,3429	0,3442
\hat{D}	0,0041	0,0025	0,0019	0,0017	0,0014	0,0011	0,0008	0,0010	0,0007

Из анализа таблиц 3.7 – 3.10 можно сделать вывод, о том, что стационарный режим функционирования потока устанавливается для $T_m \geq 100$ ед. времени. Вследствие этого вторая серия экспериментов реализована при времени моделирования $T_m = 100$ единиц времени.

Результаты статистического эксперимента для $T_m = 100$ единиц времени и $N=100$ приведены в табл. 3.11 – 3.14.

В первой строке таблиц указаны значения изменяющегося параметра (длительности мертвого времени T) при остальных фиксированных. Во второй и третьей строках таблиц для каждого значения изменяющегося параметра приведены численные значения оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} и выборочной дисперсии \hat{D} .

Таблица 3.11 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0,5, p=0,6, q=0,6, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,2$

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}	0,1283	0,1892	0,2431	0,2805	0,3172	0,3489	0,375	0,4005	0,428
\hat{D}	0,0002	0,0004	0,0008	0,0008	0,0010	0,0016	0,0016	0,0014	0,0019

Таблица 3.12 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0,3, p=0,6, q=0,4, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 0,4$

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}	0,1272	0,1541	0,1905	0,2218	0,2476	0,2691	0,2939	0,3064	0,3349
\hat{D}	0,0003	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,001	0,0011	0,0013	0,0014

Таблица 3.13 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0,5, p=0,4, q=0,6, \alpha_1 = 7, \alpha_2 = 0,8$

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}	0,1743	0,2187	0,2648	0,3034	0,3296	0,3627	0,3926	0,4190	0,4385
\hat{D}	0,0002	0,0004	0,0005	0,0006	0,0010	0,0009	0,0011	0,0011	0,0012

Таблица 3.14 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0,6, p=0,3, q=0,4, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 1$

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
\hat{P}	0,3025	0,3062	0,3422	0,3618	0,3915	0,4171	0,4306	0,4562	0,4694
\hat{D}	0,0006	0,0007	0,0007	0,0009	0,0010	0,0008	0,0012	0,0010	0,0011

Анализ результатов, приведенных в таблицах 3.11 – 3.14 говорит о том, что имеется тенденция роста оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения \hat{P} при увеличении длительности мертвого времени T , что вполне естественно, так как чем больше мертвое время, тем больше теряется информации о потоке. С ростом T темп ухудшения оценки безусловной вероятности принятия ошибочного решения падает, поскольку увеличение потерь информации становится относительно малым по сравнению с уже имеющимися потерями. Многочисленные эксперименты, проведенные для тех же параметров, что и эксперименты, представленные в табл. 3.11 – 3.14, показывают, что при изменении T в диапазоне от 18 до 20 ед. времени значения \hat{P} и \hat{D}

стабилизируются, т.е. потери информации о потоке столь велики, что дальнейшее увеличение мертвого времени не оказывает существенное влияние на качество оценок.

Последнее объясняется тем, что при стремлении длительности мертвого времени к бесконечности ($T \rightarrow \infty$), согласно формулам (1.9.5) и (1.9.6), значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в условиях мертвого времени стремится к априорной вероятности π_1 , так что оценивание состояний производится в итоге на основании априорных вероятностей π_1 и π_2 .

При фиксированном значении T с увеличением разности параметров $\lambda_1 - \lambda_2$ качество оценки состояния улучшается, так как чем больше интенсивности λ_1 и λ_2 отличаются друг от друга, тем лучше различается поведение потока в первом и втором состоянии.

В целом анализ результатов экспериментов показывает, что предложенный алгоритм обеспечивает приемлемую величину оценки полной вероятности принятия ошибочного решения, выборочная дисперсия оценки при этом достаточно мала.

3.4 Результаты численных расчетов оценки длительности мертвого времени

Для оценивания длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях мертвого времени, используются метод максимального правдоподобия, описанный в подразделе 2.4, и модифицированный метод моментов, описанный в подразделе 2.5 настоящей работы.

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления МП- и ММ-оценок, который реализован на языке программирования C# в среде программирования Microsoft Visual Studio C#.

Алгоритм расчета состоит из трех этапов. На первом этапе осуществляется имитационное моделирование модулированного синхронного дважды стохастического потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени (при заданных параметрах моделирования $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ и времени моделирования T_m ед. времени). Результатом работы имитационной модели является последовательность значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, n = 2, 3, \dots$ ($\tau_n = t_{n+1} - t_n$, где t_{n+1} – последнее наблюдаемое событие на интервале моделирования длительности T_m).

Второй этап расчета заключается в нахождении численных значений МП- и ММ-оценок рассматриваемого потока. Опишем алгоритм программной реализации второго этапа расчета:

- 1) на основании последовательности $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, n = 2, 3, \dots$ находится МП-оценка $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ ($\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$);
- 2) вычисляется оценка ковариации $\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2)$ по формуле (2.5.4);
- 3) находятся корни $x_i, i = 1, 2, 3$ кубического уравнения (2.5.6), на основании которых вычисляются три ММ-оценки $\hat{T}_{ММ}^{(i)}, i = 1, 2, 3$;
- 4) реализуется алгоритм нахождения единственной ММ-оценки $\hat{T}_{ММ}$.

Третий этап расчета заключается в сравнении качества МП- и ММ-оценок путем проведения статистического эксперимента:

- 1) для заданного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ осуществляется моделирование наблюдаемого потока событий на интервале моделирования T_m для каждого j -ого эксперимента, $j = \overline{1, N}$;
- 2) в каждом j -м эксперименте вычисляются значения МП- и ММ-оценок $\hat{T}_{МП}^{(j)}, \hat{T}_{ММ}^{(j)}, j = \overline{1, N}$;

3) в каждом j -м эксперименте вычисляются значения величин $\Delta\hat{T}_{МП}^{(j)} = (\hat{T}_{МП}^{(j)} - T)^2$, $\Delta\hat{T}_{ММ}^{(j)} = (\hat{T}_{ММ}^{(j)} - T)^2$, $j = \overline{1, N}$, где T – истинное значение мертвого времени, известное из имитационной модели;

4) осуществляется повторение шагов 1–3 N раз.

Результатом третьего этапа расчета являются две выборки: $(\Delta\hat{T}_{МП}^{(1)}, \Delta\hat{T}_{МП}^{(2)}, \dots, \Delta\hat{T}_{МП}^{(N)})$, $(\Delta\hat{T}_{ММ}^{(1)}, \Delta\hat{T}_{ММ}^{(2)}, \dots, \Delta\hat{T}_{ММ}^{(N)})$, используя которые вычисляются выборочные вариации полученных оценок:

$$\hat{V}_{МП} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta\hat{T}_{МП}^{(j)}, \quad \hat{V}_{ММ} = (1/N) \sum_{j=1}^N \Delta\hat{T}_{ММ}^{(j)}.$$

Сравнивая значения выборочных вариаций делается вывод, какая из оценок при заданных параметрах $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q, T$ лучше, а какая хуже: если $\hat{V}_{МП} \leq \hat{V}_{ММ}$, то МП-оценка лучше ММ-оценки, в противном случае ММ-оценка лучше МП-оценки. Стоит отметить, что по определению, при заданном времени моделирования T_m МП-оценка будет всегда смещенная ($\tau_{\min} > T$). Вариант, когда МП-оценка несмещенная, реализуется только в асимптотическом случае, когда $T_m \rightarrow \infty$.

Результаты статистического эксперимента приведены в табл. 3.15 – 3.20. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования T_m , причем T_m изменяется от 10 до 50 с шагом 10 ед. времени в табл. 3.15 – 3.17, в табл. 3.18 – 3.20 T_m изменяется от 600 до 1000 с шагом 100 ед. времени. Во второй и третьей строках таблиц для каждой длительности имитационного моделирования T_m приведены численные значения для выборочных вариаций МП- и ММ-оценок $\hat{V}_{МП}$ и $\hat{V}_{ММ}$ соответственно. В четвертой строке каждой из таблиц приведены численные значения разности $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$. Численные результаты во всех таблицах получены для $N=100$ (N – количество экспериментов).

Таблица 3.15 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, p=0,5, q=0,4, \alpha_1 = 0,03, \alpha_2 = 0,03, T=0,5$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,08936555	0,02139580	0,00190583	0,00114900	0,00128956
$\hat{V}_{ММ}$	0,08919526	0,02131419	0,00190530	0,00114900	0,00445481
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00170293	0,00008161	0,00000052	0	-0,0031652

Таблица 3.16 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p=0,4, q=0,2, \alpha_1 = 0,05, \alpha_2 = 0,05, T=0,7$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,90196699	0,12758867	0,040312912	0,02378204	0,00815925
$\hat{V}_{ММ}$	0,90034098	0,12616512	0,038268349	0,02355205	0,00812320
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00162600	0,00142355	0,002044563	0,00229987	0,00003605

Таблица 3.17 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 0,9, p=0,4, q=0,3, \alpha_1 = 0,02, \alpha_2 = 0,02, T=0,2$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,04937792	0,00691690	0,00299561	0,00132811	0,00104303
$\hat{V}_{ММ}$	0,04930285	0,00690571	0,00296747	0,00126077	0,00103060
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00007507	0,00001118	0,00002814	0,00006734	0,00001243

Таблица 3.18 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, p=0,5, q=0,4, \alpha_1 = 0,03, \alpha_2 = 0,03, T=0,5$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000410	0,00000405	0,00000304	0,00000225	0,00000151
$\hat{V}_{ММ}$	0,00314312	0,00460004	0,00594022	0,00305194	0,00614238
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,0031390	-0,0045959	-0,0059371	-0,00304969	-0,0061408

Таблица 3.19 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, p=0,4, q=0,2, \alpha_1 = 0,05, \alpha_2 = 0,05, T=0,7$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00009986	0,00006699	0,00003027	0,00003759	0,00002732
$\hat{V}_{ММ}$	0,00875014	0,00404040	0,00710656	0,00359553	0,00014134
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,0086502	-0,0039732	-0,0070762	-0,0035579	-0,0001140

Таблица 3.20 – Результаты эксперимента при $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 0,9, p=0,4, q=0,3, \alpha_1 = 0,02, \alpha_2 = 0,02, T=0,2$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000638	0,00000349	0,00000335	0,00000166	0,00000137
$\hat{V}_{ММ}$	0,00000638	0,00000349	0,00103220	0,00002244	0,00002016
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0	0	-0,0010288	-0,0000207	-0,00001879

Анализ результатов, полученных в ходе статистического эксперимента, показывает, что при достаточно малом времени моделирования T_m ($T_m = 10, 20, 30, 40, 50$ ед. времени) ММ-оценки длительности мертвого времени лучше МП-оценок длительности мертвого времени (табл. 3.16, 3.17) либо, по

крайней мере, не хуже их (табл. 3.15). Это вполне объяснимо, так как при малом времени наблюдения МП-оценка $\hat{T}_{МП}$ может быть достаточно сильно смещенной относительно T . При достаточно большом времени моделирования T_m ($T_m = 600, 700, 800, 900, 1000$ ед. времени) МП-оценки лучше ММ-оценок (табл. 3.18–3.20), что вполне естественно, так как при увеличении времени наблюдения за потоком смещение МП-оценки $\hat{T}_{МП}$ относительно T уменьшается.

3.5 Результаты и выводы к разделу 3

Сформулируем результаты, полученные в разделе 3.

1) Разработана и реализована на ЭВМ имитационная модель модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени ($T \neq 0$) и в условиях его отсутствия ($T = 0$).

2) На основе результатов, полученных в разделе 1 настоящей работы, реализованы на ЭВМ алгоритмы оптимальной оценки состояний потока событий в условиях мертвого времени ($T \neq 0$) и в условиях его отсутствия ($T = 0$).

3) Разработан и реализован на ЭВМ алгоритм оценивания длительности мертвого времени модифицированным методом моментов и методом максимального правдоподобия.

4) С помощью имитационной модели модулированного синхронного потока получены численные результаты для оценок состояний потока.

5) В ходе эксперимента произведен расчет выборочной дисперсии и выборочного среднего полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения о состоянии потока. Качество оценивания при этом является достаточно высоким. Так как метод максимума апостериорной вероятности обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения, то это означает, что получение более качественных оценок другими методами не представляется возможным.

б) С помощью имитационной модели модулированного синхронного потока получены численные результаты оценок длительности мертвого времени.

7) Произведено численное сравнение качества оценок длительности мертвого времени, получаемых методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

Основным результатом раздела 3 является вывод о возможности применения методов оценивания состояний потока и длительности мертвого времени таких, как метод максимума апостериорной вероятности, метод максимального правдоподобия и модифицированный метод моментов. Используя полученные алгоритмы оценивания, разработаны вычислительные программы для ЭВМ, которые могут быть применены при проектировании и управлении реальными телекоммуникационными системами, спутниковыми системами связи, информационно-коммуникационными сетями и т.д.

Заключение

В диссертационной работе решены задачи оптимального оценивания состояний и оценивания длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий.

Сформулируем основные теоретические и практические результаты диссертационной работы.

1) Получены явные аналитические формулы для апостериорных вероятностей состояний модулированного синхронного потока в любой момент времени наблюдения за потоком для случая отсутствия мертвого времени. На основе критерия максимума апостериорной вероятности по наблюдениям за моментами наступления событий сформулирован алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока в любой момент времени наблюдения за потоком. Используемый критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности принятия ошибочного решения о состоянии потока. Получены формулы для условной вероятности ошибки при вынесении решения о состоянии модулированного синхронного потока событий в общем случае.

2) При функционировании потока в условиях отсутствия мертвого времени рассмотрены частные случаи соотношения параметров потока, для которых найдены апостериорные вероятности состояний потока. Получены явные формулы для полной (безусловной) вероятности ошибки при вынесении решения о состоянии потока для частного случая соотношения параметров потока, при которых исходный модулированный синхронный поток событий становится рекуррентным.

3) Получены явные аналитические формулы для апостериорных вероятностей состояний модулированного синхронного потока в любой момент времени наблюдения за потоком для случая функционирования потока в условиях мертвого времени. Данные формулы получены для интервалов мертвого времени и интервалов наблюдаемости, когда мертвое время отсутствует, а также в моменты наступления наблюдаемых событий потока, не попавших в интервалы

мертвого времени. На основе критерия максимума апостериорной вероятности и наблюдений за моментами наступления наблюдаемых событий потока сформулирован алгоритм оптимальной оценки состояний модулированного синхронного потока в любой момент времени наблюдения за потоком, обеспечивающий минимум полной (безусловной) вероятности ошибки.

4) Получены явные аналитические формулы для плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями модулированного синхронного потока для случая отсутствия мертвого времени и случая функционирования потока в условиях мертвого времени. Получен явный вид совместной плотности вероятности длительностей смежных интервалом между моментами наступления соседних событий модулированного синхронного потока для случая отсутствия мертвого времени и случая функционирования потока в условиях мертвого времени. Сделан вывод о коррелированности потока в общем случае.

5) На основе полученных формул для плотностей вероятности построена оценка мертвого времени методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов. Сформулированы алгоритмы оценки длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

6) Разработаны и реализованы на ЭВМ имитационные модели модулированного синхронного потока для случая отсутствия мертвого времени и случая функционирования потока в условиях мертвого времени, которые используются для получения численных результатов при проведении статистических экспериментов.

7) При заданных значениях параметров модулированного синхронного потока событий произведены вычисления оценок состояний потока для случая отсутствия мертвого времени и случая функционирования потока в условиях мертвого времени. Произведен расчет величин, характеризующих качество оценивания состояний потока.

8) Разработан и реализован на ЭВМ алгоритм оценивания длительности мертвого времени. Произведено численное сравнение качества оценок длительности мертвого времени, получаемых методом максимального правдоподобия и модифицированным методом моментов.

9) Полученные в вычислительных программах численные результаты позволяют сделать вывод о приемлемом качестве предлагаемых в настоящей работе методов оптимальной оценки состояний потока и оценки длительности мертвого времени. На основе сформулированных алгоритмов разработаны вычислительные программы на ЭВМ, которые могут быть применены при проектировании и управлении реальными телекоммуникационными системами, спутниковыми системами связи, информационно-коммуникационными сетями и т.д.

Таким образом, результатом диссертационной работы являются новые теоретические и практические результаты для решения задач оптимальной оценки состояний и оценки длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий. В комплексе с программной реализацией на ЭВМ алгоритмов по оптимальной оценке состояний и оценке длительности мертвого времени в потоке, полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для решения важных прикладных задач, таких как выбор дисциплины обслуживания в цифровых сетях интегрального обслуживания и телекоммуникационных сетях, а также при проектировании сетей интегрального обслуживания.

Список использованных источников и литературы

1. Апанасович В. В. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте / В. В. Апанасович, А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 254 с.
2. Афанасьева Л. Г. Система с включением резервного прибора / Л. Г. Афанасьева // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1971. – № 6. – С. 93–100.
3. Бахолдина М. А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий / М. А. Бахолдина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2(23). – С. 10–21.
4. Бахолдина М. А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени / М. А. Бахолдина, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1(26). – С. 13–24.
5. Бахолдина М. А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий / М. А. Бахолдина, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 2(35). – С. 13–29.
6. Бахолдина М. А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности непродлеваемого мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий / М. А. Бахолдина, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 3(36). – С. 11–25.
7. Башарин Г. П. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений / Г. П. Башарин, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов // Автоматика и вычислительная техника. – 2013. – № 2. – С. 11–21.

8. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
9. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 55–61.
10. Башарин Г. П. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, И. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 12. – С. 16–28.
11. Башарин Г. П. Массовое обслуживание в телефонии / Г. П. Башарин, А. Д. Харкевич, М. А. Шнепс. – М.: Наука, 1968. – 240 с.
12. Беккерман Е. Н. Алгоритм определения участков стационарности МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Мас. обл.: Матер. межд. конф. «Совр. матем. мет. иссл. инф.-выч. сетей». – Минск: БГУ. – Вып. 16. – 2001. – С. 42–47.
13. Беккерман Е. Н. Аппроксимация МС-потокм реального потока событий / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева, Д. Ю. Кузнецов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2005. – №14. – С. 248–253.
14. Бочаров П. П. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $G/M-SP/1/r$ / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин, С. Салерно, Ч. Д'Апиче // АиТ. – 2003. – № 2. – С. 127–142.
15. Бронштейн О. И. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах / О. И. Бронштейн, И. М. Духовный. – М.: Наука, 1976. – 220 с.
16. Бронштейн О. И. Об оптимальных приоритетах в СМО / О. И. Бронштейн, В. В. Рыков // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. – 1965. – №6. – С. 28 – 37.

17. Бронштейн О. И. Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах / О. И. Бронштейн, В. В. Рыков // Упр. произв.: Тр. III Всес. сов. по авт. упр. (техн. киберн.). – Москва, 1967. – С. 215–224.
18. Бушланов И. В. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №9. – С. 40–51.
19. Бушланов И. В. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 76–93.
20. Васильева Л. А. Оценивание параметров асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его частичной наблюдаемости / Л. А. Васильева, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 3. – С. 179–184.
21. Васильева Л. А. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости / Л. А. Васильева, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. – С. 69–79.
22. Веклеров Е. Б. Об оптимальных абсолютных динамических приоритетах в СМО / Е. Б. Веклеров // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1967. – № 2. – С. 87–90.
23. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
24. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
25. Вишневский В. М. Открытая сеть массового обслуживания с оррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей. / В. М. Вишневский, А. А. Ларионов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016): материалы XV Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Ч. 1. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 36–50.

26. Вишнеvский В. М. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах / В. М. Вишнеvский, А. И. Ляхов // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 8. – С. 81–96.
27. Волковинский М. И. Анализ приоритетных очередей с учетом времени переключения / М. И. Волковинский, А. Н. Кабалевский А. Н. – М.: Энергоиздат., 1981. – 167с.
28. Воробьев Н. М. Об управлении системой массового обслуживания одного вида / Н. М. Воробьев // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1967. – № 3. – С. 86 – 93.
29. Гайдамака Ю. В. Оценка времени установления соединения для услуги IPTV / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова // Вест. РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2014. – № 1. – С. 23–29.
30. Гнеденко Б. В. Приоритетные системы массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, Э. А. Даниэлян, В. Н. Дмитриев, Г. П. Климов, В. Ф. Матвеев. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 447 с.
31. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1966. – 431 с.
32. Головки Н. И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головки, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сиб. жур. инд. матем. – 2008. – Т. XI, № 2 (34). – С. 50–58.
33. Головки Н. И. Краевые задачи в стационарных системах массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока / Н. И. Головки, В. В. Катрахов, Т. А. Писаренко // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 305–312.
34. Головки Н. И. Матричный анализ систем массового обслуживания с конечным накопителем при скачкообразной интенсивности входного потока / Н. И. Головки, Н. А. Филинова // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 9. – С. 73–83.
35. Голофастова М. Н. Модулированный синхронный дважды стохастический поток событий / М. Н. Голофастова // Студент и научно-

технический прогресс : Математика : материалы 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 13–19 апреля 2012 г. – Новосибирск, 2012. – С. 192.

36. Голофастова М. Н. Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока событий / М. Н. Голофастова, Л. А. Нежелская // Материалы Девятой Российской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Катунь, 5–8 июня 2012 г. – Томск, 2012 – С. 83.

37. Голофастова М. Н. Апостериорные вероятности модулированного синхронного дважды стохастического потока и результаты статистического эксперимента / М. Н. Голофастова // Студент и научно-технический прогресс» : Математика : материалы 51-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 12–18 апреля 2013 г. – Новосибирск, 2013. – С. 249.

38. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, М. Н. Голофастова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2 (23). – С. 42–53.

39. Горцев А. М. Модулированный синхронный дважды стохастический поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. М. Горцев, М. Н. Голофастова // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56, № 9/2. – С. 223–225.

40. Горцев А. М. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости / А. М. Горцев, М. Е. Завгородняя // Оптика атмосферы и океана. – 1977. – Т. 10, № 3. – С. 273–280.

41. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного потока событий с конечным числом состояний / А. М. Горцев, В. Л. Зуевич // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: материалы Международной конференции. – Минск: Изд-во РИВШ. – 2010. – С. 60–67.

42. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний / А. М.

Горцев, В. Л. Зуевич // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2(11). – С. 44–65.

43. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного потока событий с конечным числом состояний в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. М. Горцев, В. Л. Зуевич // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №3 (12). – С. 41–53.

44. Горцев А. М. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний / А. М. Горцев, В. Л. Зуевич // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4(17). – С. 25–40.

45. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий / А. М. Горцев, А. А. Калягин, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2(11). – С. 66–81.

46. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока / А. М. Горцев, М. А. Леонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 1(10). – С. 33–47.

47. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного потока в условиях непродлевающего мертвого времени / А. М. Горцев, М. А. Леонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3(12). – С. 54–64.

48. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока с иницированием лишних событий / А. М. Горцев, М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы Междунар. науч. конф. «Современные математические методы

анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей». Вып. 20. Минск, 26 – 29 января 2009 г. – Минск, 2009. – С. 90–96.

49. Горцев А. М. Сравнение МП и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / А. М. Горцев, М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4(25). – С. 32–42.

50. Горцев А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания / А. М. Горцев, А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.

51. Горцев А. М. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потокком / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Стохастические и детерминированные модели сложных систем: Сб. статей. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. – С. 20–32.

52. Горцев А. М. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1989. – Вып. 7. – С. 46–54.

53. Горцев А. М. Оценка параметров синхронного МС-потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Сети связи и сети ЭВМ (анализ и применение): тезисы докладов восьмой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. – Минск: Изд-во БГУ, 1992. – С. 33.

54. Горцев А. М. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Радиотехника. – 1995. – № 7 – 8. – С. 6–10.

55. Горцев А. М. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 1. – С. 18–23.

56. Горцев А. М. Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Измерительная техника. – 2003. – № 6. – С. 7–13.
57. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. – 2003. – № 6. – С. 232–239.
58. Горцев А. М. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 8–16.
59. Горцев А. М. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – № 1. – С. 31–34.
60. Горцев А. М. О связи МС-потоков и MAP-потоков событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1(14). – С. 13–21.
61. Горцев А. М. Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Дискретная математика. – 2011. – Т. 23. – Вып. 2. – С. 59–65.
62. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний MAP-потока событий в условиях непродлеваемого мертвого времени / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская, А. А. Соловьев // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 8. – С. 49–63.
63. Горцев А. М. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская, Т. Н. Шевченко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1993. – № 12. – С. 67–85.
64. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с инициированием лишнего события / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Вестник Томского государственного университета. – 2004. – № 284. – С. 137–145.

65. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2005. – № 10. – С. 35–49.

66. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишних событий / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика.– 2008. – № 6. – С. 107–119.

67. Горцев А. М. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» / А. М. Горцев, М. Е. Паршина // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1999. – № 4. – С. 8–13.

68. Горцев А. М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы Десятой Российской конференции с международным участием, Алтайский край, 9–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 147–153.

69. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного синхронного потока событий / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014): материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова. Ч. 2. Анжеро-Судженск, 20–22 ноября 2014 г. – Томск, 2014. – С. 147–153.

70. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между соседними событиями модулированного синхронного дважды стохастического потока в условиях непродлеваемого мертвого времени / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 127–132.

71. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного синхронного потока событий в условиях неполной

наблюдаемости / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015): материалы XIV Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова. Ч. 1. Анжеро-Судженск, 8–22 ноября 2015 г. – Томск, 2015. – С. 28–35.

72. Горцев А. М. Вероятность ошибки при оценивании состояний модулированного синхронного потока физических событий / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 7. – С. 92–98.

73. Горцев А. М. МП-оценка длительности мертвого времени в модулированном синхронном потоке событий / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016): материалы XV Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова. Ч. 1. Катунь, 12-16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 50–56.

74. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов МАР-потока событий и условия его рекуррентности / А. М. Горцев, А. А. Соловьев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № (20). – С. 32–41.

75. Горцев А. М. Оптимальный алгоритм оценки состояний МС-потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени / А. М. Горцев, И. С. Шмырин // Оптика атмосферы и океана. – 1998. – Т. 11, № 4. – С. 419–429.

76. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени / А. М. Горцев, И. С. Шмырин // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 1. – С. 52–66.

77. Горцев А. М. Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий / А. М. Горцев, И. С. Шмырин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1999. – № 4. – С. 19–27.

78. Даниэлян Э. А. Время ожидания в модели с категорийными во времени приоритетами / Э. А. Даниэлян // Кибернетика. – 1980. – № 6. – С. 103–109.

79. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Физматгиз, 1963. – 660 с.
80. Джейсоул Н. Очереди с приоритетами / Н. Джейсоул. – М.: Мир. – 1973. – 279 с.
81. Дудин А. Н. О задаче оптимального управления многоскоростной системой массового обслуживания / А. Н. Дудин // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 9. – С. 43–51.
82. Дудин А. Н. Оптимальное гистерезисное управление ненадежной системой $MAP|SM|1$ с двумя режимами работы / А. Н. Дудин // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 10. – С. 58–72.
83. Дудин А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок. – Минск: Изд-во БГУ, 2000. – 175 с.
84. Дудин А. Н. Расчет характеристик однолинейной системы обслуживания с групповым марковским потоком, полумарковским обслуживанием и конечным буфером / А. Н. Дудин, В. И. Клименок, Г. В. Царенков // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 8. – С. 87–101.
85. Завгородняя М. Е. Оценивание длительности мертвого времени и параметров альтернирующего потока событий методом моментов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.13.01. – Томский государственный университет. – 2002. – 122 с.
86. Закс Л. М., Королев В. Ю. Обобщенные дисперсионные гамма-распределения как предельные для случайных сумм // Информ. и ее примен. – 2013. – Т. 7, Вып. 1. – С. 105 – 115.
87. Зиновьева Л. И. Система массового обслуживания с гистерезисом и резервным прибором, управляемым временем ожидания / Л. И. Зиновьева // Математическая статистика и ее приложения – Томск: Изд-во ТГУ. – 1980. – №6. – С. 146 – 152.
88. Зорин А. В. Оптимальный алгоритм обслуживания с разделением времени и переналадками для дважды стохастических входных и ветвящихся

вторичных потоков / А. В. Зорин // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2008. – № 1. – С. 100–107.

89. Зорин А. В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А. В. Зорин, М. А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 7. – С. 102–111.

90. Ивницкий В. А. Однолинейная система со случайной интенсивностью потока и скоростью обслуживания / В. А. Ивницкий // Лит. Матем. сб. – 1996. – Т. 6, № 1. – С. 41–50.

91. Ивченко Г. И. Теория массового обслуживания / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.

92. Кениг Д. Методы теории массового обслуживания / Д. Кениг, Д. Штойян. – М.: Радио и связь, 1981. – 127 с.

93. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

94. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания / Г. П. Климов. – М.: Наука, 1966. – 243 с.

95. Климов Г. П. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией / Г. П. Климов, Г. К. Мишкой. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 222 с.

96. Коваленко И. Н. О некоторых вопросах оптимального обслуживания требований в системах с ограниченным временем ожидания / И. Н. Коваленко, О. М. Юркевич // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1971. – № 1. – С. 26–35.

97. Королев В. Ю. Асимптотические свойства экстремумов обобщенных процессов Кокса и их применение к некоторым задачам финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 2000. – Т. 45, Вып. 1. – С. 182–194.

98. Коротаев И. А. Адаптивная оценка интенсивности дважды стохастического потока / И. А. Коротаев // Упр. сист. мас. обл. – Томск. – 1984. – Вып. 3. – С. 50–57.

99. Коротаева Н. И. Оценивание интенсивностей МС-потока событий с двумя состояниями / Н. И. Коротаева // Белорусская школа-семинар по массовому обслуживанию – Минск: БГУ. – 1992. – С. 78 – 79.

100. Кофман А. Массовое обслуживание / А. Кофман, Р. Крюон. – М.: Мир, 1965. – 302 с.

101. Кухта Т. К., Шваб Н. Д. Системы с переменным числом каналов / Т. К. Кухта, Н. Д. Шваб // Кибернетика. – 1975. – № 2. – С. 146–148.

102. Леонова М. А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2(23). – С. 54–63.

103. Леонова М. А. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. – Т. 56, № 9/2. – С. 220–222.

104. Лившиц К. И. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей / К. И. Лившиц, Л. Ю. Сухотина, И. Ю. Шифердекер // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2007. – № 1. – С. 36–43.

105. Малинковский Ю. В. Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения / Ю. В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 75–83.

106. Малинковский Ю. В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю. В. Малинковский, Е. В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 43–56.

107. Малинковский Ю. В. Стационарное распределение состояний сетей с обходами и «отрицательными» заявками / Ю. В. Малинковский, О. А. Никитенко // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 8. – С. 79–85.

108. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1967. – 409 с.

109. Маталыцкий М. А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении / М. А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С. 97–113.

110. Маталыцкий М. А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применения: Монография / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, Е. В. Колузаева. – Гродно: Изд-во ГрГУ, 2011. – 820 с.

111. Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиосхемы с емкостными накопителями I / Г. А. Медведев // Известия Вузов СССР, Радиофизика. – 1961. – Т. 4, № 2. – С. 275–281.

112. Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиосхемы с емкостными накопителями II / Г. А. Медведев // Известия Вузов СССР, Радиофизика. – 1962. – Т. 5, № 3. – С. 549–560.

113. Медведев Г. А. Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска / Г. А. Медведев // Автоматика и вычислительная техника. – 1968. – № 4. – С. 27–30.

114. Мова В. В. Об оптимальном назначении приоритетов, зависящих от состояния блуждающей системы с ограниченным числом мест для ожидания / В. В. Мова, Л. А. Пономаренко // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1974. – № 5. – С. 74–81.

115. Мова В. В. Организация приоритетного обслуживания в АСУ / В. В. Мова, Л. А. Пономаренко, А. М. Калиновский. – Киев: Техника, 1977. – 160 с.

116. Моисеев А. Н. Исследование высокоинтенсивного МАР потока / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров // Изв. Том. политехнич. ун-та. – 2013. – Т. 322, № 2. – С. 519–872.

117. Назаров А. А. Оптимальное формирование очередей в многоканальных системах массового обслуживания / А. А. Назаров // АиТ. – 1975. – №8. – С. 36 – 39.

118. Назаров А. А. Управляемые системы массового обслуживания и их оптимизация / А. А. Назаров. – Томск: Изд-во ТГУ, 1984. – 234 с.

119. Назаров А. А. Исследование МАР-потока методом асимптотического анализа N-го порядка / А. А. Назаров, С. В. Лопухова // Вест. Том. гос. ун-та. – 2006. – № 293. – С. 110–115.

120. Назаров А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

121. Назаров А. А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 204 с.

122. Назаров А. А. Обработка данных и управление в сложных системах / А. А. Назаров, С. У. Узурбаева // Сборник статей. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2002. – Вып. 4. – С. 67 – 74.

123. Назаров А. А. Применение общего подхода к анализу однолинейной марковской модели сети связи с асинхронным дважды стохастическим входящим потоком / А. А. Назаров, С. А. Цой // Научное творчество молодёжи: материалы IX Всерос. конф. Анжеро-Судженск, 15–16 апреля 2005 г. – Томск, 2005. – С. 45–47.

124. Небеев А. В. Исследование многоканальных систем передачи информации методом оптимизации стратегии распределительного устройства / А. В. Небеев, В. П. Ревельс // ППИ. – 1970. – Т. 6, Вып. 3. – С. 96–99.

125. Нежелская Л. А. Алгоритмы оценивания состояний МС-потока событий. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.13.01. – Том. гос. ун-т. – 1990. – 156 с.

126. Нежелская Л. А. Алгоритм оценивания состояния синхронного МС-потока / Л. А. Нежелская // XI Белорусская школа-семинар по массовому обслуживанию. – Минск. – 1995. – С. 93 – 94.

127. Нежелская Л. А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени / Л. А. Нежелская // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. – Минск: изд-во БГУ, 1998. – С. 18–21.

128. Нежелская Л. А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости / Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. – 2000. – № 269. – С. 95–98.

129. Ниссенбаум О. В. Оценка параметров и состояний асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних событий. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.13.01. – Томский государственный университет. – 2009. – 155 с.

130. Паршина М. Е. Численное решение уравнений метода моментов для альтернирующего потока событий в системе с продлевающимся «мертвым» временем / М. Е. Паршина // Мас. обл.: матер. межд. конф. «Совр. матем. методы иссл. информ.-вычисл. сетей». – Минск: БГУ. – 2001. – С. 166–171.

131. Поддубный В. В. Рестриктивная фильтрация тренда интенсивности пуассоновского потока / В. В. Поддубный // Третий Сиб. конгресс по прикл. и индустр. матем. – Н-ск: Ин-т матем. – 1998. – С. 140.

132. Поттосина С. А. Оптимальная нелинейная фильтрация МС-потоков / С. А. Поттосина, А. Ф. Терпугов // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1993. – Т.36, №12. – С. 54–60.

133. Риордан Д. Вероятностные системы обслуживания / Д. Риордан. – М.: Связь, 1966. – 184 с.

134. Рыков В. В. Об оптимальной дисциплине обслуживания в системе со складом / В. В. Рыков // В кн.: Прикладные задачи теоретической кибернетики. – М.: Советское радио, 1966. – С. 437–449.

135. Рыков В. В. Управляемые системы массового обслуживания / В. В. Рыков // В кн.: Итоги науки и техника. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Т. 12. – М.: ВИНТИ. 1975. – С. 43 – 153.

136. Рыков В. В. Об оптимальных динамических приоритетах в СМО / В. В. Рыков, Э. Е. Лемберг // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1976. – № 1. – С. 25–34.

137. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания / Т. Л. Саати // В кн.: Итоги науки и техники. Теор. Вероятн. Матем. стат. Теор. киб. Т. 12. – М.: ВИНТИ, 1975. – С. 43 – 153.

138. Сиротина М. Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / М. Н. Сиротина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1(26). – С. 63–74.

139. Сиротина М. Н. Определение времени установления стационарного режима модулированного синхронного потока событий в условиях мертвого времени / М. Н. Сиротина // Труды Томского государственного университета. Секция физико-математическая. – 2014. – Т. 295: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции, Томск, 16–17 мая 2014 г. – Издательский дом Томского государственного университета. – 2014. – С. 129–134.

140. Сиротина М. Н. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени / М. Н. Сиротина, А. М. Горцев // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук, Геннадия Алексеевича Медведева, Минск, 23–26 февраля 2015 г.– Минск, 2015. – С. 299–30.

141. Сиротина М. Н. Совместная плотность вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке при непродлевающемся мертвом времени и условия рекуррентности потока / М. Н.

Сиротина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2(31). – С. 53–67.

142. Сиротина М. Н. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий / М. Н. Сиротина, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 1(34). – С. – 50–64.

143. Сиротина М. Н. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в модулированном синхронном дважды стохастическом потоке событий / М. Н. Сиротина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 3(36). – С. 66–80.

144. Соловьев А. Д. Задача об оптимальном обслуживании / А. Д. Соловьев // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1970. – № 5. – С. 40–49.

145. Ушаков И. А. Оптимальное управление в многоканальной СМО с несколькими потоками событий / И. А. Ушаков, В. П. Чернышев // Известия АН СССР. Техн. киберн. – 1976. – № 5. – С. 95–100.

146. Файнберг М. А. Управление в системах массового обслуживания / М. А. Файнберг, Е. А. Файнберг // Зарубежная радиоэлектроника. – 1975. – № 3. – С. 3 – 34.

147. Фалвино М. А. Оценка состояний и длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 05.13.01. – Томский государственный университет. – 2014. – 151 с.

148. Фархадов М. П. Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчета характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания / М. П. Фархадов, Н. В. Петухова, Д. В. Ефросинин, О. В. Семенова // Пробл. управл. – 2010. – № 6. – С. 53–57.

149. Федосов Е. Н. Фильтрация интенсивности дважды стохастического потока в системах с продлевающимся «мертвым временем» / Е. Н. Федосов //

Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика: сборник статей. – Томск: Изд-во Томского госуниверситета, 1999. – С. 157 – 161.

150. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. / В. Феллер. – М.: Мир, 1967. – 487 с.

151. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления / Э. М. Хазен. – М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.

152. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М.: Физматгиз, 1963. – 235 с.

153. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин // Труды математического института им. В. А. Стеклова. – 1955. – Т. 49. – С. 3–122.

154. Хинчин А. Я. Потоки случайных событий без последствия / А. Я. Хинчин // Теория вероятностей. – 1956. – Т. 1. – С. 3–18.

155. Хинчин А. Я. О пуассоновских потоках случайных событий / А. Я. Хинчин // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – Т. 1, № 3. – С. 320–327.

156. Царенков Г. В. ВМАР-поток как модель трафика реальной сети / Г. В. Царенков // Материалы международной научной конференции «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей», 22–24 февраля 2005. – С. 209 – 214.

157. Цициашвили Г. Ш. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания / Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // Пробл. передачи информ. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 115–120.

158. Шуленин В. П. Робастные методы математической статистики / В. П. Шуленин. – Томск: Изд-во НТЛ, 2016. – 260 с.

159. Шуленин В. П. Математическая статистика. Часть 1 / В. П. Шуленин. – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – 540 с.

160. Artalejo Jesus R. Markovian arrivals in stochastic modelling: a survey and some new results / Jesus R. Artalejo, Antonio Gomez-Corral, Qi-Ming He. – SORT 34(2). – July–December 2010. – P. 101–144.

161. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of the events and its recurrence conditions / M. Bakholdina, A. Gortsev // Communications in computer and information science. – 2014. – V. 487. – P. 18–25.

162. Bakholdina M. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions / M. Bakholdina, A. Gortsev // Communications in computer and information science. – 2015. – V. 564. – P. 13–27.

163. Bakholdina M. A. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability / M. A. Bakholdina, A. M. Gortsev // Applied mathematical science. – 2015. – V. 9, No. 29. – P. 1433–1451.

164. Banik A. D. BMAP/G/1/N queue with vacations and limited service discipline / A. D. Banik, U. C. Gupta, S. S. Pathak // Applied mathematics and computation. – 2006. – Vol. 180, No. 2. – P. 707–721.

165. Bartoszewicz J. Queueing systems with a reserve service channel / J. Bartoszewicz, T. Rolski // Zastosow. mat. – 1970. – V. 1, No. 4. – P. 439–449.

166. Best J. Doubly Stochastic Processes: an Approach for Understanding Central Nervous System Activity / J. Best // Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems, and Signals. – WSEAS Press. – 2009. – P. 155–158.

167. Card H. C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning / H. C. Card // Neural Networks, IEEE Transactions. – 1998. – V. 9, Is. 1. – P. 229–231.

168. Carrizosaa E. Maximum likelihood estimation in the two-state Markovian arrival process [Электронный ресурс] / E. Carrizosaa, P. Ramirez-Cobo // Universidad de Sevilla (Spain). – 15 of January 2014. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1401.3105v1.pdf>.

169. Centanni S. Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultra-high-frequency financial data / S. Centanni, M. Minozzo // Stat. Model. – 2006. – No. 6. – P. 97–118.

170. Centanni S. Monte Carlo likelihood inference for marked doubly stochastic Poisson processes with intensity driven by marked point processes / S. Centanni, M. Minozzo [Электронный ресурс] // Working Paper Series. Department of Economics University of Verona. – 18 of March 2012. – No. 11. – Режим доступа: <http://dse.univr.it/home/workingpapers/2012WP11MinozzoCentanniMClick.pdf>.

171. Cox D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes / D. R. Cox // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – V. 51, No. 3. – P. 433–441.

172. Cox D. Point processes / D. Cox, V. Isham. – Chapman and Hall, 1980. – 181 p.

173. Czachorski T. On stochastic models of internet traffic / T. Czachorski, J. Domanska, M. Pagano // Communications in Computer and Information Science. Information Technologies and Mathematical Modelling: Queueing Theory and Applications. – 2015. – V. 564. – P. 289–303.

174. Delattre S. Estimating the efficient price from the order flow: a Brownian Cox process approach / S. Delattre, C. Robert, M. Rosenbaum // Stochastic Processes and their Applications. – 2013. – V. 123, Is. 7. – P. 2603–2619.

175. Efrosinin D. Sensitivity analysis of reliability characteristics to the shape of the life and repair time distributions / D. Efrosinin, V. Rykov // Communications in Computer and Information Science. Information Technologies and Mathematical Modelling. – 2014. – V. 487. – P. 101–112.

176. Erlang A. K. The theory of probabilities and telephone conversations / A. K. Erlang // Nyt Tidsskrift for Matematik. – 1909. – V. 20, Is. B. – P. 33–39.

177. Fernandez-Alcala R. Recursive Linear Estimation for Doubly Stochastic Poisson Processes / R. Fernandez-Alcala, J. Navarro-Moreno, J. C. Ruiz-Molina, A. Oya // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. – 2007. – V. 2166. – P. 894–897.

178. Fernandez-Alcala R. Prediction of the intensity process of doubly stochastic Multichannel Poisson Processes / R. Fernandez-Alcala, J. Navarro-Moreno, J. C. Ruiz-Molina // Automatic Control, IEEE Transaction. – July 2012. – V. 57, Is. 7. – P. 1843–1848.

179. Gebhard R. F. A queueing process with bilevel hysteretic service-rate control / R. F. Gebhard // *Naval. Res. Logist. Quart.* – 1967. – V. 14, No. 1. – P. 55–67.

180. Gortsev A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration / A. Gortsev, M. Sirotina // *Communications in computer and information science. Information Technologies and Mathematical Modelling.* – 2014. – V. 487. – P. 145–152.

181. Gortsev A. Joint probability density function of modulated synchronous flow interval duration under conditions of fixed dead time / A. Gortsev, M. Sirotina // *Communications in computer and information science. Information Technologies and Mathematical Modelling: Queueing Theory and Applications.* – 2015. – V. 564. – P. 41–52.

182. Gortsev A. Maximum likelihood estimation of dead time period duration of modulated synchronous flow of events / A. Gortsev, M. Sirotina // *Communications in computer and information science. Information Technologies and Mathematical Modelling: Queueing Theory and Applications.* – 2016. – V. 638. – P. 104–119.

183. Grindlay Andrew A. Tandem queues with dynamic priorities / A. Andrew Grindlay // *Operat. Res. Quart.* – 1965. – V. 16, No. 4. – P. 439–451.

184. Horvath M. Markovian modeling of real data traffic: Heuristic phase type and MAP fitting of heavy tailed and fractal like samples / M. Horvath, M. Telek // *Performance evaluation of complex systems: Techniques and Tools: Performance 2002 Tutorial Lectures in: Lecture Notes in Computer Science* – 2002. – V. 2459. – P. 405–434.

185. Hutl M. Doubly stochastic Markov process: A casual approach to modelling Cadlag market event time series [Электронный ресурс] / M. Huelt, O. Loistl, J. Prix // 9th Conference of the Swiss Society for Financial Market Research, Zurich, Schweiz, 7 of April 2006. – Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/228537874_Doubly_Stochastic_Markov_Process_A_Causal_Approach_to_Modelling_Cadlag_Market_Event_Time_Series.

186. Huy Dang Phuoc. A note on state estimation from doubly stochastic point process observation / Dang Phuoc Huy, Tran Jung Thao // *Stud. Univ. Babeş-Bolyai. Math.* – 2001. – V. 46, No. 1. – P. 27–32.
187. Ireland R. J. Optimal control of customer-flow through a systems of parallel queues / R. J. Ireland, M. E. Thomas // *Int. J. Syst. Sci.* – 1972. – V. 2, No. 4. – P. 401–410
188. Ji-Wook J. Doubly stochastic Poisson process and the pricing of catastrophe reinsurance contract / J. Ji-Wook // *Proceedings of 31st ASTIN Colloquium, Porto Cervo, Costa Smeralda, Italy, 7–20 of September 2000.* – P. 131–147.
189. Ji-Wook J. Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity / J. Ji-Wook, A. Dassios // *Finance and Stochastics.* – 2003. – V. 7(1). – P. 73–95.
190. Kingman J. F. C. On doubly stochastic Poisson process / J. F. C. Kingman // *Proceedings of Cambridge Philosophical Society.* – 1964. – V. 60, No. 4. – P. 923–930.
191. Klemm A. Modeling IP traffic using the Batch Markovian Arrival Process / A. Klemm, C. Lindemann, M. Lohmann // *Performance Evaluation.* – University of Dortmund, 2003. – P. 149–173.
192. Korolev V. Stochastic models of structural plasma turbulence / V. Korolev, N. Skvortsova. – Utrecht: VSP, 2006. – 400 p.
193. Lucantoni D. M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process / D. M. Lucantoni // *Communication in Statistics Stochastic Models.* – 1991. – V. 7. – P. 1–46.
194. Madhi J. Waiting time distribution in a Poisson queue with a general bulk service rule / J. Madhi // *Manag. Sci.* – 1975. – V. 21, No. 7. – P. 777–782.
195. Meyer K. H. P. Ein Wartesystem mit heterogenen Kanaelen unter (s,S)-Regel / K. H. P. Meyer // *Proc. Operat. Res., Wuerzburg – Wien, 1973.* – P. 295–317.
196. Moder J. Queueing with fixed and variable channels / J. Moder, C. Phillips // *Operat. Res.* – 1962. – V. 10, No. 2. – P. 218–231.

197. Murari K. An additional special limited space queueing problem with service in batches of variable size / K. Murari // *Operat. Res.* – 1968. – V. 16, No. 1. – P. 83–90.
198. Neuts M. F. A queue subject to extraneous phase channels / M. F. Neuts // *Adv. Appl. Probab.* – 1971. – V. 3, No. 1. – P. 78–119.
199. Neuts M. F. A versatile Markov point process / M. F. Neuts // *J. Appl. Probab.* – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
200. Okamura H. Markovian arrival process parameter estimation with group data / H. Okamura, T. Dohi, K. Trivedi // *IEEE/ACM Trans. Networking.* – V.17, No. 4. – 2009. – P. 1326–1339.
201. Oliver Robert M. On a problem of optimum priority classification / M. Robert Oliver, Gerold Pestalozzi // *J. Soc. Industr. and Appl. Math.* - 1965. – V. 13, No. 3. – P. 890–901.
202. Pattipati Khrishna R. Priority assignment using dynamic programming for a class of queueing systems / R. Khrishna Pattipati, L. David Kleinman // *IEEE Trans. Automat. Contr.* – 1981. – V. 26, No. 5. – P. 1095–1106.
203. Posner M. Single-server queues with service time depend on waiting time / M. Posner // *Operat. Res.* – 1973. – V.21, No. 2. – P. 610–616.
204. Romani J. A queueing model with a variable number of channels / J. Romani // *Trabajos de estadística* – 1957. – V.8, No. 3. – P. 175–189.
205. Ryden T. Parameter estimation for Markov modulated Poisson processes / T. Ryden // *Commun. Stat. Stochastic Models.* – 1994. – No. 10(4). – P. 795–829.
206. Singh V.F. Queue-dependent servers / V. F. Singh // *J. Eng. Math.* – 1973. – V. 7, No. 2. – P. 123–126.
207. Snyder D.K. Filtering and detection for doubly stochastic random point processes / D. K. Snyder // *IEEE Transactions on Information Theory.* – 1972. – V. IT–18. – P. 91–102.
208. Teghem J. On uniform hysteretic policies in a queueing system with variable service rates / J. Teghem // *Cah. Cent. etud. rech. oper.* – 1979. – V. 21, No. 2. – P. 121 – 125.

209. Teugles Josef L. The structure distribution in a mixed Poisson process / L. Josef Teugles, PetraVynckiera // *J. Appl. and Stochastic Anal.* – 1996. – V. 9, No. 4. – P. 489–496.
210. Tingting Zhang. Nonparametric inference of doubly stochastic Poisson process data via kernel method / Zhang Tingting, S.C. Kou // *The Annals of Applied Statistics.* – 2010. – V. 4. – P. 1913–1941.
211. Yandin M. Queueing systems with a removable service station / M. Yandin, P. Naor // *Operat. Res. Quart.* – 1963. – V. 14, No. 4. – P. 393–405.
212. Yandin M. On queueing systems with a variable service capacities / M. Yandin, P. Naor // *Naval. Res. Logist. Quart.* – 1967. – V. 14, No. 1. – P. 43–53.
213. Yang Y. W. BMAP/G/1 queue with correlated arrivals of customers and disasters / Y. W. Yang, Shin Woo // *Operation Research Letters.* – 2004. – V. 32, Is. 4. – P. 364–373.

Приложение А

Имитационная модель модулированного синхронного дважды стохастического потока событий

Имитационная модель модулированного синхронного потока событий реализована на языке программирования Microsoft Visual Studio C#. При построении имитационной модели потока был применен метод обратной функции [79], с помощью которого можно получить случайные величины с другими распределениями.

Рассмотрим задачу генерации непрерывной случайной величины y с функцией распределения вероятностей $F(t) = 1 - e^{-\xi t}$, где $t > 0$, $\xi > 0$ – параметр экспоненциального распределения. В данном случае случайная величина $F^{-1}(z) = -\frac{1}{\xi} \ln(z)$ распределена по экспоненциальному закону с параметром ξ , где z – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Результатом работы имитационной модели является вектор $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < T_m$, T_m – время моделирования; $t_i, i = \overline{1, k}$ – моменты наступления событий модулированного синхронного потока.

Имитационное моделирование реализуется по следующему алгоритму:

1) задаются параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, p, q$ и время моделирования T_m ; полагается текущий интервал модуляции потока $t=0$, текущий момент наступления события потока $s=0$;

2) разыгрывается текущее состояние потока времени $\lambda^{(t=0)} = \lambda_1$ или $\lambda^{(t=0)} = \lambda_2$ в момент начала наблюдения за потоком $t=0$; при этом полагается $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$ соответственно;

3) определяется d – момент окончания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda^{(t)}$ путем генерации случайного числа y – значения непрерывно распределенной случайной величины;

4) моделируются моменты наступления событий s потока в течение интервала пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda^{(t)}$ путем генерации случайного числа x – значения непрерывно распределенной случайной величины;

5) пока момент наступления события s меньше момента окончания длительности d пребывания процесса $\lambda(t)$ в текущем состоянии $\lambda^{(t)}$, смена состояния $\lambda^{(t)}$ процесса $\lambda(t)$ происходит путем генерации случайного числа x и сравнения его с соответствующим значением вероятности перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние; если $\lambda^{(t)} = \lambda_1$, то при $x \geq p$, процесс $\lambda(t)$ меняет свое состояние на $\lambda^{(t)} = \lambda_2$ ($\alpha^{(t)} = \alpha_2$). Если $\lambda^{(t)} = \lambda_2$, то при $x \geq q$, процесс $\lambda(t)$ меняет свое состояние на $\lambda^{(t)} = \lambda_1$ ($\alpha^{(t)} = \alpha_1$);

б) как только момент наступления события s становится больше момента окончания длительности d пребывания процесса $\lambda(t)$ в текущем состоянии $\lambda^{(t)}$, при этом до момента s смена состояния процесса не произошла за счет попадания случайного числа x в заданное условие перехода ($x \geq p$ для текущего состояния $\lambda^{(t)} = \lambda_1$ или $x \geq q$ для текущего состояния $\lambda^{(t)} = \lambda_2$), процесс $\lambda(t)$ меняет свое состояние в момент окончания длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии $\lambda^{(t)}$;

7) шаги 3-6 повторяются до окончания времени моделирования T_m .

На рисунке А.1 представлена блок-схема алгоритма имитационного моделирования модулированного синхронного потока событий, в которой x – значение случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, $Random()$ – датчик псевдослучайных чисел.

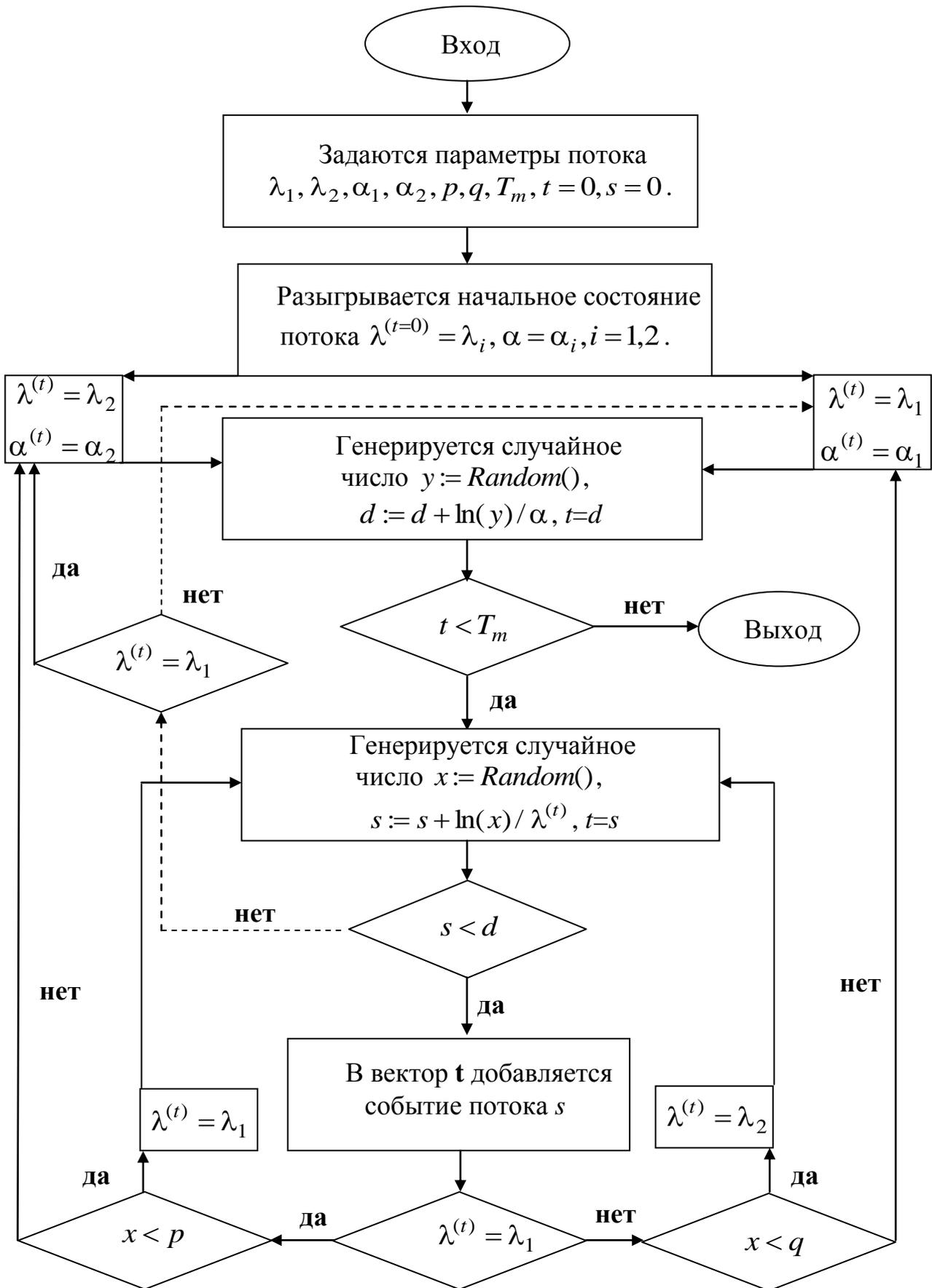


Рисунок А.1 – Блок-схема алгоритма имитационного моделирования модулированного синхронного потока

Приложение Б

Имитационная модель модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях мертвого времени

На рис. Б.1 представлена блок-схема алгоритма имитационного моделирования модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени длительности T . При моделировании модулированного синхронного потока событий в условиях неполной наблюдаемости на формирование вектора \mathbf{t} накладываются условия наличия мертвого времени, а именно: события, наступившие в течение интервалов ненаблюдаемости длительности T , удаляются из вектора \mathbf{t} .

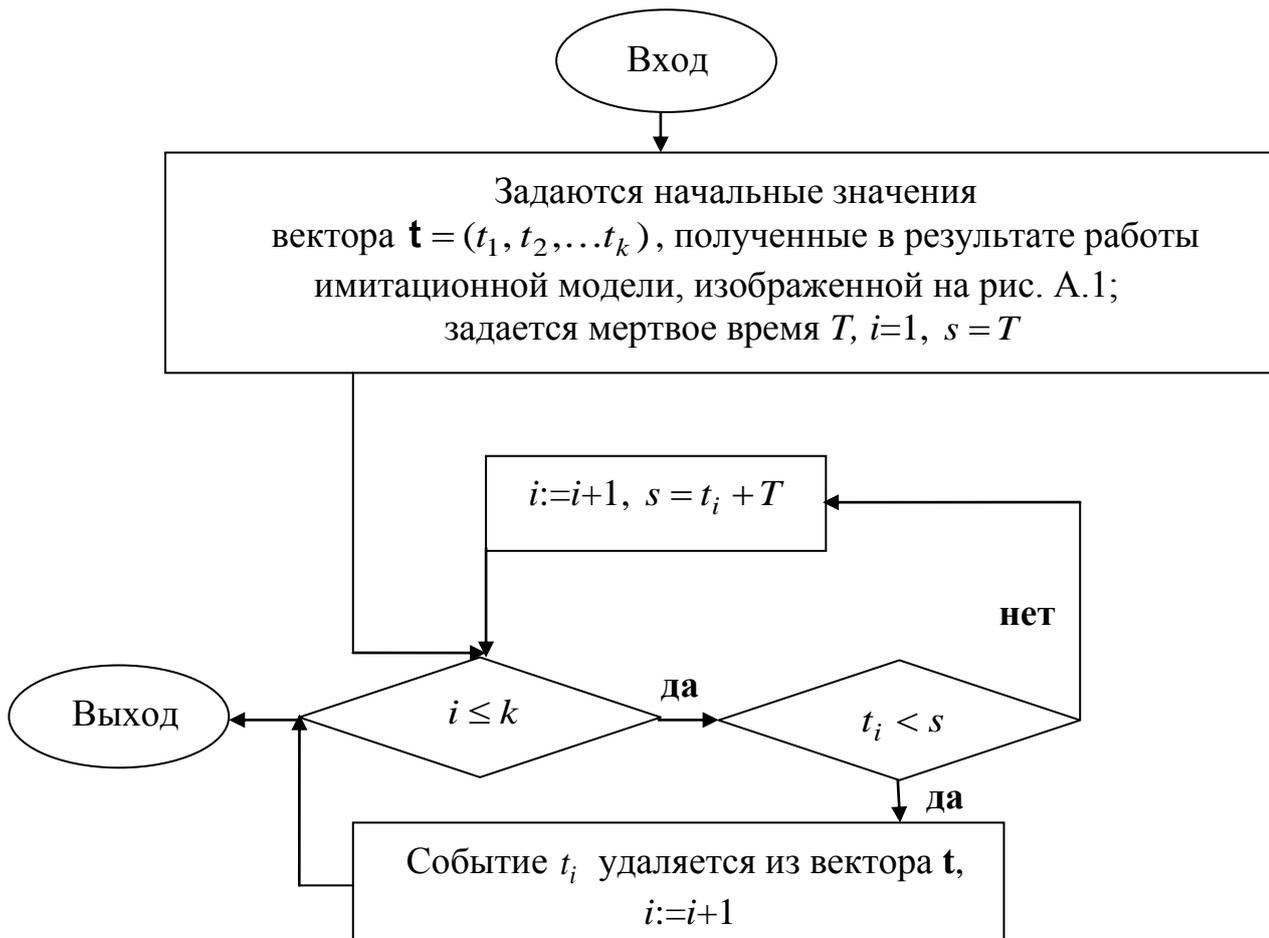


Рисунок Б.1 – Блок-схема алгоритма имитационного моделирования модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени

Приложение В

Алгоритм расчета апостериорной вероятности в условиях отсутствия мертвого времени

На рис. В.1 представлена блок-схема алгоритма расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ на отрезке наблюдения за потоком $[0, T_m]$.

В блоке 1 выполняется имитационное моделирование случайного процесса $\lambda(t)$ и модулированного синхронного потока событий на отрезке времени $[0, T_m]$, алгоритм которого проиллюстрирован в блок-схеме Приложения А на рис. А.1. На выходе формируется вектор \mathbf{t} , содержащий данные о моментах наступления событий потока.

В блоке 2 задается априорная вероятность $w(\lambda_1 | 0) = \pi_1$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в начальный момент времени наблюдения за потоком $t = 0$.

В блоке 3 вычисляются апостериорные вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ для $0 < t \leq t_1$, где $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$. Для вычисления этих вероятностей используется формула (1.5.21), в момент времени $t = t_1$ используется формула (1.5.23).

В блоке 4 значение счетчика моментов наступления событий t_i из вектора $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ увеличивается на единицу. При этом в вектор \mathbf{t} вводится момент окончания наблюдения за потоком в качестве $t_{k+1} = T_m$.

В блоке 5 осуществляется проверка достижения момента окончания моделирования, и алгоритм переходит в блок 6. В противном случае алгоритм заканчивает вычисления.

В блоке 6 вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ в момент времени t_i наступления события потока, $i = \overline{1, k}$. Для вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ используется формула (1.5.22).

В блоке 7 вычисляются значения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t : $t_i < t \leq t_{i+1}$, где $w(\lambda_1 | t_{i+1}) = w(\lambda_1 | t_{i+1} - 0)$, $i = \overline{1, k}$. Для вычисления этих вероятностей используется формула (1.5.21), в момент времени $t = t_{i+1}$ используется формула (1.5.23).

Для выполнения расчетов задается шаг дискретизации Δt , с которым производится вычисление апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t .

Алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ реализован на языке программирования Microsoft Visual Studio C#. Помимо этого реализован алгоритм оптимального оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за моментами наступления событий потока, данные о которых хранятся в векторе $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, по критерию максимума апостериорной вероятности. Данный алгоритм рассмотрен в подразделе 1.7.

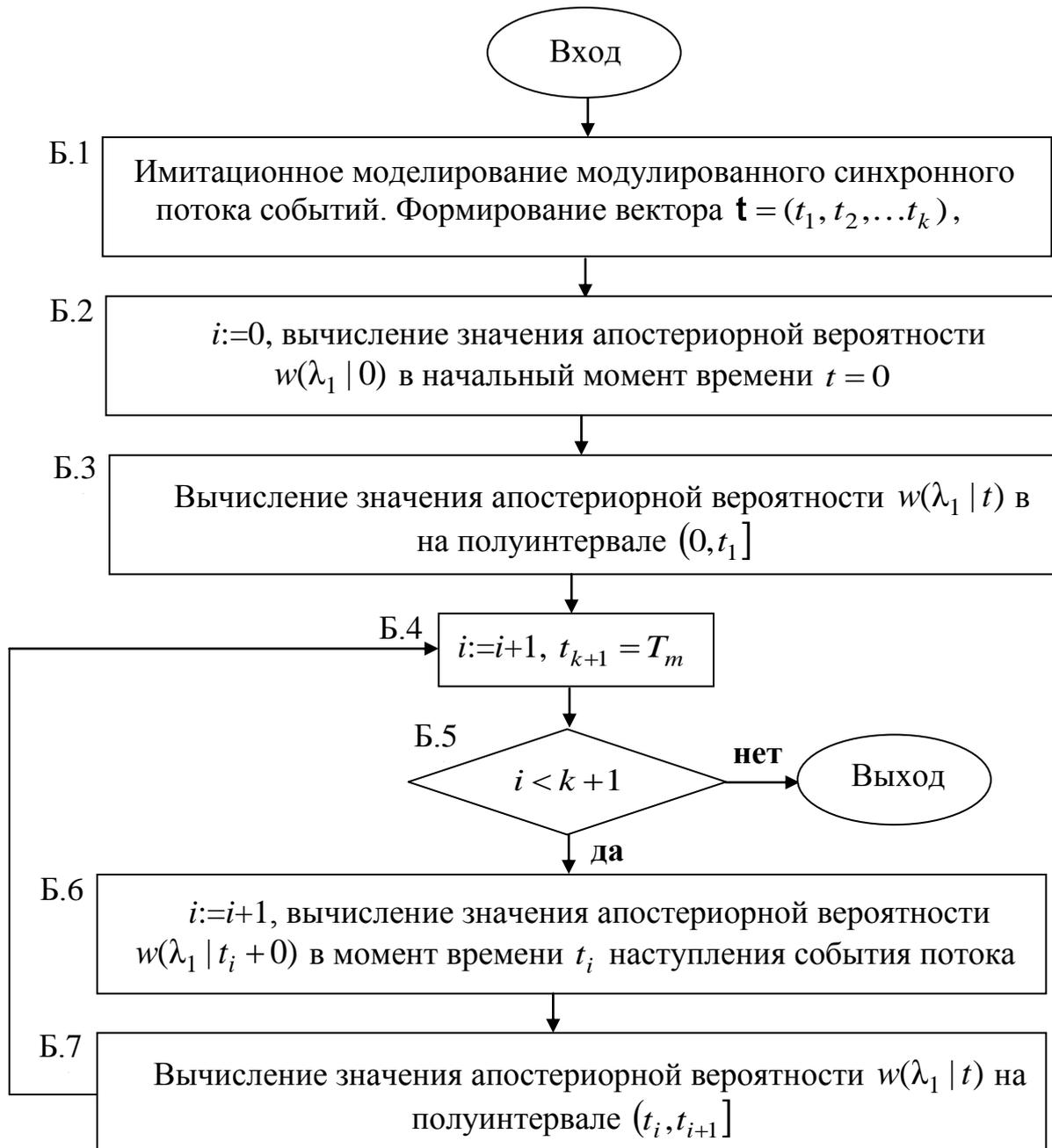


Рисунок В.1 – Блок-схема алгоритма расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ модулированного синхронного потока в условиях отсутствия мертвого времени

Приложение Г

Алгоритм расчета апостериорной вероятности в условиях мертвого времени

На рис. Г.1 представлена блок-схема алгоритма расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ на $\lambda(t)$ на отрезке наблюдения за потоком $[0, T_m]$ для случая, когда поток функционирует в условиях мертвого времени, когда $T \neq 0$.

В блоке 1 выполняется имитационное моделирование случайного процесса $\lambda(t)$ и модулированного синхронного потока событий на отрезке времени $[0, T_m]$, алгоритм которого проиллюстрирован в блок-схеме Приложения А на рис. А.1. На выходе формируется вектор \mathbf{t} , содержащий данные о моментах наступления событий потока.

В блоке 2 задается априорная вероятность $w(\lambda_1 | 0) = \pi_1$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в начальный момент времени наблюдения за потоком $t = 0$.

В блоке 3 вычисляются апостериорные вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ для $0 < t \leq t_1$, где $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$. Для вычисления этих вероятностей используется формула (1.5.21), в момент времени $t = t_1$ используется формула (1.5.23).

В блоке 4 значение счетчика моментов наступления событий t_i из вектора $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ увеличивается на единицу. При этом в вектор \mathbf{t} вводится момент окончания наблюдения за потоком в качестве $t_{k+1} = T_m$.

В блоке 5 осуществляется проверка достижения момента окончания моделирования, и алгоритм переходит в блок 6. В противном случае алгоритм заканчивает вычисления.

В блоке 6 вычисляется апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ в момент времени t_i наступления события потока, $i = \overline{1, k}$. Для вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ используется формула (1.5.22).

В блоке 7 вычисляется значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t : $t_i < t \leq t_i + T, i = \overline{1, k}$. Для вычисления этих вероятностей используется формула (1.8.4), в момент времени $t = t_i + T$ используется формула (1.8.5).

В блоке 8 вычисляется значение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t : $t_i + T < t \leq t_{i+1}, i = \overline{1, k}$. Для вычисления этих вероятностей используется формула (1.8.6) в момент времени $t = t_{i+1}, i = \overline{1, k}$.

Для выполнения расчетов задается шаг дискретизации Δt , с которым производится вычисление апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t .

Алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ состояния λ_1 процесса $\lambda(t)$ реализован на языке программирования Microsoft Visual Studio C#. Помимо этого реализован алгоритм оптимального оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за моментами наступления событий потока, данные о которых хранятся в векторе $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$. Оценивание состояний процесса $\lambda(t)$ осуществляется согласно критерию максимума апостериорной вероятности. Данный алгоритм рассмотрен в подразделе 1.7.

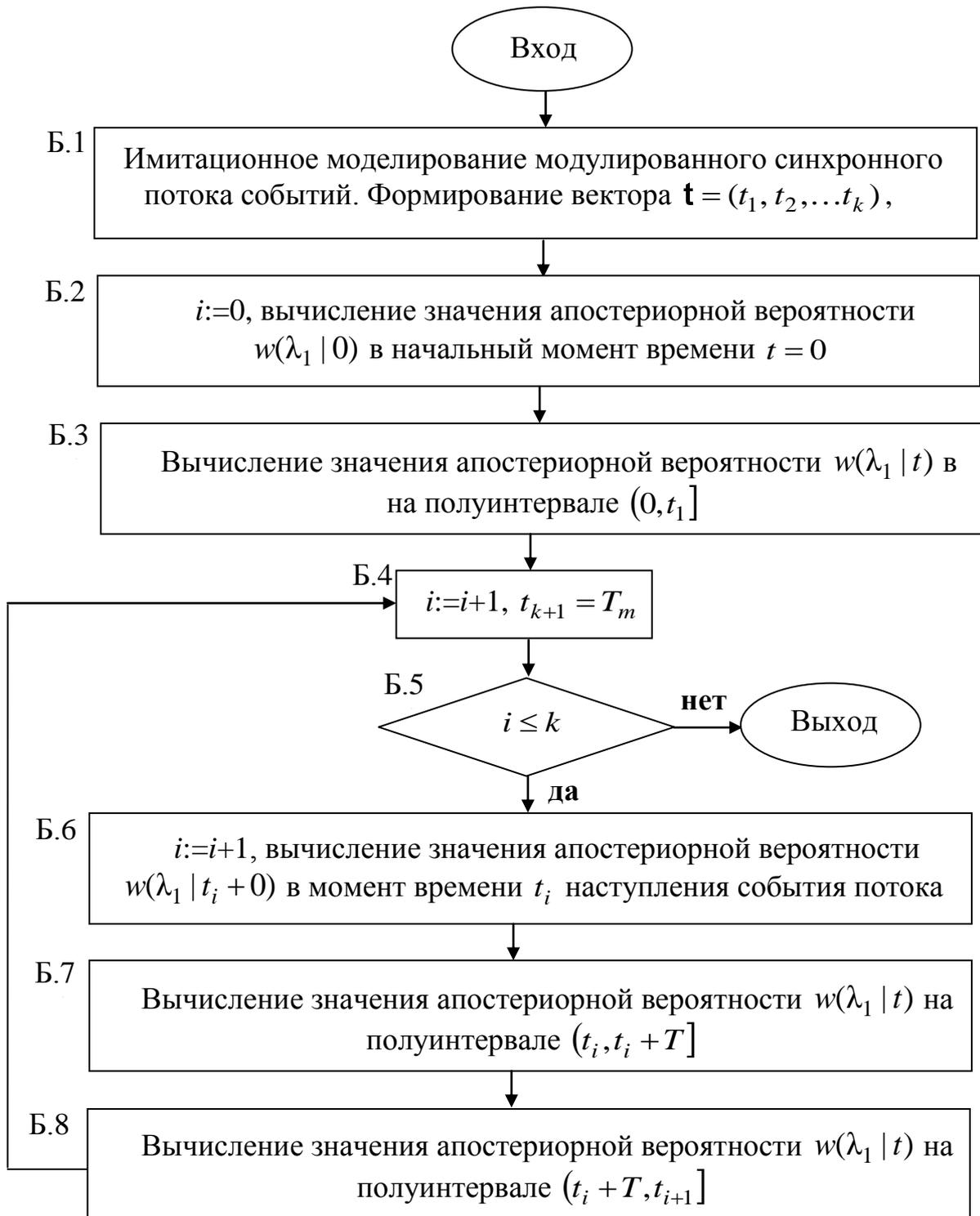


Рисунок Г.1 – Блок-схема алгоритма расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ модулированного синхронного потока в условиях мертвого времени

Приложение Д

Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебной работе НИ ТГУ

 В.В. Демин
5 декабря 2016 г.



АКТ

О внедрении результатов кандидатской диссертации Сиротиной М.Н. в учебный процесс НИ ТГУ

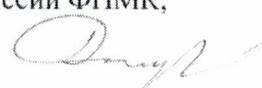
Настоящим подтверждается, что результаты диссертации Сиротиной М.Н. «Оценка длительности мертвого времени и состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации», используются в учебном процессе на факультете прикладной математики и кибернетики (ФПМК) Национального исследовательского Томского государственного университета при разработке курсов лекций образовательных дисциплин «Марковские системы массового обслуживания» и «Имитационное моделирование» для студентов бакалавриата 4-го курса ФПМК и дисциплины «Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков» для магистров 2-го курса ФПМК.

Председатель методической комиссии ФПМК,

д. ф. м. н., профессор



КОПИЯ ВЕРНА
Ведущий документовед
Управления делами
Г. Михеева


А. Г. Дмитриенко