Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

# высшего образования

«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Jelaleel

Советова Юлия Валерьевна

# Моделирование механического поведения стохастически армированных композитов с учетом накопления повреждений в условиях квазистатического нагружения

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

> Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор Скрипняк Владимир Альбертович

# Оглавление

Введение	5
Глава 1. Краткий обзор состояния исследований в области	
прогнозирования свойств композиционных материалов	11
Глава 2. Физико-математическая постановка задачи	20
2.1. Физико-математическая модель композита на микроуровне	22
2.2. Физико-математическая модель композита на мезоуровне	25
2.3. Физико-математическая модель композита на макроуровне	27
Глава З. Методика решения задачи	29
3.1. Методика исследования микрообъема	29
3.2. Методика исследования механического состояния композита	
на мезоуровне	29
3.2.1. Описание структуры армирования на мезоуровне	29
Оценка размера локально-представительного мезообъема	
структуры	32
3.2.2.Исследование локального состояния композита	34
Основные соотношения метода конечных элементов	34
Расчетная схема	37
Вычисление эффективных механических характеристик	
мезообъема структуры	39

3.3. Методика исследования механического состояния композита
на макроуровне40
3.3.1. Статистический подход к определению эффективных
свойств композита40
Построение эффективной диаграммы деформирования45
Методика использования перколяционных представлений
применительно к определению макроскопических свойств композита47
Сравнительный анализ кластеров поврежденных узлов,
построенных на регулярной и нерегулярной решетках
Глава 4. Результаты53
4.1. Подтверждение достоверности методики определения эффективных
свойств композита
Оценка величины локально-представительного объема материала
со стохастической структурой в случае монодисперсного наполнения53
Оценка размера локально-представительного объема материала
при полидисперсном наполнении56
Оценка объема представительной выборки локальных свойств61
Оценка представительности относительных геометрических
размеров модельной структуры Lr/d64
Оценка достоверности полученных эффективных упругих

свойств композита
Расчет упругих и прочностных свойств препрега
AS4/8552 RC34 AW19471
4.2. Исследование механического поведения композита
с учетом свойств межфазного слоя73
4.2.1. Оценка влияния механических свойств межфазного слоя
на особенности накопления повреждений в композите
4.2.2. Оценка влияния свойств межфазного слоя на эффективные
характеристики композита
4.3. Исследование поведения модельного пористого композита
с учетом накопления повреждений
Пример расчета параметров напряженно-деформированного состояния
композита на мезоуровне
4.4.Влияние объемного содержания включений на предельные
характеристики углепластика
4.5.Оценка достоверности результатов расчета эффективных
упругих свойств углепластика
Заключение
Список литературы101

### Введение

Актуальность работы: В условиях постоянно ведущихся работ по созданию новых конструкционных материалов сохраняет свою актуальность задача развития представлений о механизмах формирования механических и, в частном случае, прочностных свойств таких материалов. Учитывая, что большинство перспективных материалов представляют собой композиты, особую значимость собой представляет исследование влияния структуры армирования ЭТИХ материалов на формирование их механических свойств. Наличие структуры, образованной элементами армирования композита, приводит, среди прочего, к появлению множественных концентраторов напряжений в объеме материала, в зоне действия которых могут активно развиваться локализованные процессы накопления повреждений, приводящие в конечном счете к появлению макротрещин и разрушению материала. На условия развития этих процессов существенное влияние могут оказывать механические характеристики И конфигурация межфазных слоев, образующихся вдоль границ контакта армирующих элементов и матрицы композита. Представляет интерес также исследование влияния случайного характера размещения армирующих элементов в объеме реальных композиционных материалов на механизмы формирования их механических свойств.

Одним из перспективных направлений в механике материалов, позволяющим учитывать различные эффекты, которые могут иметь место в процессе нагружения материала, является развитие многоуровневых (иерархических) представлений о строении материалов и о процессах, которые могут в них развиваться. В частности, представляет интерес исследование многоуровневого подхода к описанию процесса разрушения композита, в соответствии с которым повреждение, наблюдаемое на некотором иерархическом уровне структуры, рассматривается как кумулятивное проявление эффектов, сопровождающих процессы повреждения (разрушения) реализующиеся на более мелких уровнях структуры материала. Особую роль при этом приобретает проблема разработки согласованной системы критериев прочности для разных иерархических уровней материала.

Целью диссертационной работы является разработка метода прогнозирования механического поведения и предельных свойств стохастически армированных композитов с учетом накопления повреждений в компонентах в условиях статического нагружения.

Для достижения поставленной цели выполнялись следующие задачи:

1) разработка многоуровневой физико-математической модели накопления повреждений в композиционном материале, учитывающей параметры его структуры армирования;

2) разработка методики численного моделирования механического поведения композиционного материала и определения его предельных свойств, основанная на иерархическом подходе к исследованию процесса накопления повреждений;

 численное исследование влияния процесса накопления повреждений на эффективные механические и предельные свойства углеродных композитов с использованием разработанной методики.

# Научная новизна работы.

предложен метод определения предельных механических свойств композитов,
 основанный на иерархическом подходе к описанию процесса накопления
 повреждений,

- реализован перколяционный подход к определению условий макроскопического разрушения композита, основанный на результатах конечно-элементного исследования локальных свойств материала в условиях накопления повреждений;

- получены статистические оценки параметров, характеризующих локальное состояние углеродных композитов, в условиях развития процесса накопления повреждений.

# Теоретическая и практическая значимость работы

 разработана физико-математическая модель композиционного материала, позволяющая исследовать влияние параметров структуры армирования на его эффективные механические, а также предельные свойства с учетом развития процессов накопления повреждений в компонентах материала;

- на основе разработанной модели реализована численная методика прогнозирования эффективных и предельных свойств однонаправленных волокнистых стохастически армированных композитов в условиях статического нагружения;

- разработанные программные средства могут быть использованы при решении задач прогнозирования эффективных упругих и прочностных свойств новых волокнистых однонаправленных композиционных материалов.

# Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Разработана многоуровневая физико-математическая модель механического поведения композиционного материала с полимерной матрицей, позволяющая учитывать геометрию и взаимное расположение, объемное содержание армирующих элементов, а также особенности развития процесса накопления повреждений на разных структурных уровнях материала.

2. Разработана методика численного моделирования механического поведения однонаправленного волокнистого композиционного материала и определения его предельных свойств в условиях статического нагружения по нормали к направлению армирования. Методика основана на иерархическом подходе к накопления повреждений и включает описанию процесса использование критериев прочности Цая-Ву на микроуровне, критерия прочности объемного типа на мезоуровне, перколяционного критерия на макроуровне. Показано, что перколяционный критерий прочности волокнистых композитов является чувствительным К локальной конфигурации армирования относительно направления нагружения.

3. Получены теоретические новые оценки геометрических параметров представительных объемов композитов с однонаправленным волокнистым армированием, выполненные на основе анализа корреляционных характеристик значений объемных соотношений локальных компонентов ДЛЯ случаев монодисперсного и полидисперсного наполнений;

4. Получены зависимости эффективных упругих и прочностных свойств композитов с однонаправленным волокнистым армированием от механических свойств межфазного слоя с учетом повреждений структуры. Получены оценки поперечного модуля упругости и предельных характеристик препрега на основе углеродного волокна AS-4.

5. Результаты компьютерного моделирования, устанавливающие общие закономерности влияния объемного содержания углеродных волокон в диапазоне 7-50% на предельные характеристики карбополимерного композита. Обнаружено, что увеличение содержания волокон в диапазоне от 7 до 30% приводит к росту предельной деформации до макроскопического разрушения, увеличение содержания волокон в диапазоне от 30 до 40% не приводит к существенному изменению величины предельной деформации, увеличение доли армирующих элементов от 40 до 50% сопровождается снижением величины предельной деформации.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в работе, обеспечивается математической корректностью постановок задач и подтверждается сравнением результатов численного моделирования с известными теоретическими решениями и экспериментальными данными других авторов.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертационной работы доложены и обсуждены на следующих конференциях:

- Всероссийская научная конференция молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации», г. Новосибирск, 2010 г.;

- VI Российская научно-техническая конференция «Ресурс и диагностика материалов и конструкций», г. Екатеринбург, 2011 г.;

- II Всероссийская молодежная научная конференции «Современные проблемы математики и механики», г. Томск, 2011 г.;

- II Всероссийская Молодёжная научная конференция, посвященная 50-летию Физико-технического факультета Томского государственного университета «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики», г. Томск, 2012 г.;

9

- 50-я юбилейная Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, 2012 г.;

- VII Российская конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение», г. Екатеринбург, 2012 г.; 8-ая Международная научная конференция, посвященная 40-летию КарГУ им. акад. Е.А. Букетова «Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент», г. Караганда, 2012 г.;

- XXII Всероссийская конференция молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках», г. Пермь, 2013 г.;

- III Всероссийская конференция «Деформирование и разрушение структурнонеоднородных сред и конструкций», г. Новосибирск, 2014 г.;

- XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование», г. Томск, 2014 г.;

- XXIII Всероссийская конференция молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках», г. Пермь, 2014 г.

**Публикации.** Основные результаты, представленные в данной диссертационной работе, были опубликованы в 14 печатных работах, включая 2 статьи в журналах перечня, рекомендованного ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, изложенных на 113 страницах машинописного текста, включая 38 рисунков, 4 таблицы, список литературы из 131 наименований.

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в работе, выполнены автором лично в процессе научной деятельности под руководством научного руководителя.

# Глава 1. Краткий обзор состояния исследований в области прогнозирования свойств композиционных материалов

Отличительной особенностью композитов является неоднородность их строения. Как следствие, физико-механические свойства композитов зависят не только от свойств компонентов, а также от структуры наполнения, а именно, геометрии, плотности укладки и объемного содержания армирующих элементов. Наличие случайной структуры и ее роль в формировании эффективных свойств композита обуславливают практическую значимость разработки методов моделирования механического поведения таких материалов.

Композиты обладают значительными преимуществами по сравнению с однородными материалами, такими, как высокая прочность и жесткость, усталостная долговечность. Также в процессе изготовления могут быть улучшены такие характеристики, как износостойкость, теплопроводность, термоизоляция и звукоизоляция и др.

Композиты условно можно поделить на материалы, армированные дисперсными частицами и материалы, армированные волокнами. В волокнистых композитах жесткие и прочные волокна несут основную часть нагрузки, в то время как матрица играет роль опоры и защитной среды для волокон и передает напряжения на волокна [98]. В последние годы армированные волокнами пластмассы и металлы широко используются для изготовления трубопроводов, авиационных и космических конструкций, деталей автомобилей.

Актуальность исследования механического поведения структурно-неоднородных материалов подтверждается в трудах отечественных и зарубежных ученых. Впервые осреднение упругих характеристик поликристалла было проведено в работах В. Фойгта [130] и А. Рейсса [128], где использовались предположения о постоянстве в теле деформаций (схема Фойгта) или напряжений (схема Рейсса). Фойгт предложил вычислять параметры таких структур методом осреднения

параметров их компонентов по объему и ориентациям. Осреднение по Фойгту – это осреднение вида  $G = c_1G_1 + c_2G_2 + ...$ , где  $c_1$ ,  $c_2$  – относительные объемные содержания компонентов, G, G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub> – характеристики материала и компонентов соответственно. Осреднение вида  $\frac{1}{G} = \frac{c_1}{G_1} + \frac{c_2}{G_2} + \dots$  называется осреднением по Рейссу. Очевидно, что эти предположения являются достаточно ограниченными, в реальной структуре осуществимыми лишь в частных случаях деформирования. Позднее Хиллом [119] показано, что для упругих свойств композита метод Фойгта дает оценку сверху, метод Рейса – оценку снизу. Существенное улучшение границ Фойгта-Рейсса было получено Хашиным и Штрикманом [117]. На основе вариационного принципа для анизотропного неоднородного тела найдены верхняя и нижняя границы макроскопических модулей поликристаллов и хаотически армированных материалов. В случае равенства модулей сдвига компонентов границы Хашина-Штрикмана совпадают, определяя точное значение эффективного модуля объёмного сжатия. К недостаткам таких подходов относят особенностей отсутствие учета структуры материала, как следствие, несоответствие прогнозов, сделанных на основе этих моделей, с результатами испытаний.

Одной из первых моделей, учитывающих особенности армирующих элементов, была модель упругой среды с упругими сферическими включениями. При использовании условия малости объемной доли включений данная задача была решена Дьюи [114]. При описании сред с произвольной объемной долей включений упоминается полидисперсная модель, предложенная Хашином, которая позволяет рассматривать среды с вполне определенным распределением размеров армирующих частиц. Данная модель позволила оценить величину объемного модуля упругости, но для случая модуля сдвига оценки не совпадают, за исключением случаев очень малых и очень больших долей армирующих частиц. При решении данной проблемы Кренером и Ван-дер-Полем [122,129] был предложен несколько другой подход, основанный на введении в рассмотрение трехфазной модели. Согласно этой модели, пространство вокруг включения и матрицы композита заменили эквивалентной гомогенной средой. Модель композита эквивалентна эффективной гомогенной среде при условии, что энергия деформирования обоих систем одинакова при равенстве осредненных деформаций. Сравнение экспериментальных данных с предложенной трехфазной моделью композита приведено в работе [43]. Расчетная схема по методу самосогласования была разработана Хершеем, Кренером [118] для определения свойств поликристаллов. эффективных упругих Единичный кристаллит рассматривается как единичное сферическое или эллипсоидальное включение, внедренное в бесконечную среду с неизвестными изотропными свойствами агрегата. Затем система подвергается действию однородного напряжения или деформации на большом расстоянии от включения. Далее ориентационно среднее напряжение или деформация во включении полагается равным соответственно значению приложенного напряжения или деформации. Развитие расчетной схемы по методу самосогласования для многофазной среды было дано Будянским [109]. Недостатком является отсутствие учета механического данного метода взаимодействия армирующих элементов между собой, как следствие, может быть использовано для материалов с малой долей наполнения. Установлено, что именно полидисперсная и трехфазная модель композита наиболее хорошо описывают поведение многих систем, представляющих научный и практический интерес. При моделировании материала со сферическими наполнителями различного размера, содержание включений может охватывать весь диапазон изменения объемных долей наполнителя. Недостатком аналитических способов к свойств определению механических композитов является специфическое предположение о типе структуры, что является существенным ограничением в прогнозировании механических свойств реальных материалов.

Проблемы учета особенностей структуры решаются в работах многих современных авторов [18-20,73,76]. Особое место в механике композитов

13

разработка моделей, способных прогнозировать занимает механическое поведение неоднородных сред в зависимости от физико-механических свойств наполнителя. В работах [23,29,16,115] развиваются аналитико-численные методы определению эффективных характеристик композита в зависимости от К объемного содержания армирующего компонента. Данные подходы реализованы на примере дисперсно-армированного композиционного материала со случайным распределением наполнителя в виде стеклянных микросфер и включений Упрощенный аналитический метод определения цилиндрической формы. деформационно-прочностных параметров щебеночного асфальтобетона [96] позволил получить расчетные зависимости эффективного модуля Юнга и предела прочности при растяжении асфальтобетона от объемной доли щебня. В исследовании [8] предлагается оценка влияния среднего квадратического отклонения модуля упругости полимерной матрицы на значения эффективного дисперсно-наполненной полимерной модуля упругости композиции при различных степенях наполнения. Метод Эшелби [55] является эффективным инструментом определения осредненных характеристик дисперсно-наполненных композитов. Модели, в основе которых лежит данный подход, могут быть применимы для случая больших относительных содержаний включений [26]. Применение основ теории фрактального анализа к моделированию механического поведения полимерного дисперсно-наполненного композита предложено в работе [32].

В области настоящее актуальными исследования В время становятся прогнозирования механического поведения пористых материалов. Большинство геоматериалов, многие керамики в зависимости от технологии изготовления и костные ткани и обладают сложной пористой структурой. Такие материалы могут быть использованы В качестве фильтров, носителей катализаторов, биоимплантантов и др. При моделировании механического поведения пористых материалов могут быть использованы подходы механики гетерогенных сред.

Примерами, подтверждающими актуальность исследований в данном работе [37] направлении, могут служить работы следующих авторов. В представлен учитывающий неоднородности пространственного подход, распределения прочностных свойств пористых сред путем изменения параметров межатомного взаимодействия по стохастически выбранным направлениям. Результаты исследования керамики на основе диоксида циркония, приведенные в работе [44], показывают, что перколяционный переход в хрупком пористом материале от изолированных пор к сообщающимся приводит к изменению зависимости его упругих и структурных характеристик от общей пористости. В работе [38,39] построено выражение для аналитической оценки зависимости прочностных и упругих свойств композита при сдвиге и сжатии от его общей пористости и доли пор, содержащих наполнитель. Для описания механического отклика мезообъемов хрупких пористых материалов в работе [83] применен эволюционный подход. Полученные результаты численного моделирования свидетельствуют о слабом влиянии морфологии пор на особенности развития поврежденности в каркасе. Вместе с тем, представляет интерес исследование проблемы взаимодействия близко расположенных пор как элементов структуры материала влияния такого взаимодействия на формирование локальных И механических свойств пористой среды.

Как показывает ряд исследований в области механики композитов, значительное влияние на эффективные механические свойства композита может оказывать межфазный слой, образующийся в области границы раздела компонентов композита. Результаты работ показывают, что межфазный слой может представлять собой как реальный физический объект, образовавшийся, например, в результате протекания химических реакций в зоне контакта компонентов композита, так и удобное модельное представление о пограничной зоне между компонентами композита, позволяющей учесть различные особенности такой зоны (например, морфологию поверхностей раздела компонентов, взаимную диффузию компонентов и т. п. детали). В общем случае, вследствие существенно различной возможной физической природы такого слоя, весьма различными могут быть и его механические характеристики. В связи с этим представляет интерес получение оценок влияния свойств такого слоя, меняющихся в широком интервале возможных значений, на эффективные свойства композиционного материала. К оценке условий формирования межфазного слоя и влиянию его свойств на характеристики полимерного композита в целом применяются фрактальные методы [103]. В работе [24] предложена модель межфазного слоя материала, на основе которой получены формулы для описания изменения модуля упругости, модуля сдвига, коэффициента Пуассона в окрестности частицы с учетом их размера и расположения. В работе [102] свойства межфазного слоя определении упругих свойств матричного полимерного учитывались при композита. Зависимость величины модуля Юнга композита от геометрических размеров частиц наполнителя определена в работе [95], влияние упругих свойств межфазного слоя на модуль Юнга композита исследовано в работе [25]. Механизмы взаимодействия эпоксидной матрицы с поверхностью частиц наноразмерных наполнителей исследованы в работах [100,101]. Анализ структуры и механических свойств указанных материалов определены в рамках метода квантовой механики. Описаны механизмы, определяющие деформацию и трение в межфазных слоях подобных композитов, особенности структуры и свойств их пограничных слоев. Энергетические и прочностные характеристики межфазных слоев наполненных эпоксидных материалов рассчитывались в рамках кластерного подхода. В исследованиях [33,34] развивается модель, позволяющая оценить эффективные характеристики наполненного эластомерного материала с учетом влияния свойств связей, образовавшихся в зазоре между частицами наполнителя межфазных слоев. В работе [66] приводятся при слиянии результаты исследования эффективных характеристик зависимости механических композиционного материала, как при изменении радиуса включения, так и от толщины неоднородного межфазного слоя, модуль Юнга которого является переменным по толщине. В работах [3,4,56] исследовано влияние наличия межфазного слоя и его свойств на параметры напряженно-деформированного состояния в окрестности включения, приводятся оценки влияния межфазного взаимодействия на эффективные деформационно-прочностные характеристики композиции.

Актуальной задачей механики композитных систем является разработка методов моделирования механического поведения материалов, реальная структура которых имеет стохастический характер. В 1946 – Лифшиц и Розенцвейг – предложили метод расчета макросвойств поликристаллов на основе решения стохастической краевой задачи теории упругости [45]. Позднее этот метод получил развитие в работах Ломакина,[51,52] Шермегора[97], Волкова,[12-15] Болотина[6,7],Хорошун,[92,93]

Важной особенностью статистических моделей является ΤО, ЧТО ОНИ естественным образом учитывают такие факторы реальной структуры композита, случайность взаимного расположения как компонентов структуры И статистический разброс их свойств. Кроме того, исследование деформирования поликристаллов и композитов со случайной структурой приводилось в работах [5,9, 10, 87] Несмотря на достигнутые успехи в статистической механике композитов до сих пор остается открытым вопрос о более полном учете взаимодействия компонентов. Поэтому в большинстве работ анализ напряженнодеформированного состояния композитов ограничивается вычислением осредненных по компонентам локальных свойств композита. К недостаткам таких методов можно отнести громоздкость систем уравнений, записанных для каждой точки расчетной области, вследствие чего, увеличивается объем вычислительных процедур для определения эффективных свойств композита.

Одним из способов решения такой проблемы является использование методов [108, 131, 113], пригодных к оценке физико-механических характеристик гетерогенной среды по результатам численного моделирования поведения

17

ограниченного фрагмента среды, обладающего свойством представительности. При моделировании регулярных структур в качестве такого представительного объема среды выступает ячейка периодичности. Для большинства материалов реальная структура является все же хаотичной, поэтому главной проблемой является задача выбора такого размера мезообъема материала, свойства которого обладали бы свойством представительности. Вопросы определения размера представительного объема материала изложены в работах [47, 110, 125, 27].

Следует отметить особый класс задач, связанный с разработкой моделей, учитывающих процесс накопления повреждений в структурных элементах композита[2, 105,116,124,126, 107,121]. В работе [104] предложенная авторами модель повреждения композита учитывает наличие межфазного слоя между волокном и матрицей [30,31].

В последнее время перспективными подходами к решению различных задач механики композитов являются перколяционые подходы. В качестве типичных примеров использования перколяционных представлений ДЛЯ описания процессов, протекающих в неоднородных системах, можно привести, в частности, результаты работ [40, 21], в которых рассматриваются базовые понятия теории перколяции системы моделирования многофазовых как для процессов, применительно к решению задач из области биологии, химии и экологии. Одним из широко используемых алгоритмов для моделирования перколяционных процессов является алгоритм Хошена–Копельмана [120]. К достоинствам такого метода можно отнести то, что он позволяет определить перколяционные характеристики за один проход по расчетной области. В статье [63] для однородной структуры смоделирован перколяционный процесс, определены порог перколяции для расчетной области квадратной формы, зависимость времени моделирования и порога перколяции от размеров расчетной области, а также зависимость времени моделирования от шага роста концентрации. В работе [77] предлагается компьютерная модель, предназначенная для моделирования

процессов структурообразования и анализа кластерной структуры композитов. Показано, что особенности кластерной структуры влияют на различие в упругих свойствах композитных структур. На основе модели получены значения порога перколяции, критических показателей степени перколяции, а также фрактальной размерности для двумерной и трехмерной решетки двух типов структур. В рассматриваются [59-61] работах статистические методы оценивания характеристик перколяционных узлов кластера, применительно к оценке фрактальной размерности по выборочной совокупности перколяционных кластеров. В работе [62] предложена методика, которая позволяет моделировать процесс роста перколяционного кластера на пористой поверхности: построены зависимости порога перколяции от радиуса пор, а также от расстояния между порами для разных типов решеток. При решении задач, связанных с определением перколяционных характеристик, как правило, используются области (регулярные решетки). Для большинства регулярные расчетные современных работ остается малоисследованным вопрос об эффективности применения для решения перколяционных задач нерегулярных расчетных областей (решеток).

# Глава 2. Физико-математическая постановка задачи

В рамках подхода к решению задачи прогнозирования прочностных свойств композитов полагается, что каждому этапу процесса разрушения материала может быть сопоставлен некоторый объем, в котором этот процесс развивается. Начальный этап процесса разрушения композита локализован в зонах высокой концентрации напряжений. На этом этапе может происходить частичное разрушение отдельных элементов структуры композита, отслоение матрицы от армирующих элементов и т. п. процессы. В случае композиционных материалов существенную роль в формировании поля концентраторов напряжений играет структура, образованная армирующими элементами [74]. Полагая справедливым принцип локальности формирования механических свойств композитов [90], можно утверждать, что характеристики параметров напряженнодеформированного состояния композита полностью определяются особенностями локальной конфигурации элементов армирования в сравнительно небольших объемах материала. Следовательно, именно такие объемы композита, линейные размеры которых сравнимы с размерами типичных элементов структуры армирования материала, должны использоваться для оценки условий начала развития процесса накопления повреждений.

С другой стороны, корректная оценка эффективных механических свойств композита в процессе возникновения и развития зон накопления повреждений возможна только по результатам анализа макроскопически представительного объема материала с учетом наличия в нем множественных поврежденных фрагментов. Линейные размеры такого объема, очевидно, должны быть существенно больше размеров типичных элементов структуры армирования композита.

Учитывая значительную разницу в размерах объемов композита, «отвечающих» за различные этапы развития процесса накопления повреждений и разрушения, моделирование процесса накопления повреждений и разрушения

композита предлагается проводить в рамках многоуровневых представлений об условиях формирования механических свойств материалов [50,67-72].

В соответствии с этим рассматриваются три уровня проявления свойств композита: уровень компонентов композита (микроуровень), уровень структуры армирования (мезоуровень) и уровень эффективных свойств (макроуровень). Каждому уровню ставятся в соответствие объёмы композита, имеющие характерные для данного уровня размеры. В качестве единицы измерения размеров каждого из уровней принимается некоторая величина  $L_i$  (*i*=1,2,3), характеризующая типичный линейный размер элементов структуры армирования композита  $L_0$  (например, диаметр армирующих элементов, средняя толщина прослоек матричного материала и т.п.).

# 2.1. Физико-математическая модель композита на микроуровне.

На микроуровне рассматриваются элементарные объёмы материала, полностью принадлежащие одному из компонентов композита. В качестве характерного размера таких объемов выбирается размер  $L_1 = (10^{-2} \div 10^{-1})L_0$ , значение которого меньше характерных размеров структурных компонентов композита (рисунок 1):



Рисунок 1. Элементарный объем микроуровня.

Полагается, что для такого микрообъема справедливы положения механики сплошной среды, т.е. выполняются гипотезы сплошности и однородности. Механические свойства таких объемов полагаются совпадающими со свойствами компонентов. При описании состояния каждого из микрообъемов на микромасштабном уровне полагаются справедливыми обычные соотношения теории малых упругих деформаций. Система уравнений, описывающих поведение микрообъема материала, включает в себя систему уравнений равновесия [48,91,53,54]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$
  
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$
 (1)

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{z} = \frac{\partial W}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (2)$$

физические соотношения (уравнения состояния)

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{x} - \nu (\sigma_{y} + \sigma_{z}) \right),$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{y} - \nu (\sigma_{x} + \sigma_{z}) \right),$$

$$\varepsilon_{z} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{z} - \nu (\sigma_{x} + \sigma_{y}) \right),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz},$$
(3)

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  — компоненты напряжений,

 $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$  — компоненты деформаций,

U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z) — компоненты вектора перемещений.

При определении состояния каждого из микрообъемов используется записанный в общем виде критерий прочности Цая-Ву, согласно которому микрообъем считается разрушенным при выполнении условия [35]:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \tag{4}$$

В частном случае для ортотропного материала в плоском напряженном состоянии критерий записывается в виде [64]:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 = 1,$$
(5)

где 
$$F_1 = \frac{1}{X_{1t}} - \frac{1}{X_{1c}}, \quad F_2 = \frac{1}{X_{2t}} - \frac{1}{X_{2c}}, \quad F_{11} = \frac{1}{X_{1t}X_{1c}}, \quad F_{22} = \frac{1}{X_{2t}X_{2c}}, \quad F_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}F_{22}},$$

 $F_{6} = \frac{1}{\tau_{12}^{2}}$ , индексы *с* и *t* соответствуют пределам прочности при сжатии и

растяжении.

Для описания состояния каждого микрообъема вводится параметр *D*, который характеризуется 2 возможными значениями:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{при } K < 0, \\ 1, & \text{при } K \ge 0 \end{cases}$$
(6)

где  $K = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j - 1.$ 

# 2.2. Физико-математическая модель композита на мезоуровне

В качестве характерного размера объема (рисунок 2), который рассматривается на мезоуровне, принимается величина  $L_2 = (10^0 \div 10^2)L_0$ .



Рисунок 2. Элементарный объем материала на мезоуровне

Каждый объём материала на мезоуровне представляет собой объединение всех составляющих его объёмов микроуровня  $\cup V^{(k)} = V$ . Физико-механические характеристики микрообъемов, образующих мезообъем, наследуются от описания среды на микроуровне. Между собой микрообъемы не пересекаются  $\cap V^{(k)}=0$ . На данном уровне вводится описание границ раздела компонент и характера их взаимодействия на этих границах. Форма границ раздела микрообъемов, принадлежащих разным компонентам, S=S(x, y, z), определяется координатами некоторой точки (x, y, z). Для исследуемого объема материала задаются вид и характер внешнего нагружения.

При выполнении микромасштабного критерия прочности (6) соответствующий микрообъем относится к категории «поврежденных» при вычислении величины поврежденного объема k-й компоненты материала  $V_k^*$  в соотношении (7)

$$\Pi_{k} = \frac{V_{D}^{(k)}}{V^{(k)}},\tag{7}$$

где  $V_D^{(k)}$  — сумма микрообъемов *k*-й компоненты материала, для которых состояние имеет значение D=1 (критерий Цая-Ву (4) выполнен),  $V^{(k)}$  — сумма всех микрообъемов *k*-й компоненты материала, *K* – количество компонент композита.

Состояние мезообъемов *P* также может характеризоваться двумя возможными значениями:

$$P = \begin{cases} 0, & \text{при } \Pi_k < \Pi_k^*, \\ 1, & \text{при } \Pi_k \ge \Pi_k^* \end{cases}$$

$$\tag{8}$$

где  $\Pi_k^*$  - предельно допустимая величина удельного объема повреждений в k-й компоненте композита, величина которой должна задаваться с учетом как физических соображений, так и требований к устойчивости вычислительного метода.

Найденные значение параметров повреждаемости (7) позволяют для каждой компоненты рассчитать локальное значение модуля упругости компоненты  $E_k$  с учетом повреждений, накопленных данной компонентой на мезомасштабном уровне [85]:

$$E_{k} = \begin{cases} E_{k}^{0} f(\Pi_{k}), \text{ при } E_{k} > 0.1 E_{k}^{0}, \\ 0.1 E_{k}^{0}, \text{ при } E_{k} \le 0.1 E_{k}^{0} \end{cases}$$
(9)

где  $E_k^0$  — модуль упругости *k*-й компоненты в отсутствие повреждений.

Для мезообъемов вычисляются средние значения напряжений и деформаций как среднее по всему множеству микрообъемов:

$$\overline{A}_{ij} = \frac{1}{V} \int A_{ij} dV, \qquad (10)$$

где  $\overline{A}_{ij}$  - компоненты напряжений и деформаций. Осредненные свойства  $\overline{A}_{ij}$  являются локальными свойствами материала на макроуровне в заданной точке (*x*, *y*, *z*).

# 2.3. Физико-математическая модель композита на макроуровне.

На макроуровне материал представляется изотропным, характерные размеры которого много больше характерных размеров структурных элементов  $L_3 > 10^2 L_0$ . Свойства такого объема материала характеризуются некоторыми локальными величинами, представляющими собой результат обобщения информации о поведении материала на мезоуровне.

Определение эффективных свойств, описываемых случайным полем величин, сводится к статистическому анализу выборки свойств, определяемых в случайно выбранных точках материала, совокупность которых и задает случайную выборочную функцию.

При оценке макроскопической прочности композита предлагается использовать представления теории перколяции. При реализации данного подхода по результатам моделирования каждого мезообъема из состава репрезентативной выборки вычисляются характеристики его поврежденности, по которым делается заключение об общем состоянии мезообъема ("разрушен"/"не разрушен"). Полученные оценки состояния присваиваются точкам имитационной модели представительного объема композита, которые соответствуют геометрическим центрам соответствующих мезообъемов. На полученном таким образом поле точек формируются кластеры, объединяющие поврежденные и неповрежденные точки. При малых значениях внешних воздействий имеется только кластер неповрежденных точек. При некотором значении нагрузки происходит образование соединяющего кластера поврежденных точек.

Для идентификации соединительного кластера поврежденных точек («размах»), используется его характеристика которая вычисляется как максимальное расстояние между точками, принадлежащими кластеру, ПО каждому из координатных направлений:

$$l_{x} = x^{\max} - x^{\min},$$

$$l_{y} = y^{\max} - y^{\min},$$

$$l_{z} = z^{\max} - z^{\min},$$
(11)

где  $x^{max}$ ,  $x^{min}$ ,  $y^{max}$ ,  $y^{min}$ ,  $z^{min}$ ,  $z^{max}$  – координаты точек, принадлежащих кластеру, в координатном направлении (*x*, *y*, *z*). Признаком образования соединительного кластера является выполнение хотя бы для одного из координатных направлений неравенства:

$$l_{x} > \chi l_{x}^{M} ,$$

$$l_{y} > \chi l_{y}^{M} ,$$

$$l_{z} > \chi l_{z}^{M} ,$$
(12)

где  $l_x^M$ ,  $l_y^M$ ,  $l_z^M$  – соответствующий размер макрообъема по каждой координате, величина коэффициента  $\chi$  принимается несколько меньшей 1.

# Глава 3. Методика решения задачи

# 3.1. Методика исследования микрообъема.

На микроуровне свойства композита (свойства компонентов) полагаются заданными. Определение состояния микрообъемов реализуется в процессе численного решения задачи о нахождении НДС каждого из микрообъемов.

# 3.2. Методика исследования механического состояния композита на мезоуровне.

# 3.2.1. Описание структуры армирования на мезоуровне

Особую роль в формировании механических свойств гетерогенного материала играет его структура [73]. В рамках рассматриваемой модели основным объектом исследования является геометрическая имитационная модель стохастической структуры неоднородного материала [75, 46]. Имитационная модель представляет собой ограниченную плоскую фигуру (прямоугольник, квадрат, круг), заполненную элементами, имитирующими включения, с учетом заданных параметров (форма, размер, ориентация).

B качестве исходных данных при построении имитационной модели используются объемное соотношение компонент (C), набор параметров, характеризующих форму, размеры, ориентацию включений ( $\overline{A_i}$ ), распределение включений ПО Линейный модели размерам  $(\varphi_i)$ . размер имитационной определяется совокупностью таких параметров, выбирается исходя ИЗ требований обеспечения представительности.

Сформированный набор включений размещается в пределах объема, ограниченного размерами имитационной модели. Для каждого очередного включения случайным образом выбирается положение центра, для которого проверяется условие непересечения вновь размещаемого включения с включениями, размещенными ранее. Алгоритм реализован в виде вычислительной программы qtSgen.

На рисунке 3 приведен характерный вид модельных структур со случайным монодисперсным размещением круговых включений (C=20%) и полидисперсным наполнением.



Рисунок 3. Характерный вид модельной структуры со случайным монодисперсным (а) и полидисперсным (б) наполнением.

Непосредственное вычисление поля параметров напряженнодеформированного состояния всей модельной структуры представляет собой сложную вычислительную задачу. Сложность структуры армирования обуславливает невозможность получения точного аналитического решения. Исследование численными методами требует высокой степени дискретизации, что приводит к большому числу уравнений, решение которых требует больших вычислительных ресурсов, и, как следствие, может приводить к возникновению неконтролируемого роста погрешности вычислений.

гетерогенной Эффективные свойства среды проявляются как отклик составляющих ее элементов объема на внешнее воздействие. Полагается, что такой отклик может быть определен путем усреднения свойств, определенных для каждого элемента объема, по пространству, занимаемого средой. В частном случае усреднение свойств по макрообъему можно заменить усреднением по выборочной функции [80]. Это позволяет вместо моделирования отдельной напряженно-деформированного состояния всей модельной структуры перейти к расчету эффективных свойств на множестве локальных свойств композита. Определение локальных свойств основывается на принципе локальности формирования механических свойств композита [5], согласно которому на свойства материала в выбранной точке влияние оказывают лишь элементы структуры, принадлежащие некоторой ближайшей окрестности этой точки, тогда как влиянием удаленных структурных элементов можно пренебречь.

Достоверность предложенной методики может быть обеспечена при наличии представительного объема выборки ( $N_r$ ) локальных свойств и представительного размера мезообъема ( $L_f$ ). Представительность объема выборки и размера мезообъема обеспечивает оценку «сверху» для представительного геометрического размера всей модельной структур. Данная оценка может быть получена, используя простейшие геометрические соображения

31

$$L_r = L_f \sqrt{N_r} \tag{13}$$

# Оценка размера локально-представительного мезообъема структуры.

Данная оценка основана на предположении о наличии корреляционной связи между локальными свойствами и содержанием армирующих элементов в структуре материала. Наличие или отсутствие корреляционной зависимости между произвольным параметром *z*, характеризующим локальные свойства, и объемным содержанием включений *c*, оценивается по критерию Пирсона [17]:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})(c_i - \bar{c})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2 (c_i - \bar{c})^2}}$$
(14)

При выполнении условия  $(r \rightarrow \pm 1)$  можно считать, что между величинами имеется полная корреляция, условие  $(r \rightarrow 0)$  свидетельствует об отсутствии корреляции. Наличие такой связи предполагает, что оценка представительного размера материала может быть получена на основе анализа статистических характеристик некоторых локальных свойств и объемного распределения компонентов композита *с*. Для стохастических неоднородных материалов корреляционные связи сохраняются лишь на коротких расстояниях, которые называются масштабом корреляции.

Рассматривается случайная выборка точек плоскости, в которых определены характеристики материала:  $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ , где n – объем выборки. Два смежных состояния системы характеризуются параметрами  $X = X^{(1)}$  и  $X = X^{(2)}$ , причем  $\bar{x}_i^{(2)} = \bar{x}_i^{(1)} + \Delta x$ . Каждому состоянию соответствуют представительные выборки локальных свойств и объемного соотношения компонентов, заданных функцией g(z, c):  $g_I = g(X^{(1)})$   $g_{II} = g(X^{(2)})$ . Вводится определение корреляционной функции  $R_{g_Ig_{II}}$ , которая выглядит следующим образом [22]:

$$R_{g_{I}g_{II}} \equiv g_{I}g_{II} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{I}g_{II}f(g_{I}g_{II})dg_{I}dg_{II}, \qquad (15)$$

где  $f(g_I g_{II})$  – двухточечная плотность распределения локальных свойств.

На рисунке 4 представленная зависимость корреляционной функции ( $R_C$ ) от размера модулируемого объема ( $L_f$ ) (кривая 1) разделена на два участка, которые характеризуются разной степенью зависимости (кривая 2): на первом – функция быстро убывает, на втором – становится практически постоянной. В качестве локально-представительных объемов могут быть приняты такие объемы, размеры которых не меньше размера области сохранения сильной корреляции между значениями исследуемой величины.



Рисунок 4. Зависимость корреляционной функции  $R_C$  от размера модулируемого объема  $L_f$ .

### 3.2.2.Исследование локального состояния композита.

Задача расчета НДС на мезоуровне представляет собой задачу нахождения напряжений и деформаций в кусочно-однородной среде, в компонентах которой процесс накопления повреждений. Накопление происходит повреждений приводит к тому, что характеристики среды, в частности модуль упругости, имеют в процессе нагружения переменный характер. Данное обстоятельство обуславливают физическую нелинейность решаемой задачи. Для ее решения применяется метод пошагового нагружения. В соответствии с этим методом интервал нагружения разбивается на более мелкие интервалы таким образом, чтобы в пределах каждого интервала задача была близка к линейной. По результатам решения задачи на каждом шаге по нагрузке вычисляется значение параметра повреждаемости (7), а также соответствующее ему значение модуля упругости (9). Для повышения точности при вычислении параметра повреждений и модуля упругости используется схема «предиктор-корректор» [127] На каждом шаге по нагрузке задача решается численно с помощью метода конечных элементов[28, 58].

#### Основные соотношения метода конечных элементов.

При решении задачи использовались изопараметрические квадратичные четырехугольные элементы (рисунок 5). Их использование позволяет повысить качество аппроксимации поля перемещений в пределах конечного элемента [78].



Рисунок 5. Квадратичный четырехугольный элемент

В четырехугольном элементе введена локальная система координат *ξ*, *η*, удовлетворяющая условиям:  $-1 \le \xi \le 1$ ,  $-1 \le \eta \le 1$ . Эти координаты связаны с глобальной системой с помощью зависимостей:

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i x_i , \ y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i y_i ,$$
(15)

где  $x_i$ ,  $y_i$  – глобальные координаты узлов,  $N_i(\xi, \eta)$  – функции формы. Число членов сумм определяется числом узлов элементов.

В используемом квадратичном элементе функции формы имеют вид:

$$N_{i} = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_{i})(1 + \eta \eta_{i}) - \frac{1}{4} (1 - \xi^{2})(1 + \eta \eta_{i}) - \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_{i})(1 - \eta^{2}) \text{ для } i=1, 3, 5, 7,$$

$$N_{i} = \frac{1}{2} (1 - \xi^{2})(1 + \eta \eta_{i}) \text{ для } i=2, 6,$$

$$N_{i} = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_{i})(1 - \eta^{2}) \text{ для } i=4, 8.$$
(16)

В изопараметрических элементах функции формы совпадают с выражениями для вычисления перемещений в произвольной точке элемента по их узловым значениям:

$$u(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i u_i , \ v(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{8} N_i v_i ,$$
(17)

где  $u, v - компоненты вектора перемещений в точке элемента с координатами <math>\xi$ ,  $\eta, u_i, v_i$  – перемещения в узлах (*i*=1,8).

При использовании метода конечных элементов уравнения (1), (2), (3) удобно записывать в матричном виде:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}, \{\sigma\} = [A]\{\varepsilon\}, \tag{18}$$

где [B] – матрица дифференцирования перемещений, [A] – матрица упругости,  $\{\varepsilon\}$  – вектор-столбец компонент деформаций,  $\{q\}$  – вектор-столбец узловых перемещений,  $\{\sigma\}$  – вектор столбец компонент напряжений.

Сводя все силы, действующие на конечный элемент, к силам  $\{R^e\}$ , действующим в его узлах и рассматривая условия равновесия элемента под действием этих узловых сил, можно записать матричное уравнение, связывающее узловые перемещения в элементе  $\{q^e\}$  с силами  $\{R^e\}$ :

$$\{R^e\} = [k^e]\{q^e\}$$
(19)

Матрица жесткости конечного элемента  $[k^{e}]$  определяется:

$$[k^{e}] = \int_{V} [B]^{T} [A] [B] dV$$
(20)

Элемент объема dV в локальных координатах записывается в виде:

$$dV = \det[I]d\xi d\eta$$
(21)

где 
$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Выполняя операцию сборки для всей совокупности конечных элементов, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений {*q*} всей расчетной области:

$$\{R\} = [K]\{q\}, \tag{22}$$

где матрица [K] — глобальная матрица жесткости,  $\{R\}$  — вектор узловых сил. Система решается методом прямого исключения с итерационным уточнением.
#### Расчетная схема

Для моделирования условий нагружения мезообъема применяется схема, аналогичная трехфазной модели композита [43]. На рисунке 6 области 1 соответствует компонента матрицы, область 2 – включения. Третьей фазе, соответствующей окружающему выбранный объем материала, приписываются эффективные свойства самого мезообъема (область 3).



Рисунок 6. Схема расчетной области.

Размеры эффективной среды выбираются достаточно большими, чтобы возмущения полей параметров напряженно-деформированного состояния, вызванные различием свойств компонент на границе раздела фрагмента структуры и фрагмента среды с эффективными свойствами не оказывали заметного влияния на состояние материала в зоне приложения граничных условий. Граничные условия задаются на внешних границах эффективной среды.



Рисунок 7. – Граничные условия.

В случае одноосного растяжения граничные условия имеют вид:

$$CD: \tau_{yx} = 0, V = const,$$
  

$$AB: \tau_{yx} = 0, V = 0,$$
  

$$DA: \tau_{xy} = 0, \sigma_{x} = 0,$$
  

$$CB: \tau_{xy} = 0, \sigma_{x} = 0,$$
  

$$A - B - C - D - A: U|_{+} = U|_{-} = 0,$$
(23)

где  $\sigma_x$  – нормальные напряжения,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  – касательные напряжения на соответствующих границах.

### Вычисление эффективных механических характеристик мезообъема структуры

Полученные поля параметров напряженно-деформированного состояния выделенного мезообъема структуры позволяют определить его эффективные механические характеристики. Используется подход, применяемый для расчета эффективных упругих свойств гетерогенных материалов. Полагая, что нагрузка прикладывается в направлении оси координат X, модуль упругости  $E^{eff}$  находится из соотношения

$$E^{eff} = \frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\varepsilon}_x},$$
(24)

где  $\overline{\sigma}_x$  и  $\overline{\varepsilon}_x$  – средние по мезообъему материала компоненты тензоров напряжений и деформаций:

$$\overline{\sigma}_{x} = \frac{1}{V} \int_{V} \sigma_{x} dV, \qquad \overline{\varepsilon}_{x} = \frac{1}{V} \int_{V} \varepsilon_{x} dV.$$
(25)

Значения коэффициента Пуассона вычисляются как отношение средней поперечной деформации образца к средней продольной деформации:

$$\nu = -\frac{\overline{\varepsilon}_{y}}{\overline{\varepsilon}_{x}} , \qquad (26)$$

где  $\bar{\varepsilon}_{y} = \frac{1}{V} \int_{V} \varepsilon_{y} dV$ .

**3.3.** Методика исследования механического состояния композита на макроуровне.

### 3.3.1. Статистический подход к определению эффективных свойств композита.

Результаты расчета эффективных свойств каждого объема на мезоуровне свойства 3a определяют локальные материала на макроуровне. счет неоднородности физико-механических свойств мезообъемов, свойства композита собой случайные макроуровне представляют функции координат. на Определение эффективных свойств, описываемых случайным полем величин, сводится к статистическому анализу выборки свойств, определяемых в случайно выбранных точках материала, совокупность которых и задает случайную выборочную функцию. Наиболее полным описанием случайных величин является описание их закона распределения, плотности распределения, средние значения, стандартные отклонения и доверительные интервалы.

Функция распределения Гаусса [98] имеет важное значение, так как описывает случайные ошибки измерений и изменения прочности для многих материалов. Оно полностью определяется двумя параметрами – средним значением  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Плотность f(z) этого распределения определяется выражением:

$$f(z) = \frac{\exp^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi}},$$
(27)

где  $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ .

Среднее значение (математическое ожидание) определяется из выражения:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (28)$$

где *x<sub>i</sub>* – значения измеряемой величины, *n* – общее число измерений.

Стандартное отклонение определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}{n}}.$$
 (29)

Для описания распределения случайных величин также используется распределение Вейбулла:

$$W(z) = \begin{cases} 1 - \exp^{-\left[\frac{z - z_0}{b}\right]^m}, & z > z_0 \\ 0, & z \le z_0 \end{cases}$$
(30)

где *z* – случайная величина, *z*<sub>0</sub>, *b*, *m* – параметры распределения Вейбулла.

Закон распределения локальных свойств композита, вычисленных для представительной выборки фрагментов структуры, аппроксимирован при помощи распределения Гаусса и Вейбулла. При аппроксимации эмпирической выборки P(E) с помощью распределения Гаусса (G(E)) и Вейбулла (W(E)) видно, что качество аппроксимации в обоих случаях высокое (рисунок 8).



Рисунок 8. Аппроксимация эмпирической выборки *P*(*E*) с помощью распределения Гаусса (*G*(*E*)) и Вейбулла (*W*(*E*))

Для проверки нормальности распределения локальных свойств построен квантиль-квантильный график (Q<sub>W</sub>,Q<sub>E</sub>). По оси абсцисс отмечены эмпирические квантили, по оси ординат – теоретические квантили выборочных данных (рисунок эмпирического 9). В случае совпадения параметров И теоретического (аппроксимирующего) законов распределения такой график представляет собой прямую линию. Таким образом, степень отклонения точек графика от прямой характеризует качество аппроксимации эмпирического закона распределения. Из рисунка видно, что отклонения эмпирических распределений выборочных данных от теоретических незначительны [61]. В качестве теоретического закона распределения случайных величин можно выбрать любое из предложенных.

Однако для оценки параметров распределения локальных свойств выбрано распределение Вейбулла, так как с его помощью можно описывать случайные К величины, имеющие пороговые значения. достоинствами данного распределения можно отнести также его практическую пригодность для аппроксимации симметричных распределений, которые обычно принято описывать распределением Гаусса[106].



Рисунок 9. Квантиль-квантильный график (Q<sub>W</sub>,Q<sub>E</sub>).

#### Построение эффективной диаграммы деформирования.

На макроуровне рассматривается представительное множество точек, каждая из которых представляет собой локальные свойства композита, определенные из результатов расчета эффективных свойств мезообъемов на мезоуровне (ссылка на главу). Определенные таким образом свойства приписываются некоторой точке в пределах размера моделируемого объема на макроуровне – узлу расчетной области. Для каждого узла расчетной области, количество  $N_r$  которых обладает свойством представительности, известны значения параметра повреждаемости  $\Pi_k$ , модуля упругости  $E_k(\Pi_k)$  и параметры  $\sigma(E_k)$ ; $\varepsilon(E_k)$ . На рисунке 10 изображены параметры  $\sigma(E_k)$ ; $\varepsilon(E_k)$ , образующие «пучок», состоящий из  $N_r$  кривых деформирования (для примера  $N_r=5$ ).

Рассматривается некоторый набор значений макродеформации  $\varepsilon_k = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k\}$ . Каждому значению макродеформации  $\varepsilon_k$  соответствует множество значений напряжений  $\sigma_{ki} = \{\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, ..., \sigma_{ki}\}$ , при  $i=1, N_r$ . При каждом значении  $\varepsilon_k$  проводится осреднение значений  $\sigma_{ki}$ :

$$\left\langle \sigma_{ki} \right\rangle = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \sigma_{ki} \tag{31}$$

По полученным значениям { $\langle \sigma_{ki} \rangle$ ;  $\varepsilon_k$ } строится эффективная диаграмма деформирования. На рисунке 10 представлены осредненные значения  $\sigma_{ki}$  для 5 узлов расчетной области.



Рисунок 10. Определение параметров напряженно-деформированного состояния

## 3.3.2. Методика использования перколяционных представлений применительно к определению макроскопических свойств композита

Для оценки предельных значений механических характеристик, соответствующих условиям макроскопического разрушения материала, предлагается использовать методы кластерного анализа. Каждая рассматриваемая точка (рисунок 11 а) макрообъема композита находится в одном из двух возможных состояний: исходном («неповрежденном») И конечном («разрушенном»). Переход точки из одного состояния в другое можно рассматривать как особый вид изменения фазового состояния этой точки. В соответствии с представлениями кластерного анализа, точки, находящиеся в одном и том же состоянии образуют некую совокупность — кластер. Для решения вопроса о принадлежности точек тому или иному кластеру строится триангуляционный граф [82] на всей представительной выборке точек (рисунок 11 б).



Рисунок 11. а) представительная выборка точек по всему макрообъему; б) триангуляционный граф, построенный на представительной выборке точек.

Необходимыми признаками принадлежности двух точек одному кластеру являются совпадение состояний точек (поврежденное или неповрежденное) и их принадлежность одному и тому же ребру триангуляционного графа. В условиях отсутствия внешнего воздействия все точки находятся в исходном состоянии и образуют единый кластер, охватывающий весь макрообъем композита. По мере возрастания внешних воздействий отдельные точки переходят в новое («поврежденное») состояние, что приводит к возникновению новых кластеров — кластеров повреждений (рисунок 12).



Рисунок 12. Конфигурация кластера повреждений

дальнейшем происходит рост и слияние кластеров повреждений с B одновременным сокращением исходного кластера (кластера неповрежденных точек). Определение конфигураций кластеров повреждений выполняется для каждого шага по нагрузке, что позволяет отслеживать эволюцию поля кластеров повреждений в течение всего процесса нагружения модельного макрообъема. Полагается, что критерием перехода всей системы в новое состояния (условием макроскопического разрушения композита) является образование соединяющего кластера повреждений. Задачу об определении условий возникновения соединяющего кластера принято назвать задачей о перколяции [88,89].

# Сравнительный анализ кластеров поврежденных узлов, построенных на регулярной и нерегулярной решетках.

Задача о перколяции обычно решается на регулярных решетках узлов. Представляет интерес исследование вопроса о возможности решения этой задачи на решетке, состоящей из нерегулярно расположенных узлов, в качестве которых, в частности, могут использоваться те точки, в которых рассчитывались локальные свойства. Разработан алгоритм решения задачи о перколяции на нерегулярной решетке, который включает в себя определение момента образования соединительного кластера повреждений [84].

В качестве иллюстрации возможностей предложенного подхода приводятся основные результаты определения предельных характеристик модельного композита, матрица которого армирована включениями размером 50 мкм с объемным содержанием включений 20%. Количество узлов на регулярной и нерегулярной решетке равнялось 400, среднее расстояние между ними равнялось диаметру включения.

На рисунке 13 показан процесс развития кластера повреждений в имитационной модели. На рисунке 13 а-г в виде не закрашенных кругов показано хаотическое распределение поперечных сечений армирующих волокон. Черные точки на рисунке обозначают кластерные узлы, для которых на мезоуровне выполнено условие разрушения. На рисунке13 г представлена конфигурация полученного соединяющего кластера.



Рисунок 13. Развитие конфигурации кластеров поврежденных узлов:

a)  $\varepsilon = 2.9\%$ , 6)  $\varepsilon = 3\%$ , b)  $\varepsilon = 3.1\%$ , r)  $\varepsilon = 3.2\%$ 

В качестве одного из возможных подходов к решению задачи о макроскопической прочности рассматривалось решение той же задачи на регулярной решетке кластерных узлов. Соединяющий кластер, полученный для той же самой имитационной модели композита, показан на рисунке 14.



Рисунок 14. Конфигурация соединяющего кластера повреждений для регулярной кластерной решетки.

На рисунке 15 приведены эффективные диаграммы деформирования композита (ось абсцисс - макроскопическая деформация ε<sub>1</sub>, ось ординат – σ), полученные при использовании нерегулярной (кривая 1) и регулярной (кривая 2) кластерных решеток. Видно, что обе кривые практически совпадают, что подтверждает корректность решения задачи о перколяции. Пунктирными линиями отмечены предельные значения деформации и напряжений, соответствующие моменту образования соединительного кластера.



Рисунок 15. Кривые деформирования и предельные характеристики, полученные на: а) узлах регулярной сетки (1); б) на множестве случайных точек (2)

Различие предельных характеристик не превышает 2%, и может считаться не существенным. Как показывают полученные результаты, нерегулярная решетка, образованная узлами, в которых рассчитывались локальные свойства композита, вполне пригодна для решения задачи о перколяции.

#### Глава 4. Результаты.

4.1. Подтверждение достоверности методики определения эффективных свойств композита.

### Оценка величины локально-представительного объема материала со стохастической структурой в случае монодисперсного наполнения.

Оценка размеров локально-представительного объема материала была основана на анализе зависимости корреляционной функции  $R_C$  от объемного содержания компонентов *C*. Рассматривались модельные объемы композита с объемным содержанием включений 7%, 14%, 20%, 30%, 50%, диаметр включения *d*=10 мкм. В качестве значений механических характеристик компонентов были приняты следующие:  $E_i = 200 \Gamma \Pi a$ ,  $v_i = 0,30$ ,  $E_m = 3,4 \Gamma \Pi a$ ,  $v_m = 0,22$ , где  $E_i$ ,  $E_m$  – модули упругости волокон и матрицы соответственно,  $v_i$ ,  $v_m$  — коэффициенты Пуассона волокон и матрицы [41].

На рисунке 16 представлено поведение корреляционной функции  $R_C$  в зависимости от относительных размеров моделируемого объема  $L_f/d$ . Видно, что с увеличением относительных размеров объема наблюдается изменение поведения функции: при малых размерах функция убывает, а при увеличении величины  $L_f/d$  функция становится постоянной.

Размер, при котором наблюдается смена характера поведения корреляционной функции, считается локально-представительным. Из таблицы 1 видно, с увеличением объемного содержания *C* величина относительного размера локально-представительного объема *L*<sub>f</sub>/*d* уменьшается:

<i>C</i> , %	$L_f/d$
7	4
14	3
20	3
30	2
50	1

Таблица.1. Зависимость относительного размера локально-представительного объема  $L_f/d$  от объемного содержания C



Рисунок 16. Корреляционные функции *R*<sub>*C*</sub> для монодисперсных модельных структур с различным объемным содержанием включений.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами определения локально-представительного объема на основе анализа упругих свойств композита [80,81], что позволяет считать использованный подход корректным для выбора размеров локально-представительного объема материала.

Оценка размера локально-представительного объема материала при полидисперсном наполнении.

Моделируемая структура армирована включениями, объемное содержание которых принималось равным  $C_1=10\%$ ,  $C_2=30\%$ ,  $C_3=50\%$ . Размеры радиусов включений различались в 4 раза: радиус мелкого включения условно принят за 1, радиус крупного – за 4. Отношение объемной доли крупных включений к мелким принималось равным 0%, 30%, 50%, 70%, 100%.

Количество мелких включений к количеству крупных представлено в таблице 2:

	$C_s/C_b$ , %				
$C_i$	100/0	70/30	50/50	30/70	0/100
10%	3259(0)	2281(61)	1629(101)	977(142)	0(203)
30%	9778(0)	6844(183)	4789(305)	2933(427)	0(611)
50%	16296(0)	11713(305)	8148(509)	4889(713)	0(1018)

Таблица 2. Отношение количества мелких включений к количеству крупных  $C_s/C_b$  в зависимости от объемного содержания  $C_i$ .

Размеры локальных объемов *L<sub>f</sub>* выбирались равными: 0.1; 0.3; 0.6; 1; 2; 4; 6; 8; 10. Размер расчетной области *L<sub>map</sub>*=320.

Модели мезообъемов представлены на рисунках 17: а)  $C_i = 30\%$ ,  $C_s / C_b = 70/30$ ; б)  $C_i = 30\%$ ,  $C_s / C_b = 50/50$ ; в)  $C_i = 50\%$ ,  $C_s / C_b = 70/30$ ; г)  $C_i = 50\%$ ,  $C_s / C_b = 50/50$ 





б)

57

в)

Рисунок 17. Моделируемые объемы структуры материала.

г)

На рисунках 18-20 представлены зависимости корреляционных функций от относительного размера локального объема  $L_f/d$  при разных значений объемного содержания включений C.



б)



Рисунок 18. Зависимость корреляционных функций *R*<sub>C</sub> от относительного размера локального объема *L*<sub>f</sub>/*d* при разных значениях объемной доли крупных включений к мелким: а) *C*=10%; б) *C*=30%; в) *C*=50%

Как видно из представленных результатов, для монодисперсной структуры (0% и 100%) при увеличении объемного содержания включений от  $C_2$ =30% до  $C_3$ =50%, размер локально-представительного объема уменьшается. Для слабонаполненной структуры  $C_1$ =10% размер локально-представительного объема можно принять равным 2. Данный результат совпадает с результатами, полученными при исследовании монодисперсных систем с разным объемным содержанием.

Наличие полидисперсного наполнения (рисунок 18) приводит к росту значений корреляционной функции, что свидетельствует о необходимости увеличения размеров моделируемого объема для обеспечения его представительности. В качестве такого размера выбирается 4. Следует отметить, что при увеличении объемного содержания включений размер локально-представительного объема уменьшается, как и в случае монодисперсного наполнения (рисунок 16).

#### Оценка объема представительной выборки локальных свойств.

Для решения задачи об оценке величины объема представительной выборки локальных свойств рассматривался модельный композит «эпоксидная смоластекловолокно», механические свойства компонентов которых заданы, объемное содержание включений 20%, размер d=50мкм. Относительная величина линейного размера  $L_r/d$  моделируемого объема варьировалась и принимала значения, равные 6, 10, 20, 80, 120.

Для оценки объема представительной выборки локальных свойств использовано известное статистическое соотношение[42].

$$N_r = \left(\frac{t_\infty S}{\Delta}\right)^2,\tag{32}$$

где  $N_r$  - объем выборки,  $t_{\infty}$  - коэффициент Стьюдента для бесконечного числа степеней свободы, S – выборочное среднее квадратичное отклонение,  $\Delta$  - заданная допустимая погрешность определения среднего значения выборки (интервал шириной 2 % от среднего значения модуля упругости). Необходимо учитывать, что выборочное среднее квадратичное отклонение исследуемой величины заранее неизвестно, следовательно, оценка представительности выборки не может быть сделана до ее формирования. Поэтому предлагается использовать более корректный подход к определению величины  $N_r$ :

$$N_{r}^{(n+1)} = \left(\frac{t_{n}^{(i)}S^{(i)}}{\Delta}\right)^{2}$$
(33)

Полученные в результате решения задачи данные о величине выборки для разных значений относительных линейных размеров моделируемого объема  $L_r/d$  представлены в таблице:

$L_r/d$	N <sub>r</sub>
6	246
10	175
20	384
80	265
120	297

Таблица 3. Зависимость объема выборки N<sub>r</sub> от относительного линейного размера L<sub>r</sub>/d моделируемого объема.

Еще одним подходом к оценке представительности выборки считается положение о неизменности параметров распределения при увеличении объема выборки. Параметры распределения Вейбулла (A, B,  $Z_0$ ) определялись для найденных в результате моделирования локальных значений модуля упругости на моделируемом объеме размером  $L_r /d=10$ . На рисунке 19 показано, как меняются параметры распределения с увеличением объема выборки  $N_r$  от 25 до 300 узлов. Установлено, что с увеличением объема выборки разброс параметров Вейбулла становится постоянным. По данным, представленным на рисунке, объем выборки может считаться представительным при  $N_r=175$ , что согласуется с результатом, полученным из соотношения (32) ранее.



Рисунок 19. Зависимость параметров вероятностного распределения Вейбулла от объема выборки.

# Оценка представительности относительных геометрических размеров модельной структуры *L*<sub>1</sub>/*d*.

Получив оценку объема представительной выборки локальных свойств, следует перейти к оценке относительных размеров, обеспечивающих геометрическую представительность моделируемого объема композита. Для моделируемых объемов размером  $L_r/d$  предельные характеристики  $\sigma$  и  $\varepsilon$  определены на представительном объеме выборки  $N_r$ . На рисунке 20 представлены зависимости предельных напряжений  $\sigma$  и предельных деформаций  $\varepsilon$  от относительного размера моделируемого объема  $L_r/d$ .

Показано, что для макрообъема, относительный размер которого  $L_r/d = 6$ , значения предельных характеристик значительно отличаются от значений предельных характеристик, полученных на моделируемых объемах другого размера. Это говорит о том, что относительный размер макрообъема  $L_r/d=6$  не представителен геометрически. Следовательно, представительны те модельные объемы, относительный размер которых превышает  $L_r/d=6$ .



Рисунок 20. Зависимость предельных значений деформаций и напряжений є и σ от относительного размера расчетной области *L<sub>r</sub>/d*.

Для оценки достоверности сделанных выводов о геометрической представительности модельных структур построены кривые деформирования (рисунок 21).



Рисунок 21. Кривые деформирования, полученные на модельных объемах разных относительных размеров *L<sub>r</sub>/d*.

Из полученных зависимостей видно, что значения предельных характеристик для модельного объема относительного размера  $L_r/d = 6$ , не являющегося представительным, значительно отличаются от значений предельных характеристик, полученных на моделируемых объемах, относительный размер которых является представительным. Предельные характеристики, полученные на модельных объемах представительного размера, имеют значения, приведенные в таблице. Разброс между полученными максимальным и минимальным значениями деформаций составляет 2.5 %, между полученные намисимальным и минимальным значениями напряжений - 3.9 %. Полученные данные говорят о достаточно корректном определении предельных характеристик композита на основе предложенной методики.

$L_r/d$	٤,%	σ, ΜΠα
10	3.022	113.78
20	3.097	115.2
80	3.019	110.78
120	3.09	110.7

Таблица 4. Предельные характеристики σ, ε для представительных относительных размеров моделируемого объема материала.

# Оценка достоверности полученных эффективных упругих свойств композита.

С учетом предложенной методики моделировалось механическое поведение волокнистого однонаправленного углепластика. Объемное содержание круговых волокон, диаметром d=10 мкм, варьировалось в пределах от 7 % до 50 %. Для модельного композита определены эффективные значения модуля упругости. На рисунке 22 приведена полученная в результате моделирования зависимость относительного модуля упругости композита от объемного содержания армирующих волокон (кривая 4).



Рисунок 22. Зависимость модуля упругости композита от объемного содержания армирующих волокон.

Для оценки достоверности полученных эффективных упругих свойств композита на графике также представлены решения, полученные другими авторами. Зависимость «5» соответствует решению Фойгта [130]:

$$E^{eff} = c_i E_i + (1 - c_i) E_m,$$
(34)

где *c<sub>i</sub>* – объемное содержание армирующих элементов, зависимость «1» - решению Рейсса [128]:

$$E^{eff} = \frac{E_i E_m}{c_i E_m + (1 - c_i) E_i};$$
(35)

кривые 6 и 7 – нижняя и верхняя границы вилки Хашина-Штрикмана соответственно [117]; зависимость «3» соответствует эмпирическому соотношению [43]:

$$E^{eff} = E_m \cdot \frac{2 + c_i}{2(1 - 2c_i)};$$
(36)

решение «2», полученное Аболиньшем [1]:

$$E^{eff} = E_i \cdot \frac{1 + (k_E - 1)c_i}{(c_i + k_E(1 - c_i))(1 + (k_E - 1)c_i) - (k_E v_m - v_i)^2 c_i(1 - c_i)},$$
(37)

где  $k_E = E_i / E_m$ ;

зависимость «4» - результаты расчета эффективных модулей упругости по обсуждаемой методике с учетом оценки размеров локально-представительного объема материала ( $L_f/d=4$ ).

Из рисунка видно, что эффективные относительные модули упругости лежат в пределах вилок Рейса-Фойгта и Хашина-Штрикмана. Значения относительных модулей упругости, рассчитанные по эмпирическому соотношению и полученные Аболиньшем, близки к результатам расчета, полученным по обсуждаемой методике. Представленные зависимости показывают, что результаты не противоречат решениям, полученным другими авторами; позволяют полагать,

что предложенная методика расчета упругих свойств реализована корректно.

#### Расчет упругих и прочностных свойств препрега AS4/8552 RC34 AW194

Препрег AS4/8552 RC34 AW194 представляет собой углепластик, который применяется при изготовлении элементов космической техники. Производитель компания «Hexcel» (Испания). Данный материал представляет собой однонаправленный волокнистый композит. Вследствие структуры армирования для определения механических свойств материала применима предложенная методика. Компанией Lamitec-Composites GmbH (Германия) проведен цикл испытаний для данного материала, включая нагружение по нормали к ориентации волокон.

Моделирование подобных испытаний осложняется тем, что отсутствует информация о поперечных свойствах волокон. Причиной является малый диаметр волокон (10-20 мкм), что затрудняет проведение натурных испытаний. В работе [49] предложена методика расчета упругих и прочностных свойств элементарных углеродных волокон, основанная на представлении волокна как 0 композиционном материале. Предложенная методика применена авторами работы расчета поперечного модуля упругости волокна AS4. Результатом, ДЛЯ полученным авторами, является оценка модуля упругости, равная 60 ГПа.

Результаты, полученные в статье [49] были использованы в качестве данных при моделировании препрега. В качестве характеристик матрицы были использованы данные компании «Hexcel» модуль упругости ~ 4.8 ГПа, прочность при растяжении ~124 МПа. Прочность волокна принята равной 600 МПа.

На рисунке 23 показана кривая деформирования препрега AS4/8552 RC34 AW194. Точка 1 на графике соответствует предельным значениям растягивающего напряжения и деформации, полученным при проведении компанией Lamitec-Composites GmbH, точка 2 соответствует испытания предельным свойствам, полученным в результате численного моделирования по обсуждаемой методике. Видно, что точка 1 лежит практически на расчетной
диаграмме деформирования, что говорит о хорошем качестве прогноза упругих свойств моделируемого препрега и подтверждает корректность реализации предложенной методики расчета упругих свойств композита.

Завышенные значения предельных свойств, полученных при моделировании, могут объясняться тем, что в реальном препреге может иметь место неполный контакт поверхности волокон с матрицей, а в модели композита реализован идеальный контакт обоих компонентов, что должно приводить к завышению прочностных свойств.



Рисунок 23. Кривая деформирования препрега AS4/8552 RC34 AW194.

## 4.2. Исследование механического поведения композита с учетом свойств межфазного слоя.

Практическая значимость результатов математического моделирования механического поведения композитов может быть повышена за счет максимально полного учета факторов, влияющих на эффективные механические свойства таких материалов. К числу наиболее значимых среди таких факторов, можно отнести параметры структуры армирования композита, механические характеристики компонентов материала. Как показывают результаты исследований, значительное влияние на эффективные механические свойства композита может оказывать межфазный слой, образующийся в области границы раздела компонентов композита [65]. Такой слой может представлять собой как реальный физический объект, образовавшийся, например, в результате протекания химических реакций в зоне контакта компонентов композита, так и удобное модельное представление о пограничной зоне между компонентами композита, позволяющей учесть при моделировании различные особенности такой зоны (например, морфологию поверхностей раздела компонентов, взаимную диффузию компонентов и т.п.). В общем случае, вследствие существенно различной возможной физической природы такого слоя, весьма различными могут быть и его механические характеристики. В связи с этим представляет интерес получение оценок влияния свойств такого слоя, меняющихся в широком интервале возможных значений, на эффективные свойства композиционного материала. Предложенная методика оценки прочности материалов была использована для оценки влияния модуля упругости и предела прочности межфазного слоя на эффективные свойства композита.

В качестве модельного материала рассматривается регулярно армированный композит. Ячейка периодичности (трансляционая ячейка) структуры армирования представляет собой квадрат, в центре которого размещается круговое включение.

Межфазный слой имитируется кольцевой областью, непосредственно окружающей круговое включение (рисунок 24).



Рисунок 24. Схема расчетной области.

Задача решается в двумерной постановке, что соответствует случаю однонаправленного материала нагружения волокнистого по нормали К направлению ориентации волокон. Учитывалось наличие компонентов с разными свойствами, границы раздела компонентов задавались явным образом при построении конечно-элементной сетки. Граничные условия соответствовали одноосному нагружению и учитывали условия симметрии:

$$CD: \tau_{yx} = 0, U = 0,$$
  

$$AB: \tau_{yx} = 0, \sigma_{x} = 0,$$
  

$$DA: \tau_{yx} = 0, V = 0,$$
  

$$CB: \tau_{yx} = 0, U = const,$$
  

$$A - B - C - D - A: U = V$$
(38)

Задача расчета прочностных свойств модельного композита решается с использованием перколяционного критерия прочности. В качестве узлов решетки, на которой ищутся кластеры повреждений, используются точки интегрирования конечных элементов. Состояние каждой такой точки («повреждена» - «не повреждена») оценивается по критерию Цая-Ву (4). Этот же критерий используется для расчета параметров, характеризующих степень поврежденности каждой компоненты материала, вида (7). опополово вовововововов (7) вововововов вововововов вовововов вововововов (9).

### 4.2.1. Оценка влияния механических свойств межфазного слоя на особенности накопления повреждений в композите.

Модельный материал представлял собой регулярно-армированный композит, ячейка периодичности которого имела квадратную форму. Поперечное сечение включений имело круглую форму с радиусом r<sub>i</sub>, объемное содержание включений было принято равным 10%, относительная толщина межфазного слоя  $(t/r_i)$  была равна 0.44. Относительный модуль упругости матрицы  $E_m/E_i$  (где  $E_i$  модуль упругости включения) был принят равным 0.04. Относительный предел прочности матрицы  $\sigma_m/\sigma_i$  (где  $\sigma_i$  - предел прочности включения) равнялся 0.22. Механические свойства межфазного слоя варьировались и принимали следующие относительный модуль упругости  $(E_l/E_i)$  — 0.02, 0.3, 1.53; значения: относительный предел прочности ( $\sigma_l/\sigma_i$ ) — 0.11, 0.44, 0.77. Задача оценки прочности решалась с использованием предложенной методики учета накопления повреждений. При различных сочетаниях свойств материала моделировался процесс накопления повреждений. Получены конфигурации соединительных кластеров поврежденных узлов графа, при которых выполнен макроскопический критерий разрушения. Полученные результаты представлены на рисунке 25.

Анализ представленных результатов позволяет сделать следующие выводы: независимо от упругих свойств слоя варианты с низкой прочностью межфазного слоя (абв) характеризуются разрушением практически всего слоя и сравнительно малого объема матрицы; при максимальной из рассмотренных значений прочности слоя повреждение наблюдается только в матрице (жзк). повышение предела прочности слоя сопровождается увеличением объема повреждений в матрице, при этом высокий модуль упругости приводит к частичному разрушению слоя (е), при некоторых сочетаниях прочности и жесткости слоя наблюдается частичное повреждение межфазного слоя(де); анализ результатов показывает, что увеличение модуля упругости слоя может приводить к увеличению доли поврежденного объема слоя и изменению конфигурации кластеров повреждений в матрице.



Рисунок 25. Конфигурация соединительного кластера поврежденных узлов графа при относительном модуле упругости:  $E_l/E_i = 0.02$  и относительном пределе прочности: а)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.11$ ; б)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.44$ ; в)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.77$ ;  $E_l/E_i = 0.3$  и относительном пределе прочности: а)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.11$ ; б)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.44$ ; в)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.77$ ;  $E_l/E_i = 1.53$  и относительном пределе прочности: а)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.11$ ; б)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.11$ ; б)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.11$ ; б)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.77$ ;  $E_l/E_i = 0.44$ ; в)  $\sigma_l/\sigma_i = 0.77$ ;  $E_l/E_i = 0.77$ ;

### 4.2.2. Оценка влияния свойств межфазного слоя на эффективные характеристики композита.

Оценивалось влияние механических свойств межфазного слоя на эффективные механические свойства композита. В качестве эффективных свойств выбирались следующие относительные величины: удельная работа разрушения  $\left(\frac{W}{\sigma_i}\right)$ , предельные растягивающие напряжения  $\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_i}\right)$ , предельные деформации ( $\varepsilon^*$ ), модуль упругости в отсутствие повреждений и модуль упругости при образовании соединительного кластера повреждений ( $\frac{E}{E_i}$ ).



Рисунок 26. Зависимость относительной величины эффективного предельного растягивающего напряжения  $\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_i}\right)$  от механических свойств межфазного слоя в виде поверхности.



Рисунок 27. Зависимость относительной величины удельной работы разрушения  $\left(\frac{W}{\sigma_i}\right)$  от механических свойств межфазного слоя в виде поверхности.

На рисунках 26-27 представлены поверхности, характеризующие зависимости относительных величин предела прочности и работы разрушения композита от механических свойств межфазного слоя. Обе зависимости имеют схожий качественный характер. При малых значениях одного параметра (S) независимо от величины другого (Е) предел прочности композита и работа разрушения имеют минимальные значения. Увеличение любого из параметров приводит К увеличению и предела прочности, и работы разрушения примерно на 30% относительно минимальных значений. При этом, за исключением участков минимальных значений прочности и жесткости слоя, значения предела прочности и работы разрушения композита практически не зависят от свойств слоя.



Рисунок 28. Кривые деформирования при различных сочетаниях свойств межфазного слоя.

В результате численного исследования механического поведения модельного композита с учетом межфазного слоя построены кривые деформирования, представленные на рисунке 28. Увеличение прочностных характеристик межфазного слоя, имеющего наиболее высокие значения модуля упругости, приводит к значительному росту значений предельной деформации (в 2 раза) и предельного напряжения. Увеличение величины предела прочности не оказывает влияния на значение предельных характеристик при наличии менее жесткого межфазного слоя. При прочном слое увеличение модуля упругости не приводит к изменению характера поведения кривой.



Рисунок 29. Поверхности, характеризующие значение относительного модуля упругости



Рисунок 30. Зависимость предельной деформации  $\varepsilon^*$  от механических свойств межфазного слоя в виде поверхности.

На рисунках 29-30 представлены: поверхность 1, характеризующая значение относительного модуля упругости при отсутствии повреждений; поверхность 2, характеризующая значение относительного модуля упругости, при образовании соединяющего кластера повреждений; поверхность, характеризующая значение предельной деформации  $\varepsilon^*$ .

При невысоких значениях предела прочности межфазного слоя при любых значениях модуля упругости процесс накопления повреждений не значительно влияет на эффективный модуль упругости композита (7%). С увеличением прочностных характеристик межфазного слоя наличие повреждений в композите приводит к значительному снижению значений эффективного модуля упругости. Наибольшее падение модуля в результате накопления повреждений соответствует сочетанию параметров межфазного слоя, при которых предельная деформация максимальна (45%).

## 4.3. Исследование поведения модельного пористого композита с учетом накопления повреждений.

Предложенная методика использована для исследования влияния взаимного расположения пор на локальную прочность пористого материала. Полагалось, что пористый материал может рассматриваться как композит, в котором включениям приписаны существенно меньшие значения физико-механическими характеристик по сравнению с матрицей. Моделировалось механическое поведение материала, в структуре которого имеются расположенные случайным образом поры. В качестве значений механических свойств матрицы и пор (включений) были приняты следующие [11]:  $\sigma_m$ =450 МПа,  $\sigma_i$  =100 МПа,  $E_m$  =85 ГПа,  $E_i$  = 3,4 ГПа,  $v_m$  =0.25,  $v_i$  = 0.3. Соотношение между модулями упругости матрицы и включений принято равным 25. [79]

Специально сконструированные модели объемов композита имитируют типичные случаи взаимного расположения пор в композите. Модели объемов представляют собой квадратные области, содержащие разное количество круговых пор:

1)единичная пора;

2) две поры, расположенные горизонтально относительно друг друга;

3)две поры, расположенные вертикально относительно друг друга;

4)три поры.

В дальнейшем для исследуемых объемов приняты следующие обозначения: «1», «2g», «2v», «3». Конечно-элементные модели вышеописанных объемов показаны на рисунке 31:



Рисунок 31. Конечно-элементное представление модельного объема композита.

На рисунке 32 представлены начальная стадия развития кластера повреждений (а), промежуточная (б) и конфигурация соединительного кластера (в).

На рисунке 32.1 показано развитие кластеров повреждений в объеме с единичной порой в процессе возрастания продольной деформации объема. Видно, что зарождение кластеров происходит вблизи боковых границ пор, что качественно хорошо согласуется с известным решением задачи Кирша о распределении напряжений в окрестности единичного выреза в пластине при одноосном растяжении. По мере роста деформации происходит рост кластеров поврежденных объемов, что, в конечном счете, приводит к образованию соединительного кластера, показанного на рисунке 32.1в.





Рисунок 32. Развитие кластеров повреждений в мезообъеме с различным содержанием поровых включений в процессе возрастания продольной деформации объема.

Стоит отметить, что поры в модельных объемах «1» и «2v» (рисунок 32.1 и 32.2) не повреждаются, накопление повреждений и образование соединительного кластера происходит только по матрице.

Поры, расположенные горизонтально относительно друг друга, практически полностью повреждаются (рисунок 32.3). В модельном объеме «З» поры, расположенные горизонтально, как и в предыдущем случае разрушены, третья пора повреждена незначительно (рисунок 32.4).

Накопление повреждений в модельном объеме композита сопровождается падением его модуля упругости (локального значения модуля упругости композита). На рисунке 33 показана зависимость относительного локального модуля упругости  $E_l^*$  ( $E_l^*$ =, где  $E_l$  - локальный модуль упругости,  $E_i$  - модуль упругости более жесткого компонента композита) от продольной деформации объема. Начальный участок полученной зависимости соответствует этапу деформирования, на котором в объеме нет признаков повреждения. Далее, по мере возрастания количества поврежденных элементарных объемов, наблюдается снижение локального модуля упругости.



Рисунок 33. Зависимость локального относительного модуля упругости от продольной деформации модельного объема.

Как следует из представленных результатов, пары вариантов 1 и 2v, а также 2g и 3 характеризуются близкими значениями предельных деформаций, при этом деформации, предельные характерные для каждой пары, существенно отличаются. Совпадение предельных деформаций означает, что с точки зрения перколяционного критерия структуры в каждой из таких пар являются практически идентичными. При этом структуры 2v и 2g, относящиеся к разным имеют равное объемное содержание включений и близкие объемы парам, кластеров повреждений. Таким образом, из полученных результатов следует, что перколяционный критерий прочности при использовании на мезоуровне оказывается чувствительным к конфигурации элементов структуры материала относительно направления нагружения.

### Пример расчета параметров напряженно-деформированного состояния композита на мезоуровне

На примере модельного композита, в качестве свойств компонент которого свойства типичные для углепластиков ( $E_i = 200 \ \Gamma \Pi a$ ,  $v_i = 0,30$ , приняты  $E_m = 3,4$  ГПа,  $v_m = 0,22$ , где  $E_i$ ,  $E_m$  – модули упругости волокон и матрицы соответственно, v<sub>i</sub>, v<sub>m</sub> — коэффициенты Пуассона волокон и матрицы), показаны результаты расчета параметров напряженно-деформированного состояния в условиях одноосного нагружения. В качестве математической модели используются соотношения (1-3). Моделируемый объем представляет собой один ИЗ фрагментов модельной структуры композита. Аналогичные расчеты выполняются для всех мезообъемов, входящих в состав представительной выборки, необходимой для определения эффективных свойств материала. В качестве расчетной схемы принята схема трехфазной модели, граничные условия соответствуют граничным условиям, которые обсуждались в разделе 3.2.2. Задача решалась методом конечных элементов.

На рисунке 34 показана структура моделируемого фрагмента (а), распределение изолиний интенсивности напряжений (б) и интенсивности деформаций (в). Видно, что сгущение изолиний, характеризующее положение концентраторов напряжений наблюдается у границ включения. Также видно, что концентраторы быстро затухают по мере удаления от границ раздела.



Рисунок 34. Структура моделируемого фрагмента (а), распределение изолиний интенсивности напряжений (б) и интенсивности деформаций (в).

### 4.4.Влияние объемного содержания включений на предельные характеристики углепластика.

Изложенный подход был использован для исследования влияния объемного соотношения компонентов волокнистого однонаправленного углепластика на его эффективные механические свойства [86]. Объемное содержание волокон варьировалось в пределах от 7 % до 50 %.  $E_i = 200$  ГПа,  $v_i = 0,30$ ,  $E_m = 3,4$  ГПа,  $v_m = 0,22$ , где  $E_i$ ,  $E_m$  – модули упругости волокон и матрицы соответственно,  $v_i$ ,  $v_m$  — коэффициенты Пуассона волокон и матрицы. Для каждого из рассмотренных значений объемного содержания волокон строилась геометрическая модель структуры армирования (модель макрообъема). Каждая модель представляла собой квадрат с размером стороны L, в котором случайным образом размещались круговые включения диаметром d. Количество включений в каждом случае составляло 200 - 225, при этом относительные линейные размеры моделей (L/d) варьировались от 100 (при объемном содержании включений 7 %) до 34 (при 50 %). Принятые соотношения размеров L и d позволяют считать построенные модели представительными в геометрическом смысле.

Для каждой из моделей структуры армирования случайным образом выбирались точки, в которых определялись локальные свойства модельных материалов. Количество точек выбиралось равным 500; погрешности определения среднего значения модуля упругости не превышают 3 %, что можно считать достаточным с точки зрения необходимых для обеспечения статистической представительности результатов.

В процессе численного эксперимента для модельных материалов определялись модули упругости в направлении нагружения в отсутствие повреждений, вид диаграмм деформирования с учетом накопления повреждений, предельные значения напряжений и деформаций, а также величина работы разрушения.

На рисунке показаны эффективные диаграммы деформирования модельных материалов. При построении диаграмм в каждом из трех проведенных модельных испытаний выполнялось усреднение локальных напряжений для ряда значений макродеформации  $\varepsilon_1$ , выбранных в области выполнения критерия локальной прочности:

$$\sigma_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_1^n, \qquad (39)$$

где *N* – объем выборки локальных свойств.



Рисунок 35. Диаграммы деформирования модельных материалов.

На рисунке 35 представлены результаты усреднения найденных диаграмм по трем проведенным испытаниям. Видно, что во всех рассмотренных случаях накопление повреждений с ростом деформации материала приводит к существенному снижению упругих свойств композита. Видно также, что если диаграммы деформирования модельных материалов с содержанием армирующих волокон 7 %, 14 % и 20 % расположены достаточно близко друг от друга, то

увеличение доли волокон до 30 % и более приводит к существенному возрастанию упругих свойств материала, которые растут тем более быстро, чем выше содержание волокна в композите. Результаты повторных вычислений эффективных значений модуля упругости характеризуются высокой повторяемостью, доверительных вследствие чего величина интервалов, построенных для уровня значимости 90% весьма мала и сравнима с элементами графического представления результатов.

На рисунке 36 представлены предельные значения главного напряжения (σ<sub>1</sub>) и деформации (ε<sub>1</sub>), полученные в результате проведенных расчетов. Точки, показанные на рисунке, соответствуют моменту образования соединительного кластера повреждений в представительном объеме материала.



Рисунок 36. Предельные значения главного напряжения и деформации

На рисунке показаны также доверительные интервалы (для уровня значимости 90 %), характеризующие разброс величин, полученный при повторных расчетах. Как видно из представленных на рисунке данных, предельные значения главного напряжения возрастают при увеличении объемного содержания армирующих

волокон. В отличие от этого, зависимость предельного значения главной деформации от содержания волокон является существенно немонотонной: наблюдается рост предельной деформации при увеличении содержания волокон от 7 % до 30 %, увеличение содержания волокон от 30 % до 40 % не приводит к существенному изменению величины предельной деформации, дальнейшее увеличение доли армирующих элементов до 50 % сопровождается снижением величины предельной деформации.

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [36] для случая сжатия композита поперек волокон, которому наиболее полно соответствует использованный в расчетной методике критерий Отмеченный прочности. факт снижения предельной деформации С одновременным ростом предельного напряжения при увеличении содержания армирующих волокон можно интерпретировать как признак появления у материала характерных особенностей хрупкого разрушения. Данные, приведенные на рисунке 36, позволили построить кривую «предельных состояний» ( $\sigma^*$ ,  $\epsilon^*$ ), которая показана на рисунке 35 пунктиром. Эта кривая разделяет области «допустимых» и «недопустимых» состояний композита. В первом случае в представительном объеме материала повреждения либо отсутствуют, либо сосредоточены в отдельных локализованных фрагментах материала. Bo втором случае В представительном объеме имеется соединительный кластер повреждений, что в соответствии с принятым критерием макроскопической прочности является признаком разрушения композита.

Представляет интерес также изменение величины доверительных интервалов, характеризующих разброс результатов повторных вычислений, при возрастании содержания армирующих волокон. В тех случаях, когда содержание волокон не превышает 30 %, повторные расчеты характеризуются достаточно малыми разбросами результатов при определении предельных значений напряжений и существенно большими разбросами при определении значений предельных

95

деформаций. Результаты, полученные для модельного материала с содержанием волокон 40 %, характеризуются максимальными разбросами результатов и по деформациям, и по напряжениям. Увеличение доли армирующих волокон ДО 50 % сопровождается уменьшением разброса резким результатов при определении значений предельных деформаций. Можно полагать, что отмеченные особенности разбросов результатов моделирования являются следствием того, что при разных объемных соотношениях компонентов композита условия развития процессов накопления повреждений в компонентах существенно различаются.

Полученные в результате моделирования данные о виде диаграмм деформирования и предельных значениях главного напряжения и деформации позволили оценить влияние объемного содержания армирующих волокон на удельную работу разрушения композита:

$$W = \int_{0}^{\varepsilon} \sigma_1 d\varepsilon_1, \qquad (40)$$

Характер изменения удельной работы разрушения модельных композитов с увеличением объемного содержания включений показан на рисунке 37.



Рисунок 37. Изменение работы разрушения с увеличением объемного содержания включений

На рисунке 37 также показаны доверительные интервалы для уровня значимости 90 %. Как видно из представленных результатов, при увеличении содержания волокон в композите от 7 % до 50 % величина удельной работы разрушения увеличивается в 3,5 раза. Как видно из представленных данных, связь между удельной работой разрушения и содержания волокон в композите (С, %) хорошо аппроксимируется линейной зависимостью вида

$$W = a + b C , \qquad (41)$$

где C – объемное содержание волокон (в процентах), значения коэффициентов: a = 0,064, b = 0,008. Поскольку вычисленная величина удельной работы разрушения непосредственно зависит от результатов, представленных на рисунке 36, характер изменения разбросов результатов при повторных вычислениях в обоих случаях совпадает.

Таким образом, изложенный подход к моделированию композиционного материала, основанный на представлениях о многоуровневом характере

процессов формирования его механических свойств, дает возможность оценки эффективных свойств механических композита на основе данных 0 характеристиках его компонент И параметров структуры армирования. Достоинством такого подхода является возможность анализа влияния процессов, протекающих на разных структурных уровнях, на формирование эффективных свойств материала. Показано, механических что решение задачи 0 макроскопической прочности композита может быть получено в результате исследования эволюции поля кластеров повреждений в представительном объеме материала в процессе его нагружения. Полученные данные свидетельствуют, что свойства композита существенное влияние оказывают как объемное на соотношение его компонент, так и условия развития процессов накопления повреждений на микро- и мезоскопическом масштабных уровнях.

# 4.5.Оценка достоверности результатов расчета эффективных упругих свойств углепластика.

На рисунке 38 приведена полученная в результате моделирования зависимость модуля упругости композита от объемного содержания армирующих волокон. Для сравнения на графике показаны верхняя (кривая 1) и нижняя (кривая 2) границы вилки Хашина-Штрикмана [35]. Видно, что полученная зависимость практически совпадает с нижней границей вилки, хотя с увеличением содержания армирующих элементов до 30 % и более значения упругих модулей отклоняются в сторону верхней границы вилки. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [36].



Рисунок 38. Зависимость модуля упругости композита от объемного содержания армирующих волокон

#### Заключение

Основные выводы и результаты, полученные в диссертационной работе, заключаются в следующем:

1. Разработана многоуровневая физико-математическая модель механического поведения композиционного материала с полимерной матрицей, позволяющая учитывать геометрию и взаимное расположение, объемное содержание армирующих элементов, а также особенности развития процесса накопления повреждений на разных структурных уровнях материала.

2. Разработана методика численного моделирования механического поведения композиционного материала и определения его предельных свойств в условиях однонаправленного статического нагружения волокнистого композита по нормали к направлению армирования. Методика основана на иерархическом накопления подходе к описанию процесса повреждений И включает использование критериев прочности Цая-Ву на микроуровне, критерия прочности объемного типа на мезоуровне, перколяционного критерия на макроуровне. Показано, что перколяционный критерий прочности волокнистых композитов является чувствительным к локальной конфигурации армирования относительно направления нагружения.

3. Получены теоретические геометрических новые оценки параметров представительных объемов композитов с однонаправленным волокнистым армированием, выполненные на основе анализа корреляционных характеристик значений объемных локальных соотношений компонентов для случаев монодисперсного и полидисперсного наполнений;

4. Получены зависимости эффективных упругих и прочностных свойств композитов с однонаправленным волокнистым армированием от механических свойств межфазного слоя с учетом повреждений структуры. Получены оценки

поперечного модуля упругости и предельных характеристик препрега на основе углеродного волокна AS-4.

5. В установлены общие результате компьютерного моделирования закономерности влияния объемного содержания углеродных волокон в диапазоне 7-50% характеристики карбополимерного на предельные композита. Обнаружено, что увеличение содержания волокон в диапазоне от 7 до 30 % приводит к росту предельной деформации до макроскопического разрушения, увеличение содержания волокон в диапазоне от 30 до 40 % не приводит к существенному изменению величины предельной деформации, увеличение доли армирующих элементов от 40 до 50 % сопровождается снижением величины предельной деформации.

#### Список литературы

1. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала // Механика полимеров. – 1965. – №4. – С. 52-59.

2. Алексеев Д.А. Моделирование кинетики накопления повреждений вероятностным клеточным автоматом/ Д.А. Алексеев, Г.А. Казунина // Физика твердого тела. – 2006. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 255-261.

3. Анохина Н.Ю. Влияние адгезии матрицы к армирующим включениям на эффективные характеристики полимерной композиции / Н.Ю. Анохина, С.А. Бочкарева, Б.А. Люкшин, П.А. Люкшин. // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т.12. - №5. – С. 111-115.

Анохина Н.Ю. Оценка адгезионного взаимодействия фаз композиционного материала по кривой напряжения-деформации / Н.Ю. Анохина, С.А. Бочкарева, Б.А. Люкшин, П.А. Люкшин, С.В. Панин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №1. – С. 97-105.

Богачев И.Н. Введение в статистическое металловедение / И.Н. Богачев,
 А.А. Вайнштейн, С.Д. Волков. – М.: Металлургия, 1984. – 176 с.

6. Болотин В.В. Теория стохастически армированных материалов // Прочность и пластичность. – М. : Наука, 1971. – С. 261-266.

7. Болотин В.В. Некоторые вопросы механики композитных материалов // Механика полимеров. 1975. №1. С. 126-133.

 Бочкарева С.А. Влияние разброса упругих свойств матрицы на эффективный модуль упругости наполненной полимерной композиции / С.А.Бочкарева, А.И. Реутов, О.С. Жданова // Физическая механика. – 2009. – Т. 12. – № 6. – С. 97-100.

Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – М.: Мир, 1980.
 − 280 с.

 Ванин Г.А. Микромеханика конструкций из композиционных материалов. – Киев: Наук. Думка, 1985. – 304 с.  Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

12. Волков С.Д., Долгих В.Я. К статистической теории упругости армированных пластиков// Механика полимеров. 1968. – №. 3. – С. 438-444.

13. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. –Минск: БГУ, 1978. –206 с.

14. Волков С.Д. Функция сопротивления материалов и постановка краевых задач механики разрушения/ УНЦ АН СССР. Ин-т. металлургии. Свердловск, 1986. – 65с.

15. Волков С.Д. Методы решения краевых задач механики разрушения. Препринт / УНЦ АН СССР. Ин-т. металлургии. – Свердловск, 1986. –68с.

Волков-Богородский Д.Б. Аналитико-численный метод оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (2). – С. 407–409.

 Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. – СПб: Питер, 2001. – 752 с.

 Гаришин О.К. Структурное моделирование эффективных упругих свойств наполненных эластомеров // Каучук и резина.— 1998а.— № 6. — С. 35-39.

19. Гаришин О.К. Структурно-статистическое моделирование процессов накопления поврежденности в наполненных эластомерах // XII Международная зимняя школа по механике сплошных сред: Тез. докл.— Пермь, 1999. —С. 125.

20. Голотина Л. А. Структурное моделирование механических свойств крупнозернистых композитов на полимерной основе / Л. А. Голотина, Л. Л. Кожевникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16. – №1. – С. 55 – 63.

Грачев Е.В. Перколяционная модель развития пожара / Е.В. Грачев, Ф.А. Абдулалиев, Е.Ю. Мирясов, Ю.Д. Маторыгин // Проблемы управления рисками в техносфере. – 2012. – Т. 21. – №1. – С. 57-64.

 Гузь А.Н. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В
 3-х т. Т. 1. Механика материалов /А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 368 с.

23. Димитриенко Ю. И. Метод решения задачи оптимизации структуры дисперсно-армированных композитов при ограничениях на тепловые и прочностные свойства / Ю.И. Димитриенко, А.Н. Дроголюб, А.П. Соколов, Ю.В. Шпакова // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2012. – № 11. – с. 415-430.

24. Дудченко А.А. Особенности свойств матрицы в окрестности жесткой наночастицы / А.А. Дудченко, С.А. Лурье, Н.П. Шумова //Вестник Московского Авиационного Института. – 2009. – Т.16. - №5. – С.19.

25. Дудченко А.А. Исследование свойств нанокомпозитов в зависимости от расположения и размеров наночастиц / А.А. Дудченко, С.А. Лурье, Н.П. Шумова // Конструкции из композиционных материалов. – 2012. – №4. – с.52-57.

26. Евлампиева С.Е. Пакет «Композит -2D» и использование его для расчета напряженно-деформированного состояния и определения эффективных свойств различных ансамблей включений в эластомерных композитах / С.Е. Евлампиева, Е.А. Паркаева, А.Л. Свистков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 309-316.

27. 117 Зайцев А.В. Новая оценка характерных размеров представительных объемов двухфазных дисперсно-упрочненных композитов // Труды четвёртой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций», ч.1. СамГТУ. – 2007. – С. 97–101.

28. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541
с.

29. Ильина Е. А. Математическая модель изотермического фазового превращения в матрице двухкомпонентного композиционного материала / Е.А. Ильина, Л.А. Сараев // Вестник СамГТУ. – 2002. – С. 81-93.

30. Ильиных А.В. Моделирование структуры и процессов разрушения зернистых композитов / А.В. Ильиных, В.Э. Вильдеман // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5. – № 4. – С. 443-451.

Канаун С.К. Метод эффективного поля в механике композитных материалов / С.К. Канаун, В.М. Левин. – Петрозаводск: Изд-во Петрозав. ун-та. – 1993. – 598 с.

32. Козлов Г.В. Взаимодействие основных компонент в наполненных композитах / Г.В. Козлов, Л.А. Довбня, И.В. Долбин, Ю.С. Липатов // Вестник СамГТУ, серия: физико-математические науки. – 2002. –Вып. 16. – С.140-144.

33. Комар Л.А. Моделирование процесса формирования межфазных слоев в нанонаполненных эластомерных материалах / Л.А. Комар, Lauke Bernd, Heinrich Gert // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №1. – С. 73-83.

34. Комар Л.А. Моделирование поведения слоя около поверхности дисперсного наполнителя в эластомерном композите при его деформировании / Л.А. Комар, С.Н. Лебедев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. –№4. – С. 584-591.

35. Композиционные материалы: В 8 т. / Под ред. Дж. Сендецки; пер. с англ. –
М.: Мир, 1978. Т. 2. – 566 с.

36. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов,
В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.:
Машиностроение, 1990. – 512 с.

37. Коноваленко Иг.С. Многоуровневое моделирование деформации и разрушения хрупких пористых материалов на основе метода подвижных клеточных автоматов / Иг. С. Коноваленко, С.Г. Псахье, А.Ю. Смолин // Физическая мезомеханика. – 2009. –Т. 12. – № 5. – С.29-36.

38. Коноваленко Иг.С. Компьютерное исследование зависимости механических свойств хрупкого материала от парциальной концентрации пор разного размера в его структуре / Иг.С. Коноваленко, А.Ю. Смолин, Ив. С. Коновленко, В.В.

Промахов, С.Г. Псахье // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2013. - №6(26). С. 79-87.

39. Коноваленко Иг.С. Изучение механических свойств керамических композитов с разным объемом пластичного наполнителя / Иг. С. Коноваленко, Ч.О. Токтохоев, Ив. С. Коновленко, А.Ю. Смолин // Известия Алтайского государственного университета. Физика. – 2014. - Т.1. – №1.

40. Косовцева Т. Р. Применение теории перколяции для моделирования различных процессов в системе MATLAB / Т.Р. Косовцева, И.Д. Иудин // Научный вестник МГГУ. – 2010. – № 2. – С. 41-44.

41. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. — М.: Наука, 1985. — 304 с.

42. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М: Юнити-Дана, 2004. – 573 с.

43. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 336 с.

Кульков С.Н., Буякова С.П., Смолин А.Ю., Роман Н.В., Кинеловский С.А.
Перколяционные переходы в поровой структуре керамики и ее физикомеханические свойства / С.Н. Кульков, С.П. Буякова, А.Ю. Смолин, Н.В. Роман,
С.А. Кинеловский // Письма в ЖТФ. – 2011. – Т. 37. – Вып. 8. –С. 34-40.

45. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов.— Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1946. – Т.16. – № 11. – С. 967—980.

46. Лейцин В.Н., Масловский В.И., Сидоренко Ю.Н. Оптимизация структуры неоднородных материалов при квазистатическом нагружении. Том. ун-т Томск, 1992. – 8с. – Деп. в ВИНИТИ 21. 12. 92, № 3591-В92.

47. Лейцин В.Н., Сидоренко Ю.Н. Оценка механических свойств многокомпонентных материалов стохастической структуры // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25. – Вып. 12. – С. 89-94.

48. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. –
416 с.

49. Литвинов В. Б., Кобец Л.П., Тосканбаев М.С., Деев И.С., Бучнев Л.М. Структурно-механические свойства высокопрочных углеродных волокон // Композиты и наноструктуры. – №3. – 2011. – С. 39-50.

50. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. -СПб.: Наука, 1993. – 471 с.

51. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. –139 с.

52. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных сред. — М.: Изд-во МГУ, 1976. — 367 с.

53. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955, —492 с.

54. Лурье А.И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.

55. Лурье С.А, Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // Вестник ПГТУ, серия Механика. – 2010. – №1. – С.80-90.

56. Люкшин Б.А., Люкшин П.А. Прочностной анализ дисперсно-наполненных полимерных систем на мезоуровне // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т.1. – №2. – С. 57-67.

57. Любин Дж. Справочник по композиционным материалам. – М.: Машиностроение, 1988. – 584 с.

58. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1980. – 256 с.

59. Москалев П.В., Гребенников К.В., Шитов В.В. Статистическое оценивание характеристик перколяционного кластера // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2011. –№ 1. –С. 29-35.

60. Москалев П.В. Анализ структуры перколяционного кластера //Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79. – Вып. 6. – С. 1-7.

61. Москалев П.В. Статистический анализ в системе R // Учебное пособие. Воронеж: ВГАУ, 2010. – 124 с.

62. Муратова Е.Н., Шпаковский А.И. Компьютерное моделирование роста перколяционного кластера на пористой поверхности // Известия СпбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2013. – Т.5. – с.28-35.

63. Назаров А.В. Компьютерное моделирование перколяционных процессов в однородных структурах // Труды МАИ. – 2011. – №49. – с.67.

64. Неклюдова Е.А., Семенов А.С. Анализ прочности стекловолоконного композиционного материала на основе критериев Хилла и Цай-Ву / XLI Неделя науки СпбГПУ // Материалы международной научно-практической конференции. – Ч.1. – 2012.

65. Новиков В.У., Бурьян О.Ю. Моделирование межфазного слоя в анизотропных материалах // Прикладная физика. –2000. –№1. –С.67-78.

66. Павлов С.П., Пальков Р.С.. Математическое моделирование эффектов усиления волокнистых нанокомпозитов с трубчатыми включениями и неоднородным межфазным слоем // Вестник СГТУ. – 2013. - №2 (70). – Вып.1.

67. Панин В. е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В. Структурные уровни деформации твердых тел. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985. — 225 с.

 Панин В.Е., Гриняев Ю.В., Данилов В.И. и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд.— 1990. — 255 с.

69. Панин В.Е. Методология физической мезомеханики как основа построения моделей в компьютерном конструировании материалов // Изв. вузов. Физика. — 1995. — Т. 38, № 11. — С. 625.

70. Панин В.е., Коротаев А.Д., Макаров П.В., Кузнецов В.М. Физическая мезомеханика материалов // Изв. вузов. Физика. — 1998. —№ 9. —С. 8-36.

71. Панин В. Е. Основы физической мезомеханики // Физическая мезомеханика. — 1998. — Т. 1. — № 1. — С. 5-22.
72. Панин В.Е., Егорушкин В.Е., Панин А.В. Физическая мезомеханика деформируемого твердого тела как многоуровневой системы // Физическая мезомеханика. – 2006. – №9. – С. 9–22.

73. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: изд-во Моск. ун-та, 1984. –336с.

74. Победря Б.Е. Принципы вычислительной механики композитов // Механика композиционных материалов. – 1996. –№6. –С. 729-746.

75. Платова Т.М., Масловский В.И., Коняев А.А., Кульков С.Н., Лейцин В.Н., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. разработка принципов создания перспективных маетриалов для экстремальных условий эксплуатации // Конверсия. Инф.-аналит. журн. – 1996. – №8. – С.22-25.

76. Работнов Ю. Н. механика деформируемого твердого тела. – Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1988. – 712с.

77. Рогачев Е.А., Суриков В.И., Федорчук В.А. Анализ кластерной структуры модельных двухкомпонентных композитов // Омский научный вестник. –2009. – №2(800). – С. 61-64.

78. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: пер. с англ./под ред.Б.Е. Победри. – М. : Мир, 1979. –392с.

79. Сидоренко Ю.Н. Конструкционные и функциональные волокнистые композиционные материалы. – Томск, 2006. –123с.

80. Сидоренко Ю.Н. Прогнозирование механических свойств стохастических композиционных материалов: дис. канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2004. –142 с.

81. Сидоренко Ю.Н., Вознюк Ю.П. Использование корреляционных характеристик при оценке представительности объема структурно-неоднородной среды // Моделирование процессов в синергетических системах: сб. статей. – Улан-Удэ – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – С. 132-134.

82. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск, 2002. –128с.

83. Смолин И.Ю., Еремин М.Е, Макаров П.В., Буякова С.П., Кульков С.Н., Евтушенко Е.П. Численное моделирование механического поведения хрупких пористых материалов на мезоуровне //Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2013. – №5(25). – С.78 -90.

84. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н. Современные подходы к прогнозированию эффективных механических свойств композиционных материалов с учетом хаотичности реальной структуры армирования // Хаос и структуры в нелинейных системах. Теория и эксперимент: Материалы 8-й Международной научной конференции, посвященной 40-летию КарГУ им. акад. Е.А. Букетова. – Караганда Изд-во КарГУ, 2012. – С. 264-269.

85. Советова Ю. В. Многоуровневый подход к определению эффективных свойств композита с учетом повреждаемости / Ю. В. Советова, Ю. Н. Сидоренко, В. А. Скрипняк // Физ. мезомех. – 2013. – Т. 16. – № 5. – С. 59-65.

86. Советова Ю.В., Сидоренко Ю.Н., Скрипняк В.А. Многоуровневый подход к исследованию влияния объемного соотношения компонентов хаотически армированного волокнистого углепластика на его механические характеристики // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2014. №2(28). – С. 77 – 89.

87. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М.: Наука, 1984. – 114 с.

 Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М.: Едиториал УРРС, 2002. – 112с.

89. Тарасевич Ю.Ю., Манжосова Е.Н. Решение задач теории перколяции с помощью пакета MATLAB // Математика в приложениях. –2004. – №2. –С.22-26.

90. Ташкинов А.А. Исследование статистических задач механики структурнонеоднородных сред на основе принципа локальности: Автореф. дисс. на соискание степени кандидата физ.-мат. наук. – М. –1981. – 10 с.

91. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

92. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры. — Киев: Наук. думка, 1993. — 132 с.

93. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Под ред. Л.П.Хорошуна. — Киев: Наук. думка, 1993. — 390 с.

94. Хохрякова Ю.В. К расчету эффективных упругопластических свойств многокомпонентных хаотически армированных композиционных материалов // Вестник СамГТУ. – 2002. – С. 93-96.

95. Черноус Д.А., Шилько С.В., Панин С.В. Анализ механического поведения дисперсно-армированного нанокомпозита. Метод расчета эффективных упругих характеристик// Физическая мезомеханика. – 2010. – №13. – С. 85-90.

96. Черноус Д.А., Шилько С.В., Кравченко С.Е. Прогнозирование механических характеристик асфальтобетона // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – №1(14). – С. 72-73.

97. Шермегор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1977. – 400 с.

98. Экспериментальная механика: в 2-х книгах: Кн. 2. Пер. с англ. / под ред. А.
Кобаяси. – М., Мир, 1990. – 552 с.

99. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 248 с.

100. Яновский Ю.Г., Никитина Е.А., Никитин С.М., Карнет Ю.Н. Оценка эффекта усиления связующих наноразмерными частицами различной природы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20, №1. С. 34-57.

101. Яновский Ю.Г., Никитина Е.А., Никитин С.М., Карнет Ю.Н. Композиты на основе полимерных матриц и углеродно-селикатных нанонаполнителей. Квантово-механическое исследование механических свойств, прогнозирование эффекта усиления // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №4. – С. 566-589.

102. Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э. Иерархическое моделирование механического поведения и свойств гетерогенных сред // Физическая мезомеханика. – 2001. – Т. 4. – № 3. – С. 63-71.

103. Яхьяева Х.Ш., Яновский Ю.Г., Козлов Г.В., Магомедов Г.М. Молекулярные модели межфазного слоя в полимерных нанокомпозитах: сравнение с экспериментом // Сборник научных трудов SWORLD. – 2012. – Т.9. – №1. – С. 60-65.

104. Aghdam M.M., S.R. Falahatgar. Micromechanical modeling of interface damage of metal matrix composites subjected to transverse loading // Composite Structures 66. – 2004. – P. 415–420.

105. Albert S.D. Wang, Karen Chang Yan. On modeling matrix failures in composites
// Composites: Part A 36 . – 2005. – P. 1335–1346.

106. Alqam Maha, Richard M. Bennett, Abdul-Hamid Zureick. Three -parameter vs. two-parameter Weibull distribution for pultruded composite material properties // Composite Structures 58. – 2002. – P. 497–503.

107. Barbero E.J., G.F. Abdelal, A. Caceres. A micromechanics approach for damage modeling of polymer matrix composites // Composite Structures 67. – 2005.–P. 427–436.

108. Bouhala Lyazid, Yao Koutsawa, Ahmed Makradi, Salim Belouettar. An advanced numerical method for predicting effective elastic properties of heterogeneous composite materials //Composite Structures. – 2014. - №117. P. 114–123.

109. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials // J. Mech. and Phys. Solids, 1965. - V.13. - P.223.

110. Chasiotis I., S.W. Cho. Representative Volume Element of Polycrystalline Silicon for MEMS.

111. Changjie Sun, Payman Saffari, Rahul Ranade, Keya Sadeghipour, George Baran. Finite element analysis of elastic property bounds of a composite with randomly distributed particles // Composites: Part A 38. – 2007. P. 80–86. 112. Denaca Matjaz, Ivan Smit, Vojko Musil. Polypropylene/talc/SEBS (SEBS-g-MA) composites. Part 1. Structure Composites: Part A 36. – 2005. – P. 1094–1101.

113. Denaca Matjaz, Ivan Smit, Vojko Musil. Polypropylene/talc/SEBS (SEBS-g-MA)
composites. Part 2.Mechanical properties // Structure Composites: Part A 36. – 2005. –
P. 1282-1290.

114. Dewey J.M. The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers // J. Appl. Phys. – 1947. – V.18. – P. 578.

115. Forental G. A., S. B. Sapozhnikov. Strength prediction of epoxy nanocomposite //
18th International conference of composite materials. – 2010.

116. Georgios A. Drosopoulos, Peter Wriggers, Georgios E. Stavroulakis A multiscale computational method including contact for the analysis of damage in composite materials // Computational Materials Science 95. - 2014. - P. 522-535.

117. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. // J. Mech. and Phys. Solids. -1963. -11, No2. -P. 127-135.

118. Hershey A.V. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals
// J. Appl. Mech. – 1954. – V.21. – P. 236

119. Hill R. Theory of mechanical properties of fibrestrengthened materials // J.Mech.
Phys. Solids. –1964. –V. 12. –№4. –P. 199-218.

120. Hoshen J., Kopelman R. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // Phys. Rev. B.— 1976. – 14(8).—P. 3438–3445.

121. Jayantha A. Epaarachchia, Philip D. Clausen. A new cumulative fatigue damage model for glass fibre reinforced plastic composites under step/discrete loading // Composites: Part A 36. – 2005. – P.1236–1245.

122. Krener E.H. The elastic and thermoelastic properties of composite media // Proc.
Phys. Soc. – 1956. – V.69. – P. 808.

123. Kozinkina A.I., Berezin A.V. Damage evolution in the constructional materials and its evaluation by acoustic emission method // Проблемы машиностроения и автоматизации. –2008. - Номер: S1. – C. 75-78.

124. Lombardi A.V.. A meso-macro model for a damage tolerance analysis of composite structures // Composite Structures 59. – 2003. –P. 37–43.

125. Liu C. On the Minimum Size of Representative Volume Element: An Experimental Investigation // Experimental Mechanics 45 (3). – 2005. – P. 238-243.

126. Morozov E.V., K.E. Morozov, V. Selvarajalu Damage model development for SMC composites // Composite Structures 62 . – 2003. – P. 373–378.

127. 200 Press W.M., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes. The art of Scientific Computing. – 3rd Ed. – Cambridge University Press, 2007. – P. 1235.

128. Reuss A. Berechung fer Fleissgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitatsbedingung // Z. angew. Math. und Mech. –1929. –9, 1. –P. 49–58.

129. Van der Pol C. On the reology of concentrated dispersions // Reol. Acta. – 1958.
– V.1. – P. 198.

130. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. – Berlin: Teubner, 1928. – 962 P.

131. Yokozeki Tomohiro, Toshio Ogasawara, Takashi Ishikawa. Effects of fiber nonlinear properties on the compressive strength prediction of unidirectional carbon–fiber composites // Composites Science and Technology 65. –2005. – P. 2140–2147.