Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Мисяков Виктор Михайлович

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, ИХ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ И ГРУППЫ ГОМОМОРФИЗМОВ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Крылов Пётр Андреевич

Томск — 2016

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов являются быстро развивающимися разделами современной алгебры. Всё возрастающий интерес к теории абелевых групп можно объяснить её тесной связью с другими математическими теориями: множествами, числами, векторными пространствами, модулями, кольцами, алгебрами, категориями, топологическими пространствами. Поскольку теория абелевых групп является частью теории модулей, то она использует её идеи и методы. В то же время она является одним из основных побудителей новых исследований в теории модулей.

К изучению теории абелевых групп можно подойти, исследуя три её части: теорию периодических групп, теорию групп без кручения и теорию смешанных групп. Так, для теории периодических абелевых групп была разработана глубокая структурная теория, основы которой были заложены Э. П. Х. Прюфером, Г. Ульмом и Л. Я. Куликовым. Наиболее значительными были работы Л. Я. Куликова [36,37]. Также были описаны довольно широкие классы периодических групп с помощью инвариантов [51, гл. XI, XII].

Работы Р. Бэра [71], Л. Я. Куликова [38–40] положили начало общей теории групп без кручения. Исследования Л. С. Понтрягина [120], А. Г. Куроша [41], А. И. Мальцева [42], Д. Дэрри [80] стали основой теории абелевых групп без кручения конечного ранга. В то же время А. В. Яковлевым [62] было доказано, что «хорошей» классификации групп без кручения конечного ранга вообще не существует.

Смешанные абелевы группы образуют наиболее общий класс абелевых групп, центральную роль в которых играют расщепляемые группы. С. В. Фомин [87] и Р. Бэр [70] нашли критерий расщепляемости таких групп. Но, как отмечает Л. Фукс [51]: «Хорошая классификация смешанных групп оказалась вне нашей досягаемости и, вероятно, останется таковой на некоторое время».

Истоки теории колец эндоморфизмов лежат в теории линейных преобразований векторных пространств. Теорию колец эндоморфизмов абелевых групп можно рассматривать как часть теории абелевых групп, поскольку она даёт сведения о самих группах, позволяет вводить новые классы групп и разрабатывать методы их исследования. В то же время её можно рассматривать как ветвь теории колец эндоморфизмов модулей и теории представления колец.

Классические результаты по теории абелевых групп изложены в книгах И. Капланского [107], А. Г. Куроша [41] и Л. Фукса [50, 51]. Дальнейшие результаты по группам без кручения конечного ранга и их кольцам эндоморфизмов можно найти в монографии Д. Арнольда [67]. Важным подклассом класса групп без кручения конечного ранга является класс почти вполне разложимых групп (почти вполне разложимой группой называется абелева группа X без кручения конечного ранга, которая содержит вполне разложимую подгруппу A такую, что X/A является конечной группой). Этому классу групп посвящены монографии А. Мадера [113], Е. А. Благовещенской [5] и статьи Е. А. Благовещенской [6, 7]. В статье [74] Е. И. Благовещенской были описаны с точностью до почти изоморфизма блочно-жесткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором.

Другим интересным подклассом в классе групп без кручения является класс Батлеровских групп [75], т. е. групп, которые являются эпиморфными образами вполне разложимых групп конечного ранга. Эти группы исследовались многими авторами и, в частности, в [68] было показано, что группы Батлера являются сервантными подгруппами вполне разложимых групп (конечного ранга). В недавно вышедшей монографии Л. Фукса [94] отражены все важные результаты, полученные по группам Батлера.

Одним из классов абелевых групп, интенсивно изучаемым в последнее время, является класс факторно делимых групп (группа G называется факторно делимой, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — периодическая делимая группа). Этот класс абелевых групп, построенный У. Уиклессом и А. А. Фоминым, является обобщением факторно делимых групп без кручения конечного ранга, введённых Р. А. Бьюмонтом и Р. С. Пирсом [72]. У. Уиклис и А. А. Фомин [88] показали, что категории факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга (с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов) двойственны. Факторно делимые группы изучались в работах [17, 48, 52, 53, 65, 66, 88, 90, 125]. Так, например, А. В. Царёвым в статье [53, предложение 5.1] был найден критерий изоморфизма двух факторно делимых смешанных групп. Факторно делимые группы ранга 1, выделенные А. А. Фоминым, были описаны О. И. Давыдовой [17].

Исследуя абелевы группы, во многих случаях полезно рассматривать их как модули над подходящими кольцами. В работах А. А. Фомина [89], П. А. Крылова [28] и П. А. Крылова, Е. Г. Пахомовой, Е. И. Подберезиной [29] были независимо определены кольца псевдорациональных чисел (подкольцо $R =< 1, \bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p >_*$ в кольце $\prod\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$, сервантно порождённое идеалом $\bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$ и единицей кольца, называется кольцом псевдорациональных чисел, где $\widehat{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел). Многие абелевы группы являются аддитивными группами модулей над кольцом псевдорациональных чисел. К примерам таких групп относятся периодические, делимые, алгебраически компактные и группы с π-регулярными кольцами эндоморфизмов, смешанные группы, лежащие между суммой и произведением своих p-компонент (sp-группы). В статье [28] П. А. Крылов использовал модули над кольцом псевдорациональных чисел для изучения sp-групп. В работе С. В. Чегляковой [55] описаны инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел кохарактеристики $(\infty, \infty, \ldots)$. В статьях А. В. Царёва [54] и Е. А. Тимошенко [46] независимо описаны проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел. А. В. Царёв [54] также описал плоские и образующие модули над этим кольцом.

К важным результатам также можно отнести описание групп с помощью инвариантов. В статье С. Я. Гриншпона и М. М. Никольской [16] вводится понятие допустимой последовательности инвариантов Ульма–Капланского для примарных групп, с помощью которого получено описание IF-групп в некоторых классах p-групп.

Важным этапом в развитии любой теории являются проблемы, решённые в ней. Отметим только некоторые из них, которые были решены в теории абелевых групп в последнее время. Проблемы 67 и 68 [51], касающиеся возможных рангов неразложимых слагаемых, а также их числа в различных прямых разложениях одной и той же абелевой группы без кручения конечного ранга, были решены в статьях Е. А. Благовещенской [3] и Е. А. Благовещенской, А. В. Яковлева [4]. Проблемы 17 и 43 [50] были решены П. А. Крыловым и А. Р. Чехловым [77].

Наиболее важные результаты по всем разделам теории абелевых групп и их связям с кольцами эндоморфизмов, полученные в последнее время, отражены в трудах П. А. Крылова, А. В. Михалёва, А. А. Туганбаева [31, 32, 109] и Л. Фукса [94]. Следует отметить монографию П. А. Крылова и А. А. Туганбаева [33], в которой показаны как классические, так и последние достижения о модулях над областями дискретного нормирования. Изложению теории арифметических, дистрибутивных и полудистрибутивных модулей и колец, а также модулей и колец Безу над ассоциативными, но не обязательно коммутативными кольцами посвящена монография А. А. Туганбаева [47].

Отметим также, что большой вклад в развитие теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов был внесён следующими российскими математиками: И. Х. Беккером, Е. А. Благовещенской, С. Я. Гриншпоном, С. Ф. Кожуховым, П. А. Крыловым, Л. Я. Куликовым, А. П. Мишиной, А. В. Михалёвым, А. М. Себельдиным, Е. А. Тимошенко, А. А. Фоминым, А. В. Царёвым, А. Р. Чехловым, А. В. Яковлевым и др. [91].

Заметим, что актуальность темы диссертации подтверждается рассмотренными в ней задачами, которые, в свою очередь, связаны с проблемами, сформулированными в монографиях: [31, 93], в трудах симпозиума [14], в статье [108].

Степень разработанности темы.

Во первом параграфе первой главы рассматривается один из вопросов, поставленных в [31, проблема 16]: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». Напомним, что кольцо R называется регулярным, если для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $y \in R$ такой, что $xyx = x$.

В теореме 1.1.9 описываются нередуцированные абелевы группы, имеющие регулярный центр кольца эндоморфизмов. В теореме 1.1.10 рассматриваются некоторые необходимые и достаточные условия регулярности центра кольца эндоморфизмов редуцированной группы, что даёт некоторое решение данной задачи, сформулированной в проблеме 16 [31].

В статье [108] поставлена проблема 7: «Описать редуцированные смешанные абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых регулярны».

Заметим, что основные исследования по изучению абелевых групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, связаны с работами K. Rangaswamy [121], L. Fuchs и K. Rangaswamy [92], которые свели изучение таких групп к редуцированным группам. В теореме 1.1.12 предлагаются некоторые необходимые и достаточные условия регулярности кольца эндоморфизмов редуцированной группы, что даёт некоторое решение проблемы 7.

Описание редуцированных групп конечного ранга без кручения, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, было предложено S. Glaz и W. Wickless в работе [95].

Центр кольца эндоморфизмов абелевых групп, а также связанные вопросы изучались в следующих работах. Так, в [27] описание центра кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы сводится к описанию некоторых подколец центра кольца эндоморфизмов ее части без кручения. В [30] рассматривается строение аддитивной группы регулярного модуля. Здесь же изучаются абелевы группы, являющиеся регулярными модулями над своими кольцами эндоморфизмов. В [35] доказывается регулярность кольца эндоморфизмов по радикалу самомалой sp-группы. В [1] содержатся как известные, так и новые результаты о гомоморфизмах, близких к регулярным. В [58] изучаются абелевы группы с центральными идемпотентами, а в [61] — с перестановочными мономорфизмами.

В монографии [31] поставлена проблема 15: «Свести исследование смешанных групп с нётеровыми справа, полупервичными или коммутативными кольцами эндоморфизмов к исследованию групп без кручения с соответствующими кольцами эндоморфизмов». Во втором параграфе первой главы данная задача решается для групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов из некоторого класса $\mathbb{K}$. В то же время, как было показано в [58, пример 3], существуют смешанные группы, имеющие коммутативное кольцо эндоморфизмов и не принадлежащие классу $\mathbb{K}$. Заметим, что периодические, расщепляемые и некоторый класс смешанных групп, имеющих коммутативные кольца эндоморфизмов, описаны в [123]. В [124] рассматриваются произвольные смешанные абелевы группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов. В [59] и [140] описываются соответственно делимые и нередуцированные абелевы группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов.

В монографии [31] сформулирована проблема 16: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». В третьем параграфе первой главы поставленная задача решается для абелевых групп с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов из некоторого класса $\mathbb{S}$. Приводится пример абелевой группы, не принадлежащей классу $\mathbb{S}$, с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов. Напомним, что кольцо R называется самоинъективным справа (слева), если модуль R_R (${}_RR$) инъективен. Кольцо R, самоинъективное справа и слева, называется самоинъективным.

Заметим, что редуцированные абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых самоинъективны справа, были описаны в [122]. Произвольные абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых самоинъективны слева (справа), были исследованы в [20]. Описание нередуцированных абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых самоинъективны справа, и произвольных абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых самоинъективны слева, было независимо получено в [63]. В [20] и [63] было показано, что самоинъективность слева кольца эндоморфизмов произвольной абелевой группы влечёт самоинъективность справа.

Термин «(вполне) транзитивность» был введен И. Капланским в [107] при исследовании модулей над полным кольцом дискретного нормирования. Впервые вполне транзитивные абелевы группы без кручения изучались в работе П. А. Крылова [22] (он называл эти группы транзитивными). Определение (вполне) транзитивной произвольной абелевой группы было введено Ю. Б. Добрусиным в [18].

Он называл группу G *(вполне) транзитивной*, если для каждой пары элементов $a, b \in G$ таких, что $(H(a) \leq H(b))$ $H(a) = H(b)$, следует существование $(\varphi \in \mathrm{E}(G))$ $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, переводящего элемент a в элемент b. В дальнейшем было показано, что группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда её редуцированная часть обладает этим свойством. Описание (вполне) транзитивных групп остается до сих пор нерешённой задачей, хотя исследования, связанные с этими объектами, постоянно ведутся. Так, (вполне) транзитивные периодические группы рассматривались в работах [76,78,79,86,97,98,104,105,110,115,116,118]; без кручения — в [9, 23–26, 57, 82, 83, 101]; смешанные — в [10–12, 43, 84, 112]; (вполне) транзитивные модули — в [85, 103]; слабо транзитивные группы без кручения — в [96, 114]; эндотранзитивные группы, введённые в [19] для групп без кручения, изучались также в [56, 83, 101]. Обзор результатов по вполне транзитивным группам и группам, близким к ним, можно найти в работе [2].

В четвёртом параграфе первой главы показываются некоторые связи между этими понятиями, даются некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слабо транзитивной.

В работе [78] А. Корнер рассматривает следующее понятие: пусть Φ — подкольцо с единицей кольца $\mathrm{E}(G)$ и H есть Φ-инвариантная подгруппа редуцированной p-группы G, тогда он говорит, что Φ действует (вполне) транзитивно на H, если для любых $x, y \in H$ таких, что

$$(U_G(x) \leq U_G(y))\ U_G(x) = U_G(y),$$

следует существование (элемента $\varphi \in \Phi$) обратимого элемента $\varphi \in \Phi$ такого, что $\varphi(x) = y$. Допуская вольность речи, мы будем говорить, что подгруппа H (вполне) транзитивна над Φ. Таким образом, G — (вполне) транзитивная группа в смысле Капланского тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на G. В теореме 1.4.6 даются некоторые эквивалентные условия (вполне) транзитивного действия кольца $\mathrm{E}(G)$ на произвольной редуцированной группе G.

В [31] ставится проблема 41 1): «Замкнут ли класс транзитивных [сильно однородных] групп без кручения относительно взятия прямых слагаемых?». Напомним, что однородные транзитивные группы без кручения называются сильно однородными. В теореме 1.4.8 получены некоторые необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой, что даёт некоторое продвижение в решении проблемы 41.

Понятие сепарабельной абелевой группы без кручения возникло в работе Р. Бэра [71] как «локально» вполне разложимой. В [51] понятие, данное Р. Бэра, было распространено на произвольные абелевы группы. Абелева группа A называется *сепарабельной*, если любую её конечную систему элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое S группы A. Абелева группа называется *вполне разложимой* , если она является прямой суммой абелевых групп, каждая из которых изоморфна подгруппам групп Q или $\mathbb{Z}(p^\infty)$. В силу своего строения все делимые группы сепарабельны, и легко видеть, что группа сепарабельна в точности тогда, когда её редуцированная часть сепарабельна. Свойства сепарабельных периодических групп и групп без кручения приведены в [51]. Смешанные сепарабельные группы рассматривались в [117].

Интерес к исследованию сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп возник с проблемой, поставленной в [93]: «Описать *векторные группы* (т. е. прямые произведения групп без кручения ранга 1), которые являются сепарабельными». Данная задача была решена А. М. Мишиной [44]. Описание сепарабельности прямых произведений произвольных групп без кручения было получено У. Альбрехтом и П. Хиллом [64]. В пятом параграфе первой главы предлагается описание сепарабельности прямых произведений произвольных абелевых групп (следствие 1.5.3).

В [14] С. Я. Гриншпоном сформулирована проблема 2: «Выяснить, для каких групп A группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A, C)$ равна нулю, где C — вполне разложимая группа без кручения». Для периодической абелевой группы C эта задача была решена в работе [13]. Близкие вопросы рассматривались также в работах [15, 34, 40, 45, 60]. В шестом параграфе первой главы предлагаются некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ для произвольной группы A и произвольной группы без кручения C, что даёт некоторое решение проблемы 2.

В монографии [31] для сепарабельной группы без кручения G сформулирована проблема 18 б): «Описать радикал кольца эндоморфизмов однородной группы G. Верно ли для неё равенство

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) = H(G)\bigcap F(G)?\text{»}$$

(далее идеал $H(G)$ для группы без кручения G обозначается через $H'(G)$). Здесь под радикалом кольца эндоморфизмов произвольной абелевой группы G понимается её радикал Джекобсона, а под его описанием имеется в виду описание его элементов в терминах их действия на группе. В [8] был получен критерий вышеприведённого равенства, что является значительным продвижением в решении второй части проблемы 18 б) из [31].

Обзор результатов о радикале Джекобсона колец эндоморфизмов групп без кручения с их полным доказательством можно найти, например, в [31]. В первом параграфе второй главы продолжается исследование радикала Джекобсона колец эндоморфизмов некоторых классов групп без кручения, в частности, даётся описание радикала Джекобсона колец эндоморфизмов однородных сепарабельных групп без кручения (следствие 2.1.4), что является некоторым решением первой части проблемы 18 б) из [31].

В монографии [31] сформулирована проблема 17: «Вычислить радикал кольца эндоморфизмов p-группы (сепарабельной p-группы)». В работах [99, 100, 111, 119] описываются элементы из радикала Джекобсона колец эндоморфизмов в терминах их действия на тотально проективных p-группах, на достаточно проективных p-группах, на ω_1-сепарабельных p-группах и на периодически полных p-группах соответственно. Обзор этих результатов можно найти, например, в [31]. Во втором параграфе второй главы эта задача рассматривается для сепарабельной p-группы и делимой периодической группы. В частности, для сепарабельной p-группы получено некоторое решение проблемы 17 [31] (теорема 2.2.4).

Строение радикала Джекобсона колец эндоморфизмов вполне разложимых p-групп и вполне разложимых групп без кручения было получено соответственно в [31, §20, теорема 20.10] и [31, §22, теорема 22.11]. Задача описания радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы сформулирована как проблема 19 [31], некоторое решение которой даётся в теореме 2.3.2.

Цели и задачи исследования. Цели исследования: получить новые результаты по абелевым группам, их кольцам эндоморфизмов и группам гомоморфизмов, обеспечивающих эффективное развитие данных теорий.

Задачи исследования:

1. Найти условия регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы и регулярности кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы.

2. Исследовать абелевы группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов. В частности, необходимо выделить некоторый класс абелевых групп, в котором исследование абелевых групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов сводилось бы к исследованию групп без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

3. Исследовать абелевы группы с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов. Необходимо описать абелевы группы с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов из некоторого класса абелевых групп.

4. Получить критерий (вполне) транзитивной редуцированной группы. Найти некоторые необходимые и достаточные условия транзитивности прямого слагаемого транзитивной группы.

5. Исследовать свойство сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп. Получить описание сепарабельных прямых произведений произвольных абелевых редуцированных групп.

6. Исследовать равенство нулю группы $\mathrm{Hom}(A,\ C)$ для произвольной группы без кручения C и произвольной абелевой группы A. Следует найти некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы гомоморфизмов из группы A в произвольную группу без кручения C.

7. Исследовать радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения. Необходимо получить некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения.

8. Исследовать радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов периодической группы. Необходимо получить некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы.

9. Исследовать радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой группы. Необходимо получить некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы.

Общая методика исследования. Применяются общие методы исследования теории колец, абелевых групп, модулей и некоторые топологические идеи.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. К ним можно отнести следующие:

1. Получено описание нередуцированной абелевой группы, имеющей регулярный центр кольца эндоморфизмов. Найдены необходимые и достаточные условия регулярности центра кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы. Полученные результаты дают некоторое решение поставленной проблемы. Найдены необходимые и достаточные условия регулярности кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы, что является некоторым решением поставленной проблемы.

2. Получено описание нередуцированной абелевой группы, имеющей коммутативное кольцо эндоморфизмов. Выделен класс абелевых групп, в котором исследование смешанных групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов сводится к исследованию групп без кручения с соответствующим кольцом эндоморфизмов, что является некоторым решением поставленной проблемы для данного класса групп.

3. Получено описание абелевых групп с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов из некоторого класса, что является некоторым решением постав-

ленной проблемы для данного класса групп.

4. Получен критерий (вполне) транзитивной редуцированной группы. Найдены некоторые необходимые и достаточные условия транзитивности прямого слагаемого транзитивной группы, что является некоторым продвижением в решении поставленной проблемы.

5. Получено описание сепарабельных прямых произведений произвольных абелевых редуцированных групп.

6. Найдены некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы гомоморфизмов из группы A в произвольную группу без кручения C, что даёт некоторое решение поставленной проблемы.

7. Получено некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения, что даёт некоторое решение первой части поставленной проблемы.

8. Получено некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы, что даёт некоторое решение поставленной проблемы.

9. Получено некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы, что даёт некоторое решение поставленной проблемы.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании абелевых групп, колец и модулей.

Степень достоверности результатов проведённых исследований. Научные положения и выводы полностью обоснованы. Достоверность результатов обеспечиваются: внутренней согласованностью и согласием полученных в диссертации результатов с известными результатами, процитированными в диссертации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на IV Международной алгебраической конференции (Новосибирск, 2000 г.), на Международной конференции «Алгебра и её приложения» (Красноярск, 2002 г.), на

Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.) , на всероссийских симпозиумах (Бийск, 2005 и 2006 гг.), на Международной конференции «Алгебра и её приложения» (Красноярск, 2007 г.), на Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2008 г.), на Международной конференции «Алгебра, логика и приложения» (Красноярск, 2010 г.), на Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2013 г.), на Международном симпозиуме (Москва, 2014 г.), на Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2016 г.), также неоднократно докладывались на заседаниях научного семинара кафедры алгебры Томского государственного университета.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 21 работа [126–146], из них в журналах из списка ВАК — 11 [136–146]. Все результаты, вошедшие в диссертацию, получены автором лично, так и в неразделимом соавторстве. При выполнении всех совместных исследований автор принимал определяющее участие, как в постановке, так и в решении задач.

Краткое содержание работы. Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми. Все понятия и обозначения, которые не поясняются, являются стандартными, их можно найти, например, в монографиях [31, 50, 51].

Глава 1.

В первом параграфе этой главы рассматриваются группы с регулярным центром кольца эндоморфизмов и группы с регулярным кольцом эндоморфизмов. Напомним, что кольцо R называется регулярным, если для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $y \in R$ такой, что $xyx = x$.

Выделим следующие результаты.

Предложение 1.1.1. *Центр кольца эндоморфизмов группы G регулярен тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathrm{C}\left(\mathrm{E}\left(G\right)\right)$ следует, что*

$G = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \ker\,(\alpha)$.

Следствие 1.1.2. *Если кольцо эндоморфизмов группы G регулярно, то центр этого кольца также регулярен.*

Следствие 1.1.3. *Центр кольца эндоморфизмов любого прямого слагаемого группы с регулярным кольцом эндоморфизмов регулярен.*

Следствие 1.1.4. *Центр кольца эндоморфизмов элементарной или делимой группы без кручения регулярен.*

Определение 1.1.1. *Подкольцо B кольца A назовём регулярно разрешимым в A, если для любого $b \in B$ из того, что $b \in bAb$, следует, что $b \in bBb$.*

Следующие две теоремы дают некоторое решение одной из задач проблемы 16 [31].

Теорема 1.1.9. *Для группы G следующие условия справедливы:*

1) *если G — нередуцированная группа, то $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

   a) *G — делимая группа без кручения;*

   b) *$G = A \oplus D$,*
   где A — элементарная группа,
   D — делимая группа без кручения;

2) *если G — редуцированная группа и $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ — регулярное кольцо, то $T\,(G)$ — элементарная группа, $G \,/\, T\,(G)$ — делимая группа и $\bigoplus\limits_{p \in P} T_p\,(G) \subseteq G \subseteq$ $\subseteq \prod\limits_{p \in P} T_p\,(G)$.*

Теорема 1.1.10. *Пусть G — редуцированная группа, то $C\left(\mathrm{E}\left(G\right)\right)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $T\left(G\right)$ — элементарная группа;

2) $C(\mathrm{E}(G))$ изоморфен регулярно разрешимому подкольцу кольца $\mathrm{E}(T(G))$.

Следующая теорема даёт некоторое решение проблемы 7 из [108].

Теорема 1.1.12. *Пусть G — редуцированная группа, то $\mathrm{E}\left(G\right)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $T\left(G\right)$ — элементарная группа;

2) $\mathrm{E}(G)$ изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца $\mathrm{E}(T(G))$.

Во втором параграфе исследуются абелевы группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов. Выделим основные результаты, полученные здесь.

Предложение 1.2.3. *Пусть $G = A\bigoplus B$ — нередуцированная группа, где A — редуцированная, а B — делимая группы.*

Кольцо $\mathrm{E}(G)$ является коммутативным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $B = Q$ или $B = \bigoplus\limits_{p\in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty})$;

2) если $A \neq 0$, то $A = \bigoplus\limits_{p\in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$, причём если

$A = \bigoplus\limits_{p\in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$ *и* $B = \bigoplus\limits_{p\in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty})$, *то* $P(A)\bigcap P(B) = \emptyset$.

Определение 1.2.1.*Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G удовлетворяет условию конечности, если она не содержит ненулевые элементы, у которых p-высота равна бесконечности для всех $p \in P(G)$.*

Определение 1.2.2. *Будем называть смешанную редуцированную группу G с бесконечным числом ненулевых p-компонент psp-группой, если естественное* *вложение*

$$\bigoplus_{p\in P(G)} T_p(G) \to G$$

продолжается до p-чистого вложения

$$G \to \prod_{p\in P(G)} T_p(G).$$

Таким образом, если G — psp-группа, то, отождествляя группу G с её образом при таком вложении, можно считать, что

$$\bigoplus_{p\in P(G)} T_p(G) \subset G \subseteq \prod_{p\in P(G)} T_p(G),$$

где G p-чиста в $\prod\limits_{p\in P(G)} T_p(G)$ для всех $p \in P(G)$.

Заметим также, что понятие p-чистоты (чистоты) эквивалентно здесь понятию p-сервантности (сервантности) подгруппы в группе.

Определение 1.2.3. *Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$, если выполняются следующие условия:*

1) $G = T_p(G) \bigoplus E_p$ для любого $p \in P(G)$;

2) существует семейство дополнений $\{E_p\}_{p\in P}$ группы G, удовлетворяющее условию: если $B = \bigcap\limits_{p\in P(G)} E_p \neq 0$, то существует B-высокая подгруппа A группы G, содержащая $T(G)$, причём для любого простого числа q такого, что $qB \neq B$, следует, что $qA = A$.

Пусть B — подгруппа группы G. Напомним, что подгруппа A группы G называется B-высокой, если $A \cap B = 0$, и для любой подгруппы H группы G такой, что $A \subsetneqq H$, следует, что $H \cap B \neq 0$.

В следующей теореме для абелевых групп из класса $\mathbb{K}$ получено некоторое решение проблемы 15 [31], относящейся к смешанным группам с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Теорема 1.2.4. *Пусть* $G \in \mathbb{K}$. *Кольцо* $\mathrm{E}(G)$ *является коммутативным тогда и только тогда, когда для каждого* $p \in P(G)$ *следует, что* $G = T_p(G) \bigoplus E_p$, $pE_p = E_p$, *где* $T_p(G) \cong Z(p^{k_p})$, $k_p \in \mathbb{N}$, *для каждого* $p \in P(G)$ *подгруппа* E_p *определена однозначно, причём выполняется одно из следующих условий:*

1) если $\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p = 0$, *то группа* G *является psp-группой;*

2) если $\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p \neq 0$, *то* $G = A \bigoplus (\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p)$, *где*

a) если A *— смешанная группа, то* A *удовлетворяет условиям конечности и является psp-группой;*

b) $qA = A$ *для любого простого числа* q *такого, что* $q(\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p) \neq$ $\neq \bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p$;

c) $\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p$ *— группа без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов.*

Следующее предложение показывает, что класс $\mathbb{K}$, в котором решается поставленная задача, является довольно широким. В частности, он содержит все смешанные редуцированные расщепляемые группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов [31, следствие 19.5], все группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов, описанные в [31, теорема 19.4].

Предложение 1.2.5. *Если* G *— редуцированная смешанная группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, для которой выполняется одно из следующих условий:*

1) G *— расщепляемая группа;*

2) G *удовлетворяет условию конечности, то* $G \in \mathbb{K}$.

В третьем параграфе этой главы рассматриваются абелевы группы с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов.

Определение 1.3.1. *Кольцо R называется самоинъективным справа (слева), если модуль R_R (${}_RR$) инъективен. Кольцо R, самоинъективное справа и слева, называется самоинъективным .*

Определение 1.3.2. *Будем говорить, что группа A принадлежит классу $\mathbb{S}$, если $\mathrm{C}(\,\mathrm{E}(A))_{\mathrm{C}(\,\mathrm{E}(A))}$ — существенный подмодуль модуля $\mathrm{E}(A)_{\mathrm{C}(\,\mathrm{E}(A))}$.*

Пусть M — правый R-модуль. Напомним, что подмодуль L модуля M называется *существенным* в M, если для любого ненулевого подмодуля H из M следует, что $L \cap H \neq 0$.

Основным результатом в данном параграфе является следующая теорема, которая даёт некоторое решение одной из задач проблемы 16 из [31] для групп из класса $\mathbb{S}$.

Теорема 1.3.3. *Для группы A, принадлежащей классу $\mathbb{S}$, следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{C}(\,\mathrm{E}(A))$ *— самоинъективное кольцо;*

2) a) $T_p(A) = \mathbb{Z}(p^{n_p})$ *для каждого* $p \in P(A)$, *где* $n_p \in \mathbb{N}$;

b) если A — нередуцированная группа, то $A = Q \bigoplus T(A)$;

c) если A — редуцированная группа, то A является сервантной, вполне характеристической подгруппой в $\prod\limits_{p \in P(A)} T_p(A)$.

В следующем примере приводится группа, не принадлежащая классу $\mathbb{S}$, с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов.

Пример 2. Рассмотрим группу

$$A = Z(2) \oplus Z(2),$$

тогда

$$\mathrm{E}(A) \cong \begin{pmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix},$$

где Z_2 — кольцо классов вычетов по модулю 2. Отождествляя кольцо $\mathrm{E}(A)$ с данным кольцом матриц, получим, что

$$\mathrm{E}(A)_S = S_S \oplus T_S,$$

где

$$S = \mathrm{C}(\,\mathrm{E}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

и

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

причём S — самоинъективный центр кольца эндоморфизмов группы A.

В четвёртом параграфе этой главы рассматриваются (вполне) транзитивные, эндотранзитивные и слабо транзитивные группы.

Напомним, что группа G называется *(вполне) транзитивной*, если для каждой пары элементов $a, b \in G$ таких, что $(H(a) \leq H(b))$ $H(a) = H(b)$, следует существование $(\varphi \in \mathrm{E}(G))$ $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, переводящего элемент a в элемент b.

Рассмотрим связанные с ненулевым элементом $a \in G$ вполне характеристические подгруппы группы G:

$$\mathrm{bfc}(a) = \{b \in G \,|\, H(a) \leq H(b)\},$$

$$\mathrm{lfc}(a) = \{b \in G \,|\, \exists \varphi \in \mathrm{E}(G), \varphi(a) = b\}.$$

Далее доказываются некоторые эквивалентные условия вполне транзитивности группы G.

Предложение 1.4.1. *Для редуцированной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — вполне транзитивная группа;

2) $\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$;

3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм $\psi_a : \mathrm{End}(G) \longrightarrow \mathrm{bfc}(a)$, действующий по правилу $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{End}(G)$.

По аналогии с вполне характеристическими подгруппами группы G, связанными с ненулевым элементом $a \in G$, рассмотрим характеристические подмножества группы G :

$$\mathrm{bc}(a) = \left\{ b \in G \mid H(b) = H(a) \right\}$$

и

$$\mathrm{lc}(a) = \left\{ b \in G | \ \exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \varphi(a) = b \right\}.$$

Здесь под характеристическим подмножеством группы G понимается подмножество, замкнутое относительно действия автоморфизмов группы G.

Замечание 1.4.2. Для произвольного ненулевого элемента $a \in G$ существует следующая связь между вышеопределёнными вполне характеристическими подгруппами и характеристическими подмножествами:

$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a) \text{ и } \mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a).$$

Далее термин «слабо транзитивная группа», введённый для групп без кручения в [96], определим для произвольной абелевой группы.

Определение 1.4.2. *Группу G будем называть слабо транзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$ из существования эндоморфизмов $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(G)$ таких, что $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = x$, следует существование $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ такого, что $\alpha(x) = y$.*

Для некоторой характеризации слабо транзитивных групп нам потребуется следующее подмножество, определяемое для любого ненулевого элемента $a \in G$:

$$\mathrm{weak}(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi,\, \psi \in \mathrm{E}(G),\, \varphi(a) = b,\, \psi(b) = a\}.$$

Замечание 1.4.3. Легко проверяется, что

$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{weak}(a) \subseteq \mathrm{bc}(a) \text{ и } \mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{weak}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a)$$

для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Лемма 1.4.2. *Группа G слабо транзитивна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{weak}(a) = \mathrm{lc}(a)$ *для любого ненулевого элемента $a \in G$.*

Поскольку всякая транзитивная группа является слабо транзитивной, то представляет интерес нахождение такого дополнительного условия, при котором слабо транзитивная группа будет транзитивной. В следующем утверждении предлагается такое условие.

Предложение 1.4.3. *Для группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — транзитивная группа;

2) $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$ *для любого ненулевого элемента $a \in G$;*

3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение $\psi_a : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{bc}(a)$, *действующее по правилу* $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$;

4) G — слабо транзитивная группа и $\mathrm{weak}(a) = \mathrm{bc}(a)$ *для любого ненулевого элемента $a \in G$.*

Определение 1.4.2. *Группа G называется эндотранзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$ таких, что $H(x) = H(y)$, следует существование* $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ *такого, что $\varphi(x) = y$.*

В монографии [31] сформулирована проблема 44: «Существуют ли слабо транзитивные группы без кручения (здесь под термином «слабая транзитивность» понимается термин «эндотранзитивность». — В. М.), не являющиеся ни транзитивными, ни вполне транзитивными?». Замечание 1.4.3 и следующая лемма дают надежду, что такие группы могут существовать.

Лемма 1.4.4. *Редуцированная группа G эндотранзитивна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a)$.

Замечание 1.4.5. Из предложений 1.4.1 и 1.4.4, замечания 1.4.3 и леммы 1.4.4 следует хорошо известный результат, что если группа (вполне) транзитивна, то она эндотранзитивна.

Распространим понятие, введённое А. Корнером для p-групп, на произвольные редуцированные абелевы группы. При этом, в отличие от него, считаем, что для любого $a \in A$ высотная матрица $H(a)$ берётся в подгруппе A группы G.

Определение 1.4.3. *Пусть Φ — подкольцо с единицей кольца $\mathrm{E}(G)$ и A есть Φ-инвариантная подгруппа редуцированной абелевой группы G. Будем говорить, что Φ действует (вполне) транзитивно на A или подгруппа A (вполне) транзитивна над Φ, если для любых $x, y \in A$ таких, что $(H(x)_A \leq H(y)_A)$ $H(x)_A = H(y)_A$, следует существование (элемента $\varphi \in \Phi$) обратимого элемента $\varphi \in \Phi$ такого, что $\varphi(x) = y$.*

В следующей теореме даются некоторые эквивалентные условия (вполне) транзитивного действия кольца $\mathrm{E}(G)$ на произвольной редуцированной группе G.

Теорема 1.4.6. *Редуцированная группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и произвольного простого числа p.*

Следствие 1.4.7. *Для редуцированной p-группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — (вполне) транзитивная группа;

2) $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^{\omega}G$ (в смысле Корнера);

3) $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^{\sigma}G$ для любого порядкового числа σ (в смысле определения 1.4.3).

Введём следующее понятие.

Определение 1.4.4. *Пусть $G = A \oplus B$. Будем говорить, что автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G, если для любого $a \in A$ и для любого $x \in \mathrm{bc}(a)$ из существования $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ такого, что $\varphi\rho(a) = \rho(x)$, следует существование $\psi \in \mathrm{Aut}(A)$ такого, что $\pi\varphi\rho(a) = \psi(a)$, где $\rho : A \to G$ и $\pi : G \to A$ — канонические вложение и проекция соответственно.*

В следующей теореме получены некоторые необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой, что даёт некоторое продвижение в решении проблемы 41 из [31].

Теорема 1.4.8. *Прямое слагаемое A транзитивной группы G является транзитивной группой тогда и только тогда, когда автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G.*

В пятом параграфе этой главы получено описание сепарабельных прямых произведений произвольных редуцированных групп.

Теорема 1.5.2. *Прямое произведение редуцированных групп G_i, $i \in I$, является сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) G_i, $i \in I$, — сепарабельные группы;

2) существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что группы $T(G_i)$, $i \in I \setminus J$, в совокупности ограничены;

3) $\prod\limits_{i \in I \setminus J} (G_i/T(G_i))$ — сепарабельная группа.

Учитывая результаты работы [64], можно уточнить формулировку предыдущей теоремы.

Следствие 1.5.3. *Прямое произведение произвольных редуцированных групп G_i, $i \in I$, является сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) G_i, $i \in I$, — сепарабельные группы;

2) существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что группы $T(G_i)$, $i \in I \setminus J$, в совокупности ограничены;

3) группа $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, где $\Lambda = I \setminus J$, $A_\lambda \cong G_\lambda/T(G_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяет следующим условиям:

a) не существует бесконечной, строго убывающей цепочки типов $\tau_{\lambda(n)} \in \tau(A_{\lambda(n)})$, где $\tau(A_{\lambda(n)})$ — множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы $A_{\lambda(n)}$, и все $\lambda(n)$ различны для разных n;

b) не существует бесконечной последовательности типов $\tau_{\lambda(n)} \in \tau(A_{\lambda(n)})$, в которой типы попарно несравнимы между собой, а все $\lambda(n)$ различны для разных n;

c) предположим, что $\lambda \in \Lambda$ и $\tau_\lambda \in \tau(A_\lambda)$, тогда существуют конечные подмножества Λ_o из Λ и P_o из множества всех простых чисел P, для которых выполняется следующее условие:
если $\tau_\lambda \leq \tau_\mu$, где $\tau_\mu \in \tau(A_\mu)$, тогда
$p^\infty | \tau_\mu$, если $p | \tau_\lambda$ всякий раз, когда $\mu \in \Lambda \setminus \Lambda_o$ и $p \in P \setminus P_o$.

Следующая теорема отражает влияние свойства вполне транзитивности на сепарабельность прямого произведения редуцированных групп.

Напомним, что редуцированная группа G называется *вполне транзитивной*, если для каждой пары элементов $a, b \in G$ таких, что $H(a) \leq H(b)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, переводящего элемент a в элемент b.

Теорема 1.5.4. *Редуцированная группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ является вполне транзитивной сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) G_i — сепарабельная группа для любого $i \in I$;

2) для любых однородных прямых слагаемых без кручения A и B из G таких, что $t(A) \neq t(B)$, следует, что $\pi(A) \bigcap \pi(B) = \emptyset$;

3) $G = \bigoplus\limits_{i\in J_1} G_i \bigoplus \bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i \bigoplus \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \bigoplus \prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$,
где $J_1,\ J_2$ — конечные множества такие, что $J_1 \subset I,\ J_2 \subset I \setminus J_1$,
$I' = I \setminus (J_1 \cup J_2)$;
$\prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$ — ограниченная группа;
$A_i \cong G_i/T(G_i)$ для любого $i \in I \setminus J_1$;
$\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}\ (j = \overline{1,\ k})$ — однородные группы без кручения, причём если $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ для некоторого $j = \overline{1,\ k}$, то $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ имеет идемпотентный тип;
$\bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i$ — однородно разложимая группа без кручения.

В шестом параграфе этой главы получены некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(A,\, C)$ для группы A и произвольной группы без кручения C.

В следующих двух утверждениях даётся некоторое решение проблемы 2 [14].

Лемма 1.6.1 *Пусть C — ненулевая группа без кручения. Группа*

$$\mathrm{Hom}(A,\, C) = 0$$

тогда и только тогда, когда группа A *удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) A — *периодическая группа;*

2) A — *непериодическая группа,*
   C — *редуцированная группа, причём*
   либо A — *делимая группа,*
   либо $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, *если* A — *непериодическая, неделимая группа.*

Теорема 1.6.2. *Пусть* C — *ненулевая редуцированная группа без кручения и* A — *непериодическая, неделимая группа. Группа*

$$\mathrm{Hom}(A, C) = 0$$

тогда и только тогда, когда для редуцированной части $A' \neq 0$ *группы* A *выполняется:*

1) *если* $T(A') = 0$, *то справедливо одно из условий:*

   a) A' *не содержит прямого слагаемого, изоморфного* $\mathbb{Z}$, *и выполняется одно из условий:*

   a_1) *для любого* $f \in \mathrm{Hom}(A', C)$ *существует* $0 \neq c \in C$ *такой, что* $\mathrm{im}(f) \subseteq < c >$;

   a_2) *для любого гомоморфизма* $\beta : A' \to C$ *найдётся гомоморфизм* $\alpha : A' \to F_{\mathbf{m}}$ *такой, что* $\pi\alpha = \beta$, *т. е. следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathbf{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

   коммутативна, где $F_{\mathbf{m}}$ — *свободная группа и* π — *эпиморфизм;*

   b) *для любого гомоморфизма* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A', C)$ *следует:*

   b_1) *существует сервантная подгруппа* C' *ранга 1 типа* $t(C')$ *в группе* C, *содержащая* $\mathrm{im}(\varphi)$;

   b_2) *для любого элемента* $a \in A'$ *такого, что* $t(a) < t(C')$, *следует, что* $a \in \ker(\varphi)$;

b_3) группа A' не содержит прямого слагаемого ранга 1, изоморфного C';

2) если $T(A') \neq 0$, то факторгруппа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию 1).

Глава 2. Напомним некоторые понятия.

Абелева группа A называется *сепарабельной*, если любую её конечную систему элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое S группы A.

Абелева группа называется *вполне разложимой* , если она является прямой суммой абелевых групп, каждая из которых изоморфна подгруппам групп Q или $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Далее под радикалом Джекобсона $\mathrm{J}(\mathrm{E}(G))$ кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(G)$ группы G будем понимать следующую его характеризацию:

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, \beta \in \mathrm{E}(G),\ (1 - \alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(G)\}$$

[69, гл. 4, §15, теорема 15.3].

В первом параграфе этой главы исследуется радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения.

Пусть B — группа без кручения, D — делимая часть группы B. Обозначим через

$$H'(B) = \left\{ \varphi \in \mathrm{E}(B) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \text{ если } x \in D, \\ h_p(\varphi x) > h_p(x), \forall p \in \pi(B), \text{ если } x \in B \setminus D \end{array} \right\}$$

идеал кольца $\mathrm{E}(B)$.

Рассмотрим также для редуцированной группы без кручения G множество

$$\begin{aligned} TF(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \,|\, \forall x \in G,\ \forall \beta \in \mathrm{E}(G) \\ \text{и } y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N}, \\ \text{последовательность } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ сходится}\}. \end{aligned}$$

Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ рассматривается здесь относительно $\mathbb{Z}$-адической топологии группы G, которая определяется аналогично p-адической топологии. Разница лишь в том, что множество индексов $\mathbb{N}$ упорядочено так, что $n \leq m$ тогда и только тогда, когда n делит m. Естественно также, что вместо подгрупп p^nG берутся подгруппы nG.

Напомним, что последовательность $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ элементов группы G сходится к пределу $g \in G$ в p-адической топологии группы G, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $g - g_i \in p^nG$, как только $i \geq k$.

Предложение 2.1.1. *Пусть G — редуцированная группа без кручения, тогда*

$$H'(G)\bigcap TF(G) \subseteq \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)).$$

Напомним, что группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип, называется *однородной*.

Теорема 2.1.3. *Пусть редуцированная группа G удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) G — однородная вполне транзитивная группа;

2) $r_p(G) \leq 1$ для всякого простого числа p, тогда

$$H'(G)\bigcap TF(G) = \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)).$$

Следствие 2.1.4. *Пусть редуцированная группа без кручения G является или однородной алгебраически компактной, или однородной сепарабельной группой. Тогда*

$$H'(G)\bigcap TF(G) = \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)).$$

В следствии 2.1.4 показывается, в частности, описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения, что является некоторым решением первой части проблемы 18 б) из [31].

Во втором параграфе данной главы рассматривается радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой периодической группы. Можно отметить следующие наиболее важные результаты.

Далее для всякого порядкового числа σ под подгруппой $p^\sigma G[p]$ группы G подразумевается подгруппа

$$p^\sigma G \bigcap G[p].$$

Ниже показывается, что лемма [119, лемма 13.1], доказанная Р. С. Пирсом для сепарабельных p-групп, будет справедлива и в более общем случае.

Предложение 2.2.1. *Пусть G — редуцированная p-группа и $\alpha \in \mathrm{E}(G)$. Для того чтобы $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\ker(\alpha) \bigcap G[p] = 0 \text{ и } \alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$$

для любого порядкового числа σ.

Р. С. Пирс в [119] для редуцированной p-группы G без элементов бесконечной p-высоты (т. е. для сепарабельной p-группы) вводит идеал

$$H(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, x \in G[p],\, h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\alpha x)\}.$$

Здесь $h_p(x) < \infty$ означает, что $h_p(x) = k$ для некоторого неотрицательного целого числа k.

Пусть G — редуцированная p-группа. Введём по аналогии с идеалом $H(G)$ идеал

$$H^*(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, 0 \neq x \in G[p] \Rightarrow h^*_p(x) < h^*_p(\alpha x)\}.$$

В следующем утверждении рассматривается более общий случай, чем в [31, предложение 20.2].

Лемма 2.2.2. *Пусть G — редуцированная p-группа, тогда*

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) \subseteq H^*(G).$$

Приведём лемму, доказанную Р. С. Пирсом в [119, лемма 14.5].

Лемма 2.2.3. *Пусть G — сепарабельная p-группа. Равенство*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = H(G)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\begin{aligned} &\textit{если } x \in G[p], \alpha \in H(G) \textit{ и} \\ &y_n = x + \alpha(x) + \ldots + \alpha^{n-1}(x), \\ &\textit{то существует } y \in G \textit{ такой, что} \\ &h_p(y - y_n) \to \infty \textit{ при } n \to \infty. \end{aligned} \tag{$\circledast$}$$

Последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, введённая Р. С. Пирсом в данной лемме, как будет показано ниже, играет существенную роль при описании элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы.

Для сепарабельной p-группы G рассмотрим множество

$$\begin{aligned} S_p(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid &\forall x \in G[p], \forall \beta \in \mathrm{E}(G) \text{ и} \\ &y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N}, \\ &\text{последовательность } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ сходится}\}. \end{aligned}$$

Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ рассматривается здесь в p-адической топологии группы G.

В следующей теореме даётся некоторое решение проблемы 17 [31] для сепарабельных p-групп.

Теорема 2.2.4. *Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы G имеет вид*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = S_p(G) \bigcap H(G).$$

Заметим, что если G — неограниченная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических p-групп, то $\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = (S_p(G) \bigcap H(G)) \subsetneqq H(G)$ [31, следствие 20.6].

Из леммы 14.5 [119] и теоремы 2.2.4 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2.5. *Для сепарабельной p-группы G следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = H(G)$;

2) если $x \in G[p]$, $\alpha \in H(G)$ и $y_n = x + \alpha(x) + \ldots + \alpha^{n-1}(x)$, то существует $y \in G$ такой, что $h(y - y_n) \to \infty$ при $n \to \infty$;

3) $H(G) \subseteq S_p(G)$.

Пусть G — делимая p-группа. Рассмотрим идеал в кольце эндоморфизмов этой группы $L_p(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid G[p] \subseteq \ker(\alpha)\}$.

Предложение 2.2.7. *Пусть G — делимая p-группа, тогда*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = L_p(G).$$

Следствие 2.2.8. *Пусть G — делимая периодическая группа, тогда*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = \prod_{p \in P(G)} L_p(T_p(G)).$$

Рассмотрим основной результат, полученный в третьем параграфе этой главы, для этого напомним некоторые определения.

Пусть A — некоторая p-группа, тогда с ней можно связать также следующий идеал её кольца эндоморфизмов:

$$F(A) = \{\delta \in \mathrm{E}(A) \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0,\ \delta p^k A[p] = 0\}.$$

Пусть теперь C — некоторая вполне разложимая группа без кручения и

$$C = \bigoplus_{t \in \Omega(C)} C_t$$

— её каноническое разложение, где $\Omega(C)$ есть множество типов всех прямых слагаемых группы C ранга 1, C_t — однородные компоненты группы C.

Обозначим через $F'(C)$ левый идеал кольца $\mathrm{E}(C)$, состоящий из эндоморфизмов $\alpha \in \mathrm{E}(C)$ таких, что $r(\alpha(C_t)) < \infty$ для всех $t \in \Omega(C)$, причём если группа C_t не почти делима, то $\alpha(C_t) = 0$. Напомним, что группа без кручения G называется *почти делимой*, если $1 \leq |\pi(G)| < \aleph_0$.

Обозначим через $N(G)$ сумму всех идеалов кольца $\mathrm{E}(G)$, состоящих из локально нильпотентных эндоморфизмов группы G. Эндоморфизм α группы G называется *локально нильпотентным*, если для всякого элемента $a \in G$ существует натуральное число n, зависящее от a, что $\alpha^n(a) = 0$.

В следующей теореме даётся некоторое решение проблемы 19 [31].

Теорема 2.3.2. *Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ — смешанная вполне разложимая группа, где $G_1 = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ — вполне разложимая периодическая группа, $G_2 = \bigoplus\limits_{j \in J} B_j$ — вполне разложимая группа без кручения. Тогда*

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) = (\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) \times \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_2))) \oplus \mathrm{Hom}(G_2,\ G_1),$$

где

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) = \prod_{p \in P} (H(T_p(G_1)) \bigcap F(T_p(G_1)))$$

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_2)) = (H'(G_2) \bigcap F'(G_2)) + N(G_2)$$

группа $\mathrm{Hom}(G_2,\ G_1)$ изоморфна подгруппе группы $\prod\limits_{i \in I} A_i^{J_i}$, $J_i \subseteq J$, причём $B_\alpha \neq p_i B_\alpha$ для любого $\alpha \in J_i$ и $B_\alpha = p_i B_\alpha$ для любого $\alpha \in J \setminus J_i$, $o(A_i) = p_i^{k_i}$, $i \in I$, $p_i \in P$.

Структура и объём работы

Диссертация изложена на 161 странице и состоит из введения; двух глав, включающих 9 параграфов; заключения; списка условных обозначений, символов, сокращений; списка терминов; списка литературы, который содержит 146 наименований.

Глава 1

Абелевы группы, их эндоморфизмы и гомоморфизмы

1.1 О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы

Предложение 1.1.1. *Центр кольца эндоморфизмов группы G регулярен тогда и только тогда, когда для любого*

$$\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$$

следует, что

$$G = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ — регулярное кольцо. Тогда для любого

$$\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$$

существует

$$\beta \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$$

со свойством

$$\alpha\beta\alpha = \alpha.$$

Справедливы включения

$$\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha\beta\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\alpha)$$

и

$$\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta\alpha) = \ker(\alpha).$$

Откуда
$$\mathrm{im}\,(\alpha) = \mathrm{im}\,(\alpha\beta)$$
и
$$\ker(\alpha) = \ker(\beta\alpha) = \ker(\alpha\beta).$$
Так как $\alpha\beta$ — идемпотент кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, то
$$G = \mathrm{im}\,(\alpha\beta) \oplus \ker(\alpha\beta) = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \ker(\alpha).$$

Обратно. Допустим, что для любого
$$0 \neq \alpha \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$$
следует, что
$$G = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \ker(\alpha).$$
Тогда $\alpha|_{\mathrm{im}\,(\alpha)}$ является автоморфизмом на $\mathrm{im}\,(\alpha)$. Следовательно, существует
$$\beta \in \mathrm{E}\,(G),$$
аннулирующий $\ker(\alpha)$ и обратный к $\alpha|_{\mathrm{im}\,(\alpha)}$ на $\mathrm{im}\,(\alpha)$.

Покажем, что
$$\beta \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)).$$
Действительно, пусть
$$\varphi \in \mathrm{E}\,(G)$$
и
$$x \in G,$$
тогда
$$x = x_1 + x_2,$$
где
$$x_1 \in \mathrm{im}\,(\alpha),\ \ x_2 \in \ker(\alpha).$$
Следовательно,
$$(\varphi\beta)\ (x) = \varphi\ (\beta\ (x_1 + x_2)) = \varphi\ (\beta\ (x_1)).$$
Так как
$$x_1 \in \mathrm{im}\,(\alpha),$$

то существует

$$a_1 \in \operatorname{im}(\alpha)$$

такой, что

$$\alpha|_{\operatorname{im}(\alpha)}(a_1) = x_1.$$

Поскольку

$$\operatorname{im}(\alpha) \text{ и } \ker(\alpha)$$

— вполне характеристические подгруппы в G, то

$$\begin{aligned}\varphi\left(\beta\left(x_1\right)\right) &= \varphi\left(\beta\left(\alpha|_{\operatorname{im}(\alpha)}\left(a_1\right)\right)\right) = \varphi\left(a_1\right) = \\ &= (\beta\alpha)\left(\varphi\left(a_1\right)\right) = \beta\left(\varphi\left(\alpha\left(a_1\right)\right)\right) = \\ &= \beta\left(\varphi\left(x_1\right)\right) = \beta\left(\varphi\left(x_1\right)\right) + \beta\left(\varphi\left(x_2\right)\right) = \\ &= (\beta\varphi)(x).\end{aligned}$$

Пусть

$$a \in G,$$

тогда

$$a = a_1 + a_2,$$

где

$$a_1 \in \operatorname{im}(\alpha),\ \ a_2 \in \ker(\alpha).$$

Следовательно,

$$(\alpha\beta\alpha)(a) = (\alpha\beta\alpha)(a_1) = \alpha(a_1) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2) = \alpha(a).$$

Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально.

$\square$

Следствие 1.1.2. *Если кольцо эндоморфизмов группы G регулярно, то центр этого кольца также регулярен.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{E}(G)$ — регулярное кольцо. Тогда для любого

$$\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$$

существует

$$\beta \in \mathrm{E}(G)$$

со свойством

$$\alpha\beta\alpha = \alpha.$$

Поскольку

$$\mathrm{im}\,(\alpha) = \mathrm{im}\,(\alpha\beta),\ \ker\,(\alpha) = \ker\,(\beta\alpha) = \ker\,(\alpha\beta)$$

и так как $\alpha\beta$ — идемпотент кольца $\mathrm{E}\,(G)$, то

$$G = \mathrm{im}\,(\alpha\beta) \oplus \ker\,(\alpha\beta) = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \ker\,(\alpha).$$

Тогда по предыдущему предложению $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ — регулярное кольцо.

□

Следствие 1.1.3. *Центр кольца эндоморфизмов любого прямого слагаемого группы с регулярным кольцом эндоморфизмов регулярен.*

Доказательство. Следует из [31] и следствия 1.1.2.

□

Следствие 1.1.4. *Центр кольца эндоморфизмов элементарной или делимой группы без кручения регулярен.*

Доказательство. Так как кольцо эндоморфизмов элементарной или делимой группы без кручения регулярно [31], то по следствию 1.1.2 получаем необходимое утверждение.

□

Лемма 1.1.5. *Пусть $G = A \oplus B$, где A, B — вполне характеристические подгруппы группы G. Тогда $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(A))$, $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(B))$ — регулярные кольца.*

Доказательство. Покажем, например, что $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(A))$ — регулярное кольцо. Действительно, так как вполне характеристические подгруппы группы G являются в точности подмодулями $\mathrm{E}\,(G)$-модуля G, а для кольца эндоморфизмов этого модуля выполняется равенство

$$\mathrm{End}_{\,\mathrm{E}\,(G)}\, G = \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)),$$

то разложению $\mathrm{E}\,(G)$-модуля

$$G = A \oplus B$$

соответствует разложение его кольца эндоморфизмов

$$\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)) = \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(A)) \oplus \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(B)).$$

Таким образом, всякий эндоморфизм

$$\alpha \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(A))$$

можно рассматривать как эндоморфизм

$$\alpha^* \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)),$$

аннулирующий подгруппу B. Из регулярности кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ следует, что

$$G = \ker(\alpha^*) \oplus \mathrm{im}\,(\alpha^*).$$

Поскольку $\mathrm{im}\,(\alpha^*) \subseteq A$ и $\alpha = \alpha^*|_A$, то

$$\begin{aligned} A = A \bigcap G = A \bigcap (\mathrm{im}\,(\alpha^*) \oplus \ker(\alpha^*)) = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \\ \oplus\, (A \bigcap \ker(\alpha^*)) = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus (A \bigcap (\ker(\alpha) \oplus B)) = \\ = \mathrm{im}\,(\alpha) \oplus \ker(\alpha). \end{aligned}$$

Обратно. Поскольку

$$\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)) = \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(A)) \oplus \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(B)),$$

то кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ регулярно как произведение регулярных колец

$$\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(A)) \times \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(B)).$$

□

В следующем утверждении существенную роль будут играть идеализации бимодулей. Напомним это понятие.

Пусть R и S — кольца, M — R-S-бимодуль. Идеализацией бимодуля M называется кольцо, состоящее из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$ с обычными для матриц операциями сложения и умножения. Обозначим построенное кольцо символом

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

или одной буквой K. Будем отождествлять естественным образом кольца R и S с

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

соответственно, произведение

$$R \times S \ \text{— с матрицей } \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

и бимодуль

$$M \ \text{— с матрицей } \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В целях экономии места диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

записываем в виде вектора (r, s). Имеются два канонических сюръективных гомоморфизма колец:

$$K \to R, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to r,$$

$$K \to S, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to s.$$

Напомним следующую лемму, доказанную в [27].

Лемма 1.1.6 (Крылов, Классен). *Центр* $\mathrm{C}(K)$ *идеализации* K R-S-*бимодуля* M *состоит из всех диагональных матриц* $(r,\ s)$, *где* $r \in \mathrm{C}(R)$, $s \in \mathrm{C}(S)$ *и* $rm = ms$ *для каждого* $m \in M$.

Если A — левый R-модуль, то его аннулятор будем обозначать через $\mathrm{Ann}_R(A)$. Из данной леммы следует, что $\mathrm{C}(K)$ является подкольцом в

$$\mathrm{C}(R) \times \mathrm{C}(S)$$

и так же получается, что

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)}(M), \quad \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)}(M) \subseteq \mathrm{C}(K).$$

Учитывая замечание перед леммой 1.1.6, мы имеем кольцевые гомоморфизмы:

$$f: \ \mathrm{C}(K) \to \mathrm{C}(R), \ (r, \ s) \to r$$

и

$$g: \mathrm{C}(K) \to \mathrm{C}(S), \ (r, \ s) \to s.$$

Аннуляторы

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)}(M)$$

и

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)}(M)$$

остаются на месте при действии гомоморфизмов f и g соответственно. В частности,

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)}(M) \subseteq \mathrm{im}(f),$$

$$\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)}(M) \subseteq \mathrm{im}(g).$$

Приведем еще один результат из [27], на который будем ссылаться в дальнейшем.

Лемма 1.1.7 (Крылов, Классен). *В принятых обозначениях*

1) $\ker(f) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(S)}(M)$ *и* $\ker(g) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}(R)}(M)$;

2) если M — точный $\mathrm{C}(S)$*-модуль, то f — мономорфизм, если же M — точный* $\mathrm{C}(R)$*-модуль, то g — мономорфизм.*

Рассматривая кольца эндоморфизмов групп, мы так же можем получить идеализацию бимодуля в следующей ситуации. Пусть G — прямая сумма двух групп

$$G = B \oplus A,$$

причём B — вполне характеристическое слагаемое, т. е.

$$\mathrm{Hom}\,(B,\ A) = 0.$$

Группа гомоморфизмов

$$\mathrm{Hom}\,(A,\ B)$$

стандартным способом превращается в $\mathrm{E}\,(B)$-$\mathrm{E}\,(A)$-бимодуль. Следовательно, можно записать идеализацию этого бимодуля:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}\,(B) & \mathrm{Hom}\,(A,\ B) \\ 0 & \mathrm{E}\,(A) \end{pmatrix}.$$

Поскольку известно, что кольцо $\mathrm{E}\,(G)$ естественным образом отождествляется с данным кольцом матриц [51, гл. XV, §106, теорема 106.1], то кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}\,(G)$ можно считать идеализацией $\mathrm{E}\,(B)$-$\mathrm{E}\,(A)$-бимодуля

$$\mathrm{Hom}\,(A,\ B).$$

Предложение 1.1.8. *Пусть*

$$G = B \oplus A,$$

где A — редуцированная непериодическая группа; B — делимая группа без кручения. Тогда центр кольца эндоморфизмов группы G можно отождествить с подкольцом поля Q, порожденным 1 и всеми числами $1/p$ такими, что

$$p\,G = G.$$

Доказательство. Пусть

$$G = B \oplus A,$$

где A и B удовлетворяют условию предложения, причём $B \neq 0$. Из

$$\mathrm{Hom}\,(B,\ A) = 0$$

заключаем, что кольцо $\mathrm{E}\,(G)$ представляет собой идеализацию $\mathrm{E}\,(B)$-$\mathrm{E}\,(A)$-бимодуля

$$\mathrm{Hom}\,(A,\ B).$$

Покажем, что

$$\mathrm{Hom}\,(A,\ B)$$

— точный $\mathrm{E}\,(A)$-модуль. Допустим, напротив, что

$$\mathrm{Hom}\,(A,\ B)\alpha = 0$$

для какого-то

$$0 \neq \alpha \in \mathrm{E}\,(A).$$

Нетрудно показать, что существует элемент $a \in A$ такой, что $\circ(a) = \infty$ и $\alpha\,(a) \neq$ $\neq 0$.

Пусть $0 \neq b \in B$. Так как высотная матрица элемента $\alpha(a)$ в группе A меньше высотной матрицы элемента b в группе B, то существует

$$\varphi \in \mathrm{Hom}\,(A,\ B)$$

такой, что

$$\varphi\,(\alpha(a)) = b.$$

Поскольку $b \neq 0$, то $\varphi\alpha \neq 0$, что противоречит допущению. Таким образом,

$$\mathrm{Hom}\,(A,\ B)$$

— точный $\mathrm{E}\,(A)$-модуль. По лемме 1.1.7 кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ вкладывается в кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(B))$, изоморфное Q.

Покажем, что кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ можно отождествить с подкольцом поля Q. Поскольку все натуральные числа принадлежат $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, то для этого отождествления достаточно показать, что если какое-то рациональное число вида

$$\frac{1}{q} \in \mathrm{im}\,(\varphi),$$

где φ — изоморфизм кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ в поле Q, то найдётся эндоморфизм из $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, который действует на элементах группы G как умножение на дробь $\frac{1}{q}$. Пусть в $\mathrm{im}\,(\varphi)$ разрешимо уравнение $qx = 1$ (где q — простое число), т. е. существует $\beta \in \mathrm{im}\,(\varphi)$ такое, что $q\beta = 1$. Поскольку

$$\varphi\,(\alpha) = \beta$$

для некоторого

$$\alpha \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)),$$

то это означает, что α — решение уравнения

$$qy = 1$$

в кольце $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$. Тогда для любого

$$g \in G,\ \alpha(g) = (\frac{1}{q}q)\ (\alpha(g)) = \frac{1}{q}(q\alpha)(g) = \frac{1}{q}(g).$$

Следовательно, элементы центра представляют умножения на рациональные числа m/n. При этом ясно, что $nG = G$.

Наоборот, если $nG = G$, то умножение группы G на число m/n лежит в $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$. Получили, что центр $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ отождествляется с подкольцом поля Q, указанным в предложении.

□

В следующих двух теоремах даётся некоторое описание абелевых групп, имеющих регулярный центр кольца эндоморфизмов.

Теорема 1.1.9. *Для группы G следующие условия справедливы:*

1) *Если G — нередуцированная группа, то $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

   a) *G — делимая группа без кручения;*

   b) *$G = A \oplus D$,*
   где A — элементарная группа, а
   D — делимая группа без кручения.

2) *Если G — редуцированная группа и $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ — регулярное кольцо, то $T(G)$ — элементарная группа,*
   $G\ /\ T(G)$ — делимая группа и

$$\bigoplus_{p\in P} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p\in P} T_p(G).$$

Доказательство. 1) Пусть

$$G = A \oplus D,$$

где A — редуцированная, $0 \neq D$ — делимая группы. Допустим, что

$$T\,(G) = 0.$$

Пусть n — произвольное натуральное число и поскольку

$$n \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)),$$

то из регулярности $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ следует, что

$$G = \mathrm{im}\,(n) \;\oplus\; \ker\,(n).$$

По предположению G — группа без кручения, поэтому

$$\ker\,(n) = 0$$

и

$$G = \mathrm{im}\,(n) = nG,$$

т. е. G — делимая группа без кручения.

Пусть

$$T\,(G) \neq 0.$$

Тогда умножение на фиксированное простое число p является эндоморфизмом из $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, ядро которого равно $T_p\,(G)\,[p]$. Из регулярности кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ следует, что $T_p\,(G)\,[p]$ выделяется прямым слагаемым, но это возможно только, если $T_p\,(G)$ совпадает с $T_p\,(G)\,[p]$. Следовательно, $T\,(G)$ — элементарная группа.

Поскольку элементарная группа не является делимой, то D — делимая группа без кручения, причём

$$T\,(G) = T\,(A)$$

и

$$A \neq 0.$$

Допустим, что

$$A \neq T\,(A).$$

Тогда по предложению 1.1.8 кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ изоморфно подкольцу L поля Q, которое порождается 1 и всеми числами $1/p$ такими, что

$$p\,G = G.$$

Если предположить, что

$$L \neq Q,$$

то найдётся простое число q такое, что

$$1/q \notin L.$$

Из регулярности кольца L следует существование

$$x \in L,$$

для которого выполняется равенство $qxq = q$. Откуда

$$x = 1/q \in L,$$

что противоречит допущению. Таким образом,

$$\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)) \cong Q$$

и

$$p\,G = G$$

для любого простого числа p, но это невозможно ввиду редуцированности прямого слагаемого A в G. Следовательно,

$$A = T\,(A)$$

— элементарная группа. Обратное утверждение получим из леммы 1.1.5 и следствия 1.1.4.

2) Пусть G — редуцированная группа. Тогда рассуждения, проведенные в пункте 1), показывают, что редуцированная группа G не может быть группой без кручения и что $T\,(G)$ — элементарная группа. Из регулярности кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ вытекает, что для любого простого числа p группа G представима в виде

$$G = T_p\,(G) \;\oplus\; p\,G.$$

Отсюда получим, что

$$p\;G = p^2 G,$$

причём деление однозначно (понятно, что $G = p\,G$, если в G нет элементов порядка p).

Группа $G \,/\, T\,(G)$ является эпиморфным образом p-делимой группы $G \,/\, T_p\,(G)$, поэтому она делится на любое простое число p, т. е. $G \,/\, T\,(G)$ — делимая группа.

Для простого числа p рассмотрим проекции

$$\pi_p : G \to T_p\,(G),$$

которые индуцируют гомоморфизм

$$f : G \to \prod_{p \in P} T_p\,(G)$$

такой, что

$$f\,(a) = (\ldots, \pi_p\,(a), \ldots) \in \prod_{p \in P} T_p\,(G),$$

где

$$G = T_p\,(G) \;\oplus\; p\,G$$

и

$$\pi_p\,(a) \in T_p\,(G).$$

Так как

$$\ker\,(f) = \bigcap_{p \in P} p\,G,$$

то для любого

$$x \in \ker\,(f)$$

следует, что x делится на любое простое число p, т. е. $\ker\,(f)$ — делимая группа и, значит,

$$\ker\,(f) = 0.$$

Следовательно, f — мономорфизм, причём элементы подгруппы

$$\bigoplus_{p \in P} T_p\,(G)$$

остаются на месте при действии этого мономорфизма. Можно считать, что

$$\bigoplus_{p \in P} T_p\,(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p \in P} T_p\,(G).$$

$\square$

Определение 1.1.1. *Подкольцо B кольца A назовём регулярно разрешимым в A, если для любого $b \in B$ из того, что $b \in bAb$, следует, что $b \in bBb$.*

Замечание 1.1.1. *Очевидно, что если B — регулярное подкольцо кольца A, то B регулярно разрешимо в A.*

В следующей теореме рассматриваются редуцированные группы, имеющие регулярный центр кольца эндоморфизмов.

Теорема 1.1.10. *Пусть G — редуцированная группа, то $C\left(\mathrm{E}\left(G\right)\right)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $T\left(G\right)$ — элементарная группа;

2) $C(\mathrm{E}(G))$ изоморфен регулярно разрешимому подкольцу кольца $\mathrm{E}(T(G))$.

Доказательство. Необходимость. Справедливость условия 1) следует из теоремы 1.1.9. Докажем, что выполняется условие 2). Рассмотрим кольцевой гомоморфизм $\varphi : \mathrm{E}(G) \to \mathrm{E}(T(G))$, ставящий в соответствие каждому $\alpha \in \mathrm{E}(G)$ его ограничение на $T(G)$. Предположим, что существует ненулевой гомоморфизм $\beta \in \mathrm{E}(G)$ такой, что $\beta \in \ker\varphi$. Тогда $\mathrm{im}(\beta)$ является делимой группой (как эпиморфный образ делимой группы $G \,/\, T\left(G\right)$ (см. теорему 1.1.9)), что противоречит редуцированности группы G. Следовательно, φ — мономорфизм.

Пусть $i : C(\mathrm{E}(G)) \to \mathrm{E}(G)$ — тождественное вложение, тогда $\mathrm{im}(\varphi i)$ — регулярно разрешимое подкольцо кольца $\mathrm{E}(T(G))$.

Достаточность. Так как $T(G)$ — элементарная группа, то $\mathrm{E}(T(G))$ — регулярное кольцо [31, следствие 18.2] и, следовательно, $C(\mathrm{E}(G))$ — регулярное кольцо по условию 2).

□

Напомним результат, полученный в [92] и [121], для абелевых групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов.

Теорема 1.1.11 (Фукс, Рангасвами)**.** *Для группы G следующие условия справедливы:*

1) *если G — периодическая группа, то кольцо $\mathrm{E}(G)$ регулярно тогда и только тогда, когда G — элементарная группа;*

2) *если G — нередуцированная группа, то $\mathrm{E}(G)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда G — прямая сумма делимой группы без кручения и элементарной группы;*

3) *если G — редуцированная группа и $\mathrm{E}(G)$ — регулярное кольцо, то $T(G)$ — элементарная группа, $G \,/\, T(G)$ — делимая группа и*

$$\bigoplus_{p \in P} T_p(G) \subseteq G \subseteq \prod_{p \in P} T_p(G).$$

В следующей теореме даются некоторые необходимые и достаточные условия регулярности кольца эндоморфизмов редуцированной группы.

Теорема 1.1.12. *Пусть G — редуцированная группа, то $\mathrm{E}(G)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *$T(G)$ — элементарная группа;*

2) *$\mathrm{E}(G)$ изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца $\mathrm{E}(T(G))$.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы, при котором используется условие 3) теоремы 1.1.11, аналогично доказательству теоремы 1.1.10.

∎

1.2 Абелевы группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов

Рассмотрим предварительно следующий простой факт, который будем использовать в дальнейшем.

Напомним, что матрица (α_{ji}) с элементами из кольца $\mathrm{E}(A)$ называется сходящейся по столбцам, если для каждого столбца i сумма

$$\sum_j \alpha_{ji}$$

существует в конечной топологии кольца $\mathrm{E}(A)$ [51, §106, 107].

Лемма 1.2.1. *Пусть группа A разлагается в прямую сумму своих подгрупп, т. е.*

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i.$$

Кольцо $\mathrm{E}(A)$ коммутативно тогда и только тогда, когда кольцо $\mathrm{E}(A_i)$ коммутативно и подгруппа A_i является вполне характеристической для любого

$$i \in I.$$

Доказательство. Так как

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i,$$

то кольцо $\mathrm{E}(A)$ изоморфно кольцу всех сходящихся по столбцам $I \times I$-матриц

$$(\alpha_{ji})_{j,i \in I},$$

где

$$\alpha_{ji} \in \mathrm{Hom}(A_i,\ A_j)$$

[51, теорема 106.1].

Пусть $\mathrm{E}(A)$ — коммутативное кольцо, тогда

$$\mathrm{Hom}(A_i,\ A_j) = 0$$

и $\mathrm{E}(A_i)$ — коммутативное кольцо для любых $i, j \in I$.

Вполне характеристичность подгруппы

$$A_i,\ i \in I,$$

вытекает из [31, лемма 19.1].

Обратное утверждение следует из условия и [51, §106, упр. 4 а)].

□

Для группы G такой, что

$$T(G) \neq 0,$$

будем рассматривать множество

$$P(G) = \{p \in P \mid T_p(G) \neq 0\}.$$

Следующая лемма, доказанная в [59], будет полезна в дальнейшем.

Лемма 1.2.2 (Чехлов). *Пусть A — делимая группа. Кольцо* $\mathrm{E}(A)$ *является коммутативным тогда и только тогда, когда*

$$A = Q$$

или

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{\infty}).$$

В нижеприведённом утверждении даётся описание нередуцированных групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Предложение 1.2.3. *Пусть $G = A \bigoplus B$ — нередуцированная группа, где A — редуцированная, а B — делимая группы.*

Кольцо $\mathrm{E}(G)$ *является коммутативным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $B = Q$ или $B = \bigoplus\limits_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty})$;

2) если $A \neq 0$, то

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p}),$$

причём если

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$$

и

$$B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty}),$$

то

$$P(A) \bigcap P(B) = \emptyset.$$

Доказательство. Так как G — нередуцированная группа, то она содержит ненулевую делимую часть. Пусть $\mathrm{E}(G)$ — коммутативное кольцо. Тогда, как следует из леммы 1.2.2,

$$B = Q$$

или

$$B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty}).$$

Пусть

$$A \neq 0.$$

Покажем, что A является периодической группой. Допустим противное, т. е. пусть существует элемент

$$a \in A$$

такой, что

$$o(a) = \infty.$$

Рассмотрим произвольный элемент

$$0 \neq b \in B.$$

Так как

$$o(a) = \infty,$$

то

$$\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle) \cong \langle b \rangle$$

и, следовательно, существует

$$0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(\langle a \rangle, \langle b \rangle).$$

Пусть

$$i : \langle a \rangle \to A$$

и

$$j : \langle b \rangle \to B,$$

где i, j — вложения. Так как B — делимая, а значит, инъективная группа, то существует гомоморфизм

$$\psi : A \to B$$

такой, что

$$\psi i = j\varphi.$$

Поскольку

$$j\varphi \neq 0,$$

то

$$\psi \neq 0.$$

Гомоморфизм ψ легко продолжается до ненулевого эндоморфизма группы G. Следовательно, A — не вполне характеристическая подгруппа, что противоречит утверждению леммы 1.2.1. Таким образом, A — периодическая редуцированная группа. По лемме 1.2.1 кольцо $\mathrm{E}(A)$ коммутативно, тогда

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$$

[31, следствие 19.3].

Пусть

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$$

и

$$B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty}),$$

тогда из [13, теорема 1] следует, что

$$P(A) \bigcap P(B) = \emptyset.$$

Обратно, если $A = 0$, то коммутативность кольца $\mathrm{E}(G)$ следует из леммы 1.2.2. Пусть

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$$

и $B = Q$. Поскольку

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^{k_p}),\, Q) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}(Q,\, \mathbb{Z}(p^{k_p})) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^{k_p}),\, \mathbb{Z}(q^{k_q})) = 0$$

при

$$p \neq q,$$

то подгруппы $\mathbb{Z}(p^{k_p})$ и Q являются вполне характеристическими в группе G. Так как

$$\mathrm{E}(Q) \cong Q$$

[51, §106, пример 4] и

$$\mathrm{E}(\mathbb{Z}(p^{k_p})) \cong \mathbb{Z}_{p^{k_p}}$$

[31, §3, пример 3.2] — коммутативные кольца, то по лемме 1.2.1 следует коммутативность кольца $\mathrm{E}(G)$.

Пусть

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$$

и

$$B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty}),$$

причём

$$P(A) \bigcap P(B) = \emptyset.$$

Тогда для каждого

$$p \in P(G)$$

следует, что либо

$$T_p(G) = \mathbb{Z}(p^{k_p}),$$

либо

$$T_p(G) = \mathbb{Z}(p^{\infty}).$$

Поскольку в обоих случаях кольцо $\mathrm{E}(T_p(G))$ коммутативно и $T_p(G)$ — вполне характеристическая подгруппа в группе G для каждого

$$p \in P(G),$$

то по лемме 1.2.1 кольцо $\mathrm{E}(G)$ коммутативно.

□

Определение 1.2.1. *Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G удовлетворяет условию конечности, если она не содержит ненулевые элементы, у которых p-высота равна бесконечности для всех*

$$p \in P(G).$$

Определение 1.2.2. *Будем называть смешанную редуцированную группу G с бесконечным числом ненулевых p-компонент psp-группой, если естественное вложение*

$$\bigoplus_{p \in P(G)} T_p(G) \to G$$

продолжается до p-чистого вложения

$$G \to \prod_{p \in P(G)} T_p(G).$$

Таким образом, если G — psp-группа, то, отождествляя группу G с её образом при таком вложении, можно считать, что

$$\bigoplus_{p \in P(G)} T_p(G) \subset G \subseteq \prod_{p \in P(G)} T_p(G),$$

где G p-чиста в

$$\prod_{p \in P(G)} T_p(G)$$

для всех

$$p \in P(G).$$

Заметим также, что понятие p-чистоты (чистоты) эквивалентно здесь понятию p-сервантности (сервантности) подгруппы в группе.

Определение 1.2.3. *Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$, если выполняются следующие условия:*

1) $G = T_p(G) \bigoplus E_p$ *для любого* $p \in P(G)$;

2) существует семейство дополнений

$$\{E_p\}_{p\in P}$$

группы G, удовлетворяющее условию: если

$$B = \bigcap_{p\in P(G)} E_p \neq 0,$$

то существует B-высокая подгруппа A группы G, содержащая $T(G)$, причём для любого простого числа q такого, что

$$qB \neq B,$$

следует, что

$$qA = A.$$

Пусть B — подгруппа группы G. Напомним, что подгруппа A группы G называется B-высокой, если $A \cap B = 0$, и для любой подгруппы H группы G такой, что $A \subsetneqq H$, следует, что $H \cap B \neq 0$.

Замечание 1.2.1. *Пусть G — редуцированная смешанная группа, причём для каждого $p \in P(G)$ следует, что*

$$G = T_p(G) \oplus E_p,$$

$$pE_p = E_p$$

и

$$\bigcap_{p\in P(G)} E_p = 0,$$

тогда G удовлетворяет условию конечности.

Действительно, пусть существует элемент $0 \neq g \in G$ такой, что $h_p(g) = \infty$ для любого $p \in P(G)$. Так как g — ненулевой элемент, то

$$g \notin \bigcap_{p \in P(G)} E_p$$

и, следовательно, найдётся такое $q \in P(G)$, что $g \notin E_q$. Поскольку

$$G = T_q(G) \oplus E_q,$$

то

$$g = a_q + e_q,$$

где

$$0 \neq a_q \in T_q(G),\ e_q \in E_p \text{ и } g \notin E_q,$$

причём

$$h_q(e_q) = \infty \text{ и } h_q(a_q) = s < \infty.$$

Тогда имеем

$$\infty = h_q(g) = \min\{h_q(a_q), h_q(e_q)\} = s,$$

что приводит к противоречию.

Теорема 1.2.4. *Пусть $G \in \mathbb{K}$. Кольцо $\mathrm{E}(G)$ является коммутативным тогда и только тогда, когда для каждого $p \in P(G)$ следует, что*

$$G = T_p(G) \bigoplus E_p,$$

$$pE_p = E_p,$$

где

$$T_p(G) \cong \mathbb{Z}(p^{k_p}),\ k_p \in \mathbb{N},$$

для каждого $p \in P(G)$ подгруппа E_p определена однозначно, причём выполняется одно из следующих условий:

1) если $\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p = 0$, то группа G является psp-группой;

2) если $\bigcap\limits_{p\in P(G)} E_p \neq 0$, *то*

$$G = A\bigoplus\Big(\bigcap_{p\in P(G)} E_p\Big),$$

где

a) если A *— смешанная группа, то* A *удовлетворяет условиям конечности и является psp-группой;*

b) $qA = A$ *для любого простого числа* q *такого, что*

$$q\Big(\bigcap_{p\in P(G)} E_p\Big) \neq \bigcap_{p\in P(G)} E_p;$$

c) $\bigcap\limits_{p\in P(G)} E_p$ *— группа без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathrm{E}(G)$ — коммутативное кольцо, тогда

$$T(G) \cong \bigoplus_{p\in P(G)} \mathbb{Z}(p^{k_p}) \text{ (где } k_p \in \mathbb{N})$$

[31, предложение 19.6]. Таким образом,

$$T_p(G) \cong \mathbb{Z}(p^{k_p}) \text{ (где } k_p \in \mathbb{N})$$

для каждого $p \in P(G)$. Так как $G \in \mathbb{K}$, то

$$G = T_p(G) \bigoplus E_p$$

для каждого $p \in P(G)$ и для некоторой вполне характеристической подгруппы E_p (лемма 1.2.1). Поскольку

$$E_p, \quad p \in P(G),$$

— вполне характеристическая подгруппа в группе G, то для каждого $p \in P(G)$ подгруппа E_p определена однозначно. Покажем, что

$$pE_p = E_p$$

для каждого $p \in P(G)$. Допустим, что это не так, тогда существует гомоморфизм

$$E_p/pE_p \to T_p(G),$$

композиция которого с каноническим

$$E_p \to E_p/pE_p$$

была бы ненулевым гомоморфизмом из E_p в $T_p(G)$. Поскольку ненулевой гомоморфизм из E_p в $T_p(G)$ продолжается до эндоморфизма всей группы G, то получим противоречие с вполне характеристичностью подгруппы E_p. Таким образом,

$$pE_p = E_p$$

для каждого $p \in P(G)$. Следовательно, $pB = B$ для всякого $p \in P(G)$, где

$$B = \bigcap_{p \in P(G)} E_p.$$

Причем если $B \neq 0$, то B — группа без кручения.

Если $\bigcap\limits_{p \in P(G)} E_p = 0$, то группа G удовлетворяет условиям конечности (см. замечание 1.2.1) и является psp-группой [31, теорема 19.4]. Следовательно, условие 1) выполнилось.

Пусть

$$\bigcap_{p \in P(G)} E_p \neq 0.$$

Так как $G \in \mathbb{K}$, то существует B-высокая подгруппа A группы G, содержащая $T(G)$, причём для любого простого числа q такого, что $qB \neq B$, следует, что $qA = A$.

Покажем, что

$$G = A \bigoplus B.$$

Предварительно заметим, что если $qB \neq B$, то B — q-чистая подгруппа в G. Действительно, пусть $qB \neq B$ и в G разрешимо уравнение

$$q^l x = b \in B,$$

т. е. существует $g \in G$ такое, что $q^l g = b$. Так как

$$g \in G = T_p(G) \bigoplus E_p$$

для всякого $p \in P(G)$, то

$$g = g_p + e_p$$

для всякого $p \in P(G)$, где

$$g_p \in T_p(G)$$

и

$$e_p \in E_p.$$

Тогда

$$q^l g_p = b - q^l e_p \in T_p(G) \bigcap E_p = 0$$

для каждого $p \in P(G)$. Следовательно, $b = q^l e_p$ для каждого $p \in P(G)$.

Пусть $b = q^l e_p$ и $b = q^l e_s$ для произвольных $p, s \in P(G)$. Тогда

$$q^l(e_p - e_s) = 0.$$

Так как $qB \neq B$, то $q \notin P(G)$ и $e_p - e_s = 0$, т. е.

$$e_p = e_s$$

для произвольных $p, s \in P(G)$. Поэтому

$$e_p \in \bigcap_{p \in P(G)} E_p = B$$

и B — q-чистая подгруппа в G для всякого простого числа q такого, что

$$qB \neq B.$$

Для доказательства того, что $G = A \bigoplus B$, достаточно показать [50, гл. II, §9, лемма 9.9], что из равенства

$$pg = b + a$$

$$(g \in G,\ b \in B,\ a \in A)$$

непременно следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$.

Если $pB = B$, то очевидно существует $b' \in B$ такой, что $pb' = b$.

Пусть $pB \neq B$. Поскольку $G \in \mathbb{K}$ и A — B-высокая подгруппа в группе G, то из $pB \neq B$ следует, что $pA = A$. Следовательно, найдётся элемент $a' \in A$ такой, что $pa' = a$. Тогда из равенства

$$pg = b + a$$

получим, что

$$p(g - a') = b.$$

Так как $pB \neq B$, то B — p-чистая подгруппа в группе G. Таким образом, существует элемент $b' \in B$ такой, что $pb' = b$.

Покажем, что если A — смешанная группа, то A удовлетворяет условиям конечности и является psp-группой. Докажем, что справедливо первое из этих условий. Допустим противное, т. е. пусть существует

$$0 \neq a \in A$$

такой, что

$$h_p(a) = \infty$$

для любого

$$p \in P(G).$$

Здесь

$$P(G) = P(A),$$

поскольку B — группа без кручения. Тогда

$$o(a) = \infty$$

и для любого

$$p \in P(G)$$

рассмотрим разложение

$$G = T_p(G) \bigoplus E_p,$$

т. е.

$$a = g_p + e_p,$$

где

$$g_p \in G_p$$

и

$$e_p \in E_p.$$

Если

$$g_p \neq 0,$$

то

$$\infty = h_p(a) = \min\{h_p(g_p),\ h_p(e_p)\} < \infty,$$

что невозможно. Следовательно, для любого $p \in P(G)$ имеем

$$a = e_p \in \bigoplus_{p \in P(G)} E_p = B,$$

т. е.

$$a \in A \bigcap B = 0,$$

что противоречит предположению для элемента a. Таким образом, A удовлетворяет условию конечности.

Покажем, что A является psp-группой. Действительно, так как

$$G = A \bigoplus B,$$

то по лемме 1.2.1 следует коммутативность кольца $\mathrm{E}(A)$. Поскольку A — редуцированная смешанная группа и A удовлетворяет условию конечности, то A является psp-группой [31, теорема 19.4].

Так как $\mathrm{E}(G)$ — коммутативное кольцо и

$$G = A \bigoplus B,$$

то коммутативность кольца $\mathrm{E}(B)$ следует из леммы 1.2.1.

Достаточность. Пусть для любого $p \in P(G)$ следует, что

$$G = T_p(G) \bigoplus E_p,$$

где

$$T_p(G) \cong \mathbb{Z}(p^{k_p}),$$

$$k_p \in \mathbb{N},$$

$$pE_p = E_p$$

и для каждого $p \in P(G)$ подгруппа E_p определена однозначно.

Если

$$\bigcap_{p \in P(G)} E_p = 0,$$

то группа G является psp-группой и, как следует из замечания 1.2.1, G удовлетворяет условию конечности. Тогда коммутативность кольца $\mathrm{E}(G)$ вытекает из [31, теорема 19.4].

Если

$$\bigcap_{p\in P(G)} E_p \neq 0,$$

то выполняется условие 2) и пусть

$$B = \bigcap_{p\in P(G)} E_p.$$

Тогда

$$G = A \bigoplus B.$$

Поскольку для любого $p \in P(G)$ следует, что

$$pE_p = E_p,$$

то

$$pB = B$$

для любого $p \in P(G)$.

Если A — периодическая группа, то $\mathrm{E}(G)$ — коммутативное кольцо [31, следствие 19.5]. Пусть A — смешанная группа. Тогда группа A удовлетворяет условию конечности, является psp-группой и, следовательно, $\mathrm{E}(A)$ — коммутативное кольцо [31, теорема 19.4].

Для коммутативности кольца $\mathrm{E}(G)$ согласно лемме 1.2.1 достаточно показать, что A и B — вполне характеристические подгруппы в группе G. Допустим, что существуют

$$b \in B$$

и

$$\alpha \in \mathrm{E}(G)$$

такие, что

$$\alpha(b) \notin B.$$

Тогда

$$\alpha(b) = a + d,$$

где

$$0 \neq a \in A$$

и

$$d \in B.$$

Пусть

$$\pi : G \to A$$

— проекция, тогда

$$\pi\alpha(b) = a \in A.$$

Поскольку

$$a \neq 0$$

и A — редуцированная группа, то существует простое число p такое, что

$$h_p(a) < \infty.$$

Так как

$$G \in \mathbb{K},$$

то из того, что

$$pA \neq A,$$

следует, что

$$pB = B,$$

т. е.

$$h_p(b) = \infty.$$

Таким образом, эндоморфизм

$$\pi\alpha \in \mathrm{E}(G)$$

понизил p-высоту элемента b в группе G, что невозможно, т. е. B — вполне характеристическая подгруппа в G.

Рассмотрим подгруппу A и допустим, что существуют $d \in A$ и $\beta \in \mathrm{E}(G)$ такие, что $\beta(d) \notin A$. Тогда

$$\beta(d) = a + b,$$

где $a \in A$ и $b \in B$, причём $b \neq 0$.

Пусть

$$\pi : G \to B$$

— проекция, тогда

$$(\pi\beta)(d) = b.$$

Поскольку B — редуцированная группа, то найдётся простое число q такое, что $h_q(b) < \infty$. Так как $G \in \mathbb{K}$, то из

$$qB \neq B$$

следует, что

$$qA = A,$$

т. е.

$$h_q(d) = \infty.$$

Таким образом, эндоморфизм

$$\pi\beta \in \mathrm{E}(G)$$

понизил q-высоту элемента d в группе G, что невозможно. Следовательно, A — вполне характеристическая подгруппа в группе G.

$\square$

Следующее предложение показывает, что класс $\mathbb{K}$, в котором решается поставленная задача, является довольно широким. В частности, он содержит все смешанные редуцированные расщепляемые группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов [31, следствие 19.5], все группы с коммутативным кольцом эндоморфизмов, описанные в [31, теорема 19.4].

Предложение 1.2.5. *Если G — редуцированная смешанная группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, для которой выполняется одно из следующих условий:*

1) G — расщепляемая группа;

2) G удовлетворяет условию конечности,

то $G \in \mathbb{K}$.

Доказательство. Поскольку группа G имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов, то, проведя аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1.2.4, имеем

$$G = T_p(G) \bigoplus E_p$$

для любого $p \in P(G)$.

Так как E_p — вполне характеристическая подгруппа группы G (см. лемму 1.2.1), то для каждого $p \in P(G)$ подгруппа E_p определена однозначно и

$$\mathrm{Hom}(E_p, T_p(G)) = 0.$$

Тогда

$$pE_p = E_p$$

для каждого $p \in P(G)$ (см. доказательство необходимости в теореме 1.2.4) и поэтому

$$q(\bigcap_{p \in P(G)} E_p) = \bigcap_{p \in P(G)} E_p$$

для любого $q \in P(G)$.

Так как в условии 2) группа G удовлетворяет условию конечности, то

$$\bigcap_{p \in P(G)} E_p = 0$$

и, следовательно,

$$G \in \mathbb{K}.$$

Рассмотрим условие 1). Пусть

$$G = A \bigoplus B$$

— расщепляемая группа, где $A = T(G)$ и B — группа без кручения. Поскольку

$$\bigcap_{p \in P(G)} E_p$$

— группа без кручения, то

$$\bigcap_{p \in P(G)} E_p \subseteq B.$$

Так как

$$B \subseteq E_p$$

для любого $p \in P(G)$, то

$$B \subseteq \bigcap_{p \in P(G)} E_p$$

и, следовательно,

$$B = \bigcap_{p \in P(G)} E_p.$$

Тогда для любого простого числа q такого, что

$$qB \neq B,$$

следует, что

$$q \notin P(G),$$

и поэтому

$$qA = A.$$

Группа A — B-высокая подгруппа в группе G как прямое слагаемое этой группы. Поскольку

$$A = T(G),$$

то

$$G \in \mathbb{K}.$$

□

Следующий простой пример показывает, что класс $\mathbb{K}$ строго содержит классы групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов, описанные в предложении 1.2.5.

Пример 1. *Пусть*

$$G = \prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p) \bigoplus \prod_{q \in P_2} A_q,$$

где

$$P_1,\ P_2 \subseteq P,$$

$$|P_1| = |P_2| = \aleph_0,$$

$$P_1 \bigcap P_2 = \emptyset,$$

и для любого $q \in P_2$ следует, что $A_q = Q_q$ или $A_q = J_q$, тогда

$$G \in \mathbb{K}$$

и кольцо $\mathrm{E}(G)$ *коммутативно.*

Доказательство. Покажем, что группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$. Действительно, поскольку

$$pA_q = A_q$$

для любого простого числа $p \neq q$, то для любого $p \in P \backslash P_2$ следует, что

$$p(\prod_{q \in P_2} A_q) = \prod_{q \in P_2} A_q.$$

Поскольку

$$P_1 \bigcap P_2 = \emptyset,$$

то для каждого $p \in P_1$ из равенства

$$G = \mathbb{Z}(p) \bigoplus E_p$$

имеем

$$pE_p = E_p,$$

т. е. E_p — вполне характеристическая подгруппа в группе G и, следовательно, для каждого

$$p \in P(G)$$

подгруппа E_p определена однозначно. Заметим также, что

$$\bigcap_{p \in P_1} E_p = \prod_{q \in P_2} A_q$$

и

$$q(\prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)) = \prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)$$

для любого $q \in P_2$. Так как

$$\prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)$$

является $\prod\limits_{q \in P_2} A_q$-высокой подгруппой в группе G, как прямое слагаемое этой группы, и

$$T(G) \subseteq \prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p),$$

то $G \in \mathbb{K}$.

Поскольку $\mathrm{E}(A_q)$ — коммутативное кольцо для любого $q \in P_2$ и

$$pA_q = A_q$$

для любого простого числа $p \neq q$, то

$$\prod_{q \in P_2} \mathrm{E}(A_q)$$

— коммутативное кольцо.

Группа

$$\prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)$$

удовлетворяет условию конечности. Отождествляя

$$\bigoplus_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)$$

и

$$T(\prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)),$$

можно считать, что

$$\prod_{p \in P_1} \mathbb{Z}(p)$$

является psp-группой. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2) теоремы 1.2.4 и, следовательно, кольцо $\mathrm{E}(G)$ коммутативно.

$\square$

В следующем утверждении рассмотрим способ построения некоторых групп из класса $\mathbb{K}$ с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Предложение 1.2.6. *Пусть*

$$G = A \bigoplus B,$$

где B — редуцированная группа без кручения с коммутативным кольцом эндоморфизмов и группа A удовлетворяет условиям:

1) $A \in \mathbb{K}$;

2) кольцо $\mathrm{E}(A)$ *коммутативно;*

3) $pA = A$ *для любого простого числа* p *такого, что* $pB \neq B$,

тогда кольцо $\mathrm{E}(G)$ *коммутативно и* $G \in \mathbb{K}$.

Доказательство. Из условия 3) следует вполне характеристичность подгрупп A и B в группе G, тогда согласно лемме 1.2.1 кольцо $\mathrm{E}(G)$ коммутативно. Покажем, что группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$. Действительно, поскольку

$$A \in \mathbb{K}$$

и $\mathrm{E}(A)$ — коммутативное кольцо, то

$$A = T_p(A) \bigoplus E_p$$

и

$$pE_p = E_p$$

для всякого $p \in P(A)$.

Поскольку

$$T(G) = T(A),$$

то

$$P(G) = P(A).$$

Тогда для каждого $p \in P(G)$ имеем

$$G = T_p(G) \bigoplus E'_p,$$

где

$$E'_p = E_p \bigoplus B$$

— вполне характеристическая подгруппа в группе G. Следовательно, для каждого $p \in P(G)$ подгруппа E'_p определена однозначно.

Так как

$$pE_p = E_p$$

и

$$pB = B$$

для каждого $p \in P(G)$, то

$$pE'_p = E'_p$$

для каждого $p \in P(G)$.

Поскольку

$$\bigoplus_{p \in P(G)} E'_p \neq 0,$$

подгруппа A в группе G является B-высокой,

$$T(G) \subseteq A$$

и для любого простого числа q такого, что

$$qB \neq B,$$

следует, что

$$qA = A,$$

то группа

$$G \in \mathbb{K}.$$

$\square$

Замечание 1.2.2. *Если смешанная редуцированная группа G имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов, то ответ на вопрос: принадлежит ли данная группа классу $\mathbb{K}$? — можно получить, проверив только одно условие в определении 1.2.3. Действительно, из коммутативности кольца $\mathrm{E}(G)$ для каждого $p \in P(G)$ следует равенство*

$$G = T_p(G) \bigoplus E_p,$$

из которого для каждого $p \in P(G)$ имеем, что

$$pE_p = E_p.$$

Тогда E_p — вполне характеристическая подгруппа в группе G и, следовательно, для каждого $p \in P(G)$ подгруппа E_p определена однозначно.

Если

$$B = \bigcap_{p \in P(G)} E_p = 0,$$

то G удовлетворяет условию конечности и по предложению 1.2.5 принадлежит классу $\mathbb{K}$.

Если

$$B = \bigcap_{p \in P(G)} E_p \neq 0,$$

то B — группа без кручения и

$$T(G) \bigcap B = 0.$$

Тогда нетрудно показать, что всегда существует B-высокая подгруппа A группы G, содержащая $T(G)$. Поэтому для проверки принадлежности группы G классу $\mathbb{K}$ остаётся проверить только условие: для любого простого числа q такого, что

$$qB \neq B,$$

должно выполняться равенство

$$qA = A.$$

Как было показано в [58, пример 3], существуют смешанные группы, имеющие коммутативное кольцо эндоморфизмов и не принадлежащие классу $\mathbb{K}$. Таким образом, из замечания 1.2.2 следует, что для решения задачи в проблеме 15 [31], относящейся к смешанным группам с коммутативным кольцом эндоморфизмов, остаётся описать смешанные редуцированные группы G с коммутативным кольцом эндоморфизмов, у которых для ненулевой подгруппы без кручения B, определённой в замечании 1.2.2, и для любой B-высокой подгруппы A, содержащей $T(G)$, существует простое число p такое, что $pB \neq B$ и $pA \neq A$.

1.3 Абелевы группы с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов

Напомним следующие понятия.

Определение 1.3.1. *Кольцо R называется самоинъективным справа (слева), если модуль R_R (${}_RR$) инъективен. Кольцо R, самоинъективное справа и слева, называется самоинъективным.*

Замечание. *Поскольку для любого коммутативного кольца R следует равенство модулей R_R и ${}_RR$, то, используя критерий Бэра [21, гл. 5, §5.7, теорема 5.7.1], легко показать, что из самоинъективности справа такого кольца следует самоинъективность слева и наоборот.*

Нам понадобятся следующие результаты из [63] и [132] соответственно.

Теорема 1.3.1. *Для группы A следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{E}(A)$ *самоинъективно слева и справа;*

2) a) для каждого простого числа p существуют целые неотрицательные числа m_p, n_p, $n_p \neq 0$ такие, что

$$T_p(A) = \bigoplus_{m_p} \mathbb{Z}(p^{n_p});$$

b) если A — нередуцированная группа, то

$$A = \bigoplus_{n} Q \bigoplus T(A);$$

c) если A — редуцированная группа, то A является сервантной, вполне характеристической подгруппой в

$$\prod_{p \in P(A)} T_p(A).$$

Предложение 1.3.2. *Пусть*

$$G = A \bigoplus B$$

— нередуцированная группа, где A *— редуцированная, а* B *— делимая группы. Кольцо* $\mathrm{E}(G)$ *является коммутативным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $B = Q$ *или*

$$B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty});$$

2) если $A \neq 0$, *то*

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p}),$$

причём если

$$A = \bigoplus_{p \in P(A)} \mathbb{Z}(p^{k_p})$$

и

$$B = \bigoplus_{p \in P(B)} \mathbb{Z}(p^{\infty}),$$

то

$$P(A) \bigcap P(B) = \emptyset.$$

Определение 1.3.2. *Будем говорить, что группа* A *принадлежит классу* $\mathbb{S}$, *если* $\mathrm{C}(\mathrm{E}(A))_{\mathrm{C}(\mathrm{E}(A))}$ *— существенный подмодуль модуля* $\mathrm{E}(A)_{\mathrm{C}(\mathrm{E}(A))}$.

Пусть M — правый R-модуль. Напомним, что подмодуль L модуля M называется *существенным* в M, если для любого ненулевого подмодуля H из M следует, что $L \cap H \neq 0$.

Теорема 1.3.3. *Для группы* A, *принадлежащей классу* $\mathbb{S}$, *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{C}(\mathrm{E}(A))$ *— самоинъективное кольцо;*

2) a) $T_p(A) = \mathbb{Z}(p^{n_p})$ для каждого $p \in P(A)$, где $n_p \in \mathbb{N}$;

b) если A — нередуцированная группа, то

$$A = Q \bigoplus T(A);$$

c) если A — редуцированная группа, то A является сервантной, вполне характеристической подгруппой в

$$\prod_{p \in P(A)} T_p(A).$$

Доказательство. Пусть $S = \mathrm{C}(\mathrm{E}(A))$ и $R = \mathrm{E}(A)$.

Необходимость. Пусть S — самоинъективное кольцо. Тогда из инъективности модуля S_S следует, что

$$R_S = S_S \bigoplus V_S$$

[21, гл. 5, §5.3, теорема 5.3.1]. Поскольку группа A принадлежит классу $\mathbb{S}$, то S_S — существенный подмодуль модуля R_S и, следовательно,

$$R_S = S_S.$$

Таким образом, R — коммутативное, самоинъективное кольцо. Из коммутативности кольца R следует, что $T_p(A)$ — коциклическая группа для каждого

$$p \in P(A)$$

[31, гл. 3, §19, предложение 19.2]. Тогда по теореме 1.3.1 из самоинъективности кольца R получаем условие 2) a).

Если A — нередуцированная группа, то из теоремы 1.3.1 и предложения 1.3.2 следует справедливость условия 2) b). Если A — редуцированная группа, то из теоремы 1.3.1 следует условие 2) c).

Достаточность. Самоинъективность кольца R получаем из теоремы 1.3.1. Если A — нередуцированная группа, то из предложения 1.3.2 имеем коммутативность кольца R. Пусть A — редуцированная группа. Покажем, что группа A не имеет ненулевых элементов, высота которых равна бесконечности для всякого

$$p \in P(A).$$

Допустим противное, т. е. пусть существует $0 \neq a \in A$ такой, что

$$h_p(a) = \infty$$

для каждого

$$p \in P(A).$$

Пусть $< a >_*$ — сервантная подгруппа, порождённая элементом a. Так как A является сервантной подгруппой в

$$\prod_{p \in P(A)} T_p(A)$$

и

$$q(\prod_{p \in P(A)} T_p(A)) = \prod_{p \in P(A)} T_p(A)$$

для любого простого числа $q \notin P(A)$, то $< a >_*$ будет делимой подгруппой в A, что противоречит редуцированности группы A. Таким образом, группа A не имеет ненулевых элементов, высота которых равна бесконечности для всякого

$$p \in P(A).$$

Тогда R — коммутативное кольцо [31, гл. 3, §19, теорема 19.4]. Таким образом, в обоих случаях R — коммутативное, самоинъективное кольцо, т. е. $\mathrm{C}(\mathrm{E}(A))$ — самоинъективное кольцо.

$\square$

Приведём пример группы, не принадлежащей классу $\mathbb{S}$, с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов.

Пример 2. *Рассмотрим группу*

$$A = Z(2) \oplus Z(2),$$

тогда

$$\mathrm{E}(A) \cong \begin{pmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}$$

[51, теорема 106.1], где Z_2 *— кольцо классов вычетов по модулю 2. Отождествляя кольцо* $\mathrm{E}(A)$ *с данным кольцом матриц, получим, что*

$$\mathrm{E}(A)_S = S_S \oplus T_S,$$

где

$$S = \mathrm{C}(\,\mathrm{E}(A)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

и

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Кольцо S *имеет только два идеала:*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

и

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Поскольку следующие диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \arrow[dl, "\psi"] \\ & S_S & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & S \arrow[dl, "\gamma"] \\ & S_S & \end{tikzcd}$$

коммутативны, то S *— самоинъективное кольцо [21, гл. 5, §5.7, теорема 5.7.1], где* α *— тождественное вложение,* φ, ψ, β *— произвольные гомоморфизмы и* $\gamma = \beta$.

1.4 Вполне транзитивные, транзитивные, эндотранзитивные и слабо транзитивные абелевы группы

Напомним, что группа G называется (вполне) транзитивной, если для каждой пары элементов $a, b \in G$ таких, что

$$(H(a) \leq H(b))\ H(a) = H(b),$$

следует существование

$$(\varphi \in \mathrm{E}(G))\ \varphi \in \mathrm{Aut}(G),$$

переводящего элемент a в элемент b.

Рассмотрим связанные с ненулевым элементом $a \in G$ вполне характеристические подгруппы группы G:

$$\mathrm{bfc}(a) = \{b \in G \mid H(a) \leq H(b)\},$$

$$\mathrm{lfc}(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi \in \mathrm{E}(G), \varphi(a) = b\},$$

которые будем называть соответственно большой и малой вполне характеристическими подгруппами группы G, содержащими элемент a.

Замечание 1.4.1. *Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм*

$$\psi_a : \mathrm{End}(G) \longrightarrow \mathrm{lfc}(a),$$

действующий по правилу

$$\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$$

для любого $\varphi \in \mathrm{End}(G)$.

Далее рассмотрим некоторые эквивалентные условия вполне транзитивности группы G.

Предложение 1.4.1. *Для редуцированной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — вполне транзитивная группа;

2) $\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a)$ *для любого ненулевого элемента* $a \in G$;

3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ *существует эпиморфизм*

$$\psi_a : \mathrm{End}(G) \longrightarrow \mathrm{bfc}(a),$$

действующий по правилу

$$\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$$

для любого $\varphi \in \mathrm{End}(G)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть a — произвольный элемент группы G. Так как

$$\mathrm{lfc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a),$$

то пусть

$$c \in \mathrm{bfc}(a).$$

Тогда

$$H(a) \leq H(c).$$

Поскольку G — вполне транзитивная группа, то существует

$$\varphi \in \mathrm{E}(G)$$

такой, что

$$\varphi(a) = c.$$

Следовательно,

$$c \in \mathrm{lfc}(a)$$

и

$$\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$ такие, что

$$H(a) \leq H(b).$$

Так как

$$b \in \mathrm{bfc}(a)$$

и

$$\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a),$$

то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такой, что

$$\varphi(a) = b.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Следует из условия и замечания 1.4.1.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть a — произвольный элемент группы G. Так как

$$\mathrm{lfc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a),$$

то пусть c — произвольный элемент подгруппы $\mathrm{bfc}(a)$. Тогда для элемента c найдётся

$$\eta \in \mathrm{End}(G)$$

такой, что

$$c = \psi_a(\eta) = \eta(a).$$

Следовательно,

$$c \in \mathrm{lfc}(a)$$

и

$$\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a).$$

$\square$

По аналогии с вполне характеристическими подгруппами группы G, связанными с ненулевым элементом $a \in G$, рассмотрим характеристические подмножества группы G :

$$\mathrm{bc}(a) = \big\{b \in G \mid H(b) = H(a)\big\}$$

и

$$\mathrm{lc}(a) = \big\{b \in G| \ \exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \varphi(a) = b\big\},$$

которые будем называть соответственно большой и малой характеристическими подмножествами группы G, содержащими элемент a. Здесь под характеристическим подмножеством группы G понимается подмножество, замкнутое относительно действия автоморфизмов группы G.

Замечание 1.4.2. *Для произвольного ненулевого элемента* $a \in G$ *существует следующая связь между вышеопределёнными вполне характеристическими подгруппами и характеристическими подмножествами:*

$$\operatorname{lc}(a) \subseteq \operatorname{lfc}(a) \subseteq \operatorname{bfc}(a)$$

и

$$\operatorname{lc}(a) \subseteq \operatorname{bc}(a) \subseteq \operatorname{bfc}(a).$$

Далее термин «слабо транзитивная группа», введённый для групп без кручения в [96], определим для произвольной абелевой группы.

Определение 1.4.1. *Группу* G *будем называть слабо транзитивной, если для произвольных элементов* $x, y \in G$ *из существования эндоморфизмов* $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(G)$ *таких, что*

$$\varphi(x) = y, \ \psi(y) = x,$$

следует существование $\alpha \in \operatorname{Aut}(G)$ *такого, что* $\alpha(x) = y$.

Для некоторой характеризации слабо транзитивных групп нам потребуется следующее подмножество, определяемое для любого ненулевого элемента $a \in G$:

$$\operatorname{weak}(a) = \{b \in G \mid \exists \varphi, \, \psi \in \mathrm{E}(G), \, \varphi(a) = b, \, \psi(b) = a\}.$$

Замечание 1.4.3. *Легко проверяется, что*

$$\operatorname{lc}(a) \subseteq \operatorname{weak}(a) \subseteq \operatorname{bc}(a)$$

и

$$\operatorname{lc}(a) \subseteq \operatorname{weak}(a) \subseteq \operatorname{lfc}(a)$$

для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Лемма 1.4.2. *Группа G слабо транзитивна тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{weak}(a) = \mathrm{lc}(a)$$

для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — слабо транзитивная группа. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in G$ и для любого $x \in \mathrm{weak}(a)$ существуют φ, $\psi \in \mathrm{E}(G)$ такие, что

$$\varphi(x) = a \text{ и } \psi(a) = x.$$

Так как G — слабо транзитивная группа, то существует

$$\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$$

такой, что

$$\alpha(a) = x.$$

Следовательно,

$$x \in \mathrm{lc}(a).$$

Из замечания 1.4.3 следует обратное включение.

Достаточность. Рассмотрим произвольные

$$x, y \in G \text{ и } \varphi, \psi \in \mathrm{E}(G)$$

такие, что

$$\varphi(x) = y \text{ и } \psi(y) = x.$$

Тогда

$$y \in \mathrm{weak}(x) = \mathrm{lc}(x).$$

Поэтому найдётся $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $\alpha(x) = y$.

$\square$

Замечание 1.4.4. *Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение*

$$\psi_a : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{lc}(a),$$

действующее по правилу

$$\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$$

для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

Поскольку всякая транзитивная группа является слабо транзитивной, то представляет интерес нахождение такого дополнительного условия, при котором слабо транзитивная группа будет транзитивной. В следующем утверждении предлагается такое условие.

Предложение 1.4.3. *Для группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — транзитивная группа;

2) $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$;

3) для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует сюръективное отображение

$$\psi_a : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{bc}(a),$$

действующее по правилу

$$\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$$

для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$;

4) G — слабо транзитивная группа и

$$\mathrm{weak}(a) = \mathrm{bc}(a)$$

для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть a — произвольный ненулевой элемент группы G и $c \in \mathrm{bc}(a)$. Тогда

$$H(c) = H(a).$$

Следовательно, будет существовать $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что

$$\varphi(a) = c.$$

Тогда

$$c \in \mathrm{lc}(a) \text{ и } \mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lc}(a).$$

Обратное включение следует из замечания 1.4.2.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные ненулевые элементы $a, b \in G$ такие, что

$$H(a) = H(b).$$

Тогда

$$b \in \mathrm{bc}(a).$$

Поскольку

$$\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a),$$

то найдется

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$$

такой, что

$$\varphi(a) = b.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Следует из условия и замечания 1.4.4.

3) $\Rightarrow$ 2). Пусть a — произвольный ненулевой элемент группы G. Поскольку

$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{bc}(a),$$

то пусть

$$x \in \mathrm{bc}(a).$$

Так как

$$\psi_a : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{bc}(a)$$

— сюръективное отображение, то существует

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$$

такой, что

$$x = \psi_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Следовательно,

$$x \in \mathrm{lc}(a)$$

и

$$\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a).$$

Эквивалентность условий 2) и 4) следует из замечания 1.4.3 и леммы 1.4.2.

$\square$

Определение 1.4.2. *Группа G называется эндотранзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$ таких, что*

$$H(x) = H(y),$$

следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такого, что $\varphi(x) = y$.

В монографии [31] сформулирована проблема 44: «Существуют ли слабо транзитивные группы без кручения (здесь под термином «слабая транзитивность» понимается термин «эндотранзитивность». — В. М.), не являющиеся ни транзитивными, ни вполне транзитивными?». Замечание 1.4.3 и следующая лемма дают надежду, что такие группы могут существовать.

Лемма 1.4.4. *Редуцированная группа G эндотранзитивна тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a).$$

Доказательство. Необходимость. Для произвольных

$$0 \neq a \in G \text{ и } x \in \mathrm{bc}(a)$$

следует, что

$$H(a) = H(x).$$

Так как G — эндотранзитивная группа, то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такой, что

$$\varphi(a) = x.$$

Следовательно,

$$x \in \mathrm{lfc}(a).$$

Достаточность. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$ такие, что

$$H(a) = H(b).$$

Тогда

$$b \in \mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a).$$

Следовательно, найдётся эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такой, что $\varphi(a) = b$. Таким образом, G — эндотранзитивная группа.

$\square$

Замечание 1.4.5. *Из предложений 1.4.1 и 1.4.4, замечания 1.4.3 и леммы 1.4.4 следует хорошо известный результат: если группа (вполне) транзитивна, то она эндотранзитивна.*

Для полноты изложения напомним следующую лемму, доказанную А. Корнером в [78].

Лемма 1.4.5 (Корнер)**.** *Редуцированная p-группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^{\omega}G$.*

Распространим понятие, введённое А. Корнером для p-групп, на произвольные редуцированные абелевы группы. При этом, в отличие от него, считаем, что для любого $a \in A$ высотная матрица $H(a)$ берётся в подгруппе A группы G.

Определение 1.4.3. *Пусть Φ — подкольцо с единицей кольца $\mathrm{E}(G)$ и A есть Φ-инвариантная подгруппа редуцированной абелевой группы G. Будем говорить, что Φ действует (вполне) транзитивно на A или подгруппа A (вполне) транзитивна над Φ, если для любых $x, y \in A$ таких, что*

$$(H(x)_A \leq H(y)_A)\ H(x)_A = H(y)_A,$$

следует существование $(\text{элемента } \varphi \in \Phi)$ обратимого элемента $\varphi \in \Phi$ такого, что $\varphi(x) = y$.

Теорема 1.4.6. *Редуцированная группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^{\sigma}G$ для любого порядкового числа σ и произвольного простого числа p.*

Доказательство. Докажем теорему для случая вполне транзитивности, транзитивный случай доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть p — произвольное простое число, если G — p-делимая группа, то для любого порядкового числа σ следует, что

$$p^{\sigma}G = G,$$

т. е. $p^{\sigma}G$ — вполне транзитивная группа над $\mathrm{E}(G)$.

Пусть

$$pG \neq G.$$

Проведём доказательство индукцией по σ. Если $\sigma = 0$, то $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на G.

Пусть для любого δ такого, что

$$0 \leq \delta < \sigma,$$

утверждение теоремы выполняется. Покажем, что $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на $p^{\sigma}G$. Пусть

$$a, b \in p^{\sigma}G$$

и

$$H(a)_{p^{\sigma}G} \leq H(b)_{p^{\sigma}G}.$$

Тогда

$$H_p(a)_{p^{\sigma}G} \leq H_p(b)_{p^{\sigma}G},$$

где

$$H_p(a)_{p^{\sigma}G} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$$

и

$$H_p(b)_{p^{\sigma}G} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots).$$

Пусть σ — изолированное порядковое число, тогда

$$p^{\sigma}G = p(p^{\sigma-1}G)$$

и, следовательно, существуют элементы

$$c_1, c_2 \in p^{\sigma-1}G$$

такие, что

$$a = pc_1 \text{ и } b = pc_2.$$

Тогда
$$H_p(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = (\mu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$$
и
$$H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots),$$
причём
$$H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(a)_{p^{\sigma}G}$$
и
$$H_q(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(b)_{p^{\sigma}G}$$
для любого простого числа q, $q \neq p$. Если $\mu \leq \nu$, то
$$H(c_1)_{p^{\sigma-1}G} \leq H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}.$$
Так как по предположению индукции подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $\mathrm{E}(G)$, то существует
$$\varphi \in \mathrm{E}(G)$$
такой, что
$$\varphi(c_1) = c_2.$$
Тогда
$$p\varphi(c_1) = pc_2 \text{ и } \varphi(a) = b.$$

Пусть $\nu < \mu$. Допустим, что между ν и β_0 есть скачок (в противном случае $\mu \leq \nu$). Тогда ν-й инвариант Ульма — Капланского группы $T_p(p^{\sigma-1}G)$ отличен от нуля, т. е. существует
$$d \in p^{\sigma-1}G$$
такой, что
$$o(d) = p$$
и
$$H_p(d)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \infty, \ldots).$$
Рассмотрим элемент
$$c_1 + d \in p^{\sigma-1}G.$$
Так как
$$H_p(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots) \leq H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$$

и

$$H_q(c_1+d)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G}$$

для любого простого q, $q \neq p$, то

$$H(c_1+d)_{p^{\sigma-1}G} \leq H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}.$$

Поскольку по предположению индукции подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $\mathrm{E}(G)$, то существует

$$\varphi \in \mathrm{E}(G)$$

такой, что

$$\varphi(c_1+d) = c_2.$$

Тогда

$$p\varphi(c_1+d) = pc_2$$

и

$$\varphi(a) = b.$$

Пусть σ — предельное порядковое число, т. е.

$$p^\sigma G = \bigcap_{\delta<\sigma} p^\delta G.$$

Следовательно,

$$a, b \in p^\delta G$$

для любого $\delta < \sigma$. Тогда по определению обобщённой высоты

$$h_p^*(a)_{p^\delta G} = h_p^*(a)_{p^\sigma G}$$

для любого $\delta < \sigma$ и, следовательно,

$$h_p^*(p^k a)_{p^\delta G} = h_p^*(p^k a)_{p^\sigma G}$$

для любых $\delta < \sigma$ и натурального k, т. е.

$$H_p(a)_{p^\delta G} = H_p(a)_{p^\sigma G}$$

для любого $\delta < \sigma$.

Поскольку

$$H_q(a)_{p^\delta G} = H_q(a)_{p^\sigma G}$$

для любых $\delta < \sigma$ и простого q, $q \neq p$, то

$$H(a)_{p^\delta G} = H(a)_{p^\sigma G}$$

для любого $\delta < \sigma$.

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$H(b)_{p^\delta G} = H(b)_{p^\sigma G}$$

для любого $\delta < \sigma$. Тогда

$$H(a)_{p^\delta G} \leq H(b)_{p^\delta G}.$$

По предположению индукции подгруппа $p^\delta G$ вполне транзитивна над $\mathrm{E}(G)$ для любого $\delta < \sigma$, т. е. существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такой, что $\varphi(a) = b$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на подгруппе $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и для любого простого числа p. Тогда, в частности, $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на

$$p^0 G = G,$$

т. е. G — вполне транзитивная группа.

$\square$

Следствие 1.4.7. *Для редуцированной p-группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — (вполне) транзитивная группа;

2) $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\omega G$ (в смысле Корнера);

3) $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ (в смысле определения 1.4.3).

Доказательство. Эквивалентности условий 1) и 2), 1) и 3) получаем из леммы 1.4.5 и теоремы 1.4.6 соответственно.

$\square$

Введём следующее понятие.

Определение 1.4.4. *Пусть*

$$G = A \oplus B.$$

Будем говорить, что автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G, если для любого $a \in A$ и для любого $x \in \mathrm{bc}(a)$ из существования

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$$

такого, что

$$(\varphi\rho)(a) = \rho(x),$$

следует существование

$$\psi \in \mathrm{Aut}(A)$$

такого, что

$$(\pi\varphi\rho)(a) = \psi(a),$$

где

$$\rho : A \to G \text{ и } \pi : G \to A$$

— канонические вложение и проекция соответственно.

Теорема 1.4.8. *Прямое слагаемое A транзитивной группы G является транзитивной группой тогда и только тогда, когда автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$G = A \oplus B,$$

причём G и A — транзитивные группы. Пусть

$$\rho : A \to G \text{ и } \pi : G \to A$$

— канонические вложение и проекция соответственно. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in A$ и для любого $x \in \mathrm{bc}(a)$ из транзитивности группы A следует существование

$$\psi \in \mathrm{Aut}(A)$$

такого, что
$$\psi(a) = x.$$

Рассмотрим элемент $\rho(x)$. Так как
$$H(\rho x) = H(\rho a),$$

то из транзитивности группы G следует существование
$$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$$

такого, что
$$(\varphi\rho)(a) = \rho(x).$$

Следовательно,
$$(\pi\varphi\rho)(a) = x = \psi(a).$$

Достаточность. Для транзитивности группы A согласно предложению 1.4.3 достаточно показать, что для любого ненулевого элемента
$$a \in A$$

следует, что
$$\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a).$$

Для произвольного элемента
$$x \in \mathrm{bc}(a)$$

имеем
$$H(x) = H(a).$$

Поскольку
$$H(\rho x) = H(\rho a),$$

то из транзитивности группы G следует существование
$$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$$

такого, что
$$(\varphi\rho)(a) = \rho(x).$$

Поскольку автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы группы A, то существует

$$\psi \in \mathrm{Aut}(A)$$

такой, что

$$x = (\pi\varphi\rho)(a) = \psi(a).$$

Следовательно,

$$\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a).$$

$\square$

1.5 О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп

В данном параграфе получено описание сепарабельных прямых произведений произвольных редуцированных абелевых групп.

Лемма 1.5.1. *Если прямое произведение редуцированных групп*

$$G_i,\ i \in I,$$

является сепарабельной группой, то

$$T(\prod_{i\in I} G_i) = \prod_{i\in I} T(G_i).$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть

$$T(\prod_{i\in I} G_i) \neq \prod_{i\in I} T(G_i).$$

Тогда группа

$$\prod_{i\in I} T(G_i)$$

содержит элемент

$$g = (\ldots,\ g_i,\ \ldots)$$

такой, что

$$o(g) = \infty.$$

Так как для любого $i \in I$ подгруппа $T(G_i)$ является сепарабельной (как периодическая часть сепарабельной группы), то каждый элемент

$$g_i,\ i \in I,$$

можно вложить во вполне разложимое ограниченное прямое слагаемое A_i группы $T(G_i)$. Тогда каждая группа

$$A_i,\ i \in I,$$

будет выделяться в своей группе G_i прямым слагаемым (как ограниченная сервантная подгруппа группы), поэтому

$$\prod_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} B_i \oplus \prod_{i\in I} A_i,$$

где

$$B_i \oplus A_i = G_i$$

для любого $i \in I$.

Так как группы

$$A_i,\ i \in I,$$

в совокупности не ограничены, то в группе

$$\prod_{i \in I} A_i$$

будет существовать элемент a такой, что

$$o(a) = \infty.$$

Группа

$$\prod_{i \in I} A_i,$$

как прямое слагаемое сепарабельной группы, будет сепарабельной группой [117]. Значит, элемент a можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое F конечного ранга данной группы, т. е.

$$F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k \oplus T_1 \oplus \ldots T_n,$$

где

$$F_1,\ \ldots,\ F_k$$

— группы без кручения ранга 1, а

$$T_1,\ \ldots,\ T_n$$

— циклические примарные группы.

Так как каждая группа

$$A_i,\ i \in I,$$

алгебраически компактна, то, как следует из [50, следствие 38.3],

$$\prod_{i \in I} A_i$$

будет алгебраически компактной группой.

Группы

$$F_i, \ i \in I,$$

как прямые слагаемые алгебраически компактной группы, также будут алгебраически компактными группами без кручения. Но это невозможно, так как единственными неразложимыми алгебраически компактными группами без кручения являются группы целых p-адических чисел J_p, которые имеют ранг $2^{\aleph_0}$.

□

В следующей теореме рассматривается критерий сепарабельности прямого произведения произвольных редуцированных абелевых групп.

Теорема 1.5.2. *Прямое произведение редуцированных групп*

$$G_i, \ i \in I,$$

является сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $G_i, \ i \in I,$ *— сепарабельные группы;*

2) существует конечное подмножество $J \subseteq I$ *такое, что группы*

$$T(G_i), \ i \in I \setminus J,$$

в совокупности ограничены;

3) $\prod\limits_{i \in I \setminus J} (G_i/T(G_i))$ *— сепарабельная группа.*

Доказательство. Пусть прямое произведение групп

$$G_i, \ i \in I,$$

является сепарабельной группой. Тогда выполнение условия 1) следует из [117]. Так как

$$\prod_{i \in I} G_i$$

— сепарабельная группа, то согласно лемме 1.5.1

$$T(\prod_{i \in I} G_i) = \prod_{i \in I} T(G_i).$$

Откуда следует, что для почти всех $i \in I$ группы

$$T(G_i),\ i \in I,$$

в совокупности ограничены. Таким образом, существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что

$$\prod_{i\in I} G_i = \bigoplus_{i\in J} G_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J} (A_i \oplus T(G_i)),$$

где

$$A_i \cong G_i/T(G_i),\ i \in I \setminus J.$$

Тогда

$$\prod_{i\in I} G_i = \bigoplus_{i\in J} G_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J} A_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J} T(G_i)$$

и, как следует из [117],

$$\prod_{i\in I\setminus J} (G_i/T(G_i))$$

— сепарабельная группа.

Обратно. Пусть существует конечное подмножество J множества I, что выполняются условия 2) и 3) данной теоремы. Тогда

$$\prod_{i\in I} G_i = \bigoplus_{i\in J} G_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J} A_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J} T(G_i),$$

где

$$A_i \cong G_i/T(G_i),$$

$$i \in I \setminus J.$$

Так как группы

$$T(G_i),\ i \in I,$$

в совокупности ограничены, то

$$\prod_{i\in I\setminus J} T(G_i)$$

— ограниченная группа, а значит, она сепарабельна. Таким образом, группа

$$\prod_{i\in I} G_i$$

является прямой суммой сепарабельных групп:

$$\bigoplus_{i\in J} G_i,\ \prod_{i\in I\setminus J} A_i \text{ и } \prod_{i\in I\setminus J} T(G_i),$$

а значит, сама является сепарабельной.

$\square$

Учитывая результаты работы [64], можно уточнить формулировку предыдущей теоремы.

Следствие 1.5.3. *Прямое произведение произвольных редуцированных групп*

$$G_i,\ i \in I,$$

является сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $G_i,\ i \in I,$ *— сепарабельные группы;*

2) существует конечное подмножество $J \subseteq I$ *такое, что группы*

$$T(G_i),\ i \in I \setminus J,$$

в совокупности ограничены;

3) группа

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,$$

где

$$\Lambda = I \setminus J,$$

$$A_\lambda \cong G_\lambda/T(G_\lambda),$$

$$\lambda \in \Lambda,$$

удовлетворяет следующим условиям:

a) не существует бесконечной, строго убывающей цепочки типов

$$\tau_{\lambda(n)} \in \tau(A_{\lambda(n)}),$$

где $\tau(A_{\lambda(n)})$ — множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы $A_{\lambda(n)}$ и все $\lambda(n)$ различны для разных n;

b) *не существует бесконечной последовательности типов*

$$\tau_{\lambda(n)} \in \tau(A_{\lambda(n)}),$$

в которой типы попарно несравнимы между собой, а все $\lambda(n)$ различны для разных n;

c) *предположим, что*

$$\lambda \in \Lambda \text{ и } \tau_\lambda \in \tau(A_\lambda),$$

тогда существуют конечные подмножества Λ_o из Λ и P_o из множества всех простых чисел P, для которых выполняется следующее условие: если $\tau_\lambda \leq \tau_\mu$, где $\tau_\mu \in \tau(A_\mu)$, тогда

$$p^\infty | \tau_\mu,$$

если

$$p | \tau_\lambda$$

всякий раз, когда

$$\mu \in \Lambda \setminus \Lambda_o$$

и

$$p \in P \setminus P_o.$$

Замечание 1.5.1. *Здесь*

$$p \,| \tau_\lambda$$

означает, что в некоторой заранее фиксированной характеристике, принадлежащей типу τ_λ, на месте, соответствующем простому числу p, стоит не нуль, и

$$p^\infty | \tau_\mu$$

означает, что в каждой характеристике, принадлежащей типу τ_μ, на месте, соответствующем простому числу p, стоит ∞.

Следующая теорема отражает влияние свойства вполне транзитивности на сепарабельность прямого произведения редуцированных групп.

Напомним, что редуцированная группа G называется *вполне транзитивной*, если для каждой пары элементов $a, b \in G$ таких, что $H(a) \leq H(b)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, переводящего элемент a в элемент b.

Теорема 1.5.4. *Группа*

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

является вполне транзитивной сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) G_i — сепарабельная группа для любого $i \in I$;

2) для любых однородных прямых слагаемых без кручения A и B из G таких, что

$$t(A) \neq t(B),$$

следует, что

$$\pi(A) \bigcap \pi(B) = \emptyset;$$

3)

$$G = \bigoplus_{i \in J_1} G_i \bigoplus \bigoplus_{i \in J_2} A_i \bigoplus \bigoplus_{j=1}^{k} \prod_{i \in I'} A_i^{(j)} \bigoplus \prod_{i \in I \setminus J_1} T(G_i),$$

где $J_1, \ J_2$ — конечные множества такие, что

$$J_1 \subset I,$$

$$J_2 \subset I \setminus J_1, \ I' = I \setminus (J_1 \cup J_2);$$

$$\prod_{i \in I \setminus J_1} T(G_i)$$

— ограниченная группа;

$$A_i \cong G_i / T(G_i)$$

для любого $i \in I \setminus J_1$;

$$\prod_{i \in I'} A_i^{(j)} \, (j = \overline{1, \ k})$$

— однородные группы без кручения, причём если

$$\prod_{i\in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus_{i\in I'} A_i^{(j)}$$

для некоторого $j=\overline{1,\ k}$, *то*

$$\prod_{i\in I'} A_i^{(j)}$$

имеет идемпотентный тип;

$$\bigoplus_{i\in J_2} A_i$$

— однородно разложимая группа без кручения.

Доказательство. Необходимость. Условие 2) следует из [138, лемма 2.1 и 2.2]. Выполнение условия 1) получаем из [136, следствие 3]. Покажем справедливость условия 3). Так как G — сепарабельная группа, то выполняются условия 2) и 3) из [136, следствие 3]. т. е. существует конечное подмножество

$$J_1 \subset I$$

такое, что группы

$$T(G_i)\,(i\in I\setminus J_1)$$

в совокупности ограничены. Тогда

$$G=\underset{i\in J_1}{\oplus} G_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J_1} G_i = \underset{i\in J_1}{\oplus} G_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J_1} A_i \oplus \prod_{i\in I\setminus J_1} T(G_i),$$

где

$$A_i \cong G_i/T(G_i)$$

для любого $i\in I\setminus J_1$ и

$$\prod_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$$

— ограниченная периодическая группа. Из выполнения условия 2) данного следствия и условия б) из [136, следствие 3] получим существование конечного подмножества

$$J_2 \subset I\setminus J_1 \text{ и } k\in\mathbb{N}$$

таких, что

$$\prod_{i\in I\setminus J_1} A_i = \prod_{i\in J_2} A_i \bigoplus \prod_{i\in I'} A_i,$$

где

$$k = \max|\tau(A_i)|_{i\in I'}$$

и

$$\tau(A_i) \ \ (i \in I',\ I' = I \setminus (I_1 \bigcup I_2))$$

— множество типов прямых слагаемых без кручения ранга 1 групп A_i. Так как каждая группа

$$A_i \ (i \in I')$$

является вполне транзитивной сепарабельной группой без кручения, то, как вытекает из [138, теорема 2.4], она — однородно разложимая группа. Тогда

$$\prod_{i\in I'} A_i = \prod_{i\in I'} \bigoplus_{j=1}^{k} A_i^{(j)} = \bigoplus_{j=1}^{k} \prod_{i\in I'} A_i^{(j)},$$

причём для всякого $j = \overline{1,\ k}$ такого, что

$$\prod_{i\in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus_{i\in I'} A_i^{(j)},$$

следует, что

$$\prod_{i\in I'} A_i^{(j)}$$

— однородная группа идемпотентного типа [73]. Однородная разложимость группы

$$\bigoplus_{i\in J_2} A_i$$

также следует из её вполне транзитивности и сепарабельности.

Достаточность. Так как условия [138, теоремы 4.14] выполняются, то G — вполне транзитивная группа. Поскольку G_i — сепарабельная группа для любого $i \in I$, то для сепарабельности группы G достаточно заметить, что

$$\prod_{i\in I'} A_i^{(j)}$$

— сепарабельная группа для любого $j = \overline{1,\ k}$ [136, следствие 3].

□

Замечание 1.5.2. *Если в теореме 1.5.4 группы*

$$G_i\,(i \in I)$$

являются счётными, то о группах

$$\bigoplus_{i \in J_1} G_i \bigoplus \bigoplus_{i \in J_2} A_i$$

и

$$A_i^{(j)} \quad (i \in I',\ j = \overline{1,\ k})$$

из условия 3) можно получить дополнительную информацию: эти группы вполне разложимы [117, следствие 1.6], из чего следует, что если G — смешанная группа, то она расщепляется.

1.6 О равенстве нулю группы $\mathrm{Hom}(-, C)$

В следующей лемме описание группы A, для которой выполняется равенство

$$\mathrm{Hom}(A, C) = 0,$$

в случае когда C — группа без кручения, сводится к случаю, когда A — непериодическая, неделимая группа.

Лемма 1.6.1. *Пусть C — ненулевая группа без кручения. Группа*

$$\mathrm{Hom}(A, C) = 0$$

тогда и только тогда, когда группа A удовлетворяет одному из следующих условий:

1) A — периодическая группа;

2) A — непериодическая группа, C — редуцированная группа, причём либо A — делимая группа,
либо $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, *если A — непериодическая, неделимая группа.*

Доказательство. Пусть

$$\mathrm{Hom}(A, C) = 0.$$

Для группы A возможны следующие случаи: 1) A — периодическая группа и 2) A— непериодическая группа. Если выполняется случай 1), то из [50, с. 213] следует обратное утверждение, т. е.

$$\mathrm{Hom}(A, C) = 0.$$

Пусть выполняется 2), т. е. пусть A — непериодическая группа. Допустим, что C содержит делимую подгруппу D, тогда

$$\mathrm{Hom}(< a >, < d >) \neq 0,$$

где

$$a \in A,\ o(a) = \infty \text{ и } d \in D.$$

Поскольку D — делимая группа, то любой ненулевой гомоморфизм из $< a >$ в D будет продолжаться до ненулевого гомоморфизма из A в D, что приводит к противоречию. Таким образом, C — редуцированная группа.

Если A — делимая, то из [50, с. 213] следует обратное утверждение, т. е.

$$\mathrm{Hom}(A,\, C) = 0.$$

$\square$

Теорема 1.6.2. *Пусть C — ненулевая редуцированная группа без кручения и A — непериодическая, неделимая группа. Группа*

$$\mathrm{Hom}(A,\, C) = 0$$

тогда и только тогда, когда для редуцированной части $A' \neq 0$ группы A выполняется:

1) *если $T(A') = 0$, то справедливо одно из условий:*

   a) *A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}$, и выполняется одно из условий:*

      a_1) *для любого $f \in \mathrm{Hom}(A',\, C)$ существует $0 \neq c \in C$ такой, что* $\mathrm{im}(f) \subseteq < c >$;

      a_2) *для любого гомоморфизма $\beta : A' \to C$ найдётся гомоморфизм $\alpha : A' \to F_{\mathrm{m}}$ такой, что $\pi\alpha = \beta$, т. е. следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathrm{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

      коммутативна, где F_{m} — свободная группа и π — эпиморфизм;

   b) *для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A',\, C)$ следует:*

      b_1) *существует сервантная подгруппа C' ранга 1 типа $t(C')$ в группе C, содержащая* $\mathrm{im}(\varphi)$;

      b_2) *для любого элемента $a \in A'$ такого, что $t(a) < t(C')$, следует, что* $a \in \ker(\varphi)$;

b_3) группа A' не содержит прямого слагаемого ранга 1, изоморфного C';

2) если $T(A') \neq 0$, то факторгруппа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию 1).

Доказательство. Пусть $A = A' \oplus D$ — непериодическая, неделимая группа, где A' — редуцированная и D — делимая части группы A. Пусть

$$T(A') = 0.$$

Так как

$$\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C) \oplus \mathrm{Hom}(D, C)$$

и, как показано выше,

$$\mathrm{Hom}(D, C) = 0.$$

Тогда из

$$\mathrm{Hom}(A, C) = 0$$

следует, что

$$\mathrm{Hom}(A', C) = 0,$$

группа A' при этом не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}$, и справедливость условий a_1) и b) также очевидна.

Пусть выполняется условие a_1) и A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}$. Допустим противное, т. е. пусть

$$\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0.$$

Поскольку C — редуцированная группа, то

$$\mathrm{Hom}(A, C) \cong \mathrm{Hom}(A', C).$$

Таким образом, существует

$$0 \neq f \in \mathrm{Hom}(A', C),$$

т. е. найдется элемент

$$0 \neq c \in C$$

такой, что

$$\mathrm{im}(f) \subseteq < c > \cong \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{im}(f) \cong \mathbb{Z}.$$

Так как f будет расщепляться, то в группе A' найдется прямое слагаемое, изоморфное $\mathbb{Z}$, что противоречит допущению.

Докажем, что выполняется условие a_2). Пусть для определённости группа C содержит систему образующих мощности $\mathbf{m}$, тогда существует эпиморфизм

$$\pi : F_{\mathbf{m}} \to C$$

[50, следствие 14.3], где

$$F_{\mathbf{m}} = \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbb{Z}.$$

Так как

$$\mathrm{Hom}(A', \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Hom}(A', \prod_{\mathbf{m}} \mathbb{Z}) \cong \prod_{\mathbf{m}} \mathrm{Hom}(A', \mathbb{Z})$$

и

$$\mathrm{Hom}(A', \mathbb{Z}) = 0$$

[81, теорема 3], то

$$\mathrm{Hom}(A', \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbb{Z}) = 0.$$

Таким образом, следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ F_{\mathbf{m}} \arrow[r, "\pi"] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна, где

$$\alpha = \beta = 0.$$

Обратно. Пусть A' не содержит прямого слагаемого, изоморфного $\mathbb{Z}$, и диаграмма в условии теоремы коммутативна, т. е.

$$\pi\alpha = \beta,$$

где

$$F_{\mathbf{m}} = \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\mathrm{Hom}(A', \mathbb{Z}) = 0$$

[81, теорема 3] и, следовательно,

$$\mathrm{Hom}(A', \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbb{Z}) = 0,$$

т. е. $\alpha = 0$. Тогда $\beta = 0$.

Пусть выполняется условие b) и допустим противное, т. е. пусть

$$\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0.$$

Поскольку C — редуцированная группа, то

$$\mathrm{Hom}(A', C) \neq 0.$$

Следовательно, существуют

$$0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A', C)$$

и C' — сервантная подгруппа ранга 1 группы C такие, что

$$\mathrm{im}(\varphi) \subseteq C'.$$

Так как при гомоморфизме типы элементов не уменьшаются и для любого элемента

$$d \in A'$$

такого, что

$$t(d) < t(C'),$$

имеем

$$d \in \ker(\varphi).$$

Поэтому для любого элемента

$$a \in A'$$

такого, что

$$\varphi(a) \neq 0,$$

получим

$$t(\varphi(a)) = t(C'),$$

т. е.

$$t(\mathrm{im}(\varphi)) = t(C').$$

Так как

$$r(\mathrm{im}(\varphi)) = r(C') = 1$$

и

$$t(\mathrm{im}(\varphi)) = t(C'),$$

то

$$\mathrm{im}(\varphi) \cong C'.$$

Следовательно,

$$A'/\ker(\varphi) \cong C'$$

и все элементы $A' \setminus \ker(\varphi)$ имеют тип $t(C')$. Поскольку $\ker(\varphi)$ — сервантная подгруппа в группе A', то $\ker(\varphi)$ — прямое слагаемое группы A' [51, предложение 86.5], имеющее дополнительное прямое слагаемое, изоморфное C', что противоречит допущению.

2) Пусть

$$T(A') \neq 0$$

и

$$\mathrm{Hom}(A,\ C) = 0,$$

тогда

$$\mathrm{Hom}(A',\ C) = 0.$$

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow T(A') \xrightarrow{\alpha} A' \xrightarrow{\beta} A'/T(A') \longrightarrow 0,$$

которая индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'/T(A'), C) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(A', C) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(T(A'), C). \tag{1.6.1}$$

Так как

$$\mathrm{Hom}(A', C) = 0,$$

то β^* — изоморфизм и, следовательно,

$$\mathrm{Hom}(A'/T(A'), C) = 0,$$

т. е. группа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию 1) данной теоремы.

Обратно. Пусть группа $A'/T(A')$ является либо непериодической делимой группой, либо удовлетворяет условию 1) данной теоремы, тогда

$$\mathrm{Hom}(A'/T(A'),\, C) = 0.$$

Поскольку $T(A')$ — периодическая группа, а C — группа без кручения, то

$$\mathrm{Hom}(T(A'),\, C) = 0$$

и, как следует из точности последовательности (1.6.1),

$$\mathrm{Hom}(A',\, C) = 0.$$

Тогда из изоморфизма

$$\mathrm{Hom}(A,\, C) \cong \mathrm{Hom}(A',\, C) \oplus \mathrm{Hom}(D,\, C)$$

и равенства

$$\mathrm{Hom}(D,\, C) = 0$$

следует, что $\mathrm{Hom}(A,\, C) = 0$.

$\square$

В данной главе были получены следующие важные результаты:

— получено описание нередуцированной абелевой группы, имеющей регулярный центр кольца эндоморфизмов (теорема 1.1.9). Найдены необходимые и достаточные условия регулярности центра кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы (теорема 1.1.10);

— найдены необходимые и достаточные условия регулярности кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы (теорема 1.1.12);

— получено описание нередуцированной абелевой группы, имеющей коммутативное кольцо эндоморфизмов (предложение 1.2.3). Выделен класс абелевых групп, в котором исследование смешанных групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов сводится к исследованию групп без кручения с соответствующим кольцом эндоморфизмов (теорема 1.2.4);

— в теореме 1.3.3 даётся описание групп с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов из некоторого класса $\mathbb{S}$;

— получен критерий (вполне) транзитивной редуцированной группы (теорема 1.4.6). Найдены некоторые необходимые и достаточные условия транзитивности прямого слагаемого транзитивной группы (теорема 1.4.8);

— в следствии 1.5.3 предлагается описание сепарабельных прямых произведений произвольных абелевых редуцированных групп;

— в лемме 1.6.1 и теореме 1.6.2 даются некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы $\mathrm{Hom}(A, C)$ для произвольной группы без кручения C.

Глава 2

О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевых групп

2.1 О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения

Напомним некоторые понятия.

Абелева группа A называется *сепарабельной*, если любую её конечную систему элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое S группы A.

Абелева группа называется *вполне разложимой* , если она является прямой суммой абелевых групп, каждая из которых изоморфна подгруппам групп Q или $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Группа без кручения A, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип, называется *однородной.*

Напомним, что под *радикалом Джекобсона* $\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G))$ кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(G)$ группы G будем понимать следующую его характеризацию:

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, \beta \in \mathrm{E}(G),\ (1-\alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(G)\}$$

[69, гл. 4, §15, теорема 15.3].

Лемма 2.1.1. *Пусть G — редуцированная группа без кручения и $\alpha \in \mathrm{E}(G)$. Для того чтобы $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, необходимо и достаточно выполнения равенств*

$$\ker(\alpha) \bigcap p\,G = 0 \text{ и } \alpha(q\,G) = q\,G$$

для некоторых p, $q \in \pi(G)$.

Доказательство. Необходимость. Первое равенство следует из того, что

$$\alpha \in \mathrm{Aut}(G).$$

Покажем справедливость второго равенства. Включение

$$\alpha(p\,G) \subseteq p\,G$$

для любого $p \in \pi(G)$ получаем из вполне характеристичности подгруппы $p\,G$.

Обратно. Пусть $x \in p\,G$, тогда

$$x = \alpha(\alpha^{-1}(x)).$$

Так как

$$\alpha^{-1}(x) \in p\,G,$$

то

$$x \in \alpha(p\,G).$$

Достаточность. Пусть $x \in \ker(\alpha)$. Тогда для

$$p \in \pi(G)$$

такого, что

$$\ker(\alpha) \bigcap p\,G = 0,$$

следует, что

$$\alpha(px) = p(\alpha x) = 0.$$

Следовательно,

$$px \in \ker(\alpha) \bigcap p\,G = 0.$$

Поскольку G — группа без кручения, то $x = 0$.

Покажем, что α — сюръективное отображение. Рассмотрим произвольный элемент $y \in G$. Так как

$$\alpha(q\,G) = q\,G$$

для некоторого

$$q \in \pi(G),$$

то существует $x \in G$ такой, что

$$\alpha(qx) = qy.$$

Тогда

$$q(\alpha(x) - y) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha(x) = y$$

поскольку G — группа без кручения. Таким образом,

$$\alpha \in \mathrm{Aut}(G).$$

$\square$

По аналогии с идеалом $H(G)$, введённого Р. С. Пирсом для сепарабельных p-групп G, в [119] для редуцированных групп без кручения G определяется идеал

$$H'(G) = \{\varphi \in \mathrm{E}(G) \,|\, \forall p \in \pi(G),\, \forall x \in G,\, h_p(x) < \infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_p(x) < h_p(\varphi(x)\} = \bigcap_{p \in \pi(G)} p\,\mathrm{E}(G).$$

Рассмотрим также для редуцированной группы без кручения G множество

$$\begin{aligned} TF(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \,|\, &\forall x \in G, \forall \beta \in \mathrm{E}(G) \text{ и} \\ &y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x), \\ &n \in \mathbb{N}, \text{ последовательность } \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ сходится}\}. \end{aligned}$$

Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ рассматривается здесь относительно $\mathbb{Z}$-адической топологии группы G, которая определяется аналогично p-адической топологии. Разница лишь в том, что множество индексов $\mathbb{N}$ упорядочено так, что $n \leq m$ тогда и только тогда, когда n делит m. Естественно также, что вместо подгрупп $p^n G$ берутся подгруппы nG.

Предложение 2.1.2. *Пусть G — редуцированная группа без кручения, тогда*

$$H'(G)\bigcap TF(G) \subseteq \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное

$$\alpha \in H'(G)\bigcap TF(G).$$

Покажем, что для любого $\beta \in \mathrm{E}(G)$ следует, что

$$(1-\alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(G).$$

Согласно лемме 2.1.1 для этого достаточно проверить выполнимость двух условий:

$$1)\ \ker(1-\alpha\beta)\bigcap pG = 0$$

и

$$2)\ (1-\alpha\beta)qG = qG$$

для некоторых

$$p,\, q \in \pi(G).$$

1) Допустим противное, т. е. пусть для каждого

$$p \in \pi(G)$$

существует

$$0 \neq x \in \ker(1-\alpha\beta)\bigcap pG.$$

Тогда

$$(1-\alpha\beta)(x) = 0.$$

Следовательно,

$$x = (\alpha\beta)(x),$$

т. е.

$$h_p(x) = h_p((\alpha\beta)(x))$$

для любого $p \in \pi(G)$. Полученное равенство высот элементов приводит к противоречию, так как

$$\alpha\beta \in H'(G).$$

2) Имея включение

$$(1-\alpha\beta)qG \subseteq qG,$$

покажем, что

$$qG \subseteq (1-\alpha\beta)qG,$$

где

$$q \in \pi(G).$$

Рассмотрим произвольный элемент $a \in qG$. Так как $\alpha \in TF(G)$, то для любого $\beta \in \mathrm{E}(G)$ и

$$y_n = a + (\alpha\beta)(a) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(a)$$

последовательность

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

сходится относительно $\mathbb{Z}$-адической топологии группы G. Пусть

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Имеем

$$(1-\alpha\beta)y = (1-\alpha\beta)\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha\beta)(y_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(a-(\alpha\beta)^n(a)) = a - \lim_{n\to\infty}(\alpha\beta)^n(a).$$

Поскольку

$$\alpha\beta \in H'(G),$$

то

$$(\alpha\beta)^n(a) \in \bigcap_{p\in\pi(G)} p^n G$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\beta)^n(a) = 0.$$

Таким образом,

$$(1-\alpha\beta)(y) = a.$$

Так как

$$a \in qG,$$

то существует
$$a_1 \in G$$
такой, что
$$a = qa_1.$$
Тогда имеем
$$y_n = q(a_1 + (\alpha\beta)(a_1) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(a_1)) \in qG$$
для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как
$$y = \lim_{n\to\infty} y_n,$$
то существует $k \in \mathbb{N}$ такой, что
$$y - y_n \in qG$$
для любого $n \geq k$. Следовательно,
$$y \in qG.$$
Таким образом, показано, что $H'(G) \bigcap TF(G) \subseteq \mathrm{J}(\mathrm{E}(G))$.

$\square$

Напомним, что редуцированная группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых элементов
$$0 \neq a,\, b \in G$$
таких, что
$$h_p(a) \leq h_p(b)$$
при всех простых чисел p существует
$$\varphi \in \mathrm{E}(G)$$
со свойством
$$\varphi(a) = b.$$

Теорема 2.1.3. *Пусть редуцированная группа G удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) G — однородная вполне транзитивная группа;

2) $r_p(G) \leq 1$ для всякого простого числа p, тогда

$$H'(G)\bigcap TF(G) = \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)).$$

Доказательство. Поскольку группа G удовлетворяет условию 1 или 2, то

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) \subseteq H'(G)$$

[31, гл. 4, §22, предложение 22.4]. Согласно предложению 2.1.2 осталось показать, что

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) \subseteq TF(G).$$

Рассмотрим произвольное

$$\alpha \in \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)),$$

тогда для любого $\beta \in \mathrm{E}(G)$ следует, что

$$1 - \alpha\beta \in \mathrm{Aut}(G).$$

Пусть $a \in G$ и

$$y_n = a + (\alpha\beta)(a) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(a)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что последовательность

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

сходится. Действительно, так как

$$1 - \alpha\beta \in \mathrm{Aut}(G),$$

то существует $b \in G$ такой, что

$$(1 - \alpha\beta)(b) = a.$$

Тогда имеем

$$y_n = a + (\alpha\beta)(a) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(a) = (1 - (\alpha\beta)^n)(b)$$

или

$$b - y_n = (\alpha\beta)^n(b).$$

Поскольку

$$\alpha\beta \in \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) \subseteq H'(G),$$

то

$$h_p((\alpha\beta)^n(b)) \geq n$$

для каждого

$$p \in \pi(G)$$

и при любом

$$n \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$(\alpha\beta)^n(b) \in \bigcap_{p\in\pi(G)} p^n G$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□

Следствие 2.1.4. *Пусть редуцированная группа без кручения G является или однородной алгебраически компактной, или однородной сепарабельной группой. Тогда*

$$H'(G) \bigcap TF(G) = \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)).$$

*Доказательство.*Вытекает из предыдущей теоремы и из того факта, что редуцированная однородная алгебраически компактная и редуцированная однородная сепарабельная группы без кручения вполне транзитивны [31, гл. 4, §22, примеры а) и б)].

□

Таким образом, в следствии 2.1.4 показывается, в частности, описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения, что является некоторым решением первой части проблемы 18 б) из [31].

2.2 О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов периодической группы

Напомним некоторые понятия.

Редуцированная периодическая группа A называется сепарабельной, если любую её конечную систему элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$ можно вложить в прямое слагаемое S группы A, являющееся прямой суммой циклических p-групп.

Заметим, что редуцированная p-группа сепарабельна тогда и только тогда, когда она не содержит ненулевые элементы бесконечной p-высоты.

Далее для всякого порядкового числа σ под подгруппой $p^\sigma G[p]$ группы G подразумевается подгруппа

$$p^\sigma G \bigcap G[p].$$

Следующее свойство некоторых подгрупп будем использовать в дальнейшем.

Замечание 2.2.1. *Для всякого натурального числа m, порядкового числа σ и простого числа p подгруппы mG, $G[m]$, $p^\sigma G$ и $p^\sigma G[p]$ являются вполне характеристическими в группе G.*

Ниже показывается, что лемма 13.1 [119], доказанная Р. С. Пирсом для сепарабельных p-групп, будет справедлива и в более общем случае.

Предложение 2.2.1. *Пусть G — редуцированная p-группа и $\alpha \in \mathrm{E}(G)$. Для того чтобы $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\ker(\alpha) \bigcap G[p] = 0 \text{ и } \alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$$

для любого порядкового числа σ.

*Доказательство.*Поскольку необходимость очевидна, то докажем достаточность. Если

$$\alpha(x) = 0 \text{ и } o(x) = p^k,$$

то

$$o(p^{k-1}x) = p$$

и

$$\alpha(p^{k-1}x) = p^{k-1}(\alpha(x)) = 0.$$

Таким образом,

$$p^{k-1}x \in \ker(\alpha) \bigcap G[p] = 0,$$

что противоречит порядку элемента x. Следовательно,

$$\ker(\alpha) = 0.$$

Покажем, что α — сюръективное отображение. Рассмотрим произвольное

$$y \in G,$$

где

$$o(y) = p^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство проведём индукцией по k. Пусть $k = 1$ и

$$h_p^*(y) = \sigma,$$

тогда из равенства

$$\alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$$

следует существование

$$x \in p^\sigma G[p]$$

такого, что

$$\alpha(x) = y.$$

Пусть для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что

$$1 \leq l \leq k-1,$$

утверждение справедливо. Пусть $l = k$ и рассмотрим элемент $p^{k-1}y$, принадлежащий $p^\sigma G[p]$ для некоторого порядкового числа

$$\sigma \geq k-1.$$

Тогда из равенства

$$\alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$$

следует существование

$$x_1 \in p^\sigma G[p]$$

такого, что

$$\alpha(x_1) = p^{k-1}y.$$

Так как

$$\sigma \geq k-1,$$

то

$$p^\sigma G[p] \subseteq p^\sigma G \subseteq p^{k-1}G.$$

Поэтому существует $x \in G$ такой, что

$$x_1 = p^{k-1}x.$$

Тогда

$$p^{k-1}y = \alpha(x_1) = \alpha p^{k-1}x$$

и

$$p^{k-1}(y - \alpha x) = 0.$$

Следовательно,

$$o(y - \alpha x) \leq p^{k-1},$$

и по предположению индукции существует $z \in G$ такой, что

$$y - \alpha x = \alpha z,$$

т. е.

$$y = \alpha(x + z) \in \mathrm{im}(\alpha).$$

Таким образом,

$$\mathrm{im}(\alpha) = G$$

и $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$.

$\square$

Р. С. Пирс в [119] для редуцированной p-группы G без элементов бесконечной p-высоты (т. е. для сепарабельной p-группы) вводит идеал

$$H(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, x \in G[p],\ h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\alpha x)\}.$$

Здесь $h_p(x) < \infty$ означает, что $h_p(x) = k$ для некоторого неотрицательного целого числа k.

Пусть G — редуцированная p-группа. Введём по аналогии с идеалом $H(G)$ идеал

$$H^*(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, 0 \neq x \in G[p] \Rightarrow h_p^*(x) < h_p^*(\alpha x)\}.$$

В следующем утверждении рассматривается более общий случай, чем в [31, предложение 20.2].

Лемма 2.2.2. *Пусть G — редуцированная p-группа, тогда*

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) \subseteq H^*(G).$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть существуют

$$\alpha \in \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G))$$

и

$$0 \neq x \in G[p]$$

такие, что

$$h_p^*(x) = h_p^*(\alpha(x)) = \sigma.$$

Если σ — конечное порядковое число (доказательство этого случая является доказательством предложения 20.2 в [31], но для полноты изложения приведём его здесь), то в силу [50, следствие 27.2] имеем

$$G =< a > \bigoplus A =< b > \bigoplus B,$$

где

$$\alpha(x) \in< a > \text{ и } x \in< b > .$$

Так как

$$h_p^*(x) = h_p^*(\alpha(x)),$$

то

$$o(a) = o(b).$$

Следовательно, существует изоморфизм

$$\beta :< a > \to < b >$$

такой, что

$$\beta(\alpha(x)) = x.$$

Пусть

$$\pi : G \to < a >$$

— каноническая проекция. Тогда

$$(1 - \beta\pi\alpha)(x) = 0,$$

где

$$(1 - \beta\pi\alpha)$$

— автоморфизм группы G. Следовательно,

$$x \in \ker(1 - \beta\pi\alpha),$$

что приводит к противоречию с выбором элемента x. Пусть σ — бесконечное порядковое число. Представим группу G в виде

$$G =< b > \bigoplus B.$$

Пусть

$$a \in < b >,\ h_p^*(a) = k \text{ и } o(a) = p.$$

Тогда

$$h_p^*(\alpha(x) + a) = h_p^*(x + a) = k$$

и

$$o(\alpha(x) + a) = o(x + a) = p.$$

Следовательно, существуют разложения

$$G =< c > \bigoplus C =< d > \bigoplus D,$$

где

$$\alpha(x) + a \in < c >$$

и

$$x + a \in < d > .$$

Проводя аналогичные рассуждения, как это сделано выше, находим эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такой, что

$$\varphi :< c > \to < d >,$$

причём

$$\varphi(\alpha(x) + a) = x + a$$

и

$$\varphi(C) = 0.$$

Тогда

$$(1 - \varphi\alpha)(x) = \varphi(a) - a.$$

Представим элемент a в виде следующих разложений:

$$a = nc + u = md + v,$$

где

$$nc \in < c >,\ u \in C,\ md \in < d > \ \text{ и } v \in D.$$

Следовательно, имеем

$$(1 - \varphi\alpha)(x) = \varphi(nc + u) - (md + v) = (\varphi(nc) - md) + (-v),$$

где

$$\varphi(nc) - md \in < c >$$

и

$$(-v) \in D.$$

Так как

$$\varphi(nc) - md \in < c >,$$

то

$$h_p^*(\varphi(nc) - md) = s$$

— конечное порядковое число. Тогда

$$h_p^*((1 - \varphi\alpha)(x)) = \min\{h_p^*(\varphi(nc) - md),\ h_p^*(-v)\} \leq s.$$

Таким образом, эндоморфизм $(1 - \varphi\alpha)$ группы G понизил высоту элемента x, что приводит к противоречию. $\square$

Приведём лемму, доказанную Р. С. Пирсом в [119, лемма 14.5].

Лемма 2.2.3 (Пирс). *Пусть G — сепарабельная p-группа. Равенство*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = H(G)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered} \textit{если } x \in G[p], \\ \alpha \in H(G) \textit{ и} \\ y_n = x + \alpha(x) + \ldots + \alpha^{n-1}(x), \\ \textit{то существует } y \in G \textit{ такой, что} \\ h_p(y - y_n) \to \infty \textit{ при } n \to \infty. \end{gathered} \tag{$\circledast$}$$

Последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, введённая Р. С. Пирсом в данной лемме, как будет показано ниже, играет существенную роль при описании элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы.

Для сепарабельной p-группы G рассмотрим множество

$$\begin{gathered} S_p(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall x \in G[p], \forall \beta \in \mathrm{E}(G) \text{ и} \\ y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N}, \\ \text{последовательность } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ сходится}\}. \end{gathered}$$

Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ рассматривается здесь в p-адической топологии группы G.

Напомним, что последовательность $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ элементов группы G сходится к пределу $g \in G$ в p-адической топологии группы G, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$g - g_i \in p^n G,$$

как только $i \geq k$.

Заметим также, что при доказательстве следующего утверждения использовались методы, разработанные Р. С. Пирсом для доказательства леммы 14.5 в [119].

Теорема 2.2.4. *Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы G имеет вид*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = S_p(G) \bigcap H(G).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) \subseteq S_p(G) \bigcap H(G).$$

Поскольку

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) \subseteq H(G)$$

(см. лемму 2.2.2 или [119, леммы 14.2 и 14.4]), то осталось показать, что

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) \subseteq S_p(G).$$

Рассмотрим произвольное $\alpha \in \mathrm{J}(\mathrm{E}(G))$, тогда

$$(1 - \alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(G)$$

для любого $\beta \in \mathrm{E}(G)$. Следовательно, для любого $x \in G[p]$ найдётся $y \in G[p]$ такой, что

$$(1 - \alpha\beta)(y) = x.$$

Пусть

$$y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned} y_n &= x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x) = \\ &= (1 + \alpha\beta + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1})(x) = \\ &= (1 + \alpha\beta + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1})(1 - \alpha\beta)(y) = (1 - (\alpha\beta)^n)(y). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Рассмотрев произвольное $n \in \mathbb{N}$ и $k = n + 1$, покажем, что

$$y - y_i \in p^n G$$

для любого $i \geq k$. Действительно,

$$y - y_i = (\alpha\beta)^i(y).$$

Так как
$$\alpha\beta \in H(G),$$
то
$$h_p((\alpha\beta)^i(y)) \geq i \geq k > n.$$
Следовательно,
$$y - y_i = (\alpha\beta)^i(y) \in p^n G,$$
т. е.
$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Докажем справедливость обратного включения. Пусть
$$\alpha \in S_p(G) \bigcap H(G).$$
Согласно определению радикала Джекобсона кольца $\mathrm{E}(G)$ и предложению 2.2.1 достаточно показать, что для любого $\beta \in \mathrm{E}(G)$ выполняются следующие условия:

1) $\ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p] = 0$;

2) $(1 - \alpha\beta)p^n G[p] = p^n G[p]$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что выполняется условие 1). Допустим противное, т. е. пусть существует
$$0 \neq x \in \ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p].$$
Тогда
$$(1 - \alpha\beta)(x) = 0$$
и, следовательно,
$$h_p((\alpha\beta)(x)) = h_p(x).$$
Последнее равенство противоречит тому, что
$$\alpha\beta \in H(G).$$

Проверим выполнение равенства 2). Пусть
$$x \in p^k G[p].$$
Так как
$$\alpha \in S_p(G),$$

то последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, где

$$y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x).$$

Так как

$$x \in p^k G[p]$$

и $p^k G[p]$ — вполне характеристическая подгруппа, то

$$y_n \in p^k G[p]$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

тогда существует $t \in \mathbb{N}$ такое, что

$$y - y_n \in p^k G[p],$$

как только $n \geq t$. Следовательно,

$$y \in p^k G[p].$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} h_p((1-(\alpha\beta))(y) - x) &= h_p(((1-(\alpha\beta))(y_n) - x) + \\ &\quad + (1-(\alpha\beta))(y-y_n)) = \\ &= h_p(-(\alpha\beta)^n(x) + (1-(\alpha\beta))(y-y_n)) \geq \\ &\geq \min\{h_p((\alpha\beta)^n(x)),\ h_p(y-y_n)\}. \end{aligned}$$

Здесь учитывалось то, что

$$y - y_n \in p^k G[p]$$

$$(\text{т. е. } y - y_n \in G[p])$$

и

$$\alpha\beta \in H(G),$$

тогда

$$\begin{aligned} h_p(1-(\alpha\beta))(y-y_n)) &\geq \min\{h_p(y-y_n),\ (\alpha\beta)(y-y_n)\} = \\ &= h_p(y-y_n). \end{aligned}$$

Так как
$$h_p((\alpha\beta)^n(x))$$
и
$$h_p(y - y_n)$$
стремятся к ∞ при $n \to \infty$, то
$$h_p((1 - (\alpha\beta))(y) - x) = \infty.$$
Следовательно,
$$(1 - (\alpha\beta))(y) - x = 0,$$
поскольку G — сепарабельная p-группа. Таким образом,
$$x = (1 - \alpha\beta)y$$
и справедливо равенство
$$(1 - \alpha\beta)p^kG[p] = p^kG[p]$$
для любых
$$k \in \mathbb{N} \text{ и } \beta \in \mathrm{E}(G).$$
Следовательно,
$$(1 - \alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(G)$$
для любого $\beta \in \mathrm{E}(G)$, т. е.
$$\alpha \in \mathrm{J}(\mathrm{E}(G)).$$
$\square$

Следующее утверждение вытекает из леммы 14.5 [31] и теоремы 2.2.4.

Следствие 2.2.5. *Для сепарабельной p-группы G следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = H(G)$;

2) если $x \in G[p]$, $\alpha \in H(G)$ и
$$y_n = x + \alpha(x) + \ldots + \alpha^{n-1}(x),$$
то существует $y \in G$ такой, что $h(y - y_n) \to \infty$ при $n \to \infty$;

3) $H(G) \subseteq S_p(G)$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно следует из леммы 14.5 [119]. Эквивалентность условий 1) и 3) вытекает из теоремы 2.2.4.

□

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предложения 2.2.1, но для полноты изложения приведём его.

Лемма 2.2.6. *Пусть G — делимая p-группа и $\alpha \in \mathrm{E}(G)$. Для того чтобы $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\ker(\alpha) \bigcap G[p] = 0 \text{ и } \alpha(G[p]) = G[p].$$

Доказательство. Необходимость. Первое равенство получим из определения автоморфизма группы G. Включение

$$\alpha(G[p]) \subseteq G[p]$$

следует из замечания 2.2.1. Пусть

$$x \in G[p].$$

Так как

$$\alpha \in \mathrm{Aut}(G),$$

то

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x).$$

Поскольку

$$\alpha^{-1}x \in G[p]$$

(см. замечание 2.2.1), то

$$x \in \alpha(G[p]).$$

Достаточность. Если

$$\alpha(x) = 0 \text{ и } o(x) = p^k,$$

то

$$o(p^{k-1}x) = p \text{ и } \alpha(p^{k-1}x) = 0.$$

Тогда
$$p^{k-1}x \in \ker(\alpha) \bigcap G[p] = 0,$$
что противоречит порядку элемента x. Следовательно, $\ker(\alpha) = 0$.

Покажем, что α — сюръективное отображение. Рассмотрим произвольное $y \in G$, где
$$o(y) = p^k,\ k \in \mathbb{N}.$$
Доказательство проведём индукцией по k. Пусть $k = 1$, тогда из равенства
$$\alpha(G[p]) = G[p]$$
следует существование $x \in G[p]$ такого, что $\alpha(x) = y$.

Пусть для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что
$$1 \leq l \leq k - 1,$$
утверждение справедливо. Пусть $l = k$ и рассмотрим элемент $p^{k-1}y$, принадлежащий $G[p]$. Тогда из равенства
$$\alpha(G[p]) = G[p]$$
следует существование $x_1 \in G[p]$ такого, что
$$\alpha(x_1) = p^{k-1}y.$$
Так как G — делимая p-группа, то
$$G = p^{k-1}G.$$
Следовательно, существует $x \in G$ такой, что
$$x_1 = p^{k-1}x.$$
Тогда
$$p^{k-1}y = \alpha(x_1) = \alpha p^{k-1}x$$
и
$$p^{k-1}(y - \alpha x) = 0.$$
Следовательно,
$$o(y - \alpha x) \leq p^{k-1},$$

и по предположению индукции существует $z \in G$ такой, что

$$y - \alpha x = \alpha z,$$

т. е.

$$y = \alpha(x + z) \in \operatorname{im}(\alpha).$$

Таким образом,

$$\operatorname{im}(\alpha) = G \text{ и } \alpha \in \operatorname{Aut}(G).$$

□

Замечание 2.2.2. *Если G — делимая p-группа, то*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = p\,\mathrm{E}(G).$$

Доказательство данного замечания можно найти в [102, лемма 2.2].

Пусть G — делимая p-группа. Рассмотрим идеал в кольце эндоморфизмов этой группы

$$L_p(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid G[p] \subseteq \ker(\alpha)\}.$$

Предложение 2.2.7. *Пусть G — делимая p-группа, тогда*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = L_p(G).$$

Доказательство. Покажем, что

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) \subseteq L_p(G).$$

Пусть

$$\alpha \in \mathrm{J}(\mathrm{E}(G))$$

и допустим противное, т. е. пусть

$$\alpha \notin L_p(G).$$

Последнее означает, что существует

$$0 \neq x \in G[p] \setminus \ker(\alpha).$$

Тогда
$$\alpha(x) = (p\alpha_1)(x) = \alpha_1(px) = 0$$
и, следовательно,
$$x \in \ker(\alpha),$$
что противоречит выбору элемента x.

Покажем, что
$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) \supseteq L_p(G).$$
Для этого необходимо доказать, что
$$(1 - \alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(G)$$
для произвольных
$$\alpha \in L_p(G) \text{ и } \beta \in \mathrm{E}(G).$$
Согласно лемме 2.2.6 покажем, что
$$\ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p] = 0.$$
Рассмотрим произвольный элемент
$$x \in \ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p],$$
тогда
$$(1 - \alpha\beta)(x) = 0.$$
Следовательно,
$$x = (\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = 0,$$
поскольку
$$\beta(x) \in G[p] \subseteq \ker(\alpha).$$

Также по лемме 2.2.6 необходимо показать, что
$$(1 - \alpha\beta)(G[p]) = G[p].$$
Поскольку
$$(1 - \alpha\beta)(G[p]) \subseteq G[p],$$
то для произвольного $y \in G[p]$ имеем
$$(1 - \alpha\beta)(y) = y - \alpha(\beta(y)) = y$$

$$\text{(так как } \beta(y) \in G[p] \subseteq \ker(\alpha)).$$

□

Заметим также, что некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов делимой p-группы бесконечного ранга можно найти в работе [106].

Замечание 2.2.3. *Пусть*

$$G = \bigoplus_{p \in P(G)} T_p(G)$$

— периодическая группа. Тогда

$$\mathrm{E}(G) = \prod_{p \in P(G)} \mathrm{E}(T_p(G)),$$
$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = \prod_{p \in P(G)} \mathrm{J}(\mathrm{E}(T_p(G))).$$

Доказательство. Следует из [51, §106, упр. 4(a)] и [69, §15, упр. 4].

□

Следствие 2.2.8. *Пусть G — делимая периодическая группа, тогда*

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = \prod_{p \in P(G)} L_p(T_p(G)).$$

Доказательство. Следует из замечания 2.2.3 и предложения 2.2.7.

□

2.3 О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой группы

Пусть A — некоторая p-группа, тогда с ней можно связать следующие два идеала её кольца эндоморфизмов:

$$H(A) = \{\delta \in \mathrm{E}(A) \mid x \in A[p],\ h_p(x) < \infty \Rightarrow \\ \Rightarrow h_p(x) < h_p(\delta x)\}$$

и

$$F(A) = \{\delta \in \mathrm{E}(A) \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0,\ \delta p^k A[p] = 0\}.$$

Пусть B — группа без кручения, D — делимая часть группы B. Обозначим через

$$H'(B) = \left\{ \varphi \in \mathrm{E}(B) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \text{ если } x \in D, \\ h_p(\varphi x) > h_p(x), \forall p \in \pi(B), \\ \text{если } x \in B \setminus D \end{array} \right\}$$

идеал кольца $\mathrm{E}(B)$.

Пусть теперь C — некоторая вполне разложимая группа без кручения и

$$C = \bigoplus_{t \in \Omega(C)} C_t$$

— её каноническое разложение, где $\Omega(C)$ есть множество типов всех прямых слагаемых группы C ранга 1, C_t — однородные компоненты группы C. Обозначим через $F'(C)$ левый идеал кольца $\mathrm{E}(C)$, состоящий из эндоморфизмов

$$\alpha \in \mathrm{E}(C)$$

таких, что

$$r(\alpha(C_t)) < \infty$$

для всех

$$t \in \Omega(C),$$

причём если группа C_t не почти делима, то

$$\alpha(C_t) = 0.$$

Напомним, что группа без кручения G называется *почти делимой*, если

$$1 \leq |\pi(G)| < \aleph_0.$$

Обозначим через $N(G)$ сумму всех идеалов кольца $\mathrm{E}(G)$, состоящих из локально нильпотентных эндоморфизмов группы G. Эндоморфизм α группы G называется *локально нильпотентным*, если для всякого элемента $a \in G$ существует натуральное число n, зависящее от a, что $\alpha^n(a) = 0$.

Нам потребуется следующая лемма. Поскольку она является частным случаем упр. 4 [50, с. 215], то мы приводим её без доказательства.

Лемма 2.3.1. . *Пусть A — группа без кручения ранга 1, B — циклическая группа порядка p^n, где p — простое число, тогда*

$$\mathrm{Hom}(A,\, B) = \begin{cases} 0, & \text{если } pA = A, \\ \mathbb{Z}(p^n), & \text{если } pA \neq A. \end{cases}$$

Рассмотрим основной результат данного параграфа.

Теорема 2.3.2. *Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ — смешанная вполне разложимая группа, где $G_1 = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ — вполне разложимая периодическая группа, $G_2 = \bigoplus\limits_{j\in J} B_j$ — вполне разложимая группа без кручения. Тогда*

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) = (\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) \times \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_2))) \oplus \mathrm{Hom}(G_2,\, G_1),$$

где

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) = \prod_{p\in P}(H(T_p(G_1)) \bigcap F(T_p(G_1))),$$

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_2)) = (H'(G_2) \bigcap F'(G_2)) + N(G_2),$$

группа

$$\mathrm{Hom}(G_2,\, G_1) \text{ изоморфна подгруппе группы } \prod_{i\in I} A_i^{J_i},$$

$J_i \subseteq J$, причём

$$B_\alpha \neq p_i B_\alpha$$

для любого $\alpha \in J_i$ *и*

$$B_\alpha = p_i B_\alpha \text{ для любого } \alpha \in J \setminus J_i,$$

$$o(A_i) = p_i^{k_i}, \ i \in I \text{ и } p_i \in P.$$

Доказательство. Поскольку

$$G = G_1 \oplus G_2$$

— смешанная вполне разложимая группа, где

$$G_1 = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

— вполне разложимая периодическая группа,

$$G_2 = \bigoplus_{j \in J} B_j$$

— вполне разложимая группа без кручения, то

$$\mathrm{Hom}(G_1,\, G_2) = 0$$

[50, VIII, §43, свойство A)]. Тогда $\mathrm{Hom}(G_2,\, G_1)$ есть $\mathrm{E}(G_1)$-$\mathrm{E}(G_2)$-бимодуль, и поэтому кольцо

$$\mathrm{E}(G) = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(G_1) & \mathrm{Hom}(G_2,\, G_1) \\ 0 & \mathrm{E}(G_2) \end{pmatrix}$$

является идеализацией этого бимодуля. Как хорошо известно [31, §21, упр.1], радикал Джекобсона кольца $\mathrm{E}(G)$ можно записать в виде

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G)) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}(\mathrm{E}(G_1)) & \mathrm{Hom}(G_2,\, G_1) \\ 0 & \mathrm{J}(\mathrm{E}(G_2)) \end{pmatrix}.$$

Отождествляя произведение

$$\mathrm{J}(\mathrm{E}(G_1)) \times \mathrm{J}(\mathrm{E}(G_2))$$

с

$$\begin{pmatrix} \mathrm{J}(\mathrm{E}(G_1)) & 0 \\ 0 & \mathrm{J}(\mathrm{E}(G_2)) \end{pmatrix},$$

а бимодуль

$$\mathrm{Hom}(G_2,\, G_1)$$

с

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Hom}(G_2,\, G_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим, что

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G)) = (\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) \times \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_2))) \oplus \mathrm{Hom}(G_2,\, G_1).$$

Поскольку G_1 — периодическая группа, то

$$G_1 = \bigoplus_{p \in P} T_p(G_1)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{E}(G_1) = \prod_{p \in P} \mathrm{E}(T_p(G_1))$$

[51, §106, упр.4(a)]. Как вытекает из [69, §15, упр. 4],

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) = \prod_{p \in P} \mathrm{J}(\,\mathrm{E}(T_p(G_1))).$$

Так как $T_p(G_1)$ — прямая сумма циклических p-групп, то

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_1)) = \prod_{p \in P} (H(T_p(G_1)) \bigcap F(T_p(G_1)))$$

[31, §20, теорема 20.10]. Из вполне разложимости группы G_2 имеем

$$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(G_2)) = (H'(G_2) \bigcap F'(G_2)) + N(G_2)$$

[31, §22, теорема 22.11].

Так как

$$G_1 = \bigoplus_{i \in I} A_i,$$
$$G_2 = \bigoplus_{j \in J} B_j,$$

то

$$\mathrm{Hom}(G_2,\ G_1) = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{j \in J} B_j,\ \bigoplus_{i \in I} A_i).$$

Как хорошо известно, точная последовательность

$$0 \to \bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{\gamma} \prod_{i \in I} A_i$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\bigoplus_{j \in J} B_j,\ \bigoplus_{i \in I} A_i) \xrightarrow{\gamma_*} \mathrm{Hom}(\bigoplus_{j \in J} B_j,\ \prod_{i \in I} A_i).$$

Учитывая, что

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{j\in J} B_j,\ \prod_{i\in I} A_i) \cong \prod_{i\in I}\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}(B_j,\ A_i),$$

тогда по лемме 2.3.1, получим существование подмножества J_i (возможно, пустого) во множестве J такого, что

$$\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}(B_j,\ A_i) \cong A_i^{J_i},$$

где

$$B_\alpha \neq p_i B_\alpha$$

для любого $\alpha \in J_i$ и

$$B_\alpha = p_i B_\alpha$$

для любого $\alpha \in J \setminus J_i$,

$$o(A_i) = p_i^{k_i},\ i \in I \text{ и } p_i \in P.$$

Следовательно, группа $\mathrm{Hom}(G_2,\, G_1)$ изоморфна подгруппе группы $\prod\limits_{i\in I} A_i^{J_i}$.

□

В данной главе можно выделить следующие основные результаты: получено описание радикала Джекобсона колец эндоморфизмов однородных сепарабельных групп без кручения (следствие 2.1.4), сепарабельных p-групп (теорема 2.2.4), смешанных вполне разложимых групп (теорема 2.3.2).

Заключение

В данной работе можно выделить следующие наиболее важные результаты.

Получено описание нередуцированной абелевой группы, имеющей регулярный центр кольца эндоморфизмов (теорема 1.1.9). Найдены необходимые и достаточные условия регулярности центра кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы (теорема 1.1.10). Полученные результаты дают некоторое решение одной из задач проблемы 16 [31].

Найдены необходимые и достаточные условия регулярности кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы (теорема 1.1.12), что является некоторым решением проблемы 7 из [108].

Получено описание нередуцированной абелевой группы, имеющей коммутативное кольцо эндоморфизмов (предложение 1.2.3). Выделен класс абелевых групп, в котором исследование смешанных групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов сводится к исследованию групп без кручения с соответствующим кольцом эндоморфизмов (теорема 1.2.4), что для данного класса групп является некоторым решением одной из задач проблемы 15 [31].

Получено описание абелевых групп из некоторого класса $\mathbb{S}$ с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов (теорема 1.3.3), что для данного класса является некоторым решением одной из задач проблемы 16 [31]. Приводится пример группы, не принадлежащей классу $\mathbb{S}$ с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов.

Получен критерий (вполне) транзитивной редуцированной группы (теорема 1.4.6). Найдены некоторые необходимые и достаточные условия транзитивности прямого слагаемого транзитивной группы (теорема 1.4.8), что является некоторым продвижением в решении проблемы 41 1) [31].

Получено описание сепарабельности прямых произведений произвольных абелевых редуцированных групп (следствие 1.5.3), важность исследования которых подчёркивает аналогичная задача, сформулированная как проблема в [93] для векторных групп.

Найдены некоторые необходимые и достаточные условия равенства нулю группы гомоморфизмов из группы A в произвольную группу без кручения C (лемма 1.6.1, теорема 1.6.2), что является некоторым решением проблемы 2 из [14].

Получено некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы без кручения (следствие 2.1.4), что даёт некоторое решение первой задачи проблемы 18 б) из [31].

Получено некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы (теорема 2.2.4), что даёт некоторое решение одной из задач проблемы 17 из [31].

Получено некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы (теорема 2.3.2), что даёт некоторое решение проблемы 19 из [31].

Поскольку эти результаты дают некоторое описание изучаемых объектов, то они могут быть полезны при исследовании абелевых групп и их колец эндоморфизмов.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту профессору Петру Андреевичу Крылову за внимание к работе и данные им полезные советы.

Список условных обозначений, символов, сокращений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$ — группа целых чисел

Q — группа (поле) рациональных чисел

$\mathbb{Z}(p^{\infty})$ — квазициклическая группа

$h_p(a)\,(h_p^*(a))$ — высота (обобщённая высота) элемента a

$H_p(a)$ — индикатор (ульмовская последовательность) элемента a

$\chi_A(a)$ или $\chi(a)$ — характеристика элемента a в группе без кручения A

$H(a)_A$ — высотная матрица элемента a в подгруппе A

$H_p(a)_A$ — строка высотной матрицы $H(a)_A$, соответствующая простому числу p

$\mathrm{E}\,(A)$ — кольцо эндоморфизмов (абелевой группы A) аддитивной группы кольца A

$\mathrm{Hom}(A,\, B)$ — группа гомоморфизмов из группы A в группу B

$t_A(a)$ или $t(a)$ — тип элемента a в группе без кручения A

$t(A)$ — тип однородной группы без кручения

$T(A)$ — периодическая часть группы A

$T_p(A)$ — p-компонента $T(A)$

$A \times B$ — произведение колец A и B

Q_p — группа всех рациональных чисел со знаменателем, взаимно простым с p

J_p — группа целых p-адических чисел

Q_p^* — кольцо целых p-адических чисел

$\mathbb{Z}(m)$ — циклическая группа порядка m

$< a >$ — циклическая группа, порожденная элементом a

$o(a)$ — порядок элемента a

$A \subsetneqq B$ — множество A строго содержится во множестве B

$o(A)$ — порядок группы A

$\mathbb{Z}_m$ — кольцо вычетов по модулю m

$(m,\ n)$ — наибольший общий делитель натуральных чисел m и n

P — множество всех простых чисел

$\pi(A)$ — множество всех простых чисел p таких, что $pA \neq A$

$P(A)$ — множество всех простых чисел p таких, что $T_p(A) \neq 0$

$\mathrm{Aut}(A)$ — группа автоморфизмов группы A

$\mathrm{End}(A)$ — группа эндоморфизмов группы A

$\mathrm{J}(\,\mathrm{E}(A)) = \{\alpha \in \mathrm{E}(A) \mid \forall\,\beta \in \mathrm{E}(A),\ (1-\alpha\beta) \in \mathrm{Aut}(A)\}$ — радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы A

$r_p(A)$ — p-ранг группы A

$A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$ — подмножество элементов группы A

$\bigoplus\limits_{i\in I} A_i,\ \prod\limits_{i\in I} A_i$ — прямая сумма и прямое произведение групп (колец) $A_i,\ i \in I$, соответственно

$\mathrm{C}(\,S)$ — центр кольца S

$\mathrm{End}_S(A)$ — кольцо эндоморфизмов правого S-модуль A

$\mathrm{im}(f)$ $(\ker(f))$ — образ (ядро) гомоморфизма f

$F_{\mathbf{m}}$ — свободная группа с $\mathbf{m}$ свободными образующими

$\mathrm{Ann}\,_R(A)$ — аннулятор левого R-модуля A

$\mathrm{bfc}(a) = \{b \in G \,|\, H(a) \leq H(b)\}$ и $\mathrm{lfc}(a) = \{b \in G \,|\, \exists\varphi \in \mathrm{E}(G), \varphi(a) = b\}$ — вполне характеристические подгруппы, связанные с ненулевым элементом a

$\mathrm{bc}(a) = \Big\{b \in G \mid H(b) = H(a)\Big\}$ и $\mathrm{lc}(a) = \Big\{b \in G \,|\ \exists\varphi \in \mathrm{Aut}(G), \varphi(a) = b\Big\}$ — характеристические подмножества, связанные с ненулевым элементом a

$\mathrm{weak}(a) = \{b \in G \mid \exists\varphi,\ \psi \in \mathrm{E}(G),\ \varphi(a) = b,\ \psi(b) = a\}$ — подмножество, связанное с ненулевым элементом a

$H'(B) = \left\{ \varphi \in \mathrm{E}(B) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(x) = 0,\ \text{если } x \in D, \\ h_p(\varphi x) > h_p(x), \forall p \in \pi(B),\ \text{если } x \in B \setminus D \end{array} \right\}$ — идеал кольца $\mathrm{E}(B)$, где D — делимая часть группы без кручения B

$TF(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \,|\, \forall x \in G,\, \forall \beta \in \mathrm{E}(G)$ и $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится$\}$ — подмножество эндоморфизмов группы без кручения G

$p^\sigma G[p] = p^\sigma G \bigcap G[p]$ — подгруппа группы G

$H(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall\, x \in G[p],\, h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\alpha x)\}$ — идеал сепарабельной p-группы G

$S_p(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid \forall x \in G[p], \forall \beta \in \mathrm{E}(G)$ и $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),$ $n \in \mathbb{N},$ последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится$\}$ — подмножество эндоморфизмов сепарабельной p-группы G

$L_p(G) = \{\alpha \in \mathrm{E}(G) \mid G[p] \subseteq \ker(\alpha)\}$ — идеал в кольце эндоморфизмов делимой p-группы G

$F(A) = \{\delta \in \mathrm{E}(A) \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0,\ \delta p^k A[p] = 0\}$ — идеал в кольце эндоморфизмов p-группы A

$\Omega(C)$ — множество типов всех прямых слагаемых вполне разложимой группы C

$F'(C) = \{\alpha \in \mathrm{E}(C) \mid r(\alpha(C_t)) < \infty$ для всех $t \in \Omega(C),$ причём, если группа C_t не почти делима, то $\alpha(C_t) = 0$ $\}$ — левый идеал кольца эндоморфизмов вполне разложимой группы без кручения C

C_t — однородная компонента вполне разложимой группы без кручения C

$N(G)$ — сумма всех идеалов кольца $\mathrm{E}(G)$, состоящих из локально нильпотентных эндоморфизмов группы G

$p\,|\tau$ — обозначение того, что в некоторой заранее фиксированной характеристике, принадлежащей типу τ, на месте, соответствующем простому числу p, стоит не нуль

$p^\infty|\tau$ — обозначение того, что в каждой характеристике, принадлежащей типу τ, на месте, соответствующем простому числу p, стоит ∞

Список терминов

Список литературы

1. Абызов А. Н. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения / А. Н. Абызов, А. А. Туганбаев // Фундам. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, №7. — С. 3–38.

2. Беккер И. Х. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным / И. Х. Беккер, П. А. Крылов, А. Р. Чехлов // Абелевы группы и модули. — 1994. — С. 3–52.

3. Благовещенская Е. А. О прямых разложениях абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1983. — Т. 132. — С. 17–25.

4. Благовещенская Е. А. Прямые разложения абелевых групп конечного ранга без кручения / Е. А. Благовещенская, А. В. Яковлев // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, вып. 1. — С. 111–127.

5. Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые группы и их кольца эндоморфизмов. Математика в политехническом университете. — СПб., 2009. — 216 с.

6. Благовещенская Е. А. Кольца эндоморфизмов жёстких почти вполне разложимых абелевых групп // Фундам. и прикл. мат. — 2012. — Т. 17, №7. — С. 31–47.

7. Благовещенская Е. А. Группы с циклическим регуляторным фактором в классе почти вполне разложимых абелевых групп // Фундам. и прикл. мат. — 2013. — Т. 18, №4. — С. 23–31.

8. Буданов А. В. О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов однородной сепарабельной группы // Математические. зам. — 2010. — Т. 87, вып. 1. — С. 133–136.

9. Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1982. — С. 56–92.

10. Гриншпон С. Я. О вполне транзитивных абелевых группах / С. Я. Гриншпон, В. М. Мисяков // Абелевы группы и модули. — 1986. — С. 12–27.

11. Гриншпон С. Я. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп / С. Я. Гриншпон, В. М. Мисяков // Абелевы группы и модули. — 1991. — С. 23–30.

12. Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундам. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, №2. — С. 407–472.

13. Гриншпон С. Я. О равенстве нулю группы гомоморфизмов абелевых групп // Изв. ВУЗов. Математика. — 1998. — №9. — С. 42–46.

14. Гриншпон С. Я. Проблема 2 // Абелевы группы: труды Всероссийского симпозиума, 22–25 августа 2005 г. — Бийск: РИО БПГУ, 2005. — С. 60.

15. Гриншпон С. Я. Гомоморфные образы абелевых групп / С. Я. Гриншпон, Т. А. Ельцова // Фундам. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 17–24.

16. Гриншпон С. Я. Периодические IF-группы / С. Я. Гриншпон, М. М. Никольская // Фундам. и прикл. мат. — 2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 47–58.

17. Давыдова О. И. Факторно делимые абелевы группы ранга 1 // Фундам. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, №3. — С. 25–33.

18. Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II // Абелевы группы и модули. — 1985. — С. 31–41.

19. Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1986. — С. 36–53.

20. Иванов А. В. Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием // Абелевы группы и модули. — 1982. — С. 93–109.

21. Каш Ф. Модули и кольца / Ф. Каш. — М.: Мир, 1981. — 368 с.

22. Крылов П. А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник аспирантских работ по математике. — Томск, 1973. — С. 15–20.

23. Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, №2. — С. 77–84.

24. Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения, 1 // Абелевы группы и модули. — 1984. — С. 40–64.

25. Крылов П. А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1988. — С. 81–99.

26. Крылов П. А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. — 1990. — Т. 29, №5. — С. 549–560.

27. Крылов П. А. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы / П. А. Крылов, Е. Д. Классен // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, №5. — С. 1074–1085.

28. Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундам. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 793–812.

29. Крылов П. А. Об одном классе смешанных абелевых групп / П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова, Е. И. Подберезина // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2000. — №269. — С. 47–51.

30. Крылов П. А. Абелевы группы и регулярные модули / П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова // Математические зам. — 2001. — Т. 69, №3. — С. 402–411.

31. Крылов П. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. — Томск: Томский государственный университет, 2002. — 464 с.

32. Крылов П. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. — М.: Факториал Пресс, 2006. — 512 с.

33. Крылов П. А. Модули над областями дискретного нормирования / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. — М.: Факториал Пресс, 2007. — 384 с.

34. Крылов П. А. Группа $\mathrm{Hom}(A, B)$ как артинов $\mathrm{E}(B)$- или $\mathrm{E}(A)$-модуль / П. А. Крылов, Е. И. Подберезина // Фундам. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 81–96.

35. Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2007. — №1. — С. 17–27.

36. Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Математический сб. — 1941. — Т. 9. — С. 165–182.

37. Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Математический сб. — 1945. — Т. 16. — С. 129–162.

38. Куликов Л. Я. Обобщённые примарные группы // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 247–326.

39. Куликов Л. Я. О прямых разложениях групп // Укр. мат. журн. — 1952. — Т. 4. — С. 230–275; 347–372.

40. Куликов Л. Я. Обобщенные примарные группы. II // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 85–167.

41. Курош А. Г. Теория групп / А. Г. Курош. — М.: Наука, 1967. — 648 с.

42. Мальцев А. И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Математический сб. — 1988. — Т. 4. — С. 45–68.

43. Мисяков В. М. Вполне транзитивность редуцированных абелевых групп // Абелевы группы и модули. — 1994. — С. 134–156.

44. Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Математический сб. — 1962. — Т. 57. — №3. — С. 375–383.

45. Мишина А. П. Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. и мех. — 1962. — №4. — С. 39–43.

46. Тимошенко Е. А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. — 2011. — Т. 4. — С. 541–550.

47. Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца / А. А. Туганбаев. — М.: МЦНМО, 2009. — 472 с.

48. Фомин А. А. Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов // Математические зам. — 1984. — Т. 36, №2. — С. 179–187.

49. Фомин А. А. Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп // Фунд. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, №3. — С. 223–244.

50. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. — М.: Мир, 1974. — Т. 1. — 335 с.

51. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. — М.: Мир, 1977. — Т. 2. — 416 с.

52. Царёв А. В. Псевдорациональный ранг факторно делимой группы // Фундам. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, №3. — С. 201–213.

53. Царёв А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторноделимые группы // Алгебра и анализ. — 2006. — Т. 18, №4. — С. 198–214.

54. Царёв А. В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Математические зам. — 2006. — Т. 80, вып. 3. — С. 437–448.

55. Чеглякова С. В. Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Фундам. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — С. 627–629.

56. Чехлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Математические зам. — 2001. — Т. 69, №6. — С. 944–949.

57. Чехлов А. Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p- ранга // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, №6. — С. 698–715.

58. Чехлов А. Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, №4. — С. 520–539.

59. Чехлов А. Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2009. — №2(6). — С. 78–84.

60. Чехлов А. Р. Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фундам. и прикл. мат. — 2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 183–219.

61. Чехлов А. Р. Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, №5. — С. 1182–1187.

62. Яковлев А. В. К проблеме классификации абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. науч. семинаров Ленингр. отделения мат. ин-та АН СССР. — 1976. — Т. 57. — С. 171–175.

63. Albrecht U. F. Abelian groups with self-injective endomorphism rings // Comm. in Algebra. — 1987. — Vol. 15, is. 12. — P. 2451–2471.

64. Albrecht U. F. Separable vector groups / U. Albrecht, P. Hill // Contemp. Math.— 1989. — Vol. 87. — P. 155–160.

65. Albrecht U. F. Finitely generated and cogenerated qd groups / U. F. Albrecht, W. Wickless // Lecture Notes in Pure and Applied Math. — Vol. 236. — P. 13–26.

66. Albrecht U. F. Cancellation properties for quotient divisible groups / U. F. Albrecht, S. Breaz, C. Vinsonhaler, W. Wickless // J. Algebra. — 2007. — Vol. 317, is. 1. — P. 424–434.

67. Arnold D. M. Finite rank torsion free abelian groups and rings / D. M. Arnold // Lect. Notes Math. — 1982. — Vol. 931. — 191 p.

68. Arnold D. M. Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups II / D. M. Arnold, C. Vinsonhaler // Lecture notes in Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 97–143.

69. Anderson F. W. Rings and Categories of Modules / F. W. Anderson, K. R. Fuller // Graduate Texts in Mathematics. — New York: Springer-Verlag, 1973. — Vol. 13. — 380 p.

70. Baer R. The subgroup of the elements of finite order of an abelian group // Ann. Math. — 1936. — Vol. 37. — P. 766–781.

71. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. J. — 1937. — Vol. 3. — P. 68–122.

72. Beaumont R. A. Torsion free rings / R. A. Beaumont, R. S. Pierce // Ill. J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61–98.

73. Beaumont R. A. A note on products of homogeneous torsion free abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22. — P. 434–436.

74. Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of almost completely decomposable groups // Lecture notes in pure and applied mathematics series. — 2004. — Vol. 236. — P. 45–54.

75. Butler M. C. R. A clacc of torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. London Math. Soc. — 1965. — Vol. 40. — P. 680–698.

76. Carroll D. On transitive and fully transitive abelian p-groups / D. Carroll, B. Goldsmith // Proc. Royal Irish Academy. — 1996. — Vol. 96A, №1. — P. 33–41.

77. Chekhlov A. R. On L. Fuchs' problems 17 and 43 / A. R. Chekhlov, P. A. Krylov // J. Math. Sci. — Vol. 143. — P. 3517–3602.

78. Corner A. L. S. The independence of Kaplansly's notions of transitivity and fully transitivity // Quart. J. Math. Oxford. — 1976. — Vol. 27, is. 105. — P. 15–20.

79. Danchev P. V. On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p-groups / P. V. Danchev, B. Goldsmith // J. Commut. Algebra. — 2011. — Vol. 3, is. 3. — P. 301–319.

80. Derry D. Über eine klasse von abelschen gruppen // Proc. London Math. Soc. — 1938. — Vol. 43, is. 6. — P. 490–506.

81. Dimitriĉ R. On coslender groups // Glasnik Matem. — 1986. — Vol. 21, is. 2. — P. 327–329.

82. Dugas M. Torsion-free E-uniserial groups of infinite rank / M. Dugas, J. Hausen // Contemp. Math. — 1989. — Vol. 87. — P. 181–189.

83. Dugas M. E-transitive groups in L / M. Dugas, S. Shelah // Abelian Group Theory. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 87. — P. 191–199.

84. Files S. On trasitive mixed abelian groups // Abelian Group Theory: Proceedings of the International Conference at Colorado Springs. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. — 1996. — Vol. 182. — P. 243–251.

85. Files S. Transitivity and fully transitivity for nontorsion modules // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 468–478.

86. Files S. Transitive and fully transitive groups / S. Files, B. Goldsmith // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, is. 6. — P. 1605–1610.

87. Fomin S. Über periodische untergruppen der unendlichen abelschen gruppen // Математический сб. — 1937. — T. 2(44), is. 5. — C. 1007–1009.

88. Fomin A. A. Quotient divisible abelian groups / A. A. Fomin, W. Wickless // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, is. 1. — P. 45–52.

89. Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers / A. A. Fomin // Abelian Groups and Modules. Proceedings of the international conference (Dublin, 1998). — Basel et al.: Birkhäuser. — 1999. — P. 87–100.

90. Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups // Contempt. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 117–128.

91. Fomin A. A. Abelian groups in Russia // Rocy Mount. J. Math. — 2002. — Vol. 32, is. 4. — P. 1161–1180.

92. Fuchs L. On generalized regular rings / L. Fuchs, K. M. Rangaswamy // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 71–81.

93. Fuchs L. Abelian groups / L. Fuchs. — Budapest, 1958. — 367 p.

94. Fuchs L. Abelian Groups / L. Fuchs. — New York: Springer, 2015. — 747 p.

95. Glaz S. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups / S. Glaz, W. Wickless // Comm. in Algebra. — 1994. — Vol. 22, is. 4. — P. 1161–1176.

96. Goldsmith B. Torsion-free weakly transitive abelian groups / B. Goldsmith, L. Strungmann // Comm. in Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 1177–1191.

97. Goldsmith B. Some transitivity results for torsion Abelian groups / B. Goldsmith, L. Strungmann // Houston J. Math. — 2007. — Vol. 33, is. 4. — P. 941–957.

98. Griffith P. Transitive and fully transitive primary abelian groups // Pacific J. Math. — 1968. — Vol. 25, is. 2. — P. 249–254.

99. Hausen J. The Jacobson radical of some endomorphism rings// Lecture Notes in Math. — 1977. — Vol. 616. — P. 332–336.

100. Hausen J. Ideals and radicals of some endomorphism rings / J. Hausen, J. A. Johnson // Pacific J. Math. — 1978. — Vol. 74, is. 2. — P. 365–372.

101. Hausen J. E-transitive torsion-free abelian groups // J. Algebra. — 1987. — Vol. 107, is. 1. — P. 17–27.

102. Hausen J. Determining Abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings / J. Hausen, J. A. Johnson // J. Algebra. — 1995. — Vol. 174. — P. 217–224.

103. Hennecke G. Transitivity and full transitivity for p-local modules / G. Hennecke, L. Strüngmann // Archiv der Math. — 2000. — Vol. 74. — P. 321–329.

104. Hill P. On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22, is. 2. — P. 414–417.

105. Hill P. On the theory and classification of abelian p-groups / P. Hill, Ch. Megibben // Math. Z. — 1985. — Vol. 190. — P. 17–38.

106. Haimo F. Endomorphism radicals which characterize some divisible groups // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. — 1967. — Vol. 10. — P. 25–29.

107. Kaplansky I. Infinite Abelian Groups / I. Kaplansky. — Ann. Arbor: University of Michigan Press, 1962. — 89 p.

108. Krylov P. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups / P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 110, is. 3. — P. 2683–2745.

109. Krylov P. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups / P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 442 p.

110. Le Borgne M. Groups λ-séparables // C. R. Acad. Sci. — 1975. — Vol. 281, is. 12. — P. 415–417.

111. Liebert W. The Jacobson radical of some endomorphism rings // J. Reine Angew. Math. — 1973.— Vol. 262/263. — P. 166–170.

112. Mader A. The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups // Publ. Math. Debrecen. — 1970. — Vol. 17, is. 1-4. — P. 299–306.

113. Mader A. Almost completely decomposable abelian groups / A. Mader. — Amsterdam: CRC Press, 2000. — 366 p.

114. Meehan C. Rational rings related to weakly transitive torsion-free groups / C. Meehan, L. Strungmann // J. Algebra and Its Appl. — 2009. — Vol. 8, is. 5. — P. 723–732.

115. Megibben C. Large subgroups and small homomorphisms // Michigan Math. J. — 1966. — Vol. 13. — P. 153–160.

116. Megibben C. A nontransitive, fully transitive primary group // J. Algebra. — 1969. — Vol. 13. — P. 571–574.

117. Megibben C. Separable mixed groups // Comment. Math. Univ. Carol. — 1980. — Vol. 21, is. 4. — P. 755–768.

118. Paras A. Fully transitive p-groups with finite first Ulm subgroup / A. Paras, L. Strungmann // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131. — P. 371–377.

119. Pierce R. S. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. Chicago. Ill. — 1963. — P. 215–310.

120. Pontrjagin L. The theory of topological commutative groups // Ann. of Math. — 1934. — Vol. 35, is. 2. — P. 361–388.

121. Rangaswamy K. M. Abelian groups with endomorphism images of special types // J. Algebra. — 1967. — Vol. 6. — P. 271–280.

122. Rangaswamy K. M. Abelian groups with self-injective endomorphism rings // Lect. Notes Math. — 1974. — Vol. 372. — P. 595–604.

123. Szele T. On Abelian groups with commutative endomorphism ring / T. Szele, J. Szendrei // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1951. — Vol. 2, is. 3-4. — P. 309–324.

124. Schultz P. On a paper of Szele and Szendrei on groups with commutative endomorphism rings // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1973. — Vol. 24, is. 1-2. — P. 59–63.

125. Wickless W. Multy-isomorphism for quotient divisible groups // Houston J. Math. — 2006. — Vol. 31. — P. 1–19.

Публикации автора по теме диссертации

126. Мисяков В. М. Вполне транзитивные и транзитивные абелевы группы // IV Международная алгебраическая конференция, посвящённая 60-летию профессора Ю. И. Мерзлякова: тез. докл. Новосибирск, 7 — 11 августа 2000 г. — Новосибирск, 2000. — С. 118.

127. Мисяков В. М. О некоторых свойствах абелевых групп // Международная конференция «Алгебра и её приложения», посвящённая 70-летию профессора В. П. Шункова и 65-летию профессора В. М. Бусаркина: тез. докл. Красноярск, 5—9 августа 2002 г. — С. 86–87.

128. Карпенко А. В. О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы / А. В. Карпенко, В. М. Мисяков // Абелевы группы: труды Всероссийского симпозиума. Бийск, 22—25 августа 2005 г. — Бийск, 2005. — С. 18–20.

129. Мисяков В. М. Об одной проблеме кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы // Международная конференция «Алгебра и её приложения», посвящённая 75-летию профессора В. П. Шункова: тез. докл. Красноярск, 12—18 августа 2007 г. — Красноярск, 2007. — С. 97.

130. Мисяков В. М. Некоторые вопросы теории абелевых групп // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящённая 130-летию Томского

государственного университета и 60-летию механико-математического факультета: сб. тез. Томск, 22—24 сентября 2008 г. — Томск, 2008. — С. 55.

131. Мисяков В. М. О некоторых классах абелевых групп с коммутативными кольцами эндоморфизмов // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящённая 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета: сб. тез. Томск, 22—24 сентября 2008 г. — Томск, 2008. — С. 56.

132. Мисяков В. М. О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевых групп // Международная конференция «Алгебра, логика и приложения»: тез. докл. Красноярск, 19—25 июля 2010 г. — Красноярск, 2010. — С. 62–63.

133. Мисяков В. М. О некоторых свойствах колец эндоморфизмов абелевых групп // Всероссийская конференция по математике и механике, посвящённая 135-летию Томского государственного университета и 65-летию механико-математического факультета: тез. докл. Томск, 02—04 октября 2013 г. — Томск, 2013. — С. 31.

134. Мисяков В. М. О равенстве нулю группы $\mathrm{Hom}(-, C)$ // Международный симпозиум, посвящённый 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова: сб. материалов. Москва, 02—06 ноября 2014 г. — Москва: МПГУ, 2014. — С. 57.

135. Мисяков В. М. О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевых групп // XI Школа-конференция по теории групп: тез. докл. Международной конференции, посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского. Красноярск, 27 июля — 02 августа 2016 г. — Красноярск, 2016. — С. 44.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в журналах из списка ВАК

136. Мисяков В. М. О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп // Вестн. Том. гос. ун-та. — 2006. — №290. — С. 70–71.

137. Карпенко А. В. О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы / А. В. Карпенко, В. М. Мисяков // Фундамент. и прикл. мат. —

2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 39–44.; анг. пер.: Karpenko A. V. On regularity of the center of the endomorphism ring of an Abelian group / A. V. Karpenko, V. M. Misyakov // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 154, is. 3. — P. 304–307.

138. Мисяков В. М. Вполне транзитивность абелевых групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 107–140.; анг. пер.: Misyakov V. M. Full transitivity of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 154, is. 3. — P. 350–373.

139. Мисяков В. М. О строении радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов смешанной вполне разложимой абелевой группы // Математический сб. — 2009. — Т. 200, №4. — С. 109–112.; анг. пер.: Misyakov V. M. Structure of the Jacobson radical in the endomorphism ring of a mixed completely decomposable Abelian group // Sb.: Math. — 2009. — Vol. 200, is. 4. — P. 573–576.

140. Мисяков В. М. Об одном свойстве кольца эндоморфизмов абелевой группы // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2010. — №3(11). — С. 38–46.

141. Мисяков В. М. О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой периодической группы // Изв. ИГУ. Сер. Мат. — 2011. — Т. 4, №4. — С. 94–100.

142. Мисяков В. М. О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения // Изв. вузов. Математика. — 2012. — №7. — С. 18–20.; анг. пер.: Misyakov V. M. The Jacobson radical of the endomorphism ring of a torsion-free abelian group // Rus. Math. — 2012. — Vol. 56, is. 7. — P. 15–17. — DOI: 10.3103/S1066369X1207002X.

143. Мисяков В. М. Абелевы группы с самоинъективным центром кольца эндоморфизмов // Изв. ИГУ. Сер. Мат. — 2013. — Т. 6, №4. — С. 48–52.

144. Мисяков В. М. О равенстве нулю группы $Hom(-,C)$ // Изв. ИГУ. Сер. Мат. — 2014. — Т. 7. — С. 46–51.

145. Мисяков В. М. Абелевы группы с регулярным центром кольца эндоморфизмов // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2016. — №2(40). — С. 33–36.

146. Мисяков В. М. Вполне транзитивные, транзитивные абелевы группы и некоторые их обобщения // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2016. — №4(42). — С. 23–32.