

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет»

На правах рукописи



Подрябинкин Евгений Викторович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ
НЬЮТОНОВСКИХ И НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЗАЗОРЕ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических
наук, профессор В.Я. Рудяк

Новосибирск – 2013

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	5
1 АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ	21
1.1 Метод численного решения уравнения переноса	22
1.1.1 Аппроксимация нестационарного члена	22
1.1.2 Аппроксимация конвективного члена	23
1.1.3 Аппроксимация диффузионного члена	24
1.1.4 Аппроксимация источникового члена	25
1.1.5 Нахождение геометрических характеристик ячейки	25
1.1.6 Вычисление градиентов и значений величины ϕ на гранях ячеек	26
1.1.7 Численная реализация алгоритма для решения уравнения переноса	26
1.2 Процедура коррекции скорости и давления SIMPLEC	27
1.2.1 Аппроксимация динамических уравнений	27
1.2.2 Уравнение поправки давления	28
1.2.3 Устранение осцилляций поля давления	30
1.3 Особенности алгоритма и его программной реализации	30
1.3.1 Вычислительная сетка	30
1.3.2 Программное представление вычислительной сетки	31
1.3.3 Программное представление матрицы СЛАУ	32
1.3.4 Программная реализация формирования СЛАУ для решения уравнения переноса	32
1.3.5 Граничные условия	33
1.3.6 Вычисление эффективной вязкости	34
1.3.7 Структура алгоритма численного решения уравнений гидродинамики	34
1.4 Тестирование алгоритма	35
1.4.1 Установившееся течение в круглой трубе	35
1.4.2 Спиральное течение в концентрическом кольцевом зазоре	38
1.4.3 Спиральное течение в канале с эксцентриситетом и сопоставление с экспериментальными данными	40
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЬЮТОНОВСКИХ И НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ	43
2.1 Постановка задачи	43

2.2	Ламинарное течение ньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре.....	46
2.3	Ламинарное течение степенной жидкости в цилиндрическом зазоре.....	51
2.3.1	Случай аксиального течения	51
2.3.2	Случай спирального течения степенной жидкости в концентрическом канале.....	53
2.3.3	Случай спирального течения степенной жидкости в канале с эксцентриситетом.....	55
2.4	Ламинарное течение жидкостей с предельным напряжением сдвига в цилиндрическом зазоре.....	57
2.4.1	Случай аксиального течения	57
2.4.2	Характеристики спирального течения.....	59
2.5	Момент и силы, действующие на внутренний цилиндр	66
2.5.1	Момент, действующий на внутренний цилиндр в ньютоновской жидкости	66
2.5.2	Силы, действующие на внутренний цилиндр в ньютоновской жидкости	69
2.5.3	Момент и силы, действующие на внутренний цилиндр в неньютоновских жидкостях.....	72
3	МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЬЮТОНОВСКИХ И НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ	79
3.1	Модель коэффициента молекулярной вязкости и численный метод моделирования турбулентных течений	80
3.1.1	Математическая модель.....	80
3.1.2	Численный алгоритм	83
3.2	Моделирование турбулентных течений ньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре	84
3.2.1	Характеристики аксиального напорного течения	84
3.2.2	Особенности спирального течения в осесимметричном зазоре.....	85
3.2.3	Характеристики спирального течения в канале с эксцентриситетом.....	87
3.3	Моделирование турбулентных течений неньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре.....	91
3.3.1	Случай аксиального напорного течения	91
3.3.2	Течение в концентрическом канале с вращением внутреннего цилиндра.....	94
3.3.3	Ламинарно-турбулентные режимы течения	95
3.3.4	Влияние эксцентриситета в течении с вращением внутреннего цилиндра	101
4	АЛГОРИТМЫ ДЛЯ БЫСТРОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ	104
4.1	Описание базы данных течений и её организация	104
4.2	Интерполяционный алгоритм для быстрого вычисления скалярных величин.....	106
4.3	Интерполяционный алгоритм для быстрого вычисления поля скорости	107

4.4	Применение методик сжатия данных для полей скорости	110
4.4.1	Сжатие при помощи воспроизводящих функций.....	111
4.4.2	Аппроксимация методом наименьших квадратов.....	111
4.4.3	Побитовое сжатие.....	112
4.5	Тестирование и верификация интерполяционных алгоритмов.....	113
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....		115
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		122
ПРИЛОЖЕНИЕ 1: ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЁТНЫХ СЕТОК В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИЛИНДРАМИ С ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ.....		132

Введение

Задача о течении жидкости в зазоре между двумя цилиндрами различного диаметра имеет множество практических приложений. Течения такого рода встречаются в теплообменниках, ротационных вискозиметрах, центрифугах, при бурении скважин, подшипниках скольжения и ряде других приложений. При этом, помимо течения жидкости вдоль оси цилиндрического канала (аксиального течения), как правило, имеет место также и вращательное, вызванное вращением внутреннего, внешнего или обоих цилиндров. Ситуация когда ось внутреннего цилиндра может не совпадает с осью внешнего, то есть имеет место эксцентриситет, нарушающий осевую симметрию существенно усложняет течение, однако является вполне типичной. Кроме этого, рабочая жидкость в упомянутых устройствах, как правило, имеет неньютоновскую реологию, а наряду с ламинарным зачастую реализуется турбулентный режим течения. Все эти особенности, расширяя класс рассматриваемых течений, существенно усложняют классическую задачу гидродинамики, однако, вместе с тем, делают её решение крайне востребованным.

В практических приложениях используется самая различная информация о течении. Например, для центрифуг, вискозиметров и буровых колонн необходимо знание момента гидродинамических сил, приложенных к цилиндрам. Для подшипников скольжения, помимо этого, важна информация о силах, действующих на цилиндры со стороны жидкости. В буровой индустрии и в процессе эксплуатации теплообменников огромное значение имеет информация о перепаде давления. В случаях, когда канал используется для гидротранспорта (как, например, при бурении скважин и в центрифугах) или теплообмена имеет практическое значение не только информация об интегральных характеристиках течения, но и поля скоростей, давления, вязкости и т.д.

Не удивительно, что попытки решения этой задачи для ряда частных случаев предпринимались начиная со второй половины прошлого века. Простейшим случаем здесь является ламинарное течение ньютоновской жидкости в концентричном цилиндрическом зазоре, для него известно точное аналитическое решение [1]. Нарушение осевой симметрии течения вследствие эксцентриситета усложняет задачу, однако для случая напорного течения всё же существует точное аналитическое решение в виде ряда в биполярной системе координат, впервые опубликованное Снидером (Snyder) [2]. А используя безынерционное приближение для узкого зазора, удаётся построить аналитическое решение и для вращательного течения

[3] в эксцентрическом зазоре, которое часто используется в гидродинамической теории смазки.

Под неньютоновскими жидкостями обычно понимают жидкости, в которых вязкость не остаётся постоянной при заданной температуре и давлении, а зависит от других факторов, таких как скорость деформации или предыстория течения жидкости. Все неньютоновские жидкости можно разделить на три группы: (1) неньютоновские вязкие жидкости или обобщённые ньютоновские жидкости, (2) неньютоновские нереостабильные жидкости, (3) неньютоновские вязкоупругие жидкости. К первым из перечисленных относятся жидкости, для которых напряжение в каждой точке в любой момент времени полностью определяется скоростью деформации в той же точке в тот же самый момент времени, то есть, определяющее уравнение, устанавливающее зависимость между тензором напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и тензором скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = g(\dot{\boldsymbol{\gamma}}). \quad (0.1)$$

Ко второму типу неньютоновских жидкостей относятся более сложные системы, в которых связь между напряжением и скоростью сдвига зависит от времени действия напряжения или предыстории жидкости. Кажущаяся вязкость может убывать (тиксотропные жидкости) или возрастать (реопектические жидкости) со временем при постоянной скорости деформации. Жидкости третьего типа обладают свойствами как твёрдого тела, так и жидкости. Они частично проявляют свойства упругого восстановления формы после снятия напряжения. Это более общий и более сложный для изучения класс жидкостей, чем первый. Эти жидкости также называют средами с памятью. Стоит отметить, что некоторые классы течений (в частности, развитые ламинарные стационарные течения) жидкостей второго и третьего типов хорошо описываются более простой моделью неньютоновской вязкой жидкости [4].

Механические и термодинамические принципы накладывают ограничения на вид функции g в уравнении (0.1). Как показано, например, в [5, 6] тензорная функция g должна быть линейной, с коэффициентом пропорциональности, зависящим лишь от второго инварианта тензора скоростей деформации $II(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}})$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(II(\dot{\boldsymbol{\gamma}}))\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (0.2)$$

Коэффициент η в (0.2) принято называть коэффициентом эффективной вязкости. В зависимости от знака производной эффективной вязкости $\partial\eta(s)/\partial s$ жидкости разделяют на два типа: дилатантные, где вязкость увеличивается с ростом скорости сдвига $\partial\eta(s)/\partial s > 0$, и псевдопластические, в которых вязкость, напротив, уменьшается $\partial\eta(s)/\partial s < 0$ (см. рис. 0.1). Типичным примером дилатантных жидкостей являются некоторые виды суспензий (как прави-

ло, концентрированные) твёрдых частиц. Псевдопластические жидкости распространены несколько шире: полимерные расплавы и растворы, различные смазки, буровые растворы, грязи, масляные краски, различные пасты и т.п. Уменьшение вязкости с увеличением скорости сдвига объясняется тем, что асимметричные частицы или молекулы полимеров вместо хаотических положений, которые они занимают в покоящейся жидкости, ориентируются большими осями вдоль направления потока, уменьшая тем самым вязкое трение. Эффективная вязкость убывает до тех пор, пока сохраняется возможность дальнейшего ориентирования молекул или частичек вдоль линий тока, а после этого не меняется. При этом предполагается, что ориентирование молекул или частичек при возрастании скорости сдвига происходит мгновенно или по меньшей мере гораздо быстрее изменения скорости сдвига во времени, так что временной эффект запаздывания пренебрежимо мал. Различные экспериментальные исследования свойств множества разнообразных жидкостей показали, что реология широкого класса жидкостей может быть описана так называемым степенным законом [5, 6, 7]

$$\eta(\dot{\gamma}) = k|\dot{\gamma}|^{n-1}. \quad (0.3)$$

Здесь n – показатель степени, а коэффициент k – так называемый индекс консистентности, размерность которого $[Па \cdot c^n]$. Несмотря на то, что эта модель предсказывает неограниченно большую вязкость при малых скоростях сдвига и неограниченно малую при высоких скоростях сдвига (хотя у реальных жидкостей значения максимальной и минимальной вязкости конечны), эта модель давно успешно применяется и в инженерном анализе. В литературе можно встретить отличные от (0.3) виды зависимости напряжений от скорости деформации для псевдопластиков, лишённые указанных выше недостатков [5, 6], однако они гораздо сложнее, содержат больше эмпирических констант, а их применение обычно не даёт никаких преимуществ, компенсирующих эти трудности.

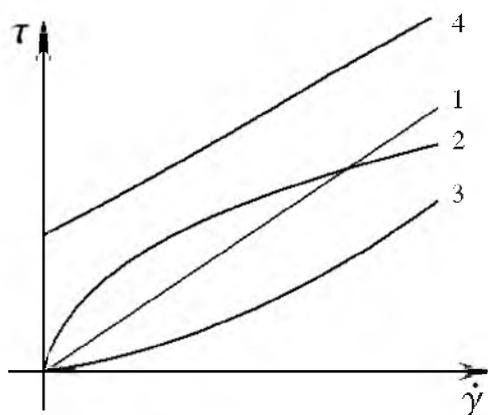


Рис. 0.1. Кривые зависимостей напряжения от скорости сдвига для различных реологических типов. 1 – ньютоновская жидкость; 2 – псевдопластическая жидкость; 3 – дилатантная жидкость; 4 – вязкопластическая жидкость.

Среди обобщённых ньютоновских жидкостей особое место занимают жидкости с предельным напряжением сдвига, называемые также вязкопластическими. Такие жидкости, как правило, содержат мельчайшие частицы или крупные молекулы полимеров, которые взаимодействуя, формируют жёсткую структуру. Для того чтобы эту структуру разрушить необходимо приложить определённое значение сдвигового напряжения τ_0 . Таким образом, эти жидкости ведут себя как твёрдое тело там, где напряжения не превосходят определённого предельного значения τ_0 и текут если это значение напряжения превышено (см. рис. 0.1). Пожалуй, наиболее известной при описании таких сред является модель вязкопластической жидкости Бингама [8]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = (\mu + \tau_0/|\dot{\boldsymbol{\gamma}})|\dot{\boldsymbol{\gamma}}, & |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| > 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| < \tau_0, & |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Естественная суперпозиция бингамовской (0.4) и степенной (0.3) моделей жидкости даёт реологическую модель Хершеля–Балкли (Herschel-Bulkley) [9], которая с хорошей точностью описывает практически все реальные обобщённые ньютоновские жидкости

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = (k|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^{n-1} + \tau_0/|\dot{\boldsymbol{\gamma}})|\dot{\boldsymbol{\gamma}}, & |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| > 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| < \tau_0, & |\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = 0. \end{cases} \quad (0.5)$$

В настоящей работе рассматриваются неньютоновские жидкости именно с такой реологией.

Уравнения гидродинамики для ламинарных течений неньютоновских жидкостей содержат нелинейные члены, связанные с переменной вязкостью, поэтому получение точных аналитических решения даже для самых простых течений является намного более сложной задачей, чем для ньютоновских сред. Тем не менее, в [10] такие решения приводятся для аксиального и плоского вращательного течения бингамовской жидкости в концентричном цилиндрическом зазоре. Для степенной жидкости получение подобного решения для аксиального течения сопряжено с решением трансцендентного уравнения, которое может быть разрешено лишь численно [7]. Аналогичные трудности возникают при построении асимптотического решения для спирального течения в концентрическом канале с близкими радиусами цилиндров [7]. А для жидкости Хершеля–Балкли аналитическое решение существует лишь для течения в круглой трубе [11].

Как видно, аналитические решения для задачи о течении в цилиндрическом зазоре существуют лишь для небольшого количества простейших частных случаев. Кроме того, зачастую использование аналитических решений на практике затруднительно, особенно если они даются в виде ряда или требуют применения численного интегрирования. Поэтому для инженерных целей обычно используются различные приближённые полуаналитические ре-

шения и корреляционные формулы, построенные с использованием эмпирических данных. Этими целями мотивирован ряд работ, проводившихся разными авторами и в разное время, по изучению упомянутого класса течений на основе экспериментов и численного моделирования. Интенсивное экспериментальное изучение течений в зазоре проводилось последние шесть десятилетий, однако в подобных экспериментах изучались характеристики лишь отдельно взятого течения или некоторой серии течений.

В одной из первых экспериментальных работ [12] авторы изучали ламинарные и турбулентные течения в зазоре с эксцентриситетом и близкими диаметрами. На основе экспериментов с водой им удалось установить, что в некотором диапазоне чисел Рейнольдса течение может быть ламинарным в узкой части эксцентрического зазора и турбулентным в широкой его части. Это обстоятельство затрудняет построение полуэмпирических формул для определения характеристик течения. Позже построенное точное аналитическое решение в цилиндрических каналах с эксцентриситетом [2] и ряд упрощённых инженерных способов нахождения важнейших характеристик потока [13, 14, 15] позволили полностью удовлетворить практические потребности в описании аксиальных ламинарных течений ньютоновской жидкости. По этой причине внимание экспериментаторов было сосредоточено преимущественно на турбулентных течениях и течениях неньютоновских жидкостей. Примерами работ для случая без вращения внутренней трубы могут служить экспериментальные работы [16, 17, 18], где были получены некоторые данные по сопротивлению канала и осреднённым профилям скорости на воздухе.

Вращение внутренней трубы в течениях ньютоновской жидкости приводит к потере устойчивости потока при сравнительно малых числах Рейнольдса. В таких случаях формирование тороидальных вихревых структур (вихрей Тейлора) в потоке предшествует переходу в развитый турбулентный режим [19]. В литературе можно встретить множество теоретических и экспериментальных работ, посвящённых этому феномену; вместе с тем, статей, посвящённых изучению характеристик ламинарных и турбулентных спиральных течений (т.е. суперпозиции цилиндрического течения Куэтта и напорного течения) не так много. Экспериментальные измерения характеристик отдельно взятых таких течений в канале с эксцентриситетом можно найти в статьях [12, 20, 21, 22, 23, 24]. В последней работе помимо экспериментальных данных построено приближённое численное решение для спирального течения ньютоновской жидкости путём уточнения решения для узкого зазора в безынерционном приближении. Это решение позволяет учесть появление зоны рециркуляции в широкой части зазора, описанное ещё в [1, 3], и отмечаемое экспериментаторами [20].

Однако систематическое изучение спиральных течений ньютоновской жидкости началось лишь со второй половины последнего десятилетия прошлого века, что связано с

быстрым развитием вычислительных технологий, позволивших численно решать эту задачу. Так на основе моделирования в работах [23, 25, 26, 27, 28] было изучено совместное влияние эксцентриситета вращения внутреннего цилиндра на поле скорости и перепад давления в ламинарном течении ньютоновской жидкости. Авторы этих работ отмечают возникновение возвратного течения в широкой части зазора, начиная с некоторого значения эксцентриситета, и дальнейший рост этой зоны с увеличением эксцентриситета. Перепад давления при вращении в эксцентрическом канале оказывается несколько выше, чем в случае без вращения. А несколько лет спустя появились работы, где были предприняты попытки моделирования турбулентных течений методом крупных вихрей [29] и даже путём прямого численного моделирования [30, 31]. Так в работе [30] Никитиным были описаны режимы, где одновременно сосуществуют ламинарные и турбулентные области в течении. Безусловно, это моделирование отдельных течений, а не изучение влияния входных параметров. Таким образом, турбулентные течения ньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращающимся внутренним цилиндром изучены всё ещё недостаточно хорошо, в отличие от ламинарных течений этого класса.

Изучение течений неньютоновских жидкостей, несомненно, более сложная задача, хотя внимания исследователей к ним было привлечено не меньше, а в последнее время даже больше, чем к ньютоновским жидкостям. Во второй половине XX века эту задачу для случая аксиальных ламинарных течений в каналах с эксцентриситетом пытались решить преимущественно путём построения приближённых аналитических и полуаналитических решений (примеры таких решений можно найти, например, в [32, 33, 34, 35]). Однако область применимости этих решений ограничена предельными и близкими к ним случаями близких диаметров, малыми эксцентриситетами или реологией близкой к ньютоновской. Одна из первых работ, где было проведено обширное экспериментальное изучение ламинарных и турбулентных течений степенных жидкостей в круглых трубах – работа Доджа и Метцнера (Dodge and Metzner) [36], была опубликована в 1959 году. В ней авторы построили известную корреляцию, связывающую коэффициент сопротивления f и число Рейнольдса Re , для круглой трубы в случае турбулентного течения. При этом необходимо было ещё и определить сами эти понятия для сред с переменной вязкостью. Авторы предложили считать связь между этими величинами соответствующей случаю ламинарного течения ньютоновской жидкости ($f = const / Re$), из чего непосредственно следует определение для так называемого обобщённого числа Рейнольдса (Метцнера-Рида) для круглой трубы [37]

$$Re = \rho V^{2-n} d^n / 8^{n-1} k. \quad (0.6)$$

В литературе встречаются и другие попытки ввести различные определения числа Рейнольдса для жидкостей с переменной вязкостью. В частности, в работах Козики (Kozicki), Костика (Kostic), и других авторов [38, 39, 40, 41, 42] определение числа Рейнольдса (0.6) для неньютоновских сред обобщается на случай каналов с различной формой. В этих работах авторы, опираясь на экспериментальные данные [43] и некоторые теоретические заключения, по сути, предложили различные корреляции для связи расхода и перепада давления. Тем не менее, необходимо отметить, что подобный подход до сих пор не удалось обобщить на случай спиральных течений.

Течения степенных жидкостей с вращением внутреннего цилиндра стали активно изучаться, начиная с 90-х годов прошлого века. Результаты экспериментов проведённых Эскудиером (Escudier) и другими авторами показали снижение сопротивления в концентрическом канале при наличии вращения в случае установившегося ламинарного течения, и увеличение в переходных и турбулентных режимах [44, 45, 46, 24, 47]. Наряду с экспериментальными данными в течение последнего десятилетия появились статьи с результатами численного моделирования, которое позволило изучить влияние вращения более детально. Так в [48] группой Эскудиера проведено сопоставление экспериментальных данных по перепаду давления и профилям скорости в определённых сечениях для нескольких течений с данными, полученными численным моделированием. А в [49] той же группой авторов проведено обширное изучение совместного влияния эксцентриситета и вращения на характеристики ламинарного течения степенной жидкости путём моделирования. Было показано, что возвратное течение в степенной жидкости появляется при больших значениях эксцентриситета, чем в ньютоновских. В работе приводится ряд графиков, демонстрирующих зависимость коэффициента сопротивления от числа Тейлора, характеризующего скорость вращения, где отмечается увеличения коэффициента сопротивления. Вместе с тем, авторы отмечают, что в зависимости от отношения чисел Тейлора и Рейнольдса, построенного по аксиальной скорости, характер этих зависимостей существенно различается. Для этого же класса жидкостей похожие работы проводились и ранее другой группой авторов [27], где численно изучены некоторые отдельные течения. Однако для жидкостей с предельным напряжением сдвига подобных работ до сих пор не было.

Турбулентные течения неньютоновских жидкостей в настоящее время экспериментально мало изучены. Для данного класса течений известны лишь работы Ноури (Nouri) [21, 22] и Роя и Заморы (Roy and Zamora) [50, 51], где авторы измерили лишь некоторые характеристики течений. Такая немногочисленность работ связана с тем, что большинство реальных псевдопластических жидкостей не прозрачны, что делает невозможным применение стандартных методов измерений. Кроме того, эксперименты такого рода сопряжены с высокими

требованиями к экспериментальной установке и проведению эксперимента (необходим сравнительно мощный насос, постоянный контроль реологии, достаточно длинный канал, привод, вращающий внутренний цилиндр, и т.д.).

Подводя итоги этому краткому обзору, следует отметить, что в настоящее время, пожалуй, достаточно хорошо изучен лишь класс ламинарных аксиальных течений ньютоновской, степенной и бингамовской жидкостей, а также класс турбулентных аксиальных течений ньютоновской жидкости в осесимметричном канале. Для ламинарных спиральных течений и аксиальных турбулентных течений ньютоновской и степенной жидкости в каналах с эксцентриситетом существуют отдельные отрывочные сведения в узких диапазонах параметров. Данные по спиральным ламинарным и турбулентным течениям жидкостей с предельным напряжением в литературе практически отсутствуют. Таким образом, течения ньютоновских и неньютоновских сред в зазоре между цилиндрами остаются на сегодняшний день всё ещё практически неизученными. Кроме того, изучение поведения неньютоновских сред чрезвычайно важно с фундаментальной точки зрения, поскольку их течения могут существенным образом отличаться от течений ньютоновских жидкостей и сопровождаться проявлением несвойственных ньютоновским жидкостям эффектов. Высокая практическая мотивация делает исследование таких течений актуальным.

Экспериментальное изучение даже отдельных течений этого класса – трудоёмкая и дорогостоящая задача. Изучить экспериментально всё многообразие встречающихся на практике течений просто невозможно, во-первых, из-за его обширности. Так, например, только в нефтегазовой индустрии при бурении скважин используются сотни жидкостей с различными свойствами. Во-вторых, из-за сложности и трудоёмкости проведения таких экспериментов. Тем не менее, их постановка и проведение крайне важны для тестирования и верификации приближённых аналитических решений, полуаналитических методов, инженерных подходов и результатов численного моделирования. С другой стороны, стремительное развитие вычислительных технологий и вычислительных методов в последние два десятилетия открывают возможность для изучения описанного класса течений с помощью численного моделирования. На сегодняшний день это, пожалуй, не только оптимальный, но и единственный способ решения этой задачи. Таким образом, целью данной диссертационной работы является систематическое моделирование и изучение ламинарных и турбулентных течений вязких неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра.

В работе рассматриваются развитые установившиеся ламинарные и турбулентные течения жидкости Хершеля–Балкли в зазоре между двумя цилиндрами различного диаметра. Оси цилиндров параллельны, но могут не совпадать, а внутренний может вращаться с посто-

янной угловой скоростью. При этом на стенках цилиндров считаются выполненными условия прилипания, а через сечения канала задан постоянный массовый расход жидкости. Неизвестными величинами здесь являются перепад давления вдоль канала, распределения полей скорости, давления, вязкости, поля осреднённых турбулентных характеристик и т.д.

В ламинарном режиме рассматриваемое течение будет стационарным, а в турбулентном режиме поля осреднённой скорости не будут зависеть от времени. Кроме того, условие установившегося потока предполагает, что поле скорости (в турбулентном режиме поле осреднённой скорости) в сечении канала, перпендикулярном его оси, не меняется вдоль длины канала. Таким образом, эта задача допускает её рассмотрение в двумерной постановке с независимыми переменными – координатами в плоскости сечения. Очевидно, что в такой постановке аспекты, связанные с неустойчивостью ламинарных течений, переходными вихревыми структурами (вихрями Тейлора) и ламинарно-турбулентным переходом не могут быть исследованы и остаются за рамками данной работы. Этим аспектам уделяется большое внимание исследователей как в случае ньютоновских, так и в случае неньютоновских (см., например, [19, 52, 53] и цитированную там литературу).

Для реализации поставленной цели, прежде всего, необходим алгоритм и программное обеспечение для моделирования течений изучаемого класса. Ламинарные течения неньютоновских вязких жидкостей, как известно, описываются уравнениями гидродинамики с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от скорости сдвига. В настоящее время существует множество стандартных пакетов для численного решения этих уравнений [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. Однако большинство из них непригодно для описания течений неньютоновских сред, а остальные распространяются на условиях дорогостоящего коммерческого лицензирования. Стандартные пакеты также не учитывают специфику моделируемого класса течений, а «закрытость» программного кода не позволяет оптимизировать параметры вычислений, не говоря уж о дальнейшем развитии программы. Кроме того, такие пакеты не предназначены для прямого численного моделирования турбулентных течений. Для этих целей, используется исследовательское программное обеспечение, обладающее широкими возможностями настройки параметров, а также позволяющего вносить изменения в численный алгоритм. В связи с этим, для реализации поставленной цели необходимо было, прежде всего, создать алгоритм и программное обеспечение для моделирования ламинарных течений неньютоновской жидкости.

Турбулентные течения неньютоновских жидкостей вообще не удаётся описать посредством стандартных пакетов программ. Связано это, в первую очередь, с отсутствием замкнутой, хорошо обоснованной и экспериментально подтверждённой модели турбулентности для неньютоновских сред, в частности, для вязкопластических. В литературе известна

лишь одна серия работ Круза и Пиньо (Cruz, Pinho), посвящённых построению математической модели для описания течений степенных жидкостей [64, 65, 66]. Однако развитая авторами модель, непосредственно не обобщается на случай жидкостей с предельными напряжениями, что связано с использованием алгебраической демпфирующей функции. В работах Гаврилова и Рудяка [67, 68] была разработана двухпараметрическая модель турбулентности для неньютоновских жидкостей, лишённая этих недостатков. В ней вводится специальным образом осреднённый коэффициент эффективной молекулярной вязкости для неньютоновских сред. Её верификация была проведена на основе всех имеющихся в литературе данных и результатах прямого численного моделирования турбулентных течений неньютоновских сред [69]. Для моделирования турбулентных течений в настоящей работе был использован численный алгоритм и пакет программ [70, 71, 68], разработанный А.А. Гавриловым и В.Я. Рудяком именно на основе этой модели.

Краткий обзор, приведённый выше, показывает, что информации о характеристиках множества реализующихся на практике течений нет, хотя востребованность такой информации чрезвычайно велика. Для получения этой информации в данной работе проведено обширное систематическое моделирование, результаты которого были тщательно проанализированы. Изучение подразумевает, в первую очередь, анализ структуры течений, объяснение причин формирования именно такой структуры. Помимо этого, крайне важно знать и понимать, как повлияет изменение тех или иных независимых параметров задачи (например, эксцентриситета, чисел Рейнольдса и т.д.) на ключевые характеристики течения (перепада давления, поле скорости и т.д.). Анализ поставленной задачи показывает, что течение рассматриваемого класса характеризуется шестью независимыми входными параметрами, которые в рамках данной работы изменялись в следующих диапазонах:

- отношение радиусов, $0.2 \leq \theta \leq 0.9$;
- эксцентриситет, $0 \leq e \leq 0.99$ (0 соответствует концентрическому каналу, 1 – каналу, где цилиндры практически касаются друг друга);
- напорное число Рейнольдса, построенное по средней аксиальной скорости, $0 \leq Re_\rho \leq 200000$;
- вращательное число Рейнольдса, определяемое скоростью вращения внутреннего цилиндра, $0 \leq Re_\omega \leq 5000000$;
- число Бингама, характеризующее влияние предельного напряжения сдвига, $0 \leq Bn \leq 1000$;
- показатель степени в реологическом законе, $0.2 \leq n \leq 1$.

Столь широкие диапазоны изменения независимых параметров задачи продиктованы практическими соображениями, но, в то же время, это делает этот класс достаточно обширным, а его изучение – трудоёмкой и сложной задачей. Достаточно сказать, что в ходе работы было промоделировано более миллиона различных течений. Естественно, что работа со столь объёмным материалом и данными просто невозможна без средств автоматической подготовки расчётов и обработки и анализа результатов. Поэтому необходимо было создать различные скрипты, утилиты и другие программные средства, позволяющие автоматизировать обработку результатов моделирования и упростить их анализ. Таким образом, результаты расчётов и средства их обработки фактически образуют базу данных течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей в зазоре.

Практическая применимость результатов изучения рассматриваемого класса течений помимо прочего связана с построением приближённых корреляционных формул для определения основных параметров течения (например, перепада давления). Однако все имеющиеся в литературе подобные формулы учитывают зависимость самое большое – от трёх параметров, и при этом, как правило, работают в достаточно узком диапазоне изменения хотя бы одного из параметров. Построение корреляционной формулы для какой-либо характеристики в указанном диапазоне и учитывающей зависимость от всех шести параметров – практически невыполнимая задача. С другой стороны, в современных условиях для инженеров, как правило, нет необходимости представлять информацию в виде формулы, её вполне может заменить быстрая и нетребовательная к вычислительным ресурсам компьютерная программа или программный модуль. Разработка алгоритма для такой программы возможна на основе созданной базы данных с результатами моделирования. Если такая база данных течений достаточно хорошо структурирована, информацию из неё можно использовать для быстрого определения необходимых параметров произвольного течения путём интерполяции данных в пространстве независимых параметров.

Таким образом, для реализации цели данной диссертационной работы необходимо было решить следующие практические задачи.

1. Разработать алгоритм и программное обеспечение для численного моделирования ламинарных течений жидкости Хершеля–Балкли в цилиндрическом зазоре.
2. Выполнить систематическое моделирование стационарные ламинарные и развитые турбулентные течения жидкостей Хершеля–Балкли в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутренней трубы в широком диапазоне параметров.
3. Создать базу данных с результатами моделирования, разработать корреляции и методы быстрого определения основных характеристик данных течений.

4. Изучить структуру течений и механизмы их формирования, установить закономерности и проанализировать влияние геометрии канала, свойств жидкости и режима течения на ключевые характеристики течения.

Из приведённого выше обзора работ видно, что достаточно систематического исследования течений в цилиндрическом зазоре до сих пор не проводилось даже для ламинарных течений и турбулентных течений ньютоновских жидкостей, хотя программный инструментарий для их моделирования на сегодняшний день. Моделирование турбулентных течений неньютоновских жидкостей вообще до сих пор было невозможно из-за отсутствия модели турбулентности для этих сред, и данная работа, фактически, представляет первые подобные результаты. В связи с этим, данные и результаты, полученные в этой работе в ходе серийного моделирования, являются уникальными и большая их часть получена впервые. Основные из них, представляющие научную новизну, перечислены ниже.

- Впервые проведено масштабное систематическое моделирование развитых ламинарных и турбулентных течений жидкости Хершеля–Балкли в цилиндрическом зазоре в широком диапазоне шести независимых параметров, охватывающем практически все реально существующие псевдопластические жидкости.
- Создана уникальная база данных изучаемого класса течений, содержащая результаты моделирования более миллиона различных течений для разных неньютоновских жидкостей.
- Впервые в широком диапазоне параметров изучена структура ламинарных и турбулентных течений жидкостей Хершеля–Балкли в цилиндрическом зазоре при наличии эксцентриситета и вращения внутренней трубы, а также влияние входных параметров на ключевые характеристики течения.
- Показана возможность управления перепадом давления и некоторыми характеристиками течения в канале путём изменения скорости вращения внутренней трубы и эксцентриситета при неизменном расходе.
- Для турбулентных течений ньютоновской жидкости в осесимметричном канале построена корреляция для определения коэффициента сопротивления, учитывающая различные отношения диаметров и вращение внутренней трубы.
- Установлены и систематически изучены режимы течений вязких неньютоновских жидкостей, при которых в течении одновременно сосуществуют области, занятые ламинарным и турбулентным течением.
- Разработан алгоритм для быстрого нахождения ряда интегральных характеристик (перепада давления, момента и сил, приложенных к внутреннему цилиндру), а

также поля скорости для произвольного течения рассматриваемого класса на основе интерполяции результатов моделирования и с использованием методик сжатия данных. Опубликованных аналогов этого алгоритма, сопоставимых по функциональности до сих пор нет.

- Разработан алгоритм для моделирования течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом.

Практическая значимость работы имеет несколько аспектов. Алгоритм для численного решения уравнений гидродинамики обобщённых ньютоновских жидкостей может использоваться напрямую для определения характеристик течений в цилиндрическом зазоре. Вместе с тем этот алгоритм может быть адаптирован для решения других гидродинамических задач. Быстрые интерполяционные алгоритмы, могут применяться инженерами напрямую при проектировании различных технологических устройств. В настоящее время быстрые алгоритмы внедрены и используются в инженерном программном комплексе для управления процессом бурения в компании Baker Hughes Incorporated.

Выполненное исследование позволяет в полной мере определить особенности изучаемого класса течений, изучить структуру течений, процессы массопереноса. Это открывает возможность для управления нагрузкой на канал и насосно-двигательное оборудование, а также для оптимизации гидродинамических процессов, технологических устройств и режимов их работы. Кроме того, результаты исследования турбулентных течений неньютоновских жидкостей имеют самостоятельное фундаментальное значение, что и обеспечивает практическую и научную ценность работы.

Личный вклад автора заключается в разработке алгоритма для моделирования ламинарных течений обобщённых ньютоновских жидкостей, организации и проведении систематического моделирования, создании средств автоматической обработки результатов, совместном с научным руководителем анализом результатов моделирования, разработке интерполяционных алгоритмов. Автор принимал также непосредственное участие в подготовке публикаций по теме диссертации.

Следующие результаты и положения выносятся на защиту.

- Данные систематического моделирования ламинарных и турбулентных течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре и полученные данные по сопротивлению канала, гидродинамическому моменту и силе, действующих на внутренний цилиндр.
- Вращение внутреннего цилиндра приводит к снижению перепада давления при ламинарном течении псевдопластической жидкости в концентрическом канале, а

в канале с эксцентриситетом вращение может как увеличить, так и уменьшить перепад давления.

- В концентрическом канале коэффициент сопротивления практически не зависит от напорного числа Рейнольдса, если доминирует вращательное течение, и, наоборот, не зависит от вращения при доминировании напорного течения.
- В псевдопластических средах турбулизация течения, вызванная вращением внутреннего цилиндра, может приводить к снижению перепада давления по сравнению с ламинарным течением с тем же расходом.
- Алгоритм для численного решения уравнений гидродинамики обобщённых ньютоновских жидкостей, описывающих ламинарное установившееся течение в цилиндрическом зазоре с заданным эксцентриситетом и вращением внутренней трубы.
- Интерполяционные алгоритмы для быстрого определения перепада давления и поля скорости.

Основные положения и результаты работы доложены на следующих конференциях, научных семинарах: 65-я Всероссийская научно-техническая конференция НГАСУ (Сибстрин), Новосибирск, НГАСУ, 8-9 апреля, 2008 [72]; Всероссийский семинар «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий», Новосибирск, НГАСУ, 14-15 апреля, 2009 [73]; Всероссийский семинар «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий», Новосибирск, НГАСУ, 6–8 апреля, 2010 [74]; Всероссийская конференция «Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей», Новосибирск, ИТПМ, 21–23 апреля, 2010 [75, 76]; Международная конференция «Гидродинамическая неустойчивость и турбулентность», Москва, 1–7 марта, 2010 [77]; Всероссийская молодёжная конференция «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики», Новосибирск, ИТФ, 17–19 ноября, 2010 [78]; Всероссийский семинар «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий», Новосибирск, НГАСУ, 25–27 мая, 2011 [79, 80]; Всероссийская молодёжная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», Томск, ТГУ, 12–14 октября 2011 [81]; Всероссийская молодёжная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», Томск, ТГУ, 23–25 апреля 2012 [82]; Всероссийская конференция «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий», Новосибирск, ИТПМ, 6–8 мая, 2012 [83, 69, 84]; Celle Drilling Conference – 2012, Celle, Geoenergy-Celle, 17–18 September, 2012 [85]; XIII Международная молодёжная научная конференция «Интеллект и наука», Железногорск, 16-18 апреля, 2013 [86, 87]; 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE13, Nantes, France, July 9-14, 2013 [88].

Материалы, полученные в результате работы, легли в основу серии публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК [89, 90, 91, 92, 93]. Некоторые результаты также содержатся в двух статьях других научных изданий и семи статьях в сборниках трудов конференций [75, 76, 81, 82, 83, 84, 69, 94, 95, 86].

Диссертация включает введение, четыре главы, заключение, список литературы и одно приложение. Работа изложена на 133 страницах, в том числе основной текст на 117 страницах, 61 рисунок, 5 таблиц, библиографический список из 122 наименований.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, определены цели и задачи исследования, отражены научная новизна и практическая значимость, описан метод решения поставленной задачи, приведён обзор литературы, посвящённой реологии неньютоновских сред и результатам изучения исследуемого класса течений.

Первая глава посвящена описанию численного алгоритма решения уравнений гидродинамики обобщённых ньютоновских жидкостей и разработанного программного обеспечения для моделирования ламинарных установившихся течений этих жидкостей в цилиндрическом зазоре. Разработанный алгоритм основан на методе конечных объёмов. Уравнения гидродинамики записаны и решаются в декартовой системе координат. Алгоритм развит на общий случай неструктурированных сеток с ячейками произвольной (выпуклой) формы и количеством граней, хотя для решения данной конкретной задачи использовались гексагональные криволинейные ортогональные сетки со сгущением к границам цилиндров, что позволило достичь большей эффективности вычислений (отношения погрешности к времени расчёта). В первом параграфе описывается дискретизация обобщённого уравнения переноса (с конвективным, диффузионным и источниковым членами) на основе метода конечных объёмов. Во втором параграфе описана SIMPLEC процедура используемая для согласования полей скорости и давления, а также приводится метод решения уравнений Навье-Стокса. В третьем параграфе речь идёт об особенностях, связанных с переменной вязкостью, приводятся детали реализации граничных условий, приводится специфика программной реализации алгоритма, а также описывается вычислительная сетка. Четвёртый параграф посвящён верификации алгоритма.

Вторая глава посвящена обсуждению результатов моделирования ламинарных течений в цилиндрическом зазоре. В первом параграфе приводится постановка задачи, на основе анализа уравнений вводятся безразмерные параметры, характеризующие течение. Второй параграф посвящён описанию течений ньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре. Здесь показано влияние эксцентриситета и вращения внутреннего цилиндра на поле течения и объяснено появление возвратного течения в широкой части зазора, приведена зависимость перепада давления от эксцентриситета и скорости вращения внутреннего цилиндра, а также

показана её связь с эволюцией структуры течения. Течениям степенных жидкостей посвящён третий параграф, где приводятся основные отличия от ньютоновской жидкости, показывается какую роль играет отношение напорного и аксиального чисел Рейнольдса в определяющем механизме формирования эффективной вязкости. Здесь же анализируется влияние вращения внутреннего цилиндра на перепад давления, отмечается эффект уменьшения перепада давления вследствие вращения. Течениям вязкопластических сред (жидкостям с предельным напряжением сдвига) посвящён четвёртый параграф, где показано влияние наличия предельного напряжения сдвига на структуру течения и перепад давления, описано где и почему образуются квазитвёрдые области в течении. В пятом параграфе представлены результаты изучения гидродинамических реакций на внутреннем цилиндре – сил и моментов, описывается и объясняется их зависимость от эксцентриситета и скорости вращения.

Четвёртая глава посвящена результатам моделирования развитых турбулентных течений в цилиндрическом зазоре. В первом параграфе представлены результаты моделирования турбулентных течений ньютоновских жидкостей. Здесь выявлены основные механизмы формирования течений и их трансформации при варьировании входных параметров, введена классификация на основе анализа структуры течений. Показана роль доминирующего течения (т.е. течения, преимущественно вызывающего турбулентность) в зависимости от входных данных задачи. Вторым параграф посвящён моделированию турбулентных течений не-ньютоновских жидкостей. Здесь отмечается, что эффект наличия предельного напряжения нивелируется при интенсификации турбулентных пульсаций. Указаны режимы, в которых одновременно сосуществуют ламинарные и турбулентные области в течении, описано и объяснено явление снижения гидродинамического сопротивления при переходе к турбулентному режиму течения, вызванному вращением внутренней трубы.

Четвёртая глава посвящена разработанным быстрым алгоритмам для определения ключевых параметров течения. Здесь приведена структура созданной базы данных течений, описаны интерполяционные алгоритмы для быстрого нахождения скалярных интегральных характеристик течений и поля скорости, также приводится описание методик сжатия данных, применяемых для сокращения объёмов данных по полям скорости.

В заключении обсуждаются полученные результаты, анализируется область их применимости, фундаментальная значимость и перспективы практического применения, подводятся итоги проведённой работы. Помимо этого, упоминаются проблемы, возникшие в ходе работы, а также явления и эффекты, требующие дальнейшего развития и изучения.

1 Алгоритм для численного решения уравнений гидродинамики неньютоновской жидкости

Как известно, движение жидкости описывается системой уравнений гидродинамики в частных производных (или интегро-дифференциальных уравнений), которые не могут быть решены аналитически за исключением некоторых специальных случаев. Существует множество численных методов решения дифференциальных уравнений и их систем и уравнений. Как правило, различные численные методы разрабатывались для решения задач тех или иных разделов механики и физики вообще, а затем развивались и получали обобщение на более широкий класс задач. Для уравнений Навье-Стокса, в частности, широко применяются методы конечных элементов, конечных разностей, методы дискретного элемента, метод конечных объёмов и многие другие методы. Метод конечных объёмов разрабатывался изначально для задач гидрогазодинамики. Понятия этого метода (такие как, поток физической величины) являются «естественными» для этих задач. В настоящее время именно этот метод наиболее развит и распространён для гидромеханических задач.

В сеточных методах дискретизации, для получения приближенного численного решения, исходные уравнения заменяются приближённой системой линейных алгебраических уравнений, связывающих значения зависимых переменных в узлах сетки, которая затем может быть решена численно. В методе конечных объёмов [96, 97, 98] вычислительная область разбивается на множество достаточно мелких ячеек, значения физических величин внутри которых принимаются неизменными, а алгебраические соотношения для неизвестных получаются из интегральных законов сохранения в предположении постоянства величины по объёму ячейки. Точность метода зависит при этом от форм и размеров ячеек, а также способа аппроксимации интегральных выражений. Одним из преимуществ метода конечных объёмов является возможность его реализации на неструктурированных сетках, где ячейки имеют форму выпуклого многогранника.

Сложность численного решения системы уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости связана с тем, что она, во-первых, нелинейная, а, во-вторых, не содержит производной давления по времени, и давление не выражается явно. В связи с этим широко используется подход, в котором в ходе итераций находятся компоненты скорости путём решения линеаризованных динамических уравнений, а выполнение условия неразрывности, а также связь полей скорости и давления достигается с помощью специальной процедуры кор-

рекции SIMPLEC [96, 99, 100], основанной на концепции расщепления по физическим процессам. Линеаризованные динамические уравнения в системе уравнений гидродинамики в декартовых координатах при этом имеют вид обобщённых уравнений переноса для компонент скорости. Поэтому в первом параграфе приведено подробное описание метода решения этого уравнения, а во втором параграфе изложена схема решения уравнений гидродинамики. В третьем параграфе описаны некоторые особенности реализованного алгоритма, а четвёртый посвящён результатам тестирования.

1.1 Метод численного решения уравнения переноса

Уравнение переноса некоторой скалярной величины φ (в качестве которой могут выступать, например, компоненты скорости, концентрация примеси, температура и т.п.) имеет следующий вид

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\varphi \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi) + q = 0, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность, \mathbf{v} – вектор скорости, Γ – коэффициент диффузии для величины φ , q – источниковый член, отвечающий за генерацию величины φ . Если проинтегрировать это уравнение по объёму ячейки Ω и перейти от объёмных интегралов к поверхностным получим закон сохранения в интегральной форме для величины φ

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \int_s \rho\varphi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \Gamma \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega} q d\Omega = 0. \quad (1.2)$$

Численная методика для решения этого уравнения основана на использовании теоремы о среднем. Так, принимая в качестве среднего значения по объёму значения в центре ячейки, а в качестве среднего значения на грани – значение в центре грани, можно записать дискретный аналог выражения (1.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_P \varphi_P \Omega) + \sum_f \rho_f \varphi_f (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{S}_f) + \sum_f \Gamma_f (\nabla \varphi_f \cdot \mathbf{S}_f) + q_P \Omega = 0. \quad (1.3)$$

Здесь индекс “ f ” означает, что значение вычисляется в центре грани, а “ P ” соответствует значению в центре ячейки, суммирование ведётся по всем граням ячейки, $\mathbf{S}_f = S_f \mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к грани ячейки, длина которого равна площади грани. Далее приводится аппроксимация для каждого члена в дискретизованном уравнении (1.3).

1.1.1 Аппроксимация нестационарного члена

При использовании схемы аппроксимации первого порядка для первого члена в уравнении (1.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_P \varphi_P \Omega) \approx \frac{(\rho_P \varphi_P \Omega)^{n+1} - (\rho_P \varphi_P \Omega)^n}{\tau}, \quad (1.4)$$

где индекс сверху означает номер временного слоя, с которого взято значение, а τ – шаг по времени. При аппроксимации этого члена можно использовать схемы и более высокого порядка, однако в этом случае возрастают требования к ресурсам памяти, поскольку необходимо хранить информацию с нескольких временных слоёв.

1.1.2 Аппроксимация конвективного члена

Конвективный поток величины φ через грань f определяется с помощью противопоточных схем

$$c_f \varphi_f \approx \frac{c_f + |c_f|}{2} \left[\varphi_P + \frac{d_f(\gamma_{f+})}{2} (\varphi_F - \varphi_P) \right] + \frac{c_f - |c_f|}{2} \left[\varphi_F + \frac{d_f(\gamma_{f-})}{2} (\varphi_P - \varphi_F) \right], \quad (1.5)$$

где $c_f = \rho_f (\mathbf{v}_f \mathbf{S}_f)$ – поток массы через грань f ячейки, φ_P – значение в центре рассматриваемой ячейки, φ_F – значение в центре ячейки, смежной с рассматриваемой и имеющую с ней общую грань f , $d_f(\gamma)$ – функция, ограничивающая решение. Величина γ_f зависит от того втекает или вытекает поток из ячейки и одинакова для смежных ячеек с общей гранью f . Для её определения на неструктурированных сетках использован следующий подход [101]. Пусть поток через грань f направлен из ячейки с центром в точке P в ячейку с центром в точке F , ξ – орт направленный по потоку вдоль линии, соединяющей центры этих точек, точка f^* симметрична точке f относительно точки P (рис. 1.1).

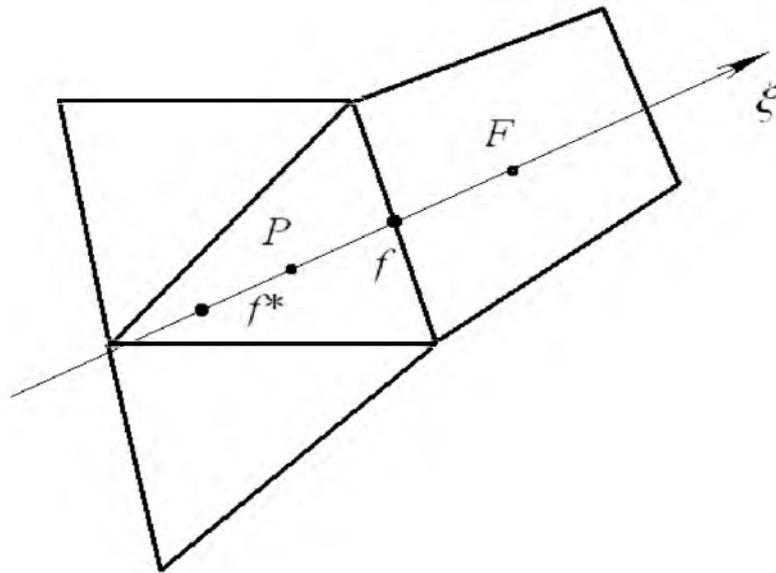


Рис. 1.1. К определению величины γ_f

Тогда $\gamma_f = (\partial\varphi/\partial\xi)_{f^*}/(\partial\varphi/\partial\xi)_f$. Производная в знаменателе вычисляется по формуле $(\partial\varphi/\partial\xi)_f = (\varphi_F - \varphi_P)/|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P|$, а производную в числителе можно определить, предположив, что производная в точке P есть среднее между производными в точке f и f^* . А поскольку $(\partial\varphi/\partial\xi)_P = (\nabla\varphi)_P \cdot \xi$, то для γ_f получим выражение

$$\gamma_f = 2 \frac{(\nabla\varphi)_P \cdot \xi}{(\partial\varphi/\partial\xi)_f} - 1 \quad (1.6)$$

Возможность выбирать схему аппроксимации определяет выбор соответствующей функции $d_f(\gamma)$. Например при $d_f = 0$ получим противопоточную схему первого порядка, а при $d_f = (3 + \gamma)/4$ получим схему QUICK [99]. Однако наиболее универсальными схемами считаются построенные на основе применения TVD подхода с использованием функций ограничивающих решение [102, 103]. Они обеспечивают устойчивость и второй порядок аппроксимации. В литературе описано множество функций-ограничителей [100], например:

- схема Umist – $d_f = \text{Max}[0, \text{Min}(2, \gamma)]$,
- схема MinMod – $d_f = \text{Max}[0, \text{Min}(1, \gamma)]$,
- схема Van Albada – $d_f = (\gamma^2 + \gamma)/(\gamma^2 + 1)$ и прочие.

В реализованном алгоритме есть возможность выбора такой функции.

1.1.3 Аппроксимация диффузионного члена

При вычислении диффузионного потока через грань достаточно определить нормальную производную в центре грани $\Gamma_f(\nabla\varphi_f \cdot \mathbf{S}_f) = \Gamma_f S_f (\partial\varphi/\partial\mathbf{n})_f$. В [99] это сделано на основе значений в точках P^i и F^i , лежащих на перпендикуляре к плоскости грани, проведённом через её центр, на том же расстоянии, что и центры ячеек (рис. 1.2) $(\partial\varphi/\partial\mathbf{n})_f \approx (\varphi_{F^i} - \varphi_{P^i})/|\mathbf{r}_{F^i} - \mathbf{r}_{P^i}|$. Координаты этих точек

$$\mathbf{r}_{P^i} = (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P) - \mathbf{n}((\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{r}_{F^i} = (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_F) - \mathbf{n}((\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_F) \cdot \mathbf{n}), \quad (1.7)$$

а значения в этих точках могут быть вычислены с помощью следующих выражений

$$\varphi_{P^i} = \varphi_P + (\nabla\varphi)_P \cdot (\mathbf{r}_{P^i} - \mathbf{r}_P), \quad \varphi_{F^i} = \varphi_F + (\nabla\varphi)_F \cdot (\mathbf{r}_{F^i} - \mathbf{r}_F). \quad (1.8)$$

Таким образом, для аппроксимации диффузионного потока получаем выражение

$$\Gamma_f(\nabla\varphi_f \cdot \mathbf{S}_f) = \Gamma_f S_f \frac{\varphi_F - \varphi_P}{|\mathbf{r}_{F^i} - \mathbf{r}_{P^i}|} + \Gamma_f S_f \left[\frac{(\nabla\varphi)_F \cdot (\mathbf{r}_{F^i} - \mathbf{r}_F) - (\nabla\varphi)_P \cdot (\mathbf{r}_{P^i} - \mathbf{r}_P)}{|\mathbf{r}_{F^i} - \mathbf{r}_{P^i}|} \right]. \quad (1.9)$$

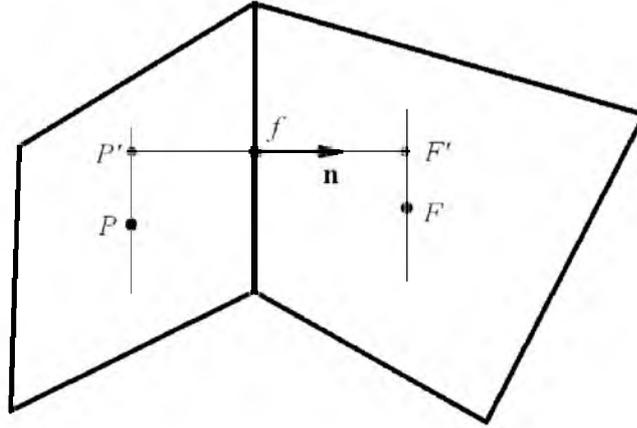


Рис. 1.2. К определению нормальной производной

1.1.4 Аппроксимация источникового члена

Как и при дискретизации нестационарного члена в качестве среднего значения по объёму берётся его значение в центре ячейки

$$\int_{\Omega} q d\Omega = (q)_p \Omega. \quad (1.10)$$

1.1.5 Нахождение геометрических характеристик ячейки

Из сказанного выше видно, что для численной реализации алгоритма необходимо знать объём и центр ячейки, а также площадь и центры граней. Простейший способ численного нахождения площади грани, представляющей собой выпуклый многоугольник, – разделение её на треугольники с одной общей для всех вершиной в одной из вершин многоугольника и суммирование их площадей [99]

$$S_f = |\mathbf{S}_f|, \quad \mathbf{S}_f = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{N_{\text{vertices}}} (\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1). \quad (1.11)$$

Центр грани \mathbf{r}_{cf} – её центр тяжести – вычисляется по аналогии, как центр масс составляющих её системы треугольников.

Для вычисления объёма многогранника можно воспользоваться теоремой Гаусса–Остроградского

$$\Omega = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{3} \operatorname{div}(\mathbf{r}) d\Omega = \frac{1}{3} \int_s (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{3} \sum_f \mathbf{r}_{cf} \mathbf{S}_f. \quad (1.12)$$

Каждое из слагаемых в правой части выражения (1.12) по модулю представляет собой объём пирамиды с вершиной в начале координат, и основание которой является гранью ячейки. Объёмы этих пирамид суммируются с разными знаками в зависимости от направления

внешней нормали к грани ячейки. Поэтому центр многогранника – его центр тяжести – можно вычислить как центр тяжести этой системы пирамид с учётом знака.

1.1.6 Вычисление градиентов и значений величины φ на гранях ячеек

При дискретизации уравнения переноса используются значения градиентов в центрах ячеек и значения переменных величин на гранях. Эти значения могут находиться совместно в итерационной процедуре [99]. Так по теореме Гаусса–Остроградского

$$(\nabla\varphi)_P = \frac{1}{\Omega} \int_s \varphi \mathbf{n} dS \approx \frac{1}{\Omega} \sum_f \varphi_f \mathbf{S}_f, \quad (1.13)$$

а значение на грани вычисляется на основе значений в центрах смежных ячеек с учётом расстояния до них от центра грани:

$$\varphi_f = \frac{|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P|}{|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P| + |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_F|} [\varphi_P + (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P) \cdot (\nabla\varphi)_P] + \frac{|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_F|}{|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P| + |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_F|} [\varphi_F + (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_F) \cdot (\nabla\varphi)_F]. \quad (1.14)$$

1.1.7 Численная реализация алгоритма для решения уравнения переноса

Подставив аппроксимированные выражения для потоков (1.5), (1.9), а также аппроксимацию нестационарного и источникового членов (1.4), (1.10) в дискретное уравнение переноса, записанного для ячейки (1.3), получим нелинейное уравнение, связывающее значение в ячейке, для которой это уравнение записано, φ_P , со значениями в смежных ячейках φ_F

$$\left[\frac{\rho_P \Omega}{\tau} + \sum_f \left(\frac{c_f + |c_f|}{2} - \frac{\Gamma_f S_f}{|\mathbf{r}_{F'} - \mathbf{r}_{P'}|} \right) \right]^m \varphi_P^{m+1} + \sum_f \left(\frac{c_f - |c_f|}{2} + \frac{\Gamma_f S_f}{|\mathbf{r}_{F'} - \mathbf{r}_{P'}|} \right)^m \varphi_F^{m+1} = \left(\frac{\rho_P \Omega \varphi_P}{\tau} \right)^{old} + Q_{expl}^m, \quad (1.15)$$

где

$$Q_{expl} = \left[\frac{c_f + |c_f|}{2} \frac{d_f(\gamma_{f+})}{2} - \frac{c_f - |c_f|}{2} \frac{d_f(\gamma_{f-})}{2} \right] (\varphi_P - \varphi_F) - \Gamma_f S_f \left[\frac{(\nabla\varphi)_F \cdot (\mathbf{r}_{F'} - \mathbf{r}_F) - (\nabla\varphi)_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P)}{|\mathbf{r}_{F'} - \mathbf{r}_{P'}|} \right] - (q)_P \Omega. \quad (1.16)$$

В правой части (1.15) собраны члены, которые в ходе внутренних итераций вычисляются явно, а в левую часть входят неизвестные на текущей $(m+1)$ -ой итерации значения φ_P и φ_F . Коэффициенты при этих значениях рассчитываются явно, то есть на m -ой итерации, на что указывает верхний индекс. Значение первого члена в правой части (1.15) берётся с предыдущего слоя по времени. На первой внутренней итерации значения переменной φ берётся с предыдущего слоя по времени.

В системе из уравнений вида (1.15), записанных для каждой ячейки, не гарантируется диагональное преобладание матрицы коэффициентов СЛАУ, что является необходимым

условием устойчивости итерационных методов. Чтобы обеспечить диагональное преобладание добавим в левую часть уравнения величину $[\varphi_P^{m+1} - \varphi_P^m \sum_f (-c_f^m)]$, что допустимо, поскольку при сходимости итерационного процесса она должна стремиться к нулю. Таким образом, в получаемой системе уравнения будут иметь следующий вид

$$A_P^m \varphi_P^{m+1} + \sum_f A_F^m \varphi_F^{m+1} = Q_P^m, \quad (1.17)$$

где

$$A_{F'} = \frac{c_f - |c_f|}{2} + \frac{\Gamma_f S_f}{|\mathbf{r}_{F'} - \mathbf{r}_{P'}|}, \quad A_P = \frac{\rho_P \Omega}{\tau} - \sum_f A_{F'}, \quad (1.18)$$

$$Q_P^m = \left(\frac{\rho_P \Omega \varphi_P}{\tau} \right)^{old} + Q_{expl}^m - \varphi_P^m \sum_f (c_f)^m. \quad (1.19)$$

Для повышения устойчивости решения системы (1.17) итерационным методом может быть применён механизм нижней релаксации [70], суть которого сводится к демпфированию быстрых изменений в приближении решения на текущей итерации. Тогда коэффициенты уравнения (1.17) и правая часть изменятся следующим образом:

$$\underbrace{\frac{A_P}{A_P^*}} \varphi_P^{m+1} + \sum_f A_F \varphi_F^{m+1} = Q_P + \underbrace{\frac{1-\alpha}{\alpha}}_{Q_P^*} A_P \varphi_P^m, \quad (1.20)$$

где α – коэффициент нижней релаксации.

1.2 Процедура коррекции скорости и давления SIMPLEC

1.2.1 Аппроксимация динамических уравнений

Динамические уравнения гидродинамики неньютоновской вязкой жидкости в компонентной записи имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v_i d\Omega + \int_S \rho v_i (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_S \mu (\nabla v_i \cdot d\mathbf{S}) + \int_{\Omega} q_i d\Omega + \int_S \mu \left(\frac{dv}{dx_i} \cdot d\mathbf{S} \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega, \quad (1.21)$$

где v_i – компоненты скорости, p – давление, ρ – плотность, μ – коэффициент эффективной вязкости, зависящий от второго инварианта тензора скоростей деформаций, q_i – компоненты массовых сил. В отличие от традиционных уравнений Навье-Стокса здесь присутствует дополнительный член, обусловленный переменной вязкостью. Нестационарный, конвективный, источниковый и первая часть диффузионного членов по форме совпадают с соответствующими членами уравнением переноса. Таким образом, помимо них дискретизации под-

лежит второе слагаемое в диффузионного члена, обусловленное переменной вязкостью, и член с давлением. Последний дискретизируется как

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega = \left(\int_{\Omega} \nabla p d\Omega \right)_i = \left(\int_S p d\mathbf{S} \right)_i \approx \left(\sum_f p_f \mathbf{S}_f \right)_i. \quad (1.22)$$

Дополнительный вязкий член обычно трактуется явным образом, а входящие в него производные на грани можно аппроксимировать как среднее значений, вычисленных в центрах смежных ячеек. Эти производные, в свою очередь, вычисляются аналогично производным давления (1.22). Таким образом, дискретный аналог динамических уравнений для определения в каждой ячейке сетки i -ой компоненты скорости v_{iP}^* будет иметь вид, аналогичный (1.20)

$$A_{iP}^m v_{iP}^* + \sum_f A_{iF}^m v_{iF}^* = Q_{iP}^m, \quad (1.23)$$

где A_{iF} , A_{iP} и Q_{iP}^m определяются аналогично (1.18), а в правой части учтены член с давлением и член, обусловленный переменной вязкостью. Будем считать, что при этом используются одинаковые коэффициенты нижней релаксации для компонент скорости, а, значит, матрицы СЛАУ для всех компонент скорости также одинаковы ($A_{iF} = A_{jF}$, $A_{iP} = A_{jP}$ где $i, j = 1, 2, 3$).

1.2.2 Уравнение поправки давления

Поскольку рассматриваемый здесь алгоритм должен рассчитывать течения несжимаемых жидкостей (что существенно сложнее сжимаемых течений, из-за невозможности применения традиционных методик решения t -гиперболических систем), в нём используется разновидность проекционных методов. Для решения уравнений гидродинамики, помимо решения динамических уравнений, необходимо подобрать поле давления, обеспечивающее выполнение условия неразрывности для поля скорости. В SIMPLE-подобных алгоритмах это делается итерационно. В ходе итераций по заданному полю давления, решая динамические уравнения (1.23), находится поле скорости, которое затем вместе с полем давления корректируется для устранения невязки уравнения неразрывности в каждой ячейке

$$R_P^* = \sum_f \dot{m}_f^* = \sum_f \rho_f^m (\mathbf{v}_f^* \cdot \mathbf{S}_f). \quad (1.24)$$

Скорректированное поле скорости будет удовлетворять уравнению неразрывности, но может не соответствовать динамическим уравнениям с новым полем давления, поэтому необходимо их решать вновь и т.д. Корректирующие значения для скорости \mathbf{v}' и давления p' в каждой ячейке связаны. Связь между поправками скорости \mathbf{v}'_P и давления p'_P в каждой

ячейке можно найти, подставив в динамическое уравнение (1.23) скорректированные значения скорости $\mathbf{v}_P^{m+1} = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}'_P$ и давления $p_P^{m+1} = p_P^m + p'_P$

$$A_P \mathbf{v}'_P + \sum_f A_F \mathbf{v}'_F = -\Omega_P (\nabla p')_P. \quad (1.25)$$

В алгоритме SIMPLEC к обеим частям этого уравнения добавляют $\mathbf{v}'_P \sum_f A_F$ и пренебрегают

выражением $\left(\sum_f A_F \mathbf{v}'_F + \mathbf{v}'_P \sum_f A_F \right)$ в правой части, что не влияет на решение в случае сходимости итерационного процесса. В итоге получая явное выражение, связывающее поправки

давления и скорости в центрах ячеек

$$\mathbf{v}'_P = -\Omega_P G_P (\nabla p')_P, \quad (1.26)$$

где

$$G_P = 1 / (A_P + \sum_f A_F). \quad (1.27)$$

Отметим, что знаменатель в последнем выражении (1.27) может обратиться в ноль (в частности, при решении стационарной задачи). Чтобы этого избежать, при решении динамических уравнений необходимо вводить нижнюю релаксацию.

Коррекции подлежат также значения нормальной составляющей скорости на гранях ячеек

$$\left(\mathbf{v}'_{\mathbf{n}_f} \right)_f = -\Omega_f \overline{G}_f \left(\frac{\partial p'}{\partial \mathbf{n}_f} \right)_f, \quad (1.28)$$

Будем аппроксимировать нормальную производную на грани как $\left(\partial p' / \partial \mathbf{n}_f \right)_f \approx (p'_F - p'_P) / (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P))$, “объём” грани определим как $\Omega_f = (\mathbf{S}_f \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_P))$, а значение величины \overline{G}_f на грани находится путём интерполяции как среднее значений в центрах

смежных ячеек с учётом расстояния до них от центра грани. Поскольку для скорректированных значений скорости на гранях $\mathbf{v}_f^{m+1} = \mathbf{v}_f^* + \mathbf{n} \left(\mathbf{v}'_{\mathbf{n}_f} \right)_f$ должен выполняться закон сохранения

массы, то из (1.24) и (1.28) получаем уравнение на поправку давления

$$p'_P \sum_f d_f - \sum_f d_f p'_F = R_P^*, \quad (1.29)$$

где $d_f = \rho_f^m S_f^2 \overline{G}_f$. На граничных гранях поправка потока массы нулевая. Поэтому необходимо принять $d_f = 0$ на граничных гранях.

Необходимо отметить, что получаемая матрица СЛАУ симметрична, и допускает применение соответствующих методов решения СЛАУ.

1.2.3 Устранение осцилляций поля давления

Использование совмещённых сеток (то есть когда сетка для полей скорости и давления совпадают) требует специального подхода к расчёту массового потока через грани контрольных объёмов, при вычислении невязки уравнения неразрывности (1.24) [99]. В противном случае возможно появление «шахматных» осцилляций в полях скорости и давления. Поэтому в значение потока массы на грани вводится поправка, определяемая разностью между градиентом давления на грани и интерполированным градиентом в центрах ячеек

$$\dot{m}_f^* = \rho_f^m (\mathbf{v}_f^* \cdot \mathbf{S}_f) - C_{RC} \rho_f^m G_f \left[S_f^2 (p_F - p_P) - \Omega_f \left(\overline{(\nabla p)}_f \cdot \mathbf{S}_f \right) \right], \quad (1.30)$$

где C_{RC} – коэффициент, позволяющий контролировать долю поправки Рхи-Чоу в общей величине скорости, значение величины $\overline{(\nabla p)}_f$ на грани находится путём интерполяции как среднее значений в центрах смежных ячеек с учётом расстояния до них от центра грани.

1.3 Особенности алгоритма и его программной реализации

1.3.1 Вычислительная сетка.

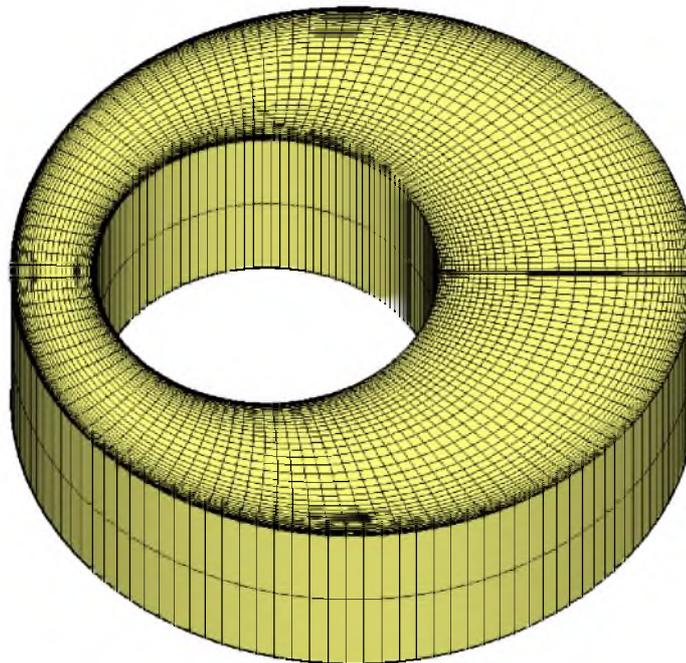


Рис. 1.3. Пример сетки

Несмотря на то, что описанный алгоритм пригоден для вычислений на неструктурированных сетках, для решения задачи о течении в цилиндрическом зазоре использовались структурированные гексагональные ортогональные сетки [104]. Это мотивировано тем, что использование таких сеток даёт более точный результат, по сравнению с неструктурированными сетками с тем же числом ячеек [99]. Кроме того, для систематического моделирования

использование параметрических сеток более удобно. Геометрия задачи как раз допускает использование таких сеток (см. рис. 1.3), получающихся путём преобразования декартовой системы координат в биполярную [2]. Для повышения точности, используемая сетка имеет сгущение к стенкам, где, как правило, велики градиенты скорости. В аксиальном направлении сетка имеет два узла, что обусловлено необходимостью вычисления перепада давления вдоль канала. В Приложении 1 описан алгоритм построения сетки и приведены её параметры.

1.3.2 Программное представление вычислительной сетки

Программная реализация алгоритма основана на использовании объектно-ориентированного подхода на языке программирования C++ [105]. Ячейкам и граням ячеек соответствуют объекты, содержащие необходимую информацию о них и оперирования с ними. При этом соседние ячейки имеют общую грань, соответствующий объект для которой хранится в единственном экземпляре. В связи с этим направление нормали к грани, задаваемое в процессе генерации сетки, однозначно определяет какая из прилегающих ячеек будет «задней», а какая «передней» для данной грани. Передней считается ячейка, лежащая по ту сторону грани, куда направлен вектор площади. Смежная к передней ячейке (относительно рассматриваемой грани) считается задней ячейкой. Все объекты, соответствующие граням ячейки хранят следующую информацию:

- массив с координатами вершин грани,
- координаты центра ячейки,
- вектор площади грани (направлен по нормали к плоскости грани, его длина равна площади грани),
- указатель на переднюю и заднюю ячейку.

Объекты, соответствующие ячейкам, являются представителями иного класса, содержащего следующую информацию:

- массив с координатами центра ячейки,
- объём ячейки,
- количество граней,
- указатели на объекты граней.

Программная реализация сетки представляет собой, класс, в котором содержатся массивы граней и массивы ячеек. Поскольку сетка в процессе расчёта остаётся неизменной, все данные для каждой грани и ячейки, хранящиеся в соответствующих объектах, вычисляются единожды после генерации сетки.

1.3.3 Программное представление матрицы СЛАУ

Поскольку получаемые в результате дискретизации соотношения связывают неизвестные величины в центрах ячеек с неизвестными величинами в центрах соседних ячеек, получаемая матрица СЛАУ будет сильно разреженной. То есть, если j -ая и k -ая ячейка не имеют общей грани, то k, j -ый и j, k -ый элементы матрицы СЛАУ будут равны нулю. В связи с этим нет необходимости хранить эти элементы и, более того, это обстоятельство можно использовать при решении СЛАУ, существенно ускорив её решение. Систему линейных уравнений удобно представить в виде четырёх массивов, тесно связанных с описанным выше программным представлением сетки. Один из них содержит диагональные элементы матрицы d_j , второй – правую часть системы r_j . Размерность этих массивов равна числу ячеек, а индексация ячеек и дискретизованных уравнений для этих ячеек совпадает. Размерность двух других массивов равна числу внутренних граней, и в них содержатся недиагональные элементы матрицы f_i и b_i . Так, если j -ая ячейка является «передней», а k -ая – «задней» по отношению к i -ой грани, то f_i соответствует k, j -ому элементу матрицы СЛАУ, а b_i – j, k -ому. Естественно, что такое представление СЛАУ требует пересмотра и адаптации методов решения СЛАУ, однако эти сложности при разработке компенсируются существенной экономией памяти и временем решения СЛАУ, а зачастую даже ведут к упрощению программного кода.

1.3.4 Программная реализация формирования СЛАУ для решения уравнения переноса

Формирование СЛАУ можно проводить двумя разумными способами: производя обход по ячейкам, либо по граням ячеек. В первом случае заполнение матрицы СЛАУ происходит последовательно – уравнение за уравнением. Однако при этом приходится вычислять дважды величины потоков через общую грань смежных ячеек. Альтернативный способ, – обход по граням ячеек, – лишён этого недостатка, однако предполагает, что матрица СЛАУ и правые части будут заполняться не последовательно. При рассмотрении каждой грани добавляются слагаемые в диагональные и недиагональные элементы матрицы СЛАУ, а также правые части уравнений для смежных ячеек, соответствующие аппроксимации потока через эту грань.

Как правило, при решении динамических уравнений не требуется большого числа итераций, поэтому в реализованном методе для решения уравнений импульсов применён простейший в реализации метод верхней релаксации (SOR) [106, 107]. Для уравнения на по-

правку давления использовался метод сопряжённых градиентов [106, 107] – один из самых быстрых итерационных методов для СЛАУ с симметричными матрицами.

1.3.5 Граничные условия

На стенках выполнены условия прилипания, поэтому в динамических уравнениях для граничной ячейки ставятся условия Дирихле. При этом дискретные уравнения (1.15), (1.16) изменяются с подстановкой вместо значения в несуществующей соседней ячейке φ_F заданного значения на граничной грани φ_f , а вместо \mathbf{r}_F и $\mathbf{r}_{F'}$ – координаты центра граничной грани \mathbf{r}_f .

Особого рассмотрения требуют граничные условия на входе и выходе. Сложность здесь заключается в получении развитого профиля на входе. Если рассматриваются установившиеся течения жидкости, для формирования развитого течения во всем канале можно использовать итерационную процедуру коррекции расхода [71]. Процедура состоит из следующих этапов. На первом этапе скорости на границе определяются из значений, полученных на предыдущей итерации в приграничных контрольных объёмах, т.е., по сути, граничные величины экстраполируются из внутренней области. На втором этапе рассчитанные граничные скорости корректируются с учётом заданного на границе массового расхода Q

$$\mathbf{v}_i^m = \mathbf{v}_i^* + \frac{\mathbf{n}_i \left(Q - \sum_f \rho_f \mathbf{v}_f^* \cdot \mathbf{S}_f \right)}{\rho_i \sum_f \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{S}_f}. \quad (1.31)$$

Скорректированные скорости используются как граничные условия типа Дирихле для уравнения движения. Отметим, что условие заданного массового расхода можно применять и при расчёте нестационарных течений.

В решаемой задаче не заданы граничные условия для давления, а процедура коррекции давления никак не затрагивает значения давления в граничных гранях. Однако значения давления на граничных гранях p_f используются при вычислении градиентов давления в центрах контрольных объёмов. Чтобы разрешить это противоречие достаточно экстраполировать значения давления на граничные грани из центров прилежащих ячеек [99]

$$p_f = p_P + (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_P) \cdot (\nabla p)_P. \quad (1.32)$$

В то же время значение градиента давления $(\nabla p)_P$ в граничной ячейке вычисляется через значение давления на граничной грани

$$(\nabla p)_P = \frac{1}{\Omega} \sum_f p_f \mathbf{S}_f. \quad (1.33)$$

Поэтому уравнения (1.32), (1.33) могут решаться явно в совместной итерационной процедуре.

Наконец стоит отметить, что поскольку решается стационарная задача, члены, связанные с нестационарностью, в уравнениях (1.15), (1.16) исчезают.

1.3.6 Вычисление эффективной вязкости

Поскольку алгоритм разрабатывался для моделирование течений неньютоновских жидкостей, одной из проблем является моделирование эффективного коэффициента вязкости. Зависимость молекулярной вязкости от скорости сдвига в жидкостях с реологией Хершеля–Балкли (1.5) имеет вид

$$\begin{cases} \mu(\dot{\gamma}) = k|\dot{\gamma}|^{n-1} + \tau_0/|\dot{\gamma}|, & |\dot{\gamma}| > 0, \\ \mu(\dot{\gamma}) = \infty, & |\dot{\gamma}| = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Здесь сразу видна вычислительная проблема, связанная с наличием предельного напряжения сдвига: эффективная вязкость должна стремиться к бесконечности при нулевой и близкой к нулю скорости сдвига. Эта проблема решается путём регуляризации, один из способов которой предложен в [108] и фактически заключается в замене выражения (1.34) регуляризованным

$$\mu(\dot{\gamma}) = k|\dot{\gamma}|^{n-1} + \tau_0(1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|/\dot{\Gamma})) / |\dot{\gamma}|. \quad (1.35)$$

Здесь m – параметр визуализации, а $\dot{\Gamma}$ – характерная скорость сдвига, определяемая входными данными задачи. Выбор параметра m связан с компромиссом: слишком малое значение делает регуляризованную модель грубой, а слишком большое приводит к проблемам со сходимостью. В большинстве работ его значение колеблется от 100 до 1000, таким образом, чтобы его дальнейшее увеличение практически не сказывалось на результате численного решения.

Однако, помимо этого, необходимо также ограничить значения эффективной вязкости для степенных жидкостей при малых скоростях сдвига, что даёт следующее выражение для эффективной вязкости

$$\mu(\dot{\gamma}) = k \max(|\dot{\gamma}|^{n-1}, m_2 \dot{\Gamma}^{n-1}) + \tau_0(1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|/\dot{\Gamma})) / |\dot{\gamma}|, \quad (1.36)$$

где m_2 – достаточно большое число.

1.3.7 Структура алгоритма численного решения уравнений гидродинамики

Последовательность основных шагов алгоритма приведена ниже.

1. Нахождение значений компонент скорости и давления на гранях, а также градиентов в центрах ячеек с помощью (1.13), (1.14). На этом же шаге, исходя из граничных условий, также пересчитываются значения на граничных гранях.
2. Составление матрицы СЛАУ с помощью (1.15) для определения компонент скорости на основе решения уравнений переноса. Поскольку эта матрица одинакова для всех компонент скорости, её элементы можно вычислять только один раз.
3. Вычисление правых частей СЛАУ для каждой компоненты скорости по формуле (1.16).
4. Введение релаксации и пересчёт коэффициентов матрицы как в (1.20).
5. Вычисление коэффициентов G_p с помощью (1.27) в центрах ячеек и интерполяция этих значений на грани.
6. Решение СЛАУ для определения компонент скорости на основе решения уравнений переноса.
7. Вычисление невязки уравнения неразрывности (1.24) в каждой ячейке с учётом (1.30), формирование правых частей СЛАУ на поправку давления.
8. Расчёт коэффициентов матрицы СЛАУ в уравнениях на поправку давления (1.29).
9. Решение СЛАУ для нахождения поправки давления.
10. Коррекция давления на основе найденных значений поправки. Если значение давления не входит в граничные условия, тогда поле давления определяется с точностью до некоторой постоянной. Однако в этом случае, чтобы достичь сходимости поля давления, необходимо удерживать в какой либо точке фиксированное значение при коррекции.
11. Коррекция значений компонент скорости в центрах ячеек и граней на основе (1.26) и (1.28), коррекция градиентов давления в центрах контрольных объёмов, экстраполяция давления на граничные грани (1.32), (1.33).
12. Процедура коррекции расхода (1.31) на входе и выходе канала.
13. Пересчёт поля вязкости (1.36).
14. Проверка условий сходимости, если они выполнены, в противном случае – и переход к следующей итерации, повторение шагов 1–14.

1.4 Тестирование алгоритма

1.4.1 Установившееся течение в круглой трубе

Напорное течение в круглой трубе является одним из простейших тестов для верификации алгоритма. Для этого класса течений известно точное аналитическое решение для

всех рассматриваемых типов жидкостей (подчиняющихся общему реологическому закону Хершеля–Балкли) [7]

$$u = \begin{cases} k^{-1/n} (0.5 \partial p / \partial z)^{-1} [n / (n+1)] [(0.5 \partial p / \partial z R - \tau_0)^{1+1/n} - (0.5 \partial p / \partial z r - \tau_0)^{1+1/n}] & \text{при } R_0 \leq r \leq R \\ k^{-1/n} (0.5 \partial p / \partial z)^{-1} [n / (n+1)] [(0.5 \partial p / \partial z R - \tau_0)^{1+1/n} - (0.5 \partial p / \partial z R_0 - \tau_0)^{1+1/n}] & \text{при } 0 \leq r \leq R_0 \end{cases}, \quad (1.37)$$

где $R_0 = 2\tau_0 / (\partial p / \partial z)$ – «радиус запираания». Связь перепада давления с объёмным расходом в этом случае определяется соотношением

$$\frac{Q}{\pi R^3} = k^{-1/n} \left(\frac{R \partial p}{2 \partial z} \right)^{-3} \left(\frac{R \partial p}{2 \partial z} - \tau_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[\left(\frac{R \partial p}{2 \partial z} - \tau_0 \right)^2 \frac{n}{(3n+1)} + 2\tau_0 \left(\frac{R \partial p}{2 \partial z} - \tau_0 \right) \frac{n}{(2n+1)} + \frac{\tau_0^2 n}{(n+1)} \right]. \quad (1.38)$$

Для верификации алгоритма была проведена серия расчётов на последовательности вложенных сеток. Сетки строилась путём «склейки» пяти блоков, в каждом из которых была построена структурированная неортогональная криволинейная гексагональная сетка из $9 \times 9 \times 2$, $19 \times 19 \times 2$, $39 \times 39 \times 2$ ячеек (рис. 1.4). При этом вдоль длины канала сетка состояла из двух сдоев ячеек, а геометрические размеры соответствующих блоков на различных сетках были одинаковыми.

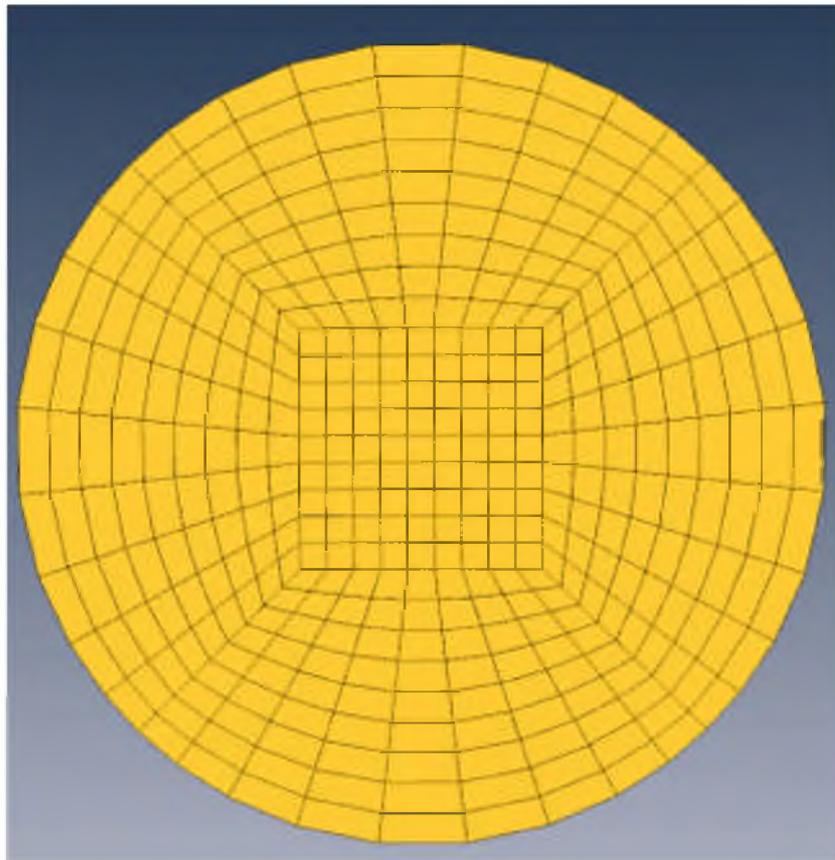


Рис. 1.4. Последовательность вложенных сеток для тестирования алгоритма на примере напорного течения в круглой трубе. Количество ячеек $5 \times 9 \times 9 \times 2 = 810$

На входной и выходной границе расчётной области задавался расход жидкости через сечение, а перепад давления вдоль трубы был неизвестен и вычислялся в процессе расчёта. Расчёт останавливался при достижении невязок компонент скорости и давления уровня 10^{-7} . Полученное в результате расчёта поле скорости и перепад давления сравнивались с точным аналитическим решением. Результаты этого сравнения для ньютоновской, степенной, бингамовской жидкостей и жидкости Хершеля–Балкли приведены в таблицах 1.1 – 1.4.

Таблица 1.1. Результаты сопоставления численного и аналитического решений для установившегося течения ньютоновской жидкости в круглой трубе. $Re = 100$

Сетка	Погрешность определения перепада давления	Погрешность определения поля скорости
9x9x2	1.96%	1.12%
19x19x2	0.92%	0.35%
39x39x2	0.37%	0.12%

Таблица 1.2. Результаты сопоставления численного и аналитического решений для установившегося течения степенной жидкости в круглой трубе. $Re = 100, n = 0.2$.

Сетка	Погрешность определения перепада давления	Погрешность определения поля скорости
9x9x2	13.9%	10.62%
19x19x2	4.53%	1.93%
39x39x2	2.02%	0.76%

Таблица 1.3. Результаты сопоставления численного и аналитического решений для установившегося течения бингамовской жидкости в круглой трубе. $Re = 100, Bn = 10$.

Сетка	Погрешность определения перепада давления	Погрешность определения поля скорости
9x9x2	10.96%	12%
19x19x2	3.25%	3.17%
39x39x2	1.17%	1.04%

Таблица 1.4. Зависимость погрешности определения перепада давления от параметров флюида в течении жидкости Хершеля–Балкли в круглой трубе. $Re = 100$, сетка 39x39x2.

	$Bn=0$	$Bn=10$	$Bn=100$
$n=1$	0.37	1.17	6.6
$n=0.5$	0.61	1.54	6.67
$n=0.2$	2.02	4.09	7.21

Высокая погрешность при $Bn = 100$ объясняется наличием узкого жидкого слоя вблизи стенок трубы и недостаточной детализацией расчётной сетки вблизи границ. На ос-

нове представленных результатов можно сделать вывод о сходимости численного решения на последовательности сеток.

1.4.2 Спиральное течение в концентрическом кольцевом зазоре

Моделировалось течение ньютоновской жидкости между двумя концентрическими цилиндрами. Внутренний цилиндр вращался с заданной угловой скоростью, а также задан был расход жидкости через сечение зазора $Re_\omega = 100, Re_Q = 200$. Сопоставление проводилось с точным аналитическим решением, которое для аксиальной и азимутальной компоненты скорости имеет вид [1]

$$w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left[r^2 - R_I^2 - (R_O^2 - R_I^2) \frac{\ln(r/R_I)}{\ln(R_O/R_I)} \right], \quad v_\varphi(r) = \frac{R_I^2 \omega (R_O^2 - r^2)}{(R_O^2 - R_I^2) r}. \quad (1.39)$$

А связь перепада давления с расходом даётся выражением

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8\mu Q}{\pi} \left/ (R_O^2 - R_I^2) \left[\frac{R_O^2 - R_I^2}{\ln(R_O/R_I)} - (R_O^2 + R_I^2) \right] \right. . \quad (1.40)$$

Результаты сопоставления на сетках 20x80x2, 40x160x2, 80x160x2 с равномерным разбиением по радиусу и окружности для течения ньютоновской жидкости представлены в таблице 1.5.

Таблица 1.5. Результаты сопоставления численного и аналитического решений для установившегося течения ньютоновской жидкости в концентрическом цилиндрическом зазоре

Сетка	Погрешность определения перепада давления	Погрешность определения аксиальной компоненты скорости	Погрешность определения азимутальной компоненты скорости
20x80x2	0.9%	0.3%	0.5%
40x160x2	0.4%	0.1%	0.2%
80x160x2	0.2%	0.06%	0.1%

Для степенной жидкости при $n = 1/3$ в [7] построено асимптотическое решение для случая, когда радиусы цилиндров близки. На рис. 1.5 представлены результаты сопоставления распределения обезразмеренных азимутальной и аксиальной компонент скорости с этим решением полученные на сетке 40x100 при отношении радиусов $\theta = 0.9$.

Для жидкости Бингама существует аналитическое решение в случае вращательного течения Куэтта [10]. Сопоставление с этим решением проводилось, в частности, для $Re_\omega = 100, Bn = 10, \theta = 0.5$. При этих параметрах вблизи внешнего цилиндра присутствует кольцеобразная неподвижная область, в то время как вблизи внутреннего находится жидкий

слой. Сопоставления азимутальной компоненты скорости представлено на рис. 1.6. Представленные численные результаты получены на равномерной сетке 40×100 . Погрешность определения скорости при этом составила 2.5%, а погрешность определения момента на внутреннем цилиндре – 3%. Погрешность определения обеих величин снижалась до уровня в 1% при переходе к более детальным сеткам 80×120 узлов. Это свидетельствует о том, что коэффициент регуляризации для жидкостей с предельным напряжением обеспечивает достаточно точную аппроксимацию поведения бингамовской среды.

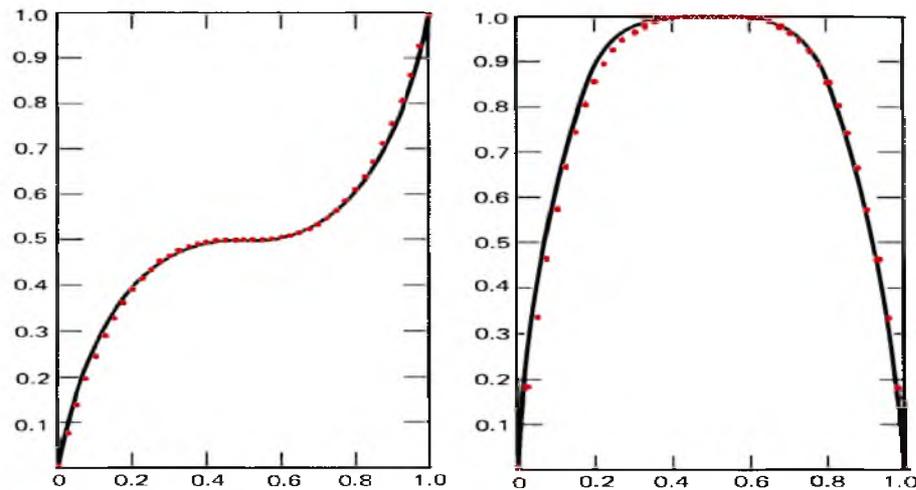


Рис. 1.5. Сопоставление распределения безразмерных азимутальной (слева) и аксиальной (справа) компонент скорости в спиральном течении степенной жидкости с $n = 0.333$. Чёрная линия соответствует аналитическому решению, красные точки – расчётным данным

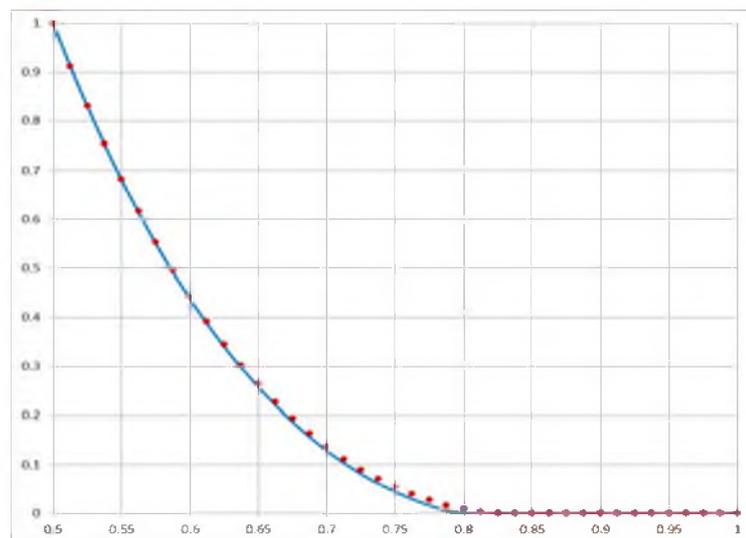


Рис. 1.6. Сопоставление точного аналитического решения (синяя линия) и результатов расчёта (красные точки) для вращательного течения бингамовской жидкости.

$$\text{Re}_\omega = 100, \text{Bn} = 10, \theta = 0.5$$

1.4.3 Спиральное течение в канале с эксцентриситетом и сопоставление с экспериментальными данными

Для спиральных течений в эксцентрическом канале жидкости Хершеля–Балкли точных аналитических решений не существует, поэтому верификация алгоритма проводилась на основе известных экспериментальных данных. Для ньютоновской жидкости большое количество экспериментального материала и результатов численного моделирования представлено в статье Эскудиера [23]. На рис. 1.7–1.9 приведены результаты сопоставления профилей скорости в самом широком и самом узком месте зазора. Можно видеть, что результаты расчёта хорошо согласуются как с экспериментальными данными, так и с результатами моделирования Эскудиера.

Для течений жидкости Хершеля–Балкли сопоставление результатов моделирования проводилось с экспериментальными данными, опубликованными в статье [47]. В этой работе представлены результаты измерений профилей скорости в установившихся течениях в цилиндрическом зазоре. В качестве рабочей жидкости использовалась 0.2% раствор карбопола (Carbopol) имеющий реологию жидкости Хершеля–Балкли с параметрами: $n = 0.43$, $\tau_0 = 32$ Па, $k = 12.09$ Па \times с n , $\rho = 1000$ кг/м 3 . Скорость вращения внутреннего цилиндра равнялась $\omega = 2.78, 13.8, 28.1$ рад/с, а массовый расход жидкости через сечения канала составлял $Q = 0.1529$ кг/с. Результаты сопоставления аксиальной и азимутальной скорости представлены на рис. 1.10–1.11.

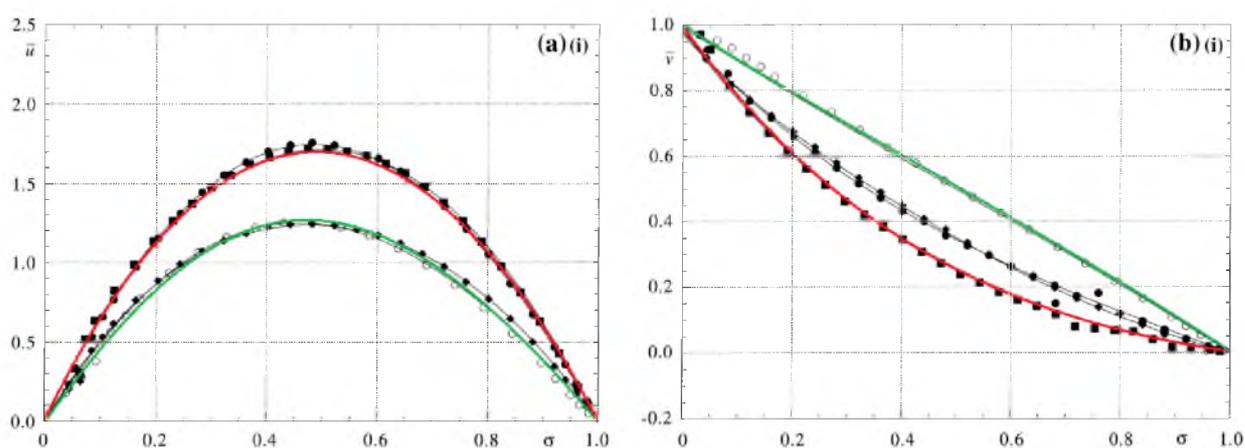


Рис. 1.7. Сопоставление распределения аксиальной (слева) и азимутальной (справа) компонент скорости с литературными данными. $Re_\omega = 115$, $Re_Q = 47$, $\theta = 0.5$, $e = 0.2$. ■ – экспериментальные данные по распределению скорости в широком месте зазора, ○ – экспериментальные данные по распределению скорости в узком месте зазора, тонкие чёрные линии – расчёты Эскудиера [23], красная и зелёная линии – результаты расчёта на созданном алгоритме

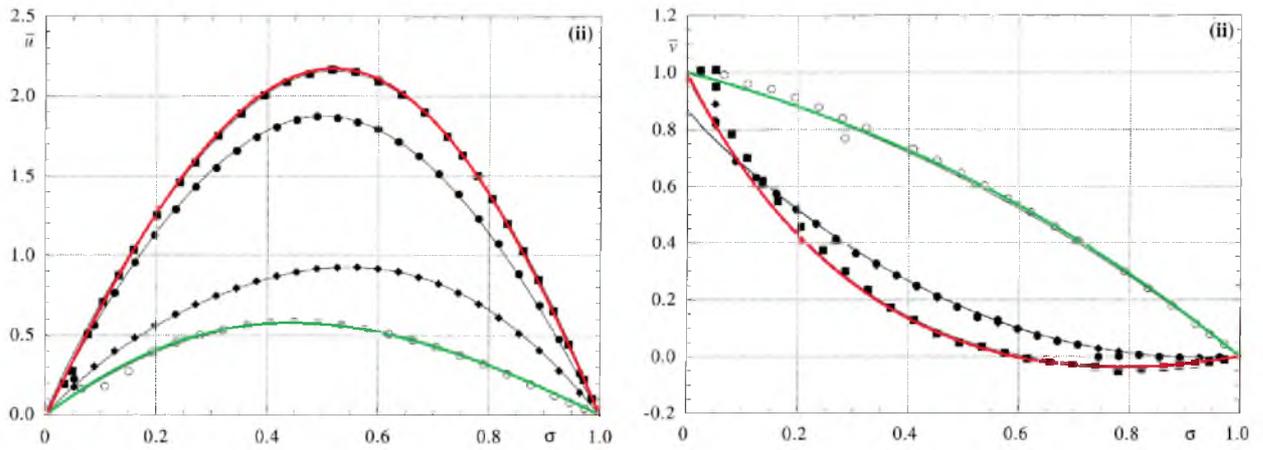


Рис. 1.8. Сопоставление распределения аксиальной (слева) и азимутальной (справа) компонент скорости с литературными данными. $Re_\omega = 115$, $Re_\Omega = 47$, $\theta = 0.5$, $e = 0.5$. ■ – экспериментальные данные по распределению скорости в широком месте зазора, ○ – экспериментальные данные по распределению скорости в узком месте зазора, тонкие чёрные линии – расчёты Эскудиера [23], красная и зелёная линии – результаты расчёта на созданном алгоритме

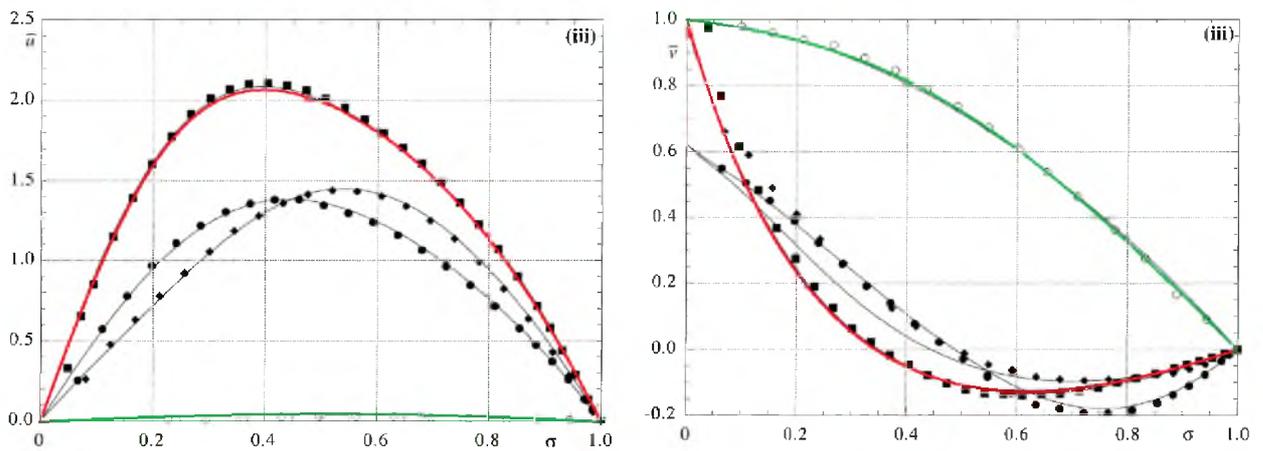


Рис. 1.9. Сопоставление распределения аксиальной (слева) и азимутальной (справа) компонент скорости с литературными данными. $Re_\omega = 115$, $Re_\Omega = 47$, $\theta = 0.5$, $e = 0.8$. ■ – экспериментальные данные по распределению скорости в широком месте зазора, ○ – экспериментальные данные по распределению скорости в узком месте зазора, тонкие чёрные линии – расчёты Эскудиера [23], красная и зелёная линии – результаты расчёта на созданном алгоритме

Подводя итог, можно утверждать, что расчётные данные хорошо согласуются с экспериментальными, а разработанный алгоритм, таким образом, вполне может использоваться для описания ламинарных течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре.

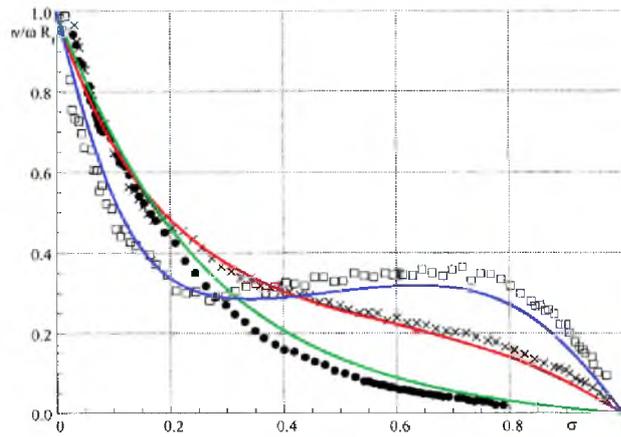


Рис. 1.10. Сопоставление азимутальной скорости с экспериментальными данными [47]. Различные кривые соответствуют разным скоростям вращения: зелёная линия – $\omega = 2.78$, красная линия – $\omega = 13.8$, синяя линия – $\omega = 28.1$ рад/с.

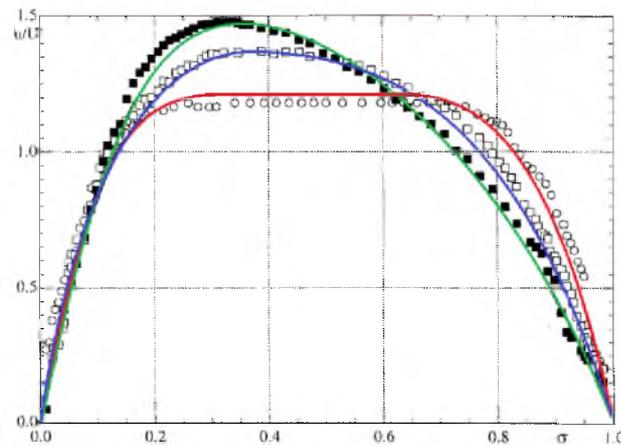


Рис. 1.11. Сопоставление аксиальной скорости с экспериментальными данными [47]. Различные кривые соответствуют разным скоростям вращения: зелёная линия – $\omega = 2.78$, красная линия – $\omega = 13.8$, синяя линия – $\omega = 28.1$ рад/с

2 Моделирование ламинарных течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей

2.1 Постановка задачи

Рассматриваются изотермические, ламинарные, полностью установившиеся течения флюида с постоянной плотностью ρ в зазоре между двумя цилиндрами с различными радиусами. Оси цилиндров параллельны, но могут не совпадать. R_o, R_i – радиусы соответственно внешнего и внутреннего цилиндра. Массовый расход жидкости Q через сечение площадью S считается заданным и постоянным. Ось OZ декартовой системы координат направлена вдоль осей цилиндров, оси OX и OY направлены так, как показано на рис. 2.1: начало координат лежит на оси внешнего цилиндра; эксцентрическое смещение вдоль оси OX , в противоположном направлении; внутренний цилиндр вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω .

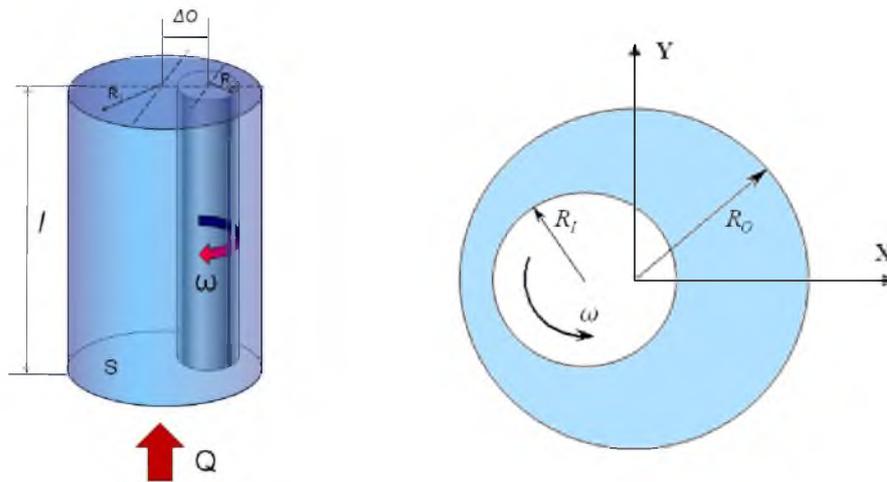


Рис. 2.1. К постановке задачи: слева – схема канала, справа – сечение канала

Уравнения гидродинамики, описывающие данный класс течений, в безразмерной форме имеют следующий вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{Re}_\omega \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{xy}, \quad (2.2)$$

$$\text{Re}_\omega \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{yy}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Re}_\omega \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{fa \operatorname{Re}}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{\tau}_{xz} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{\tau}_{yz}. \quad (2.4)$$

Здесь $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ – обезразмеренные компоненты скорости (черта сверху означает обезразмеренное значение) $\bar{u} = \frac{u}{\omega R_I}, \bar{v} = \frac{v}{\omega R_I}, \bar{w} = \frac{w}{Q/\rho S}$, а $\bar{x} = \frac{x}{(R_o - R_I)}, \bar{y} = \frac{y}{(R_o - R_I)}$ – безразмерные координаты. $\bar{\tau}_{ij}$ – безразмерные компоненты тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$, которые вводятся по-разному для различных реологий.

Реологической моделью жидкости определяет зависимость тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$ от тензора скоростей деформаций $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\gamma}_{ij}$. Для неньютоновской жидкости в общем случае следует говорить об эффективном коэффициенте вязкости $\mu_e = \mu_e(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|)$, который зависит от первого инварианта тензора скоростей деформаций $|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| = \sqrt{1/2 \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}}$. Рассматривались следующие реологические модели:

- ньютоновская жидкость

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij}; \quad (2.5)$$

- степенная жидкость

$$\tau_{ij} = \mu_e(|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|) \dot{\gamma}_{ij} = k |\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^{n-1} \dot{\gamma}_{ij}; \quad (2.6)$$

- бингамовская вязкопластическая жидкость

$$\begin{cases} \tau_{ij} = [(k|\dot{\boldsymbol{\gamma}}| + \tau_0)/|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|] \dot{\gamma}_{ij}, & |\boldsymbol{\tau}| \geq \tau_0, \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0, & |\boldsymbol{\tau}| < \tau_0; \end{cases} \quad (2.7)$$

- жидкость Хершеля–Балкли

$$\begin{cases} \tau_{ij} = [(k|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^n + \tau_0)/|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|] \dot{\gamma}_{ij}, & |\boldsymbol{\tau}| \geq \tau_0, \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0, & |\boldsymbol{\tau}| < \tau_0; \end{cases} \quad (2.8)$$

Реологические параметры n, k, τ_0 принято называть соответственно показателем степени, индексом консистенции, предельным напряжением сдвига или пределом текучести вязкопластической жидкости. Ниже этого значения напряжений среда ведёт себя как твёрдое тело, выше этого предела – как несжимаемая вязкая жидкость.

Введём характерное значение скорости сдвига. Для течения в цилиндрическом зазоре, вызванном расходом Q , характерную скорость сдвига можно принять равной $Q/[\rho S(R_o - R_I)]$. При наличии лишь вращения внутреннего цилиндра со скоростью ω соответствующее значение скорости сдвига равно: $\omega R_I/(R_o - R_I)$. Таким образом, в общем случае характерное значение скорости сдвига будем определять выражением

$$\dot{\Gamma}^2 = \left(\frac{\omega R_I}{R_o - R_I} \right)^2 + \left(\frac{Q / \rho S}{R_o - R_I} \right)^2. \quad (2.9)$$

Тогда определяющее соотношение для жидкости Хершеля–Балкли (остальные реологические модели являются её частными случаями) в безразмерных переменных $\bar{\tau} = \frac{1}{k\dot{\Gamma}^n} \tau$, $\bar{\gamma} = \frac{1}{\dot{\Gamma}} \dot{\gamma}$ примет вид

$$\begin{cases} \bar{\tau} = |\bar{\gamma}|^{n-1} \bar{\gamma} + Bn(\bar{\gamma} / |\bar{\gamma}|), & |\bar{\tau}| > Bn, \\ \bar{\gamma} = 0, & |\bar{\tau}| \leq Bn, \end{cases} \quad (2.10)$$

где введено число Бингама

$$Bn = \tau_0 / k\dot{\Gamma}^n. \quad (2.11)$$

Причём для получения численного решения эта модель регуляризуется согласно (1.36).

Как следует из уравнений, при рассматриваемых условиях поле давления имеет вид $p = p_1(x, y) + p_2 z$, $p_2 = const$. Поскольку давление в уравнениях гидродинамики определяется с точностью до постоянной, введём безразмерное значение \bar{p}_1 следующим образом

$$p_1(x, y) = \frac{k\dot{\Gamma}^{n-1}(\omega R_I)}{(R_o - R_I)} \bar{p}_1.$$

Поскольку течение может индуцироваться вращением внутреннего цилиндра либо напором, в задаче возникают два числа Рейнольдса: вращательное и аксиальное. Их определения следуют из безразмерных уравнений (2.1)–(2.4)

$$\text{Re}_\omega = \frac{\rho(\omega R_I)(R_o - R_I)}{k\dot{\Gamma}^{n-1}}, \quad \text{Re}_Q = \frac{\rho(Q / \rho S)(R_o - R_I)}{k\dot{\Gamma}^{n-1}}. \quad (2.12)$$

Падение давления тогда будет характеризоваться произведением коэффициента сопротивления (часто в зарубежной литературе называемым коэффициентом Фаннинга [109]) на число Рейнольдса Re_Q

$$fa \text{Re} = 2 \frac{(R_o - R_I)^2 \Delta p}{(Q / \rho S)(k\dot{\Gamma}^{n-1})L}. \quad (2.13)$$

Уравнения движения (2.1)–(2.4) дополняются граничными условиями: на стенках цилиндров ставятся условия прилипания, $u = v = w = 0$, а на входе задаётся расход

$$\int_S \rho w dS = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что течение в общем случае определяется шестью безразмерными параметрами. Два из них задают геометрию: отношение радиусов $\theta = R_I / R_o$ и эксцентриситет $e = \Delta O / (R_o - R_I)$ (ΔO – расстояние между осями цилиндров). Напорное и враща-

тельное числа Рейнольдса определяют скоростной режим. А ещё два характеризуют свойства флюида: показатель степени n в реологическом законе (2.8), (2.10), и число Бингама Bn . Хотя последнее, строго говоря, зависит не только от свойств флюида, но и от скоростного режима течения. Нетрудно также убедиться, что при отсутствии вращения, все безразмерные величины не зависят от Re_Q .

2.2 Ламинарное течение ньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре

Безразмерные характеристики (распределение безразмерной скорости, коэффициент сопротивления и т.д.) аксиального или напорного течения, т.е. течения, в котором отсутствует вращение внутреннего цилиндра, определяются лишь геометрическими параметрами – отношением радиусов и эксцентриситетом. Для этого случая существует аналитическое решение [2], согласно которому сопротивление канала монотонно уменьшается при увеличении эксцентриситета (см. рис. 2.2). Наибольшее уменьшение сопротивления достигается в случае близких диаметров (т.е. отношений радиусов, близкому к единице) и составляет примерно 62%, в то время как при $\theta = 0.2$ это уменьшение уже менее 50%. Необходимо также отметить, что при $\theta > 0.7$ сопротивление практически не зависит от отношения радиусов и близко к сопротивлению течения в плоском канале.

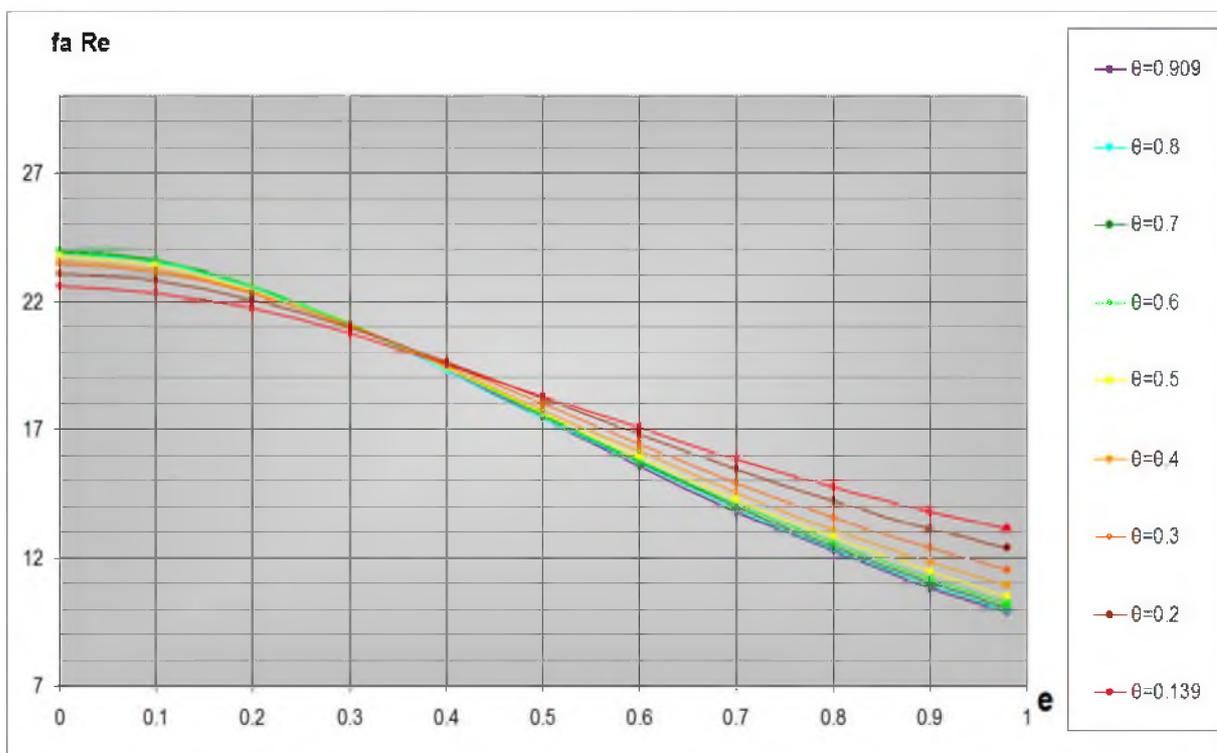


Рис. 2.2. Зависимость коэффициента сопротивления $fa Re$ от эксцентриситета для различных отношений радиусов

Для этого случая построена новая корреляция, описывающая зависимость коэффициента $faRe$ от θ и e

$$faRe_{\varrho}(e, \theta) = \left(\frac{16(1-\theta)^2}{\frac{1-\theta^2}{\ln\theta} + \theta^2 + 1} \right) \frac{1}{1+1.5e^2} \left[1 + (1.9777\theta^4 - 5.5\theta^3 + 6.11\theta^2 - 3.3706\theta + 0.8)e^2 \right] \quad (2.21)$$

В случае осесимметричного течения ($e = 0$) эта корреляция переходит в точное аналитическое решение задачи [1], а в диапазоне $0.2 \leq \theta \leq 0.9$ отклонение от расчётных данных не превосходит 1%.

Снижение сопротивления с ростом эксцентриситета связано с уменьшением интенсивности диффузионного обмена импульсом между стенками и потоком в широком месте зазора в центральной его части, возникшим в результате расширения широкой части зазора. Вращение в концентрическом канале не сказывается на распределении аксиальной скорости, т.к. вращение в этом случае не приводит к конвективному переносу аксиального импульса в направлении его ненулевого градиента (т.е. к стенкам или от них). Надо отметить, что уравнения Навье–Стокса, записанные в цилиндрической системе координат, при этом разделяются для аксиальной и вращательной компонент скорости и могут решаться независимо [1]. Уравнения спирального движения жидкости в эксцентрическом канале уже не могут быть разделены, однако аксиальная компонента скорости не входит в первые три уравнения (2.1)–(2.4). Это означает, что течение жидкости (ньютоновской) в аксиальном направлении, задаваемое расходом, никак не влияет на распределение неаксиальных компонент скорости. Однако движение жидкости в плоскости сечения канала, задаваемое скоростью вращения внутреннего цилиндра, определяет распределение аксиальной скорости по сечению.

Когда в спиральном канале имеется эксцентриситет, вращение приводит к конвективному переносу аксиального импульса в плоскости сечения, перпендикулярной оси канала. При этом аксиальная скорость увлечённой вращением жидкости резко уменьшается в узкой части зазора из-за сильного влияния стенок, где аксиальная скорость равна нулю. Медленный в аксиальном направлении поток жидкости выносится из узкой части зазора и смешиваясь замедляет течение в широкой части зазора. Такое торможение жидкости в аксиальном направлении в узкой части зазора сопровождается интенсивным диффузионным обменом аксиального импульса между жидкостью и стенками канала. Таким образом, конвективный перенос в сечении канала, индуцированный вращением внутреннего цилиндра, приводит к увеличению сопротивления в сравнении с напорным течением.

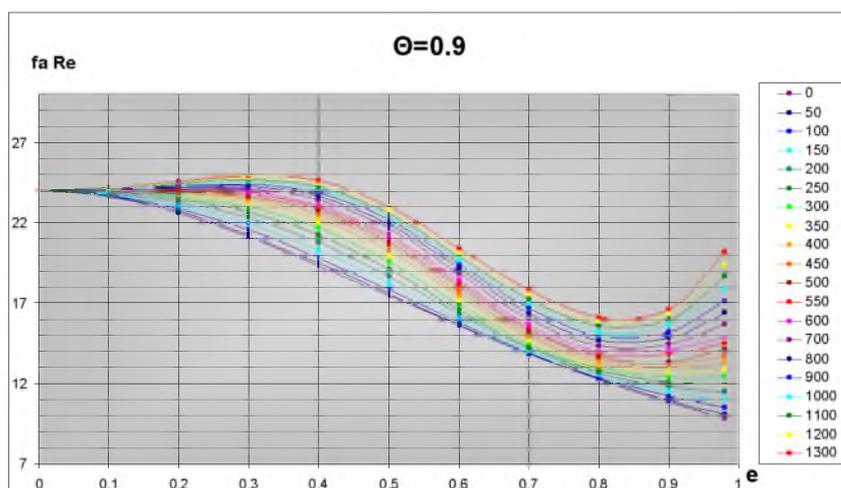


Рис. 2.3. Зависимость коэффициента $fa Re$ от эксцентриситета для различных значений чисел Re_{∞} при $\theta = 0.9$

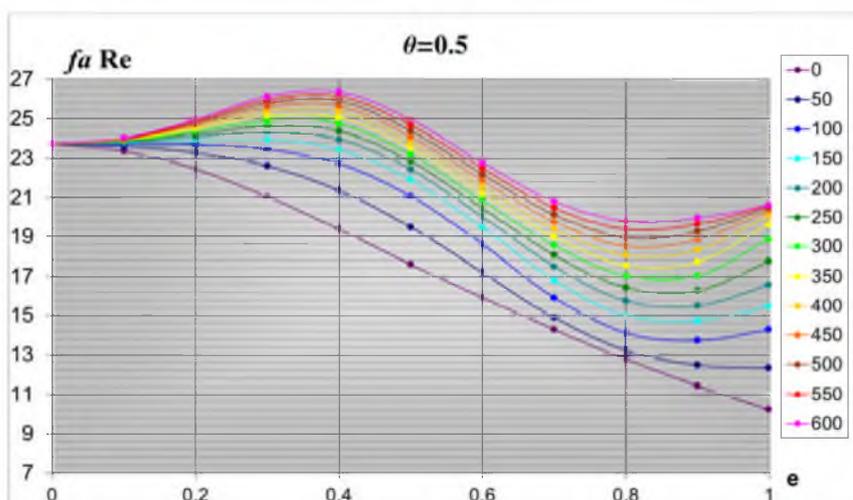


Рис. 2.4. Зависимость коэффициента $fa Re$ от эксцентриситета для различных значений чисел Re_{∞} при $\theta = 0.5$

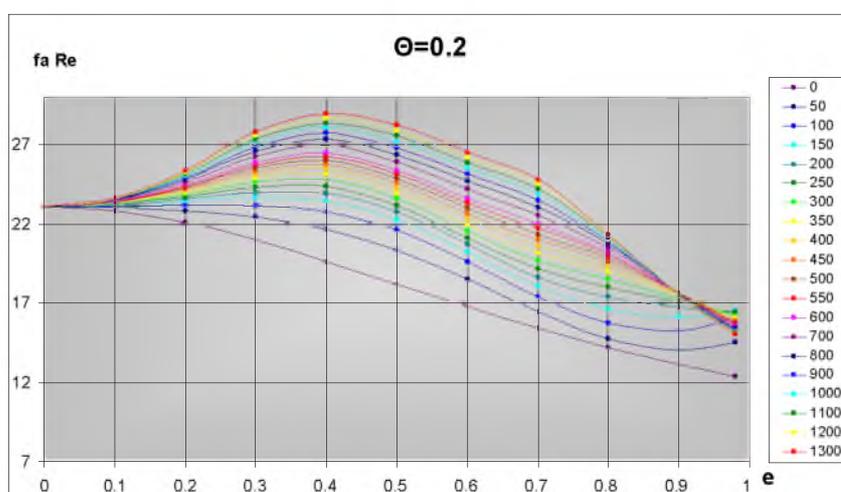


Рис. 2.5. Зависимость коэффициента $fa Re$ от эксцентриситета для различных значений чисел Re_{∞} при $\theta = 0.2$

Как правило, чем больше скорость вращения, тем интенсивнее происходит перенос импульса, а, значит, и больше увеличивается перепад давления (см. зависимость коэффициента сопротивления от эксцентриситета для различных скоростей вращения на рис. 2.3–2.5). Однако в случае высоких эксцентриситетов, при малом отношении радиусов и высоких скоростей вращения увеличение скорости вращения приводит, напротив, к снижению конвективного потока импульса от стенок (см. рис. 2.5).

Характерной особенностью спирального течения в эксцентрическом канале является формирования зоны рециркуляции при некотором критическом значении эксцентриситета (см. рис. 2.6, левый и средний рисунок). Это значение в зависимости от отношения диаметров и вращательного числа Рейнольдса Re_ω меняется в диапазоне $0.3 < e < 0.6$. Пространство зазора фактически разделяется на две части: в одной из них жидкость увлекаемая вращением внутреннего цилиндра вращается в одном с ним направлении, в другой, расположенной вблизи стенки внешнего цилиндра, жидкость циркулирует в противоположном направлении. Такое разделение происходит вследствие того, что кинетической энергии потока, увлечённого вращением внутреннего цилиндра, оказывается недостаточно, чтобы преодолеть работу сил трения, тормозящих поток в широкой части зазора, и набрать скорость, необходимую для преодоления узкой части зазора. По мере увеличения эксцентриситета соотношение между размерами зон прямого и рециркуляционного течений изменяется в пользу последней, вследствие сужения узкой части зазора, через которую проходит всё меньшее количество жидкости. Когда значение эксцентриситета близко к единице, практически всё пространство зазора оказывается охваченным возвратным течением (см. рис. 2.6, справа).



Рис. 2.6. Линии тока при вращательном течении в эксцентрическом канале. $\theta = 0.4$, $Re_\omega = 100$, $e = 0.3$, $e = 0.5$, $e = 0.99$

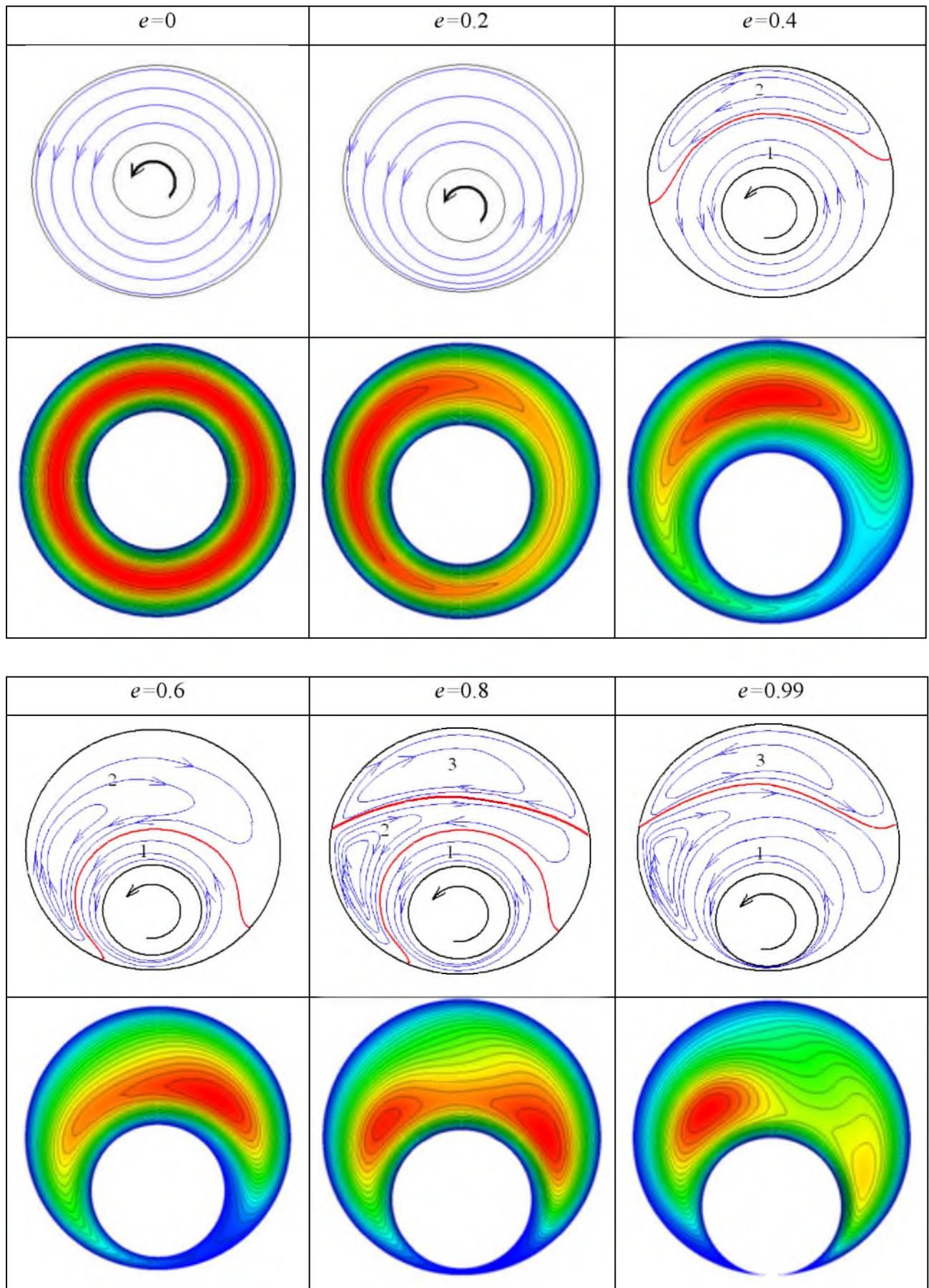


Рис. 2.7. Схема проекций линий тока на плоскость сечения и распределение аксиальной компоненты скорости в спиральном течении ньютоновской жидкости. $\theta = 0.5$, $Re_\omega = 200$

Формирование возвратного течения несколько замедляет интенсификацию конвективного переноса аксиального импульса от стенок к ядру течения, поскольку жидкость в зоне рециркуляции в меньшей степени испытывает влияние стенок. Поэтому рост перепада давления с увеличением эксцентриситета с появлением возвратного вихря прекращается (см. рис. 2.3–2.5). Дальнейшее увеличение эксцентриситета, сопровождающееся ростом зоны рециркуляции, приводит к тому, что мощный аксиальный поток оказывается сосредоточенным в ядре возвратного вихря (см. рис. 2.7), где он наименьшим образом взаимодействует со стенками. Это, в свою очередь, влечёт снижение перепада давления (рис. 2.3–2.5).

Увеличение перепада давления при высоких эксцентриситетах связано с отрывом от стенки возвратного течения, и образованием вторичного возвратного течения (см. рис. 2.7). Этот поток интенсивно переносит малый аксиальный импульс со стенок внутрь широкой части зазора, где происходит диффузия аксиального импульса и торможение аксиального течения. Отрыв этого потока от стенки, в частности приводит к появлению зоны вторичной рециркуляции, в которой направление циркуляции жидкости сонаправлено вращению внутреннего цилиндра. В случае малых отношений радиусов этого отрыва не происходит, что обусловлено геометрическими особенностями зазора, в связи с чем характерного увеличения сопротивления при больших эксцентриситетах не происходит (см. рис. 2.5).

2.3 Ламинарное течение степенной жидкости в цилиндрическом зазоре

2.3.1 Случай аксиального течения

В случае отсутствия вращения внутреннего цилиндра компоненты вектора скорости, лежащие в плоскости поперечного сечения канала, равны нулю, так что течение степенной жидкости может быть описано одним уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \left[\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \left[\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Простой анализ этого уравнения показывает, что аксиальная скорость в каждой точке сечения увеличивается в m раз при увеличении перепада давления в m^n раз. Таким образом, зависимость перепада давления от расхода при напорном течении степенной жидкости имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \alpha Q^n. \quad (2.23)$$

Необходимо отметить, что это справедливо не только для течений степенной жидкости в цилиндрическом зазоре, но и для течений в канале с произвольным сечением. Таким образом, зависимость перепада давления в канале от входных параметров, удобно описывать, зная коэффициент пропорциональности α . В действительности, коэффициент пропорциональности α в (2.23) связан с $fa Re$, а именно

$$\alpha = \frac{fa Re \cdot k}{2(R_o - R_i)^2 (\rho S)^n} \quad (2.24)$$

Иными словами, $fa Re$ есть безразмерный коэффициент пропорциональности между перепадом давления и расходом.

Как уже было отмечено, коэффициент $fa Re$ зависит не от Re_Q , но от отношения чисел Рейнольдса. Поэтому в отсутствии вращения коэффициент $fa Re$ не должен зависеть от Re_Q . Проведённые серии расчётов это подтверждают.

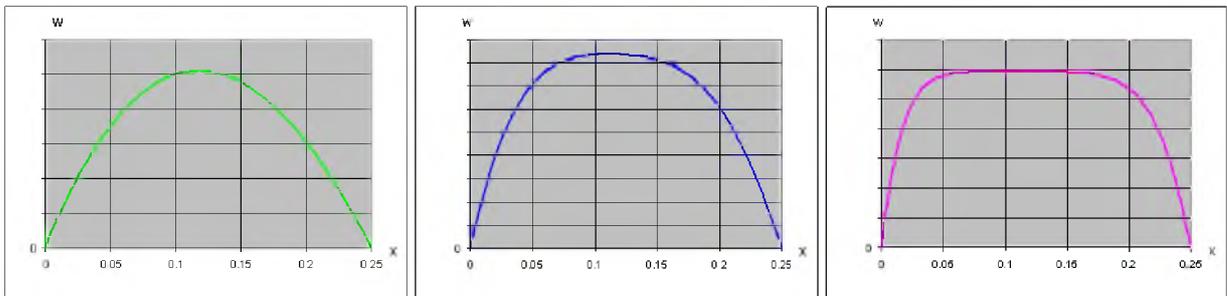


Рис. 2.8. Форма профилей скорости для аксиальной компоненты скорости в случае напорного течения степенной жидкости с различными показателями: $n=1, 0.5, 0.2$ в симметричном зазоре для отношения радиусов $\theta = 0.5$

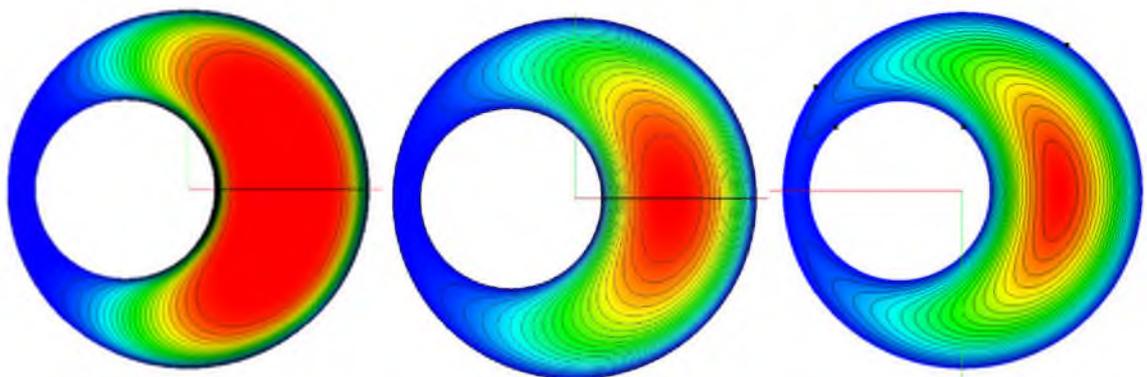


Рис. 2.9. Изолинии аксиальной компоненты скорости для напорного течения степенной жидкости с показателями $n=0.2, 0.5, 1$ для $\theta = 0.5$ и $e=0.7$

Эффективная вязкость жидкости на стенках канала имеет минимальное значение и увеличивается по мере удаления от них. Это обуславливает характерную форму профилей скорости в псевдопластических жидкостях, которые на стенках имеют максимальные значения градиентов скорости, а в центральной части – пологий участок (сравни рис. 2.8, слева и

справа). В канале с эксцентриситетом эта особенность сохраняется, в области течения выделяются зоны с высокой и низкой скоростью сдвига (см. рис. 2.9). Необходимо отметить, что в отсутствии вращения форма профилей скорости не зависит от числа Re_ϱ (или расхода).

Несмотря на различия в форме профиля, перепад давления снижается при увеличении эксцентриситета, как и в ньютоновских жидкостях (см. рис. 2.10), однако для степенных жидкостей это снижение менее значительно.

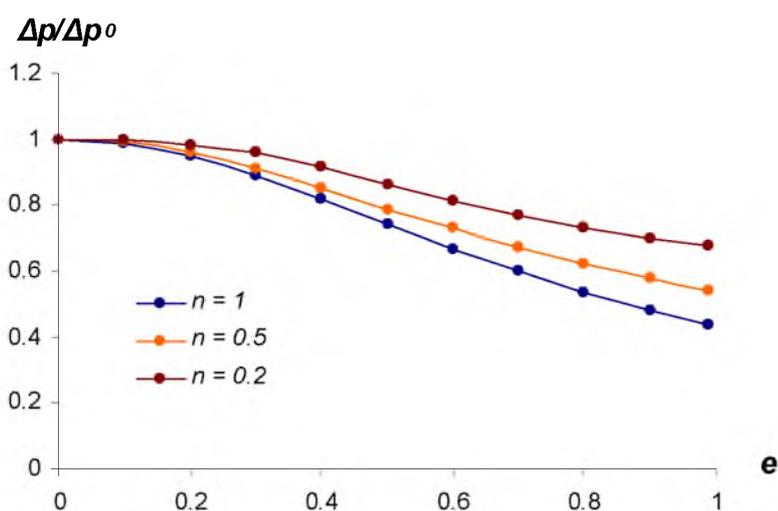


Рис. 2.10. Зависимость $\Delta p / \Delta p_0$ от эксцентриситета для различных показателей степени для $\theta=0.5$

Важно отметить, что оценивать перепада давления сравнивая количественно значения коэффициента $f_a Re$ для жидкостей, с различными показателями степени (а также жидкости с различными реологическими значениями) некорректно, поскольку коэффициент $f_a Re$ для них определяется по-разному.

2.3.2 Случай спирального течения степенной жидкости в концентрическом канале

В концентрическом канале наличие вращения не сказывалось на течении ньютоновской жидкости в аксиальном направлении. В случае псевдопластических жидкостей это не так: здесь вращение внутреннего цилиндра увеличивает скорость сдвига вблизи внутреннего цилиндра, что, согласно реологическому закону (2.6), приводит к локальному уменьшению вязкости. Причём чем больше скорость вращения, тем больше уменьшение эффективной вязкости вблизи внутреннего цилиндра. Такое уменьшение вязкости на стенках, естественно приводит к снижению аксиального напряжения на стенках, а вместе с ним и перепада давления. Таким образом, технологически возможно управлять перепадом давления лишь изменяя скорость вращения внутреннего цилиндра. Здесь стоит ещё раз сделать замечание, что речь

идёт только о ламинарных режимах течения, когда интересующие числа Рейнольдса ниже критических, при которых формируются вихри Тейлора и возникает ламинарно-турбулентный переход.

В непосредственной близости от внутреннего цилиндра эффективная вязкость определяется выражением $\mu_e(|\dot{\gamma}|) = k|\dot{\gamma}|^{n-1} = k\left(\sqrt{\dot{\gamma}_{rz}^2 + \dot{\gamma}_{r\varphi}^2}\right)^{n-1}$, где $\dot{\gamma}_{rz}$ и $\dot{\gamma}_{r\varphi}$ – компоненты тензора скоростей деформации, отвечающие за аксиальную и окружную скорости сдвига. Отсюда видно, что если одна из этих компонент значительно превышает другую, то последняя практически не оказывает влияния на изменение эффективной вязкости. Поэтому спиральные течения в соосном зазоре можно классифицировать по отношению чисел Рейнольдса. Это, прежде всего, определяет механизм изменения эффективной вязкости. Например, при $\xi = Re_\omega / Re_Q \ll 3$ аксиальная скорость сдвига доминирует над окружной, и её изменение в сечении является основным фактором изменения эффективной вязкости согласно степенному реологическому закону. Вращение в этом случае практически не оказывает ощутимого влияния ни на распределение вязкости, ни на распределение аксиальной компоненты, ни на перепад давления.

В случае преобладания вращательного течения $Re_\omega \gg Re_Q, \xi \ll 0.2$ можно считать, что аксиальная скорость сдвига всюду много меньше скорости сдвига в плоскости ХУ и вязкость определяется только за счет этого сдвига. Кроме того, области с наибольшей аксиальной скоростью сдвига будут локализованы преимущественно в областях с низкой вязкостью, то есть там, где скорость сдвига в плоскости ХУ и так велика, то есть вблизи внутреннего цилиндра. По этой причине аксиальное течение практически не влияет ни на распределение локальной вязкости, ни на распределение компонент скорости в сечении u и v . С другой стороны это обстоятельство имеет важное следствие: так как распределение вязкости не меняется при варьировании расхода, значит перепад давления пропорционален расходу (что следует из уравнения (2.4), если принять $\tau_{ij} = \mu(x, y)\dot{\gamma}_{ij}$), аналогично случаю ньютоновской жидкости. При этом коэффициент $f_a Re$ практически не будет зависеть от расхода.

Случай когда среднеаксиальная скорость и скорость вращения сравнимы $Re_\omega \sim Re_Q, 3 > \xi > 0.2$ наиболее сложен для рассмотрения. Здесь как аксиальный сдвиг, так и сдвиг в плоскости ХУ участвуют в локальном формировании вязкости. Распределение компонент скорости существенно зависит от обоих чисел Рейнольдса и именно в этом диапазоне происходит существенное изменение перепада давления при увеличении скорости вращения.

2.3.3 Случай спирального течения степенной жидкости в канале с эксцентриситетом

Наличие эксцентриситета, безусловно, усложняет структуру спирального течения, однако трансформация поля скорости для ньютоновской и степенной жидкостей при изменении эксцентриситета, качественно схожи (см. рис. 2.7). Как и в ньютоновской жидкости вращение в эксцентрическом канале приводит к переносу аксиального импульса в плоскости ХУ, тем самым увеличивая перепад давления. С другой стороны, вращение также приводит к уменьшению вязкости вблизи внутреннего цилиндра за счёт увеличения скорости сдвига, что в свою очередь, облегчает протекание жидкости вдоль канала. Эти два эффекта, имеющие противоположное влияние, определяют перепад давления.

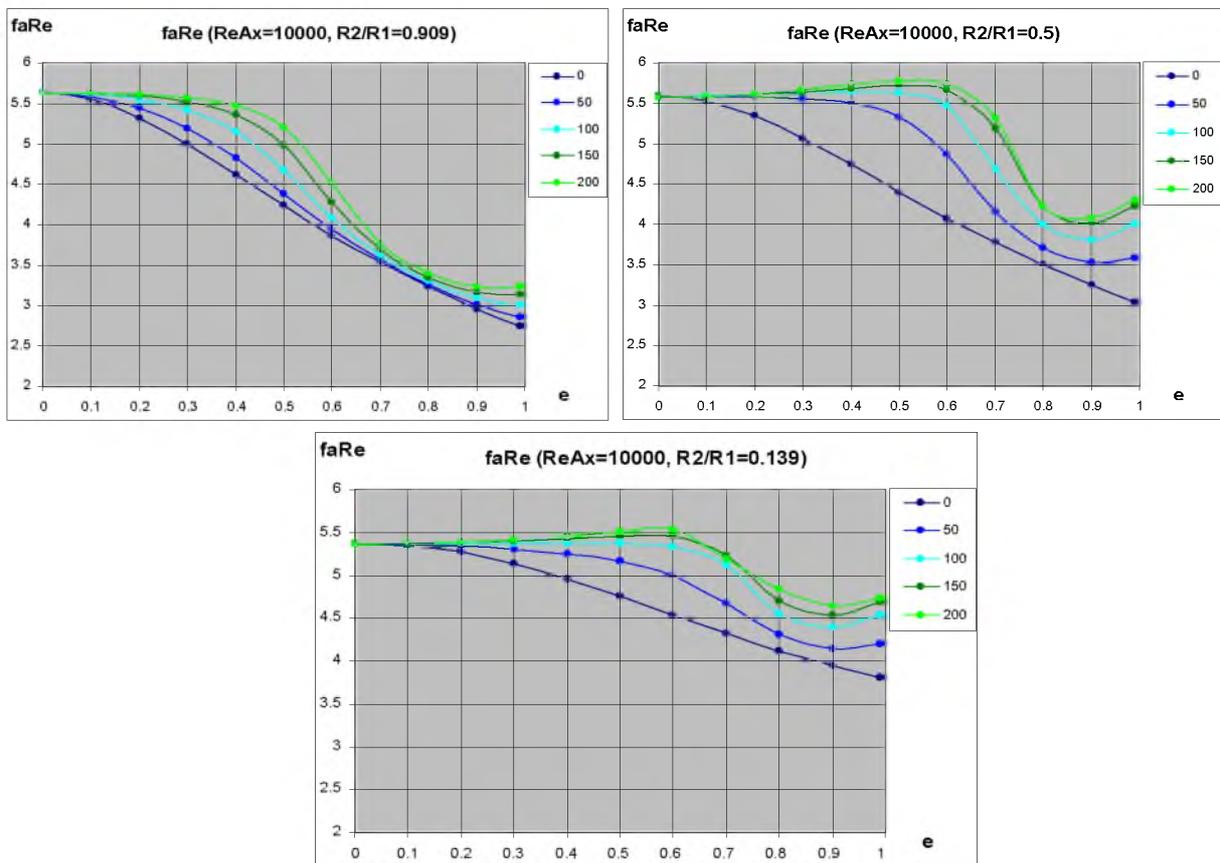


Рис. 2.11. Зависимость $faRe$ от эксцентриситета для различных Re_ω при $Re_D = 10000$.

Однако если скорость вращения много меньше среднеаксиальной (то есть доминирует напорное течение), то, как и в осесимметричном случае, вязкость формируется преимущественно за счёт аксиального сдвига, и вращение здесь приводит лишь к переносу импульса по сечению канала. Зависимость коэффициента $faRe$ от эксцентриситета при различных Re_ω для этого случая показана на рис. 2.11, где видно, что эта зависимость качественно схожа с аналогичной для случая ньютоновской жидкости. Точно так же, качественно схожи и распределения аксиальной компоненты скорости, хотя с уменьшением показателя степени

увеличиваются градиенты скорости вблизи стенок, а в центральной части, напротив, уменьшаются (см. рис. 2.12–2.14).

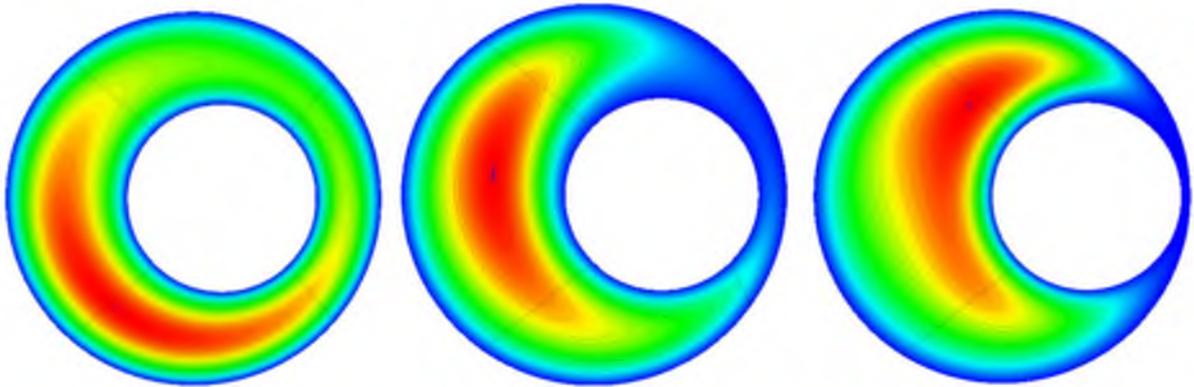


Рис. 2.12. Изолинии аксиальной компоненты скорости для Ньютоновской жидкости, для отношения радиусов 0.5 при $Re_\omega = 150$, $Re_Q = 1000$, $e = 0.2, 0.7, 0.9$

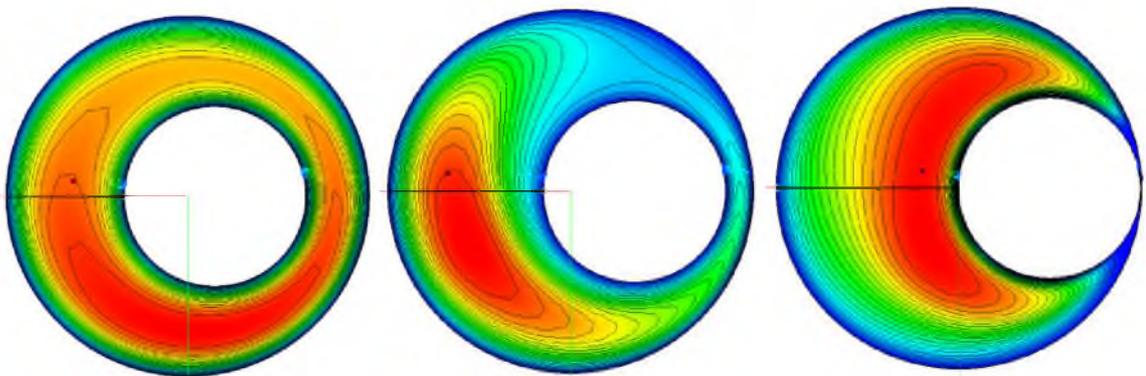


Рис. 2.13. Изолинии аксиальной компоненты скорости для степенной жидкости с $n=0.5$, для отношения радиусов 0.5 при $Re_\omega = 150$, $Re_Q = 1000$, $e = 0.2, 0.7, 0.99$

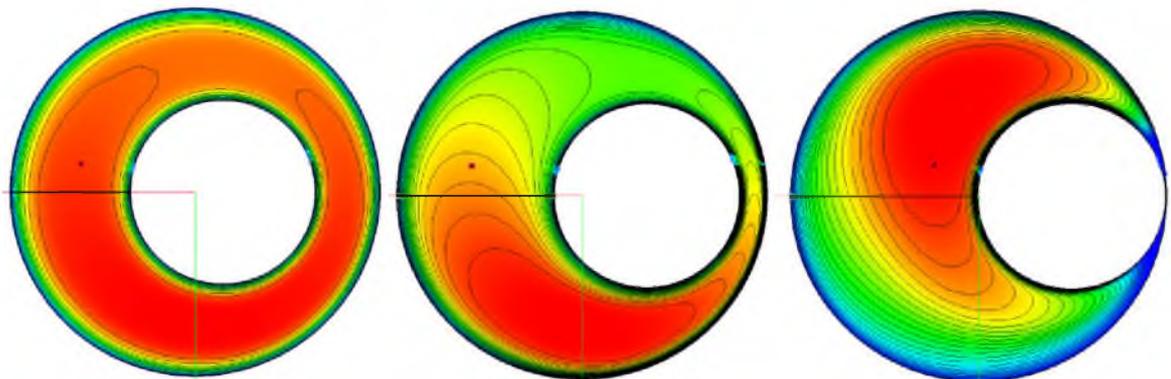


Рис. 2.14. Изолинии аксиальной компоненты скорости для степенной жидкости с $n=0.2$, для отношения радиусов 0.5 при $Re_\omega = 150$, $Re_Q = 1000$, $e = 0.2, 0.7, 0.99$

В случае, когда доминирует вращательное течение скорость сдвига резко убывает по мере удаления от вращающегося внутреннего цилиндра. Поэтому вязкость на периферии остаётся достаточно большой в отличие от случая когда доминирует напорное течение,

обуславливающее высокую скорость сдвига, и, следовательно, малую вязкость вблизи внешнего цилиндра. Высокое значение вязкости на периферии является причиной того, что скорость течения там невелика. В связи с этим образование возвратного вихря в степенной жидкости происходит при большем значении эксцентриситета по сравнению с ньютоновской жидкостью, причём это значение увеличивается при уменьшении показателя степени. Но даже после его образования скорость циркуляции жидкости в нём остаётся небольшой, пока значение эксцентриситета не слишком велико. По этой причине влияние эксцентриситета на сопротивление канала в случае доминирования вращательного течения не столь значительно, как при доминировании аксиального течения.

2.4 Ламинарное течение жидкостей с предельным напряжением сдвига в цилиндрическом зазоре

Как уже отмечалось, реологическая модель Хершеля–Балкли (2.8) характеризуется возможным наличием предельного напряжения сдвига. Этот параграф посвящён описанию эффектов, возникающих в течениях жидкостей благодаря наличию предельного напряжения независимо (если это не оговорено отдельно) от показателя степени.

2.4.1 Случай аксиального течения

В поле течения жидкостей с предельным напряжением могут возникать квазитвёрдые области там, где напряжения меньше предельного значения $|\tau| \leq \tau_0$. В концентрическом канале квазитвёрдая область представляет собой кольцевой цилиндр, движущийся в аксиальном направлении. Между стенками канала и квазитвёрдой областью при этом образуются жидкие сдвиговые слои. Число Бингама (2.11) определяет степень влияния эффектов, связанных с наличием предельного напряжения, то есть, фактически соотношение между объёмами жидких и квазитвёрдых зон в течении. Чем оно больше, тем выше объём квазитвёрдого ядра и тоньше жидкий слой.

В случае течения в эксцентрическом канале можно выделить три характерных режима течения, классификация которых приведена в [110].

1. При малых значениях эксцентриситета в течении, как и в случае концентрического канала, присутствует одна квазитвёрдая область, имеющая форму кольцевого цилиндра, хотя осевая симметрия его формы нарушается (см. рис. 2.15-а).

2. При средних значениях эксцентриситета в течении присутствуют две квазитвёрдые области в самом узком и самом широком месте зазора. Эти части движутся с различными скоростями в аксиальном направлении и разделены жидким сдвиговым слоем. Разница скоростей между ними увеличивается с ростом эксцентриситета (см. рис. 2.15-б,в).

3. Наконец, начиная с некоторого значения эксцентриситета, твёрдое ядро в узком месте зазора вовсе перестаёт двигаться, здесь образуется неподвижная зона. Вся жидкость протекает через широкий зазор, формируя при этом движущуюся в аксиальном направлении квазитвёрдую область (см. рис. 2.15-г).

Значения эксцентриситета, при котором изменяются упомянутые выше режимы течения, зависят от отношения радиусов θ . Чем меньше радиус внутреннего цилиндра в сравнении с внешним, тем меньшее влияние на течение оказывает его смещение. Поэтому, трансформации указанных режимов происходят при больших значениях эксцентриситета. Это иллюстрирует рис. 2.15, где представлены изолинии аксиальной компоненты скорости в течении жидкости Бингама. Более светлый тон соответствует большему значению аксиальной скорости. Переход от одного из описанных режимов течения к другому также зависит и от числа Бингама. При большем числе Бингама разделение квазитвёрдого ядра на две части происходит при более высоком значении эксцентриситета, а формирование застойной зоны – при более низком. Форма изолиний профиля скорости, а, значит, форма и положение жидких и квазитвёрдых областей не зависит от аксиального числа Рейнольдса.

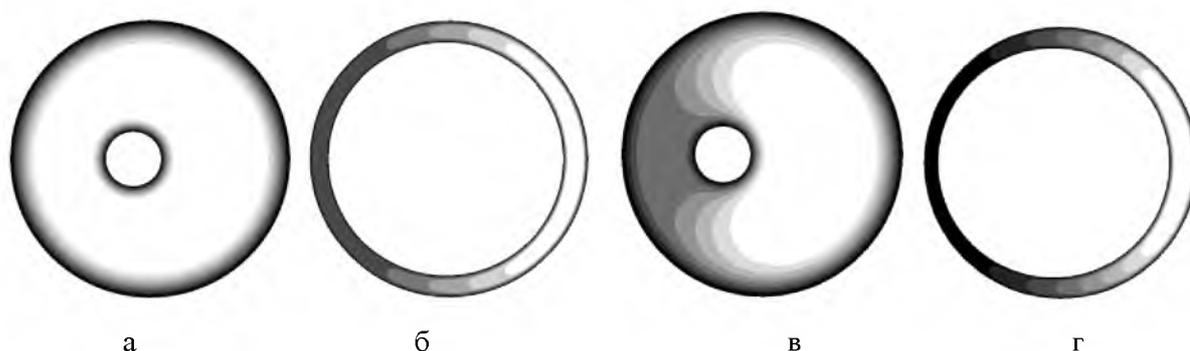


Рис. 2.15. Изолинии аксиальной компоненты скорости при различных эксцентриситетах и отношениях радиусов для $Bn = 10$. а – $e = 0.15$, $\theta = 0.2$; б – $e = 0.15$, $\theta = 0.8$; в – $e = 0.35$, $\theta = 0.2$; г – $e = 0.35$, $\theta = 0.85$

Падение давления в напорном течении при изменении эксцентриситета тесно связано с разделением квазитвёрдого ядра на две части (см. рис. 2.16 справа). Нормированный коэффициент гидравлического сопротивления f_a / f_{a_0} , где f_{a_0} – коэффициент сопротивления в концентрическом канале, практически не зависит от эксцентриситета в случае, когда квазитвёрдое ядро не разделено, т.е. для малых значений эксцентриситета, и монотонно убывает при его дальнейшем увеличении. С увеличением числа Бингама влияние эксцентриситета несколько уменьшается.

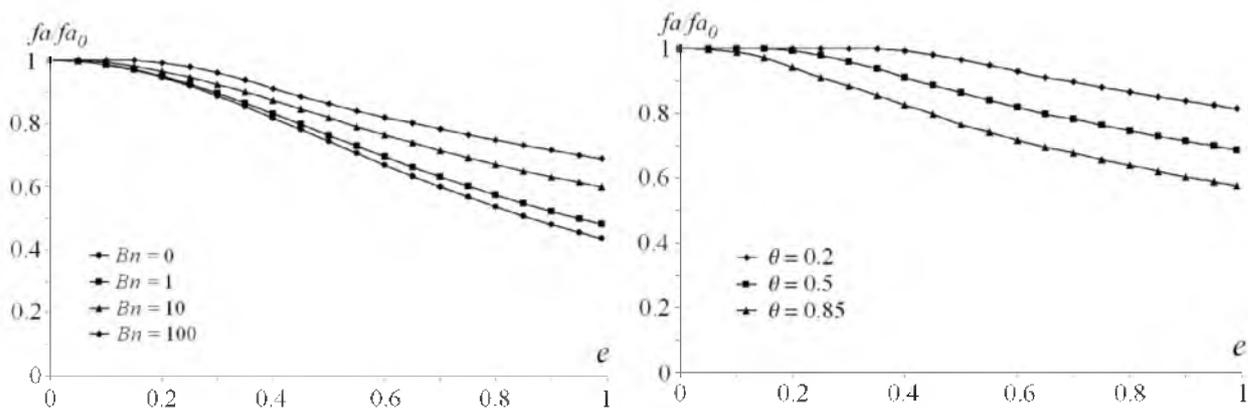


Рис. 2.16. Зависимость безразмерного коэффициента Фаннинга от эксцентриситета для различных значений числа Бингама при $\theta = 0.5$ (слева) и для различных отношений радиусов (справа) при $Bn = 100$

В отличие от степенной или ньютоновской жидкости, перепад давления в напорном течении жидкости с предельным напряжением сдвига не может быть меньше некоторой величины, определяемой предельным напряжением сдвига. Это соответствует случаю идеальной пластичности, когда течение настолько медленно, что вязкие напряжения малы по сравнению с предельным. В частности, например, падение давления на единицу длины в напорном течении в концентрической системе цилиндров не может быть меньше $2\tau_0/(R_o - R_i)$.

2.4.2 Характеристики спирального течения

В концентрической системе вращающихся цилиндров в отсутствии аксиального течения для жидкости Бингама известно точное аналитическое решение [7]. Если скорость вращения не превышает определённого значения, то формируется квазитвёрдое ядро кольцеобразной формы, примыкающее к внешнему цилиндру. Если же скорость вращения превышает некоторое значение, то пластическое течение охватывает всю область зазора, квазитвёрдое ядро не образуется. Наличие напорного течения в первом случае может привести к образованию жидкого слоя вблизи внешнего цилиндра и вращательно-поступательному движению квазитвёрдого ядра, имеющего кольцевую осесимметричную форму. Его скорость вращения определяется в первую очередь отношением радиусов. При $\theta \sim 1$ она близка к половине угловой скорости вращения внутреннего цилиндра. Но по мере уменьшения радиуса внутреннего цилиндра меняется соотношение сил вязкого трения способствующих (вблизи внутреннего цилиндра) и препятствующих вращению (вблизи внешнего цилиндра), и скорость вращения твёрдого ядра убывает.

Увеличение скорости вращения приводит к увеличению градиента скорости в плоскости XY (в поперечном сечении зазора) и соответствующих компонент напряжений. Аксиальные компоненты напряжений при этом наоборот уменьшаются за счёт того, что их доля в

преодолении предельного напряжения сдвига падает по сравнению с напряжениями в плоскости XY. Таким образом, увеличение вращения, как и в случае степенной жидкости, приводит к снижению сопротивления в канале.

Характер спирального течения в канале с эксцентриситетом определяется шестью параметрами: n , θ , Bn , e , Re_ω и Re_Q (иногда вместо Re_Q удобно пользоваться отношением чисел Рейнольдса – $\xi = Re_\omega/Re_Q$). Необходимо отметить, что варьирование расхода или скорости вращения в данном случае приводит к изменению трёх безразмерных параметров из этого набора – чисел Рейнольдса и числа Бингама.

При малом эксцентриситете квазитвёрдое ядро, сохраняя форму эксцентрического цилиндрического кольца, практически не движется в плоскости сечения XY. При этом Re_ω и ξ определяют значение эксцентриситета, при котором твердое ядро разделяется на две части, но практически не влияют на форму и размеры жидких и твердых зон.

Последующее увеличение эксцентриситета приводит, как и в случае напорного течения, к разделению квазитвёрдого ядра. Жидкость во всей области при этом вращается в одном направлении (направлении вращения внутреннего цилиндра). В отличие от напорного течения квазитвёрдое ядро в этом случае обменивается частицами среды с жидкой зоной, которые проходят через него, попадая из жидкой области в твёрдую, а затем наоборот. То есть, скорость среды в ядре имеет ненулевые компоненты в плоскости XY, хотя его границы остаются неподвижными в плоскости сечения. Движущиеся частицы среды, присоединяясь к твёрдому ядру «отвердевают», а покидая его, вновь переходят в пластичное состояние. Для малых и средних значений эксцентриситета, вращение приводит к смещению квазитвёрдого ядра в широкой части зазора в направлении движения флюида в плоскости сечения (см. рис. 2.17, слева).

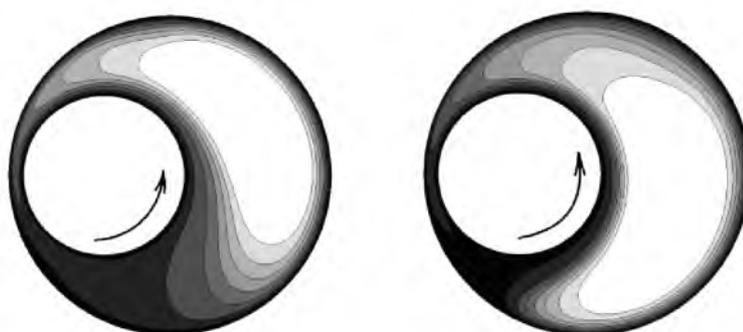


Рис. 2.17. Изолинии аксиальной компоненты скорости. $Re_Q = 5000$ для $n = 1$, $Bn = 10$ и $\theta = 0.5$. Слева – $e = 0.82$, справа – $e = 0.83$

При больших значениях эксцентриситета часть жидкости, увлекаемая вращением внутренней трубы, проходит через узкое место зазора, а другая циркулирует в широком зазоре в направлении, противоположном направлению вращения внутреннего цилиндра, образуя возвратное течение. Наличие такого течения приводит к смещению твёрдой зоны в широком зазоре в сторону, противоположную, направлению вращения внутреннего цилиндра (см. рис. 2.17, справа). Граница между прямым и возвратным течением расположена в жидком слое вблизи внутреннего цилиндра так, что квазитвёрдое ядро целиком расположено в возвратном потоке в широкой части зазора. При эксцентриситете близком к единице возвратное течение занимает практически всю широкую часть зазора.

Отношение аксиального и вращательного чисел Рейнольдса – один из основных параметров, определяющих картину течения. Для степенной жидкости этим параметром определяется соотношение между градиентами скорости в аксиальном направлении и градиентами скорости в плоскости сечения XU , влияющее на механизм изменения вязкости. Для жидкостей с предельным напряжением сдвига этот параметр, в первую очередь влияет на соотношение между аксиальными напряжениями и напряжениями в плоскости сечения XU , под влиянием которых происходит отвердевание или переход в жидкое состояние вязкопластической среды. В связи с этим уместно рассмотреть три характерных случая.

В случае больших значений этого отношения, $\xi \gg 1$, когда доминирует вращательное течение, среда находится в вязкопластическом состоянии вблизи внутреннего цилиндра. Поэтому, например, для жидкости Бингама напряжение аксиального трения вблизи внутреннего цилиндра практически пропорционально скорости сдвига в аксиальном направлении. При достаточно малых значениях эксцентриситета, когда возвратное течение ещё не возникло, флюид находится в жидком состоянии только в узком слое вблизи внутреннего цилиндра. В остальной части зазора образуется застойная зона, где напряжения меньше критического. Течение в аксиальном направлении в этом случае реализуется внутри жидкой области вблизи внутреннего цилиндра. Если эксцентриситет таков, что образовалось возвратное течение, тогда твёрдое ядро в широком зазоре окружено жидким слоем и движется в аксиальном направлении.

Другой класс течений соответствует случаю, когда аксиальное и вращательное числа Рейнольдса сопоставимы. В этом случае среда вблизи внутреннего цилиндра находится в жидком состоянии за счёт, как аксиальных напряжений, так и напряжений в плоскости сечения XU . Однако последние убывают по мере удаления от внутреннего цилиндра. Поэтому на периферии напряжения в плоскости сечения XU малы по сравнению с напряжениями в аксиальном направлении, и жидкий слой вблизи внешнего цилиндра сформирован преимущественно последними. При этом вращение жидкости происходит в узком жидком слое вблизи

внутренней трубы, в то время как остальная часть жидкости вращается сравнительно медленно, а распределение аксиальной скорости практически симметрично относительно оси симметрии зазора.

Наконец в случае, когда доминирует аксиальное течение, $\xi \ll 1$, положение жидких и квазитвёрдых областей в течении определяется преимущественно за счёт аксиальных компонент напряжений. Поэтому, как и в чисто напорном течении, форма и положение этих областей практически не зависит от аксиального числа Рейнольдса. Хотя скорость движения частиц в твёрдом ядре невелика по сравнению со скоростью вращения вблизи внутреннего цилиндра, она увеличивается с ростом эксцентриситета. Поэтому смещение твёрдых зон в направлении вращения внутреннего цилиндра тоже растёт.

Появление возвратного течения, при увеличении эксцентриситета связано с пороговым перестроением поля течения. Существует некоторое критическое значение эксцентриситета e_{kr} , такое, что при $e < e_{kr}$ возвратного течения нет, а при $e > e_{kr}$ оно уже сформировалось. Подчеркнём, отсутствия непрерывной зависимости поля течения от эксцентриситета и скачкообразное перестроение течения наблюдается только в случае доминирования аксиального течения и только для жидкостей с высоким напряжением сдвига или низким показателем степени. В остальных случаях развитие возвратного течения происходит непрерывно с ростом эксцентриситета. При малых значениях эксцентриситета размеры и интенсивность циркуляции жидкости в возвратном течении малы, с ростом эксцентриситета эти значения увеличиваются. В рассматриваемом же случае постепенный рост зоны возвратного течения вместе с эксцентриситетом невозможен из-за сравнительно малых сдвиговых напряжений в плоскости сечения XY. А при наличии возвратного вихря, граница, разделяющая области прямого и возвратного течения, находится уже в жидком слое вблизи внутреннего цилиндра.

Выше было показано, что число Бингама определяет соотношение между размерами жидких и квазитвёрдых зон в течении. Поскольку число Бингама зависит не только от свойств жидкости (предельного напряжения и структурной вязкости), но и от режима течения (характерной скорости сдвига), то медленные течения даже с малым предельным напряжением будут характеризоваться высоким числом Бингама.

Когда число Бингама не велико ($Bn \leq 1$) размеры квазитвёрдых зон малы и течение флюида в этом случае мало отличается от течения степенной жидкости. Другой предельный случай реализуется, когда число Бингама велико, $Bn \gg 1$, (случай идеальной пластичности) напряжение в жидких областях близко по абсолютному значению к τ_0 . Размеры жидких областей в этом случае малы по сравнению с размерами квазитвёрдых зон. Кроме того, положения жидких и твёрдых зон практически не зависят в этом случае от вращательного числа

Рейнольдса (но зависят от ξ). Поэтому влияние эксцентриситета на перепад давления весьма близко к случаю течения без вращения внутренней трубы.

В общем случае при увеличении числа Бингама толщина жидких слоёв вблизи внешнего и внутреннего цилиндра уменьшается. Поэтому с его увеличением формирование возвратного течения затягивается.

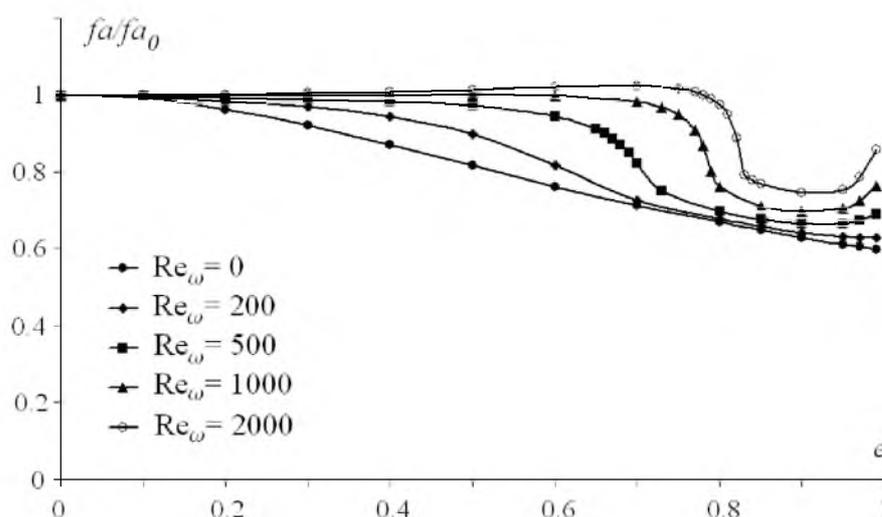


Рис. 2.18. Зависимость f/f_0 от эксцентриситета при $Re_Q = 5000$ для различных вращательных чисел Рейнольдса. $Bn = 10$, $\theta = 0.5$

Падение давления вдоль канала является одной из ключевых характеристик течения. В напорных течениях коэффициент сопротивления ведёт себя вполне предсказуемо, уменьшаясь с ростом эксцентриситета и числа Бингама (см. рис. 2.16). Вместе с тем характер спирального течения может, как было показано, существенно меняться. В случае, когда доминирует напорное течение, коэффициент сопротивления монотонно снижается с ростом эксцентриситета, как и в напорном течении (сравни рис. 2.18 и рис. 2.16). Эта зависимость, однако, становится немонотонной с ростом вращательного числа Рейнольдса. Так, начиная с чисел $Re_\omega \sim 500$, сопротивление канала сначала резко падает при $e \sim 0.67$, а затем при достаточно больших значениях эксцентриситета напротив увеличивается (рис. 2.18). Важно подчеркнуть, что с ростом вращательного числа Рейнольдса в широком диапазоне значений эксцентриситета коэффициент сопротивления практически остаётся таким же, что и в концентрическом канале. Это связано с тем, что основное сопротивление создаётся в широкой части зазора, большой объём которого занимает квазитвёрдое ядро. Затем, когда эксцентриситет становится настолько велик, что формируется возвратное течение и жидкость практически не проходит через узкую часть зазора, перепад давления достаточно резко убывает (рис. 2.18). Напротив, при больших значениях эксцентриситета сопротивление снова начинает расти, что

связано с увеличением интенсивности возвратного вихря и ростом отклонения положения квазитвёрдого ядра от оси симметрии в широкой части зазора.

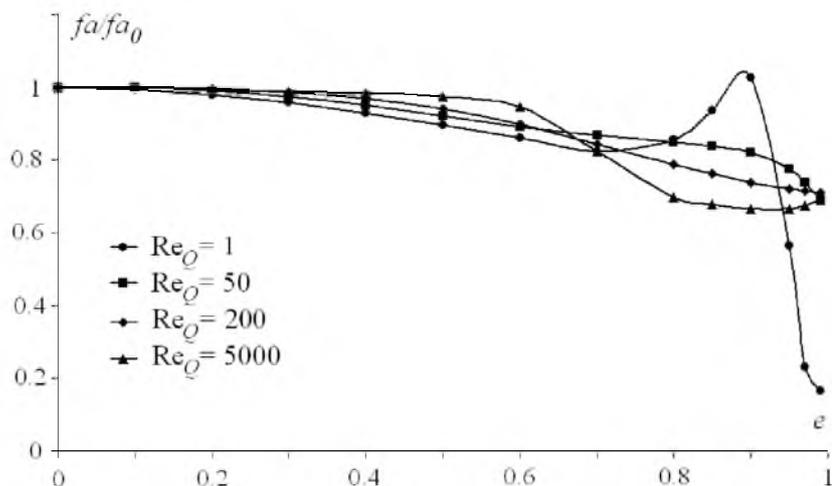


Рис. 2.19. Зависимость fa/fa_0 от эксцентриситета при $Re_\omega = 500$ для различных аксиальных чисел Рейнольдса. $Bn = 10$, $\theta = 0.5$

Наличие локального минимума падения давления характерно для течений, в которых доминирует аксиальное течение (см. кривые на рис. 2.18 при $Re_\omega = 200, 500, 1000$ и 2000 и кривую для $Re_Q = 5000$ на Рис. 2.19). Однако, когда величина аксиальных напряжений и напряжений в плоскости сечения XU становятся сопоставимыми, такого локального минимума не наблюдается. Это иллюстрируют кривые для чисел Рейнольдса $Re_Q = 50$ и 200 на рис. 2.19. В этом случае квазитвёрдое ядро в широкой части зазора практически симметрично при всех значениях эксцентриситета. Однако при доминировании вращательного течения зависимость коэффициента сопротивления от эксцентриситета имеет принципиально иной характер (см. кривую при $Re_Q = 1$ на рис. 2.19). В этом случае сопротивление практически не меняется, поскольку течение в аксиальном направлении формируется преимущественно вблизи внутреннего цилиндра. Именно здесь среда находится в пластическом состоянии, благодаря высоким напряжениям в плоскости сечения XU , вызванным вращением внутреннего цилиндра (см. рис. 2.20а). Размеры же области пластического состояния в широком диапазоне значений эксцентриситета остаются почти постоянными. Однако, когда жидкий слой, сформированный вокруг внутреннего цилиндра, начинает касаться внешнего цилиндра, область течения уменьшается. Как следствие начинает резко возрастать сопротивление (см. рис. 2.19 и рис. 2.20б). При дальнейшем увеличении эксцентриситета формируется возвратное течение (рис. 2.20в). В широкой части зазора вместо застойной зоны образуется квазитвёрдое ядро, движущееся в аксиальном направлении. В результате при больших значениях эксцентриситета перепад давления резко падает (рис. 2.19).

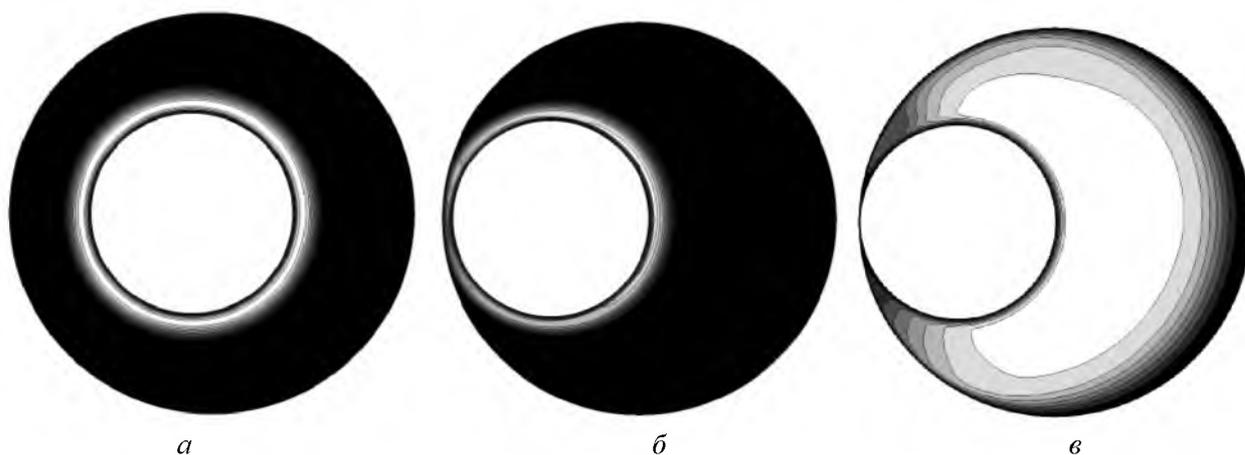


Рис. 2.20. Изолинии аксиальной компоненты скорости в случае доминирования вращательного течения при $Re_{\omega} = 500$, $Bn=10$ и $\theta = 0.5$. а – $e = 0.2$, б – $e = 0.9$, в – $e = 0.99$

В рассмотренном классе течений влияние эксцентриситета имеет в некотором смысле универсальный характер. В напорном течении увеличение эксцентриситета влечёт убывание перепада давления. В случае спирального течения наличие эксцентриситета приводит, с одной стороны, к расширению широкой части зазора и увеличению эффективного гидравлического диаметра. С другой стороны увеличивается интенсивность переноса медленной в аксиальном направлении жидкости со стенок цилиндров и конвективной диффузии, что приводит к увеличению сопротивления канала.

Возвратное течение наблюдается всегда при достаточно высоком эксцентриситете. Однако значение эксцентриситета, при котором оно возникает, зависит от остальных параметров задачи. Кроме того, в зависимости от отношения чисел Рейнольдса его появление может происходить непрерывно, а может носить пороговый характер. Стоит отметить, что численное моделирование позволяет лишь приближённо определить критическое значение эксцентриситета, при котором образуется возвратный вихрь.

Пороговое перестроение течения наблюдается не только в течении жидкости с предельным напряжением, но и в степенной жидкости. На практике важно учитывать этот эффект поскольку при этом резко меняются интегральные параметры течения и, соответственно, нагрузка на гидросистему и механизмы.

Представленные в работе результаты получены для случая ламинарного течения. На практике при высоких числах Рейнольдса имеет место ламинарно-турбулентный переход. Поэтому полученные зависимости для коэффициента сопротивления могут несколько отличаться от экспериментальных.

2.5 Момент и силы, действующие на внутренний цилиндр

Момент и гидродинамические силы, возникающие в течениях рассматриваемого класса, в настоящее время остаются практически не изученными. Известна лишь одна статья, посвящённая свободному движению внутреннего цилиндра, где авторы уделяют внимание этому вопросу [111]. Однако её авторы рассматривали лишь случай ньютоновской жидкости и отношение радиусов 0.5. Вместе с тем, действие сил может привести к прецессии внутренней трубы, если она не достаточно жёсткая, чего трудно добиться в каналах большой длины.

2.5.1 Момент, действующий на внутренний цилиндр в ньютоновской жидкости

Момент сил трения, действующих со стороны жидкости на внутренний цилиндр, вычисляется интегрированием касательных вязких напряжений на поверхности цилиндра

$$M_0 = \left| \int_S \vec{r} \times (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) ds \right|,$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к внутреннему цилиндру, $\vec{\tau}$ – тензор вязких напряжений, \vec{r} – вектор, начало, которого лежит на оси внутреннего цилиндра, а интегрирование ведётся по поверхности внутреннего цилиндра S . В дальнейшем, говоря о моменте, будет подразумеваться его удельная величина, т.е. момент, действующий на единицу длины трубы.

В концентрической системе цилиндров для момента известно точное решение [112]

$$M_0 = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \omega. \quad (2.25)$$

Для изучения зависимости от различных параметров удобно пользоваться коэффициентом сопротивления вращению – безразмерной величиной, равной отношению момента сил, действующих на внутренний цилиндр в эксцентрическом канале, к моменту сил в концентрической системе цилиндров с теми же радиусами и скоростью вращения

$$T = \frac{M}{M_0} = M \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\pi\mu\omega R_1^2 R_2^2}.$$

На рис. 2.21 представлена зависимость этого коэффициента от эксцентриситета для различных отношений радиусов. Момент монотонно растёт с увеличением эксцентриситета. Можно выделить две характерные области зависимости коэффициента сопротивления вращению от эксцентриситета. В первом диапазоне, $0 \leq e \leq 0.9$, приращение коэффициента с ростом значений эксцентриситета изменяется от процентов до десятков процентов. С другой стороны, в диапазоне $0.9 \leq e < 1$ наблюдается резкое увеличение коэффициента сопротивления. Описанный характер зависимости качественно сохраняется при всех значениях θ . С увеличением этого параметра влияние эксцентриситета становится более заметным. Так, при

$\theta = 0.2$ максимальное изменение момента сопротивления примерно четырехкратное, тогда как для отношения $\theta = 0.99$ момент сопротивления увеличивается почти в 14 раз. Данный эффект особенно важно учитывать в подшипниках скольжения, где поперечное давление на внутренний вал может привести к появлению эксцентриситета, и, как следствие, возрастанию момента сопротивления. В случае очень узкого зазора, т.е. когда отношение радиусов θ близко к единице, геометрическая форма зазора близка к плоскому каналу (переменной ширины в случае с эксцентриситетом), и зависимость от θ становится не столь существенной.

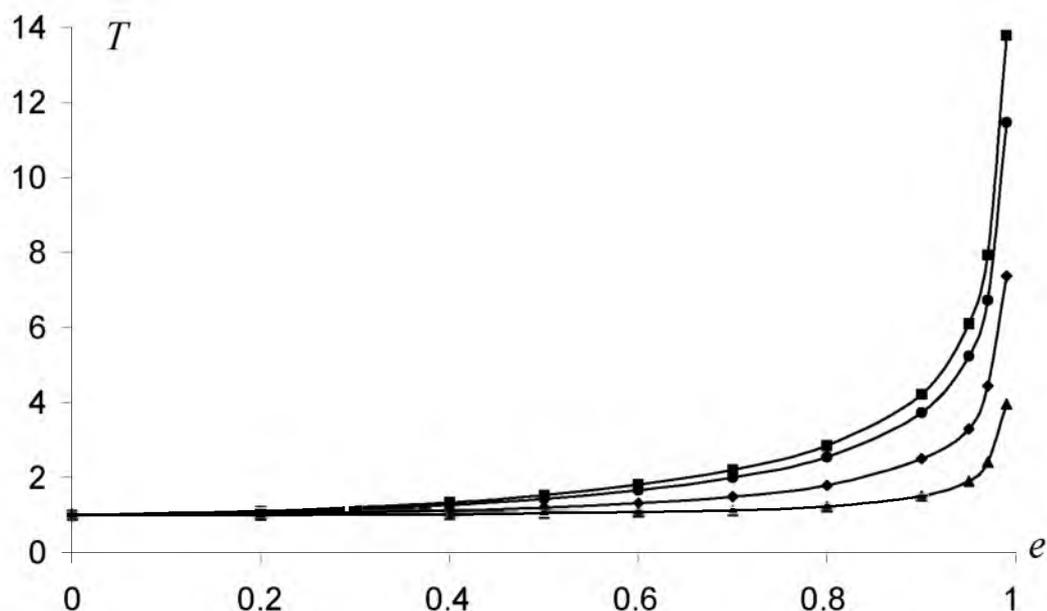


Рис. 2.21. Зависимость коэффициента сопротивления вращению от эксцентриситета для различных отношений радиусов. $Re_{\omega} = 100$. \blacktriangle $\theta = 0.2$, \blacklozenge $\theta = 0.5$, \bullet $\theta = 0.85$, \blacksquare $\theta = 0.99$

В [113] приводится аналитическое решение данной задачи, полученное для значений θ близких к единице. Для момента сил трения в результате получена простая формула

$$T = \frac{(1+\theta)\theta(1+2e^2)}{(2+e^2)\sqrt{1-e^2}}.$$

Расчёты, однако, показывают, что, как и следовало ожидать, область применимости этой формулы ограничена высокими θ . Так для $\theta = 0.99$ отличие, получаемое с помощью этой формулы, не превышает 1.5 %, но уже для $\theta = 0.85$ расхождение с численным решением составляет более 25 %.

Резкое нарастание момента сил трения при больших эксцентриситетах связано с качественным изменением характера течения (см. рис. 2.21). В первом случае (в области малых и умеренных эксцентриситетов) сопротивление практически полностью определяется сдвиговыми напряжениями, генерируемыми жидкостью, которая циркулирует вблизи внутренней

трубы и протекает через узкое место зазора (см. поле скорости на рис. 2.22, слева). В остальной области течения, где возникает возвратное течение, интенсивность циркуляции жидкости мала, как следствие сдвиговые напряжения не велики, так что течение в этой зоне даёт незначительный вклад в момент сил сопротивления. Этот факт иллюстрирует рис. 2.22, справа, где представлены изолинии модуля напряжений. С ростом эксцентриситета ширина узкого места зазора уменьшается, и сдвиговые напряжения в этой области нарастают. При эксцентриситете близком к единице ширина узкого места зазора столь мала, что жидкость, увлекаемая вращением, практически не проходит через это место. Во всей области доминирует возвратное течение, где жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вращения. В месте сужения канала поток разворачивается и течёт вдоль внешней стенки в обратном направлении. При этом скорость сдвига в области разворота и в узком месте канала велика, что обуславливает наличие в этом месте сильного вязкого трения. Таким образом, в местах сужения зазора возникают области высоких напряжений. Появление при эксцентриситете близком к единице таких новых зон с высокими вязкими напряжениями и приводит к резкому росту момента сопротивления (см. рис. 2.21).

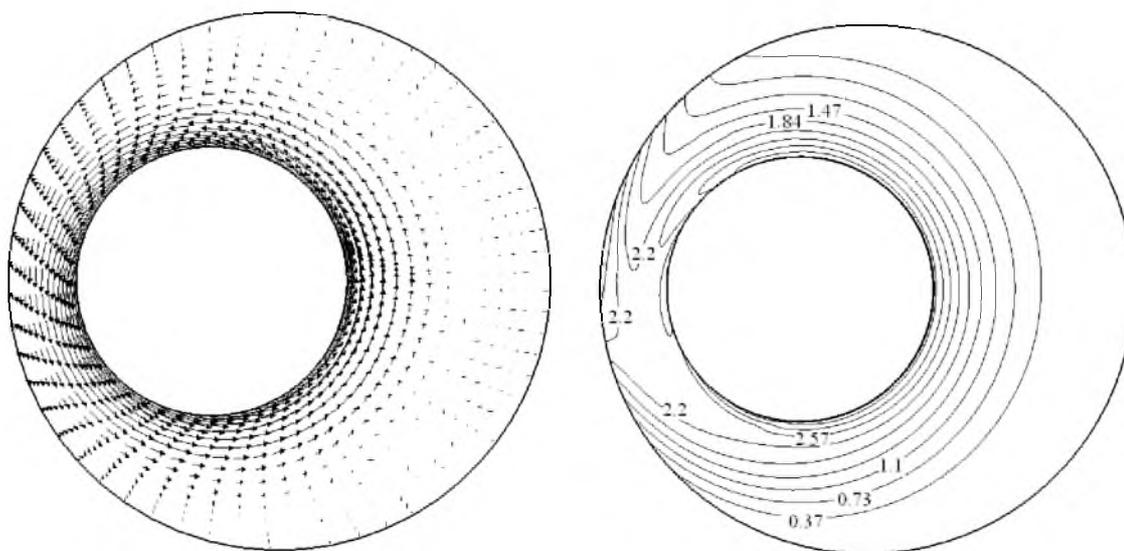


Рис. 2.22. Поле скорости (слева) и изолинии модуля вязких напряжений $|\bar{\tau}| = \frac{1}{\mu\Gamma} |\tau|$ (справа)
 для случая $Re_{\omega} = 100, \theta = 0.5, e = 0.5$

Важнейшим фактором, определяющим величину момента, является скорость вращения внутреннего цилиндра. При отсутствии вращения момент равен нулю. В концентрическом канале момент, действующий на внутренний цилиндр пропорционален угловой скорости (см. соотношение (2.25)). Однако при наличии эксцентриситета характер этой зависимости меняется, она становится нелинейной. В качестве примера на рис. 2.23 представлена за-

зависимость коэффициента сопротивления вращению от числа Рейнольдса. Эта зависимость близка к параболической, так что

$$M \sim [a(e, \theta) + b(e, \theta)\omega^2] \omega, \quad (2)$$

где коэффициенты a и b – некоторые функции. Следует отметить, что значения этих коэффициентов не велики. Изменение коэффициента сопротивления вращению, например, для течения представленного на рис. 2.22, составляет менее десяти процентов. Такое изменение мало по сравнению с увеличением сопротивления, возникающим с ростом эксцентриситета. С уменьшением θ это значение несколько растёт, но становится пренебрежимо малым при низких эксцентриситетах. Тем не менее эффект зависимости от параметра θ важен, и при больших значениях эксцентриситета он может давать большие абсолютные значения увеличения момента сил трения.

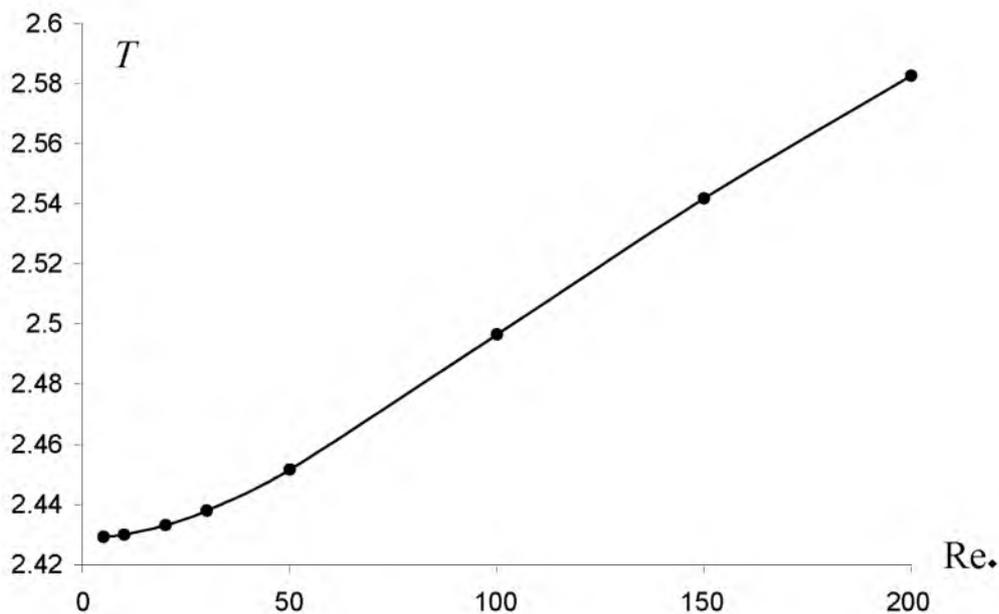


Рис. 2.23. Зависимость коэффициента сопротивления вращению от Re_ω для случая $\theta = 0.5, e = 0.9$

2.5.2 Силы, действующие на внутренний цилиндр в ньютоновской жидкости

Как уже отмечалось, в случае напорного течения без вращения (даже с эксцентриситетом) давление по сечению одинаковое, поэтому на внутренний цилиндр со стороны жидкости силы не действуют. Ввиду симметрии не действуют силы и в случае концентрической системы цилиндров с вращением. В остальных случаях для анализа силы будем пользоваться безразмерными компонентами сил

$$F_x = f_x \frac{R_1 - R_2}{2\pi\mu\omega R_2^2}, \quad F_y = f_y \frac{R_1 - R_2}{2\pi\mu\omega R_2^2}.$$

Здесь f_X и f_Y – компоненты силы, действующей на внутреннюю трубу отнесённые к единице длины трубы. Таким образом, сила здесь обезразмерена на величину силы трения между участками длины $2\pi R_2$ двух параллельных пластин, расстояние между которыми $R_1 - R_2$, а относительная скорость сдвига равна скорости на поверхности внутреннего цилиндра ωR_2 .

Сила, действующая на внутреннюю трубу, складывается из сил, обусловленных неравномерностью распределения давления по сечению

$$F_{Xp} = \int_S \frac{\partial p}{\partial x} ds, \quad F_{Yp} = \int_S \frac{\partial p}{\partial y} ds,$$

и сил вязкого трения

$$F_{Xs} = \int_S \mu \frac{\partial u}{\partial y} ds, \quad F_{Ys} = \int_S \mu \frac{\partial v}{\partial x} ds.$$

Во всех случаях определяющий вклад в результирующее значение дают силы давления F_{Xp} , а силы, обусловленные вязким трением малы. Роль сил трения возрастает лишь при эксцентриситете, близком к единице и в основном для Y-компоненты. Типичные зависимости результирующих сил, действующих на внутренний цилиндр, от эксцентриситета представлены на рис. 2.24 и рис. 2.25. Характерной особенностью этой зависимости является, во-первых, отрицательность Y-ой составляющей силы при всех значениях эксцентриситета. Исключением является малое отношение радиусов, когда составляющая F_{Ys} становится сопоставимой с F_{Yp} , и даже доминирует при малых Re_ω (см. рис. 2.24). Второе важное обстоятельство – смена знака X-ой составляющей силы. При малых и средних эксцентриситетах сила, действующая на внутреннюю трубу, отталкивает её от центра внешней, что качественно можно объяснить с помощью уравнения Бернулли. В узком месте зазора скорость жидкости больше чем в широком, поэтому давление там меньше, и сила, приложенная к внутренней трубе, направлена в сторону внешней трубы. При высоком значении эксцентриситета в узкое место зазора проходит не вся жидкость, большая её часть вынуждена развернуться и течь по внутренней стенке внешнего цилиндра. При этом в месте её резкого разворота образуется зона высокого давления. Жидкость в этой зоне отталкивает внутреннюю трубу от стенки внешней и в направлении, противоположном оси OY. Этим также объясняется резкое увеличение Y-компоненты силы при эксцентриситете, близком к единице.

Ещё одной важной особенностью течения является обращение в ноль силы F_X при некотором значении эксцентриситета (см. рис. 2.24 и рис. 2.25). Это положение определяет равновесия внутреннего цилиндра, при условии его свободного движения вдоль оси OX и закреплении по оси OY. Данное положение равновесия является устойчивым в отличие от

осесимметричного случая, когда сколь угодно малое отклонение от оси симметрии приводит к возникновению силы, отталкивающей внутренний цилиндр от положения равновесия. Примечательно, что для различных отношений радиусов из диапазона $0.2 \leq \theta \leq 0.85$ и различных чисел Re_ω значения эксцентриситета, при которых $F_X = 0$, близки и лежат в диапазоне эксцентриситетов от 0.65 до 0.8. Именно в этом случае течение таково, что силы давления и силы вязкого трения становятся равными по величине.

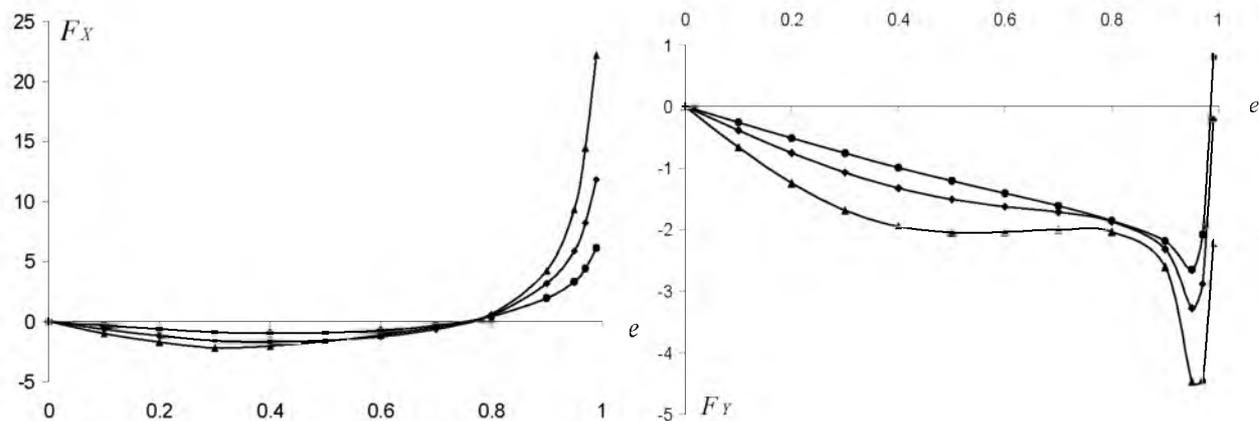


Рис. 2.24. Зависимость компонент силы от эксцентриситета при различных вращательных числах Рейнольдса. $\theta = 0.2$, $\blacktriangle Re_\omega = 200$, $\bullet Re_\omega = 100$, $\blacksquare Re_\omega = 50$

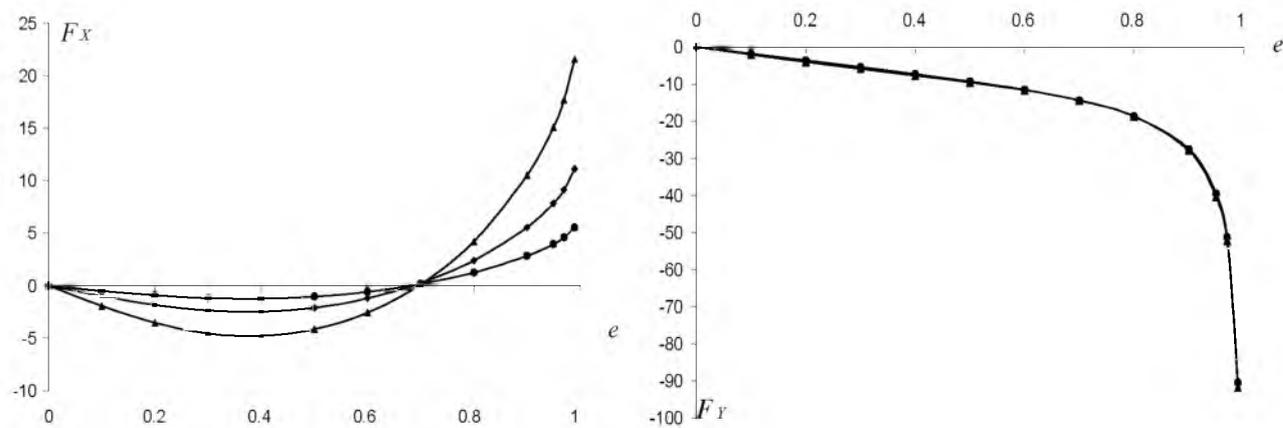


Рис. 2.25. Зависимость компонент силы от эксцентриситета при различных вращательных числах Рейнольдса. $\theta = 0.85$, $\blacktriangle Re_\omega = 200$, $\bullet Re_\omega = 100$, $\blacksquare Re_\omega = 50$

С увеличением параметра θ величина силы, действующих на внутренний цилиндр, растёт, также как это было с моментом сил трения. С ростом числа Рейнольдса абсолютные значения обеих компонент сил также растут. В качестве примера на рис. 2.26 показано зависимость F_X и F_Y от вращательного числа Рейнольдса для случая $\theta = 0.5, e = 0.9$. Характер этой зависимости различен, но в обоих случаях нелинейный. Численно было показано, что

предел F_X при $Re_\omega \rightarrow 0$ равен нулю (причём и $F_{Xs} \rightarrow 0$ и $F_{Xp} \rightarrow 0$ при $Re_\omega \rightarrow 0$), в то же время предел F_Y при $Re_\omega \rightarrow 0$ равен некоторому ненулевому значению (причём предел и $F_{Ys}(Re_\omega)$ и $F_{Yp}(Re_\omega)$ не равны нулю при $Re_\omega \rightarrow 0$). Физически это означает, что в окрестности малых угловых скоростей Y-компонента силы пропорциональна скорости вращения, а X-компонента – квадрату скорости вращения.

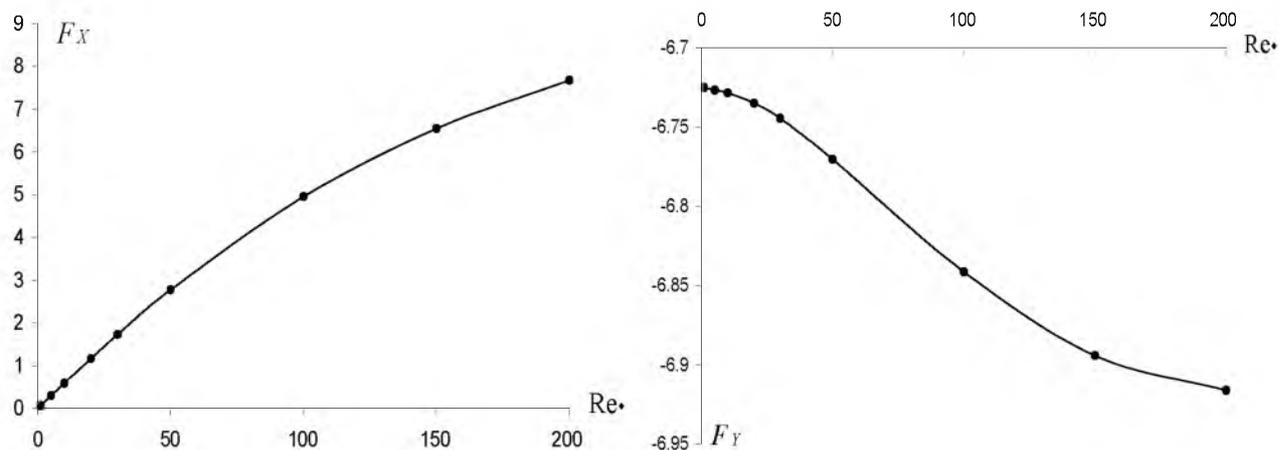


Рис. 2.26. Зависимость сил F_X и F_Y от вращательного числа Рейнольдса для $\theta = 0.5, e = 0.9$.

2.5.3 Момент и силы, действующие на внутренний цилиндр в неньютоновских жидкостях

Рассмотрим для начала случай чисто вращательного течения, потока жидкости в аксиальном направлении нет. Эффективная вязкость формируется исключительно за счёт сдвига в плоскости XY. Картина течения в целом похожа на случай ньютоновской жидкости. Для случай концентрического канала результаты моделирования давали слабую зависимость безразмерного момента сопротивления от вращательного числа Рейнольдса (в пределах $0 \leq Re_\omega \leq 500$) при всех показателях степени из указанного выше диапазона (забегая вперёд, можно сказать, что это остаётся справедливым и для эксцентрического канала). Это обстоятельство позволяет говорить о связи между моментом и скоростью вращения вида $M = C_1 \omega^n + o(\omega^n)$. Аналогично тому, как это было сделано для ньютоновской жидкости, для анализа влияния эксцентриситета на момент сопротивления будем пользоваться отношением момента в эксцентрическом канале к моменту в канале без эксцентриситета M/M_0 .

При небольших значениях эксцентриситета линии тока представляют собой замкнутые овальные линии, вся жидкость вращается в одном направлении. Вблизи вращающегося внутреннего цилиндра модуль скорости сдвига имеет максимальное значение и резко убывает по мере удаления от него. Причём чем меньше показатель степени, тем быстрее убывает

модуль скорости сдвига по мере удаления от внутреннего цилиндра, и тем тоньше этот сдвиговой слой. Вследствие этого возникновение и развитие возвратного течения происходит при большем значении эксцентриситета по сравнению с ньютоновской жидкостью. По этой же причине ослабевает влияние эксцентриситета на момент, на внутреннем цилиндре (см. рис. 2.27). С понижением показателя степени максимальное увеличение момента уменьшается, и характерный рост наблюдается при большем значении e . Так для ньютоновской жидкости момент сопротивления при варьировании эксцентриситета максимально увеличивался 7.4 раза, для степенной жидкости с показателем $n = 0.5$ это увеличение достигло 2.3 раз, а для $n = 0.2$ лишь 1.3 раза.

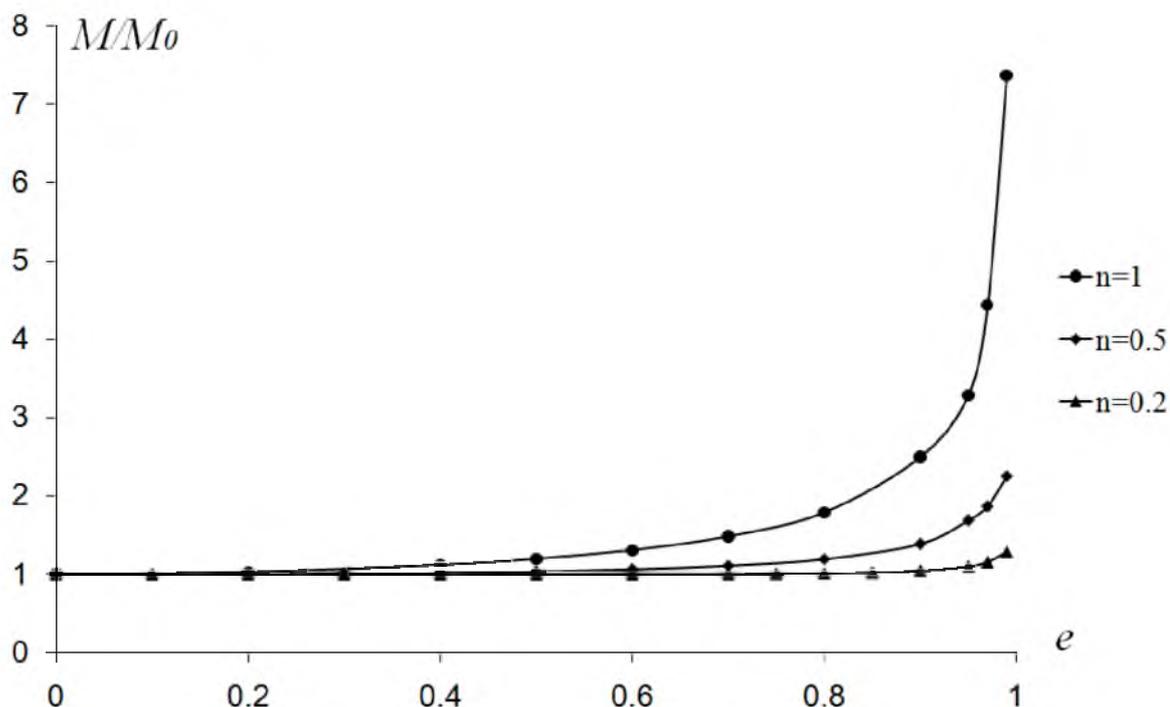


Рис. 2.27. Зависимость относительного момента сопротивления M/M_0 от эксцентриситета для жидкостей с различным показателем степени при $\theta = 0.5, Re_\omega = 100$

Итак, мы видим, что зависимость момента сопротивления от эксцентриситета, отношения радиусов и вращательного числа Рейнольдса в этом случае качественно схожа со случаем ньютоновской жидкости. Момент монотонно возрастает с эксцентриситетом, причём максимальное относительное увеличение в случае цилиндров близкого радиуса выше. Изменение скорости вращения слабо влияет на картину течения, то есть линии тока искажаются незначительно (особенно в областях с высокой скоростью сдвига). Вместо этого во всей области лишь во столько же раз изменяется скорость сдвига, поэтому графики зависимостей $M/M_0(e)$, построенные для разных вращательных чисел Рейнольдса, практически совпадают, это говорит о том, что с хорошей точностью можно считать $M \sim \omega^n$.

Как отмечалось выше, с уменьшением показателя степени толщина сдвигового слоя вблизи внутреннего цилиндра уменьшается, поэтому возвратное течение формируется при более высоком значении эксцентриситета. По этой же причине значение эксцентриситета, при котором радиальная компонента силы меняет знак, в степенной жидкости выше чем в ньютоновской, и это значение увеличивается с уменьшением показателя степени (см. рис. 2.28). Поведение Y-компоненты силы качественно схоже со случаем ньютоновской жидкости: её абсолютное значение непрерывно и монотонно увеличивается с ростом эксцентриситета. Однако при низких показателях степени характерный резкий её рост, который имел место для ньютоновской жидкости, практически отсутствует, поскольку в степенной жидкости, в отличие от ньютоновской, трение (которое и обуславливает это резкий рост) меньше при сравнимо высоких скоростях сдвига в зоне разворота потока.

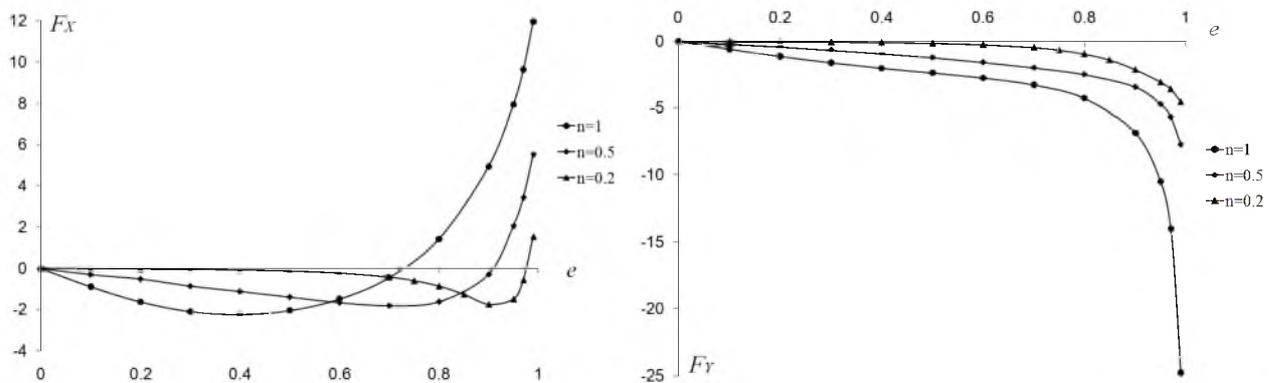


Рис. 2.28. Зависимость компонент сил F_x и F_y от эксцентриситета при различных показателях степени для $\theta = 0.5, Re_\omega = 100$

В спиральном течении локальное формирование эффективной вязкости происходит теперь вследствие сдвига не только в плоскости поперечного сечения, но и аксиальном направлении. Поэтому, с одной стороны, должно происходить уменьшение момента сопротивления вследствие увеличения текучести. С другой, локальное изменение вязкости под влиянием напорного течения может повлечь за собой перестроение поля неаксиальных компонент скорости, что опять же изменит момент. Однако в зависимости от отношения напорного и вращательного чисел Рейнольдса $\xi = Re_\omega / Re_Q$ можно классифицировать течения по тому, какой механизм изменения вязкости является доминирующим.

1. $Re_\omega \gg Re_Q, \xi < 0.2$. В этом случае можно считать, что аксиальная скорость сдвига всюду в области много меньше скорости сдвига в плоскости XY и вязкость определяется только за счет этого сдвига. Кроме того, области с наибольшей аксиальной скоростью сдвига будут локализованы преимущественно в областях с высокой текучестью, то есть там, где скорость сдвига в плоскости XY итак велика. По этой причине аксиальное течение никак не

влияет на распределение скоростей в сечении, а, значит, величины сил и момента также не зависят от него. Иными словами можно и вовсе не учитывать течение в аксиальном направлении, этот случай был рассмотрен выше. Стоит отметить, что для реальных жидкостей величина расхода для выполнения условия $Re_\omega \gg Re_Q$, $\xi < 0.2$ должна быть очень малой, в противном случае скорость вращения окажется настолько большой, что течение перестанет быть ламинарным.

2. $Re_\omega \ll Re_Q$, $\xi > 15$. В этом случае изменение вязкости определяется почти целиком за счёт сдвига в аксиальном направлении. В случае концентрических цилиндров наличие аксиального сдвига приводит к локальному повышению текучести вблизи внутреннего цилиндра, и, как следствие, уменьшению момента сопротивления (рис. 2.29).

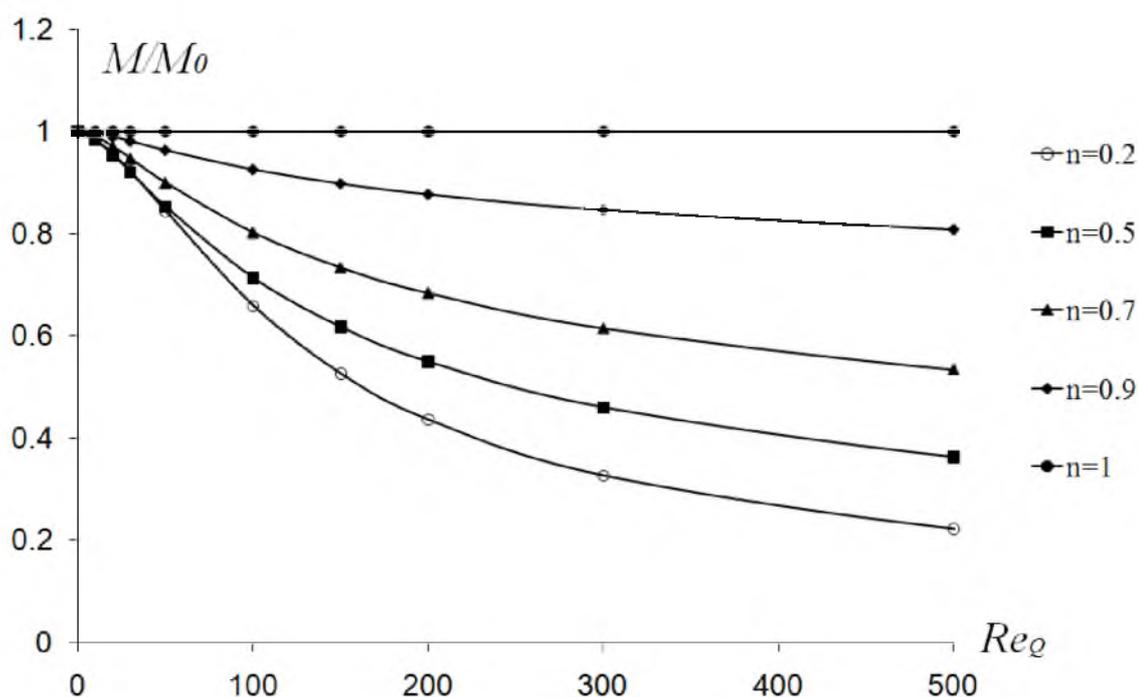


Рис. 2.29. Зависимость относительного момента сопротивления M/M_0 от аксиального числа Рейнольдса Re_Q для жидкостей в концентрическом канале с различным показателем степени при $\theta = 0.5, Re_\omega = 100$

3. Третий случай соответствует $0.02 < \xi < 15$. Характеризуется он тем, что как аксиальный сдвиг, так и сдвиг в плоскости сечения участвуют в локальном формировании вязкости. Распределение неаксиальных компонент скорости существенно зависит от обоих чисел Рейнольдса.

В концентрическом канале увеличение расхода приводит к уменьшению момента сопротивления. Однако в случае с эксцентриситетом это может не выполняться, поскольку локальное изменение вязкости может привести к изменению распределения неаксиальных компонент скорости и увеличению момента сопротивления.

Характер зависимости компонент сил принципиально не меняется при изменении числа Рейнольдса (рис. 2.30), однако следует отметить характерное увеличение радиальной компоненты для малых эксцентриситетов при наличии аксиального течения.

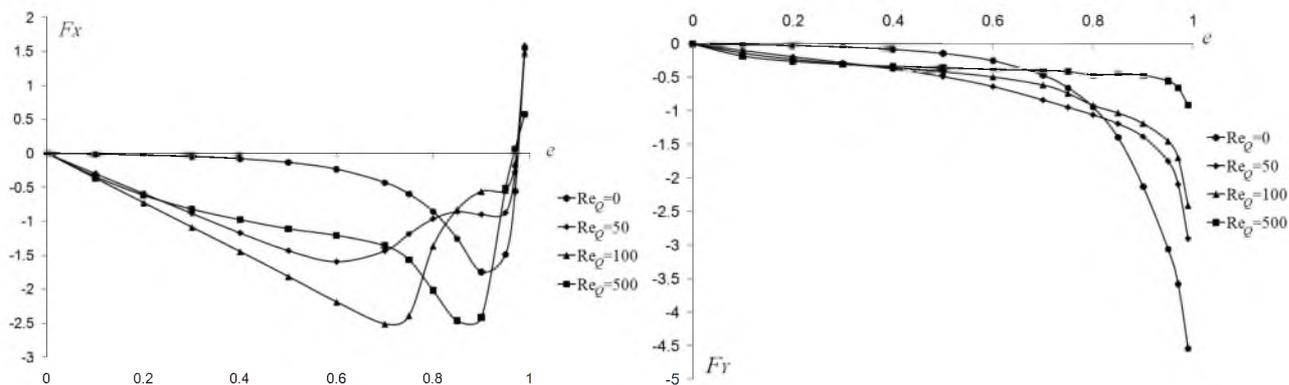


Рис. 2.30. Зависимость компонент сил F_X и F_Y от эксцентриситета при различных напорных числах Рейнольдса Re_Q для $\theta = 0.5, n = 0.2$

В жидкостях с предельным напряжением сдвига внутренний цилиндр начинает вращаться лишь в том случае, когда приложенный к нему внешний момент превосходит некоторое критическое значение. При вращении внутреннего цилиндра со сколь угодно малой скоростью на него будет действовать ненулевой момент сопротивления со стороны жидкости – минимальный момент. С увеличением скорости вращения момент сопротивления будет также расти.

Момент сопротивления при этом полностью определяется напряжением в сдвиговом слое. Эти напряжения зависят от толщины этих «смазочных» слоёв (жидких слоёв вблизи внутреннего и внешнего цилиндров), таким образом, увеличение числа Бингама приводит к росту момента сопротивления. А наличие предельного напряжения сдвига обуславливает наличие ненулевого минимально возможного момента сопротивления, который реализуется при «бесконечно медленном» вращении. Скорость сдвига вблизи внутреннего цилиндра выше, а толщина его шире, чем толщина «смазочного» слоя вблизи внешнего цилиндра. Толщину этого кольца определяет число Бингама. В концентрической системе цилиндров вращение внутренней трубы приводит к вращению твёрдого ядра, которое, имеет форму цилиндрического кольца, отделённого от стенок обоих цилиндров слоем сдвига. При наличии эксцентриситета сдвиговый слой вблизи внешнего цилиндра и вовсе практически исчезает. По этой причине наличие эксцентриситета практически не влияет на момент сопротивления, если толщина «смазочного» слоя вблизи внутреннего цилиндра не превосходит толщины узкого места зазора, то есть при невысоком эксцентриситете (см. рис. 2.31). Если же эксцентриситет настолько велик, что это не выполняется, тогда толщина узкого места зазора начинает уменьшаться, хотя квазитвёрдое ядро в целом остаётся неподвижным. Естественно умень-

шение толщины узкого места зазора приводит к повышению момента сопротивления с ростом эксцентриситета. Дальнейшее увеличение эксцентриситета приводит к тому, что возникает возвратное течение, как и в степенной и ньютоновской жидкостях, а флюид становится подвижным во всей области. При этом частицы флюида переходят из жидкого в квазитвёрдое состояние и обратно, а границы раздела этих областей остаются неподвижными. Момент сопротивления при этом резко возрастает. Характерная зависимость сил от эксцентриситета, которая наблюдалась для Ньютоновской и степенной жидкости, сохраняется и для жидкости Бингама. Y-компонента всегда отрицательна и возрастает с эксцентриситетом. X-компонента при некотором эксцентриситете меняет знак (рис. 2.32).

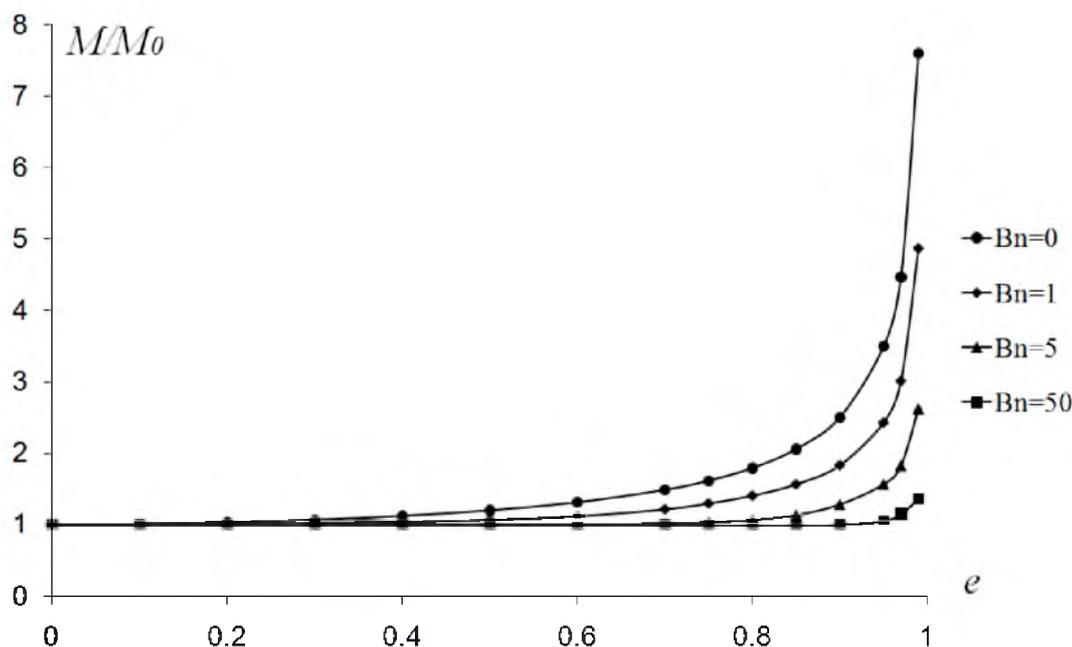


Рис. 2.31. Зависимость относительного момента сопротивления M/M_0 от эксцентриситета для различных чисел Бингама Bn при $\theta = 0.5, Re_\omega = 100$

Отметим, что, зная момент и силу, приложенные к внутреннему цилиндру, можно определить такие же величины, действующие на внешний цилиндр. Это можно сделать, используя закон сохранения количества движения и момента импульса. Область применимости полученных результатов, как отмечалось во введении, ограничена случаем ламинарных течений. Наличие ненулевого расхода в случае ньютоновских жидкостей при ламинарном установившемся течении не влияет на момент и силы компоненты силы в плоскости XY, но может сдвинуть границы ламинарно-турбулентного перехода.

Примечательным является универсальный характер зависимости для жидкостей с различной реологией: монотонный характер увеличения момента сопротивления с ростом эксцентриситета; одинаковое для всех реологий направление тангенциальной компоненты силы, которая в случае ненулевого эксцентриситета всегда провоцирует прецессионное дви-

жение; изменение направления радиальной компоненты силы при некотором значении эксцентриситета, так, что для малых эксцентриситетов сила отталкивает внутренний цилиндр от симметричного положения, а при больших, наоборот, препятствует их соприкосновению. Такой общий характер зависимости момента и сил от эксцентриситета обусловлен схожим механизмом перестроения течения при изменении эксцентриситета. Это обстоятельство влечёт важный вывод: при отсутствии закрепления оси внутреннего цилиндра работа механизмов будет всегда неустойчива из-за появления прецессирующего движения.

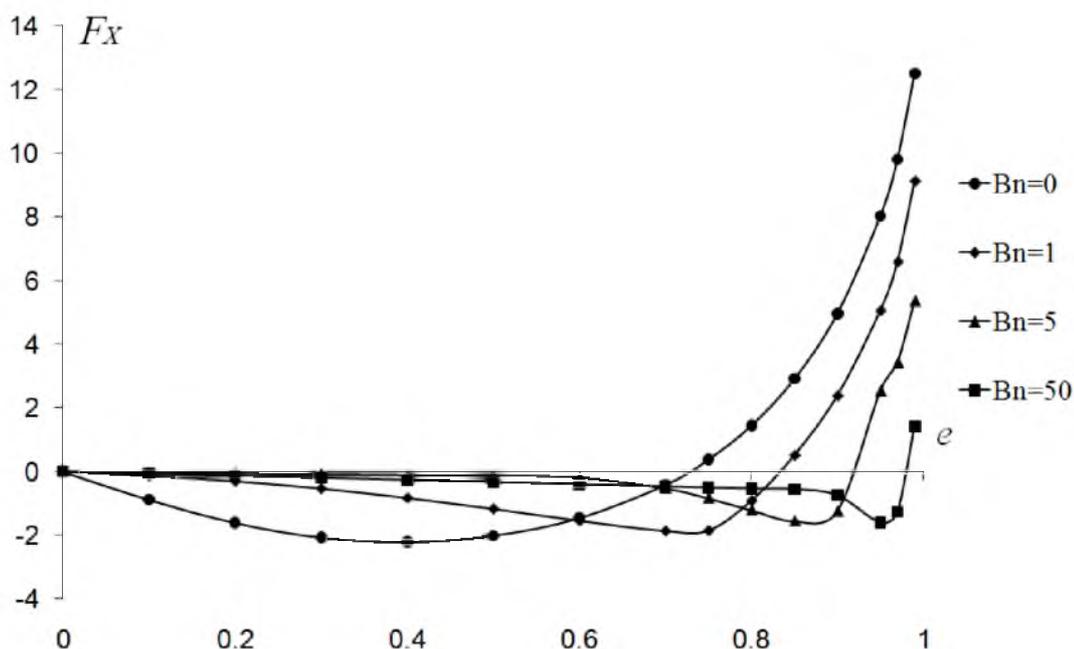


Рис. 2.32. Зависимость компоненты силы F_x от эксцентриситета при различных числах Бингама при $\theta = 0.5, Re_\omega = 100$

Наконец стоит отметить, что в данной работе ось внутреннего цилиндра была жёстко фиксирована относительно внешнего, который был неподвижен. В случае, когда такого жёсткого закрепления нет, и допускается прецессионное движение внутреннего цилиндра, течение жидкости будет отличаться от рассмотренного здесь. Такое течение будет нестационарным (или квазистационарным, если рассматривать задачу во вращающейся системе координат, связанной с осями цилиндров). При этом силы и момент, вообще говоря, будут зависеть от скорости прецессии и могут отличаться от приведённых выше.

3 Моделирование турбулентных течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей

В предыдущей главе были рассмотрены ламинарные течения обобщённых ньютоновских жидкостей в зазоре между двумя цилиндрами. Вместе с тем, на практике зачастую реализуется именно турбулентный режим течения. Так, например, в буровой индустрии такая ситуация является вполне типичной, и, более того, часто турбулентный режим оказывается предпочтительней.

Экспериментально исследовать турбулентные течения псевдопластических жидкостей чрезвычайно сложно. Связано это, прежде всего, с тем, что проведение соответствующего эксперимента, даже в случае концентрических цилиндров, предъявляет высокие требования к экспериментальной установке, измерительному оборудованию и проведению эксперимента: необходим постоянный контроль реологии, сравнительно мощный насос и т.д. Кроме того, обычно применяемые на практике неньютоновские жидкости оказываются непрозрачными, что не позволяет использовать для регистрации полей скорости традиционную измерительную технику. Содержащейся информации в опубликованных исследованиях совершенно недостаточно, как с точки зрения практических приложений, так и с точки зрения понимания происходящих в таких течениях процессов.

Быстрое развитие вычислительных технологий позволило исследовать динамику спиральных течений (суперпозиция напорного течения и цилиндрического течения Куэтта) в цилиндрическом зазоре численно. Тем не менее, систематическое моделирование этого класса течений было невозможно в связи с отсутствием достаточно универсальной модели турбулентности для неньютоновских жидкостей. До недавних пор был известен лишь цикл работ [66, 64], в которых предлагалась модель турбулентности для степенных жидкостей. Однако предложенная в этих работах модель непосредственно не обобщается для жидкостей с предельным напряжением сдвига. В недавних работах Гаврилова и Рудяка [67, 68] развита модель и построен численный алгоритм для описания турбулентных течений жидкостей Хершеля–Балкли, то есть жидкостей с предельным напряжением. Этот алгоритм был протестирован на ряде решений, полученных прямым численным моделированием [114, 115, 69]. Для моделирования турбулентных течений в данной работе использовался именно этот алгоритм, разработанный А.А. Гавриловым и В.Я. Рудяком [67, 70, 71] на основе метода конечных объёмов, использующий k - ε модель турбулентности [116] переноса вязких напряжений.

Указанная модель и соответствующий алгоритм преобразуются в k - ε модель турбулентности в случае ньютоновской жидкости.

3.1 Модель коэффициента молекулярной вязкости и численный метод моделирования турбулентных течений

3.1.1 Математическая модель

Изотермические стационарные течения несжимаемой неньютоновской жидкости, описываемые уравнениями гидродинамики,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \boldsymbol{\tau}, \quad (3.1)$$

где ρ и \mathbf{u} – плотность и скорость жидкости, p – давление, а $\boldsymbol{\tau}$ – тензор напряжений. Для рассматриваемых вязкопластических жидкостей тензор напряжений пропорционален тензору скоростей деформации \mathbf{S}

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{S}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

где эффективный коэффициент эффективной вязкости жидкости μ зависит от скорости деформации $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}$: $\mu = \mu(\dot{\gamma})$. Согласно реологической модели Хершеля–Балкли

$$\mu = \dot{\gamma}^{-1} (\tau_0 + k\dot{\gamma}^n). \quad (3.2)$$

Здесь n – показатель степени, k – индекс консистентности, а τ_0 – предел текучести вязкопластической жидкости.

Для описания полностью развитых турбулентных течений (где осреднённые характеристики не зависят от времени) в работах Гаврилова и Рудяка применяется известный подход осреднения по Рейнольдсу исходных уравнений гидродинамики (3.1).

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu\mathbf{S}) + \nabla \cdot (-\rho \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle) + \nabla \cdot \langle 2\mu'\mathbf{S}' \rangle, \quad (3.3)$$

где \mathbf{U} – осреднённый вектор скорости флюида, \mathbf{S} – осреднённый тензор скоростей деформации, μ – среднее значение коэффициента молекулярной вязкости. Здесь и далее угловые скобки означают осреднение по времени, штрих относится к пульсационным величинам. Дополнительное слагаемое в правой части второго уравнения (3.3) возникает для неньютоновских жидкостей, поскольку коэффициент молекулярной вязкости является нелинейной функцией флуктуаций поля скорости.

Для замыкания осреднённых уравнений (3.3) использовалась двухпараметрическая k - ε модель турбулентности (AKN-модель) [116], в рамках которой система уравнений (3.3) дополняется уравнениями переноса средней энергии турбулентности k и средней скорости её

диссипации ε . Эта модель является модификацией обычной двухпараметрической k - ε модели турбулентности. В разработанной Гавриловым и Рудяком модели не учитываются корреляции вязкости и тензора скоростей деформации, что, как показывают результаты прямого численного моделирования [69], не является критичным. В этом случае система дифференциальных уравнений, описывающая осреднённое течение, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left((\mu + \mu_t) 2S_{ij} \right) - \rho \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad (3.4b)$$

$$\rho U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P - \rho \varepsilon, \quad (3.4b)$$

$$\rho U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (3.4c)$$

где k – средняя энергия турбулентности, ε – средняя скорость диссипации, $P = \mu_t 2S_{ij} S_{ij}$ – генерация турбулентности, а $\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \left(k^2 / \varepsilon \right)$ – коэффициент турбулентной вязкости. Кроме того, в соответствии с AKN-моделью в выражение для турбулентной вязкости и в уравнение переноса скорости диссипации (3.4c) вводятся соответственно следующие демпфирующие функции:

$$f_\mu = \left[1 - \exp \left(-\frac{\text{Re}_\varepsilon}{14} \right) \right]^2 \left[1 + \frac{5}{\text{Re}_t^{3/4}} \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\text{Re}_t}{200} \right)^2 \right\} \right],$$

$$f_2 = \left[1 - \exp \left(-\frac{\text{Re}_\varepsilon}{3.1} \right) \right]^2 \left[1 - 0.3 \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{\text{Re}_t}{6.5} \right)^2 \right\} \right].$$

Здесь $\text{Re}_t = \rho k^2 / (\varepsilon \mu)$ и $\text{Re}_\varepsilon = y \left(\varepsilon \rho^3 / \mu^3 \right)^{1/4}$ – соответственно турбулентное число Рейнольдса и безразмерное расстояние до стенки, где y – расстояние до стенки. Значения входящих в эти выражения констант взяты из работы [116]: $C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.4, \sigma_\varepsilon = 1.4, C_{\varepsilon 1} = 1.5, C_{\varepsilon 2} = 1.9$.

В уравнения (3.4) входит осреднённый коэффициент молекулярной вязкости, модель которого и была предложена Гавриловым и Рудяком. В представленной постановке двухпараметрическая модель турбулентности модифицируется только зависимостью коэффициента средней молекулярной вязкости от средних и пульсационных параметров течения. Коэффициент эффективной молекулярной вязкости флюида зависит от значения скорости сдвига на малых масштабах, а, следовательно, и от флуктуаций поля скорости. В рассматриваемом приближении в выражении для осреднённой скорости диссипации

$$\rho\varepsilon = \langle \hat{\mu} 2S_{ij}' S_{ij}' \rangle = \mu \langle 2S_{ij}' S_{ij}' \rangle + 2 \langle \mu' S_{ij}' S_{ij}' \rangle$$

авторы модели пренебрегают корреляцией пульсаций коэффициента молекулярной вязкости с пульсациями скорости сдвига. В результате чего получается выражение, связывающее скорость диссипации с осреднённой вязкостью

$$\rho\varepsilon = \mu \langle 2S_{ij}' S_{ij}' \rangle. \quad (3.5)$$

С другой стороны, выражение для средней скорости сдвига представляется суммой двух слагаемых

$$\dot{\gamma}^2 = 2 \langle \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} \rangle = 2S_{ij} S_{ij} + \langle 2S_{ij}' S_{ij}' \rangle. \quad (3.6)$$

Первое слагаемое в правой части рассчитывается по градиентам средней скорости, а второе определяет среднюю пульсационную скорость сдвига. Таким образом, из соотношений (3.5) и (3.6), для средней скорости сдвига следует, что

$$\dot{\gamma}^2 = 2S_{ij} S_{ij} + (\rho\varepsilon) / \mu. \quad (3.7)$$

Кроме того, предполагается, что среднее значение коэффициента молекулярной вязкости связано со средним значением скорости сдвига исходным реологическим соотношением (3.2): $\mu = \dot{\gamma}^{-1} (\tau_0 + k\dot{\gamma}^n)$. Таким образом, значение коэффициента средней молекулярной вязкости можно найти, решив систему нелинейных уравнений (3.2) и (3.7). В силу итерационного процесса численного решения уравнений Рейнольдса (3.4), замыкаемых выбранной моделью турбулентности, нет необходимости иметь явное выражение для зависимости коэффициента вязкости от скорости диссипации и среднего тензора скоростей деформации. Для нахождения распределения коэффициентов средней молекулярной вязкости в алгоритме Гаврилова и Рудяка использовалась двухшаговая итерационная процедура. На первом шаге по текущим значениям средней скорости, скорости диссипации и коэффициенту молекулярной вязкости по формуле (3.7) рассчитывается значение локальной средней скорости сдвига. Затем по найденной средней скорости сдвига определяется значение коэффициента средней эффективной молекулярной вязкости (3.2), которое используются при решении уравнений гидродинамики на новом итерационном слое.

Для пристенных турбулентных течений характерна существенная диссипация турбулентности вблизи стенки даже в области вязкого подслоя. Поэтому при расчёте средней вязкости на стенке необходимо учитывать слагаемые, связанные с мелкомасштабным сдвигом. Касательные напряжения на стенке рассчитываются по найденному коэффициенту вязкости вблизи стенки μ_w и нормальному к стенке градиенту средней скорости: $\tau_w = \mu_w (\partial U / \partial n)_w$.

В расчётах течений в цилиндрическом зазоре использовались сетки, позволяющие полностью разрешить пристеночный слой без введения эмпирической информации. Первый пристеночный расчётный узел сетки лежит в вязком подслое. Безразмерное расстояние до первого узла $y^+ = (\rho u_\tau / \mu_w) \sim 0.5$, где $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость, а μ_w – величина коэффициента вязкости на стенке.

На стенке задано условие прилипания для скорости $U_w = 0$ и условие нулевой энергии пульсаций $k_w = 0$. Значение скорости диссипации вблизи стенки определяется из баланса турбулентной энергии. В первом пристеночном узле скорость диссипации не рассчитывается из уравнения (3.4с), а задаётся явным образом по формуле: $\varepsilon = (\mu / \rho) 2k / y^2$.

3.1.2 Численный алгоритм

Используемый в данной работе численный алгоритм базируется на методе конечного объёма для неструктурированной сетки. Детали его реализации для описания течений ламинарных ньютоновских жидкостей подробно описаны в статьях [70, 71]. Ниже кратко перечислены основные моменты алгоритма. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса (3.4) осуществляется с помощью противопоточной TVD схемы второго порядка. Связь между полями скорости и давления, обеспечивающая выполнение уравнения неразрывности, реализуется при помощи SIMPLEC процедуры на совмещённых сетках. Для устранения осцилляций поля давления используется подход Рхи-Чоу, заключающийся в специальной интерполяции вектора скорости на грани контрольных объёмов. Полученные в результате дискретизации исходной системы дифференциальных уравнений разностные уравнения решаются итерационным способом с применением алгебраического многосеточного решателя.

Для регуляризации реологических моделей жидкостей с предельным напряжением сдвига использовался подход Папанастасио (Papanastasiou) [108], заключающийся в аппроксимации выражения для коэффициента эффективной вязкости приближённым сглаженным выражением.

Необходимо подчеркнуть, что описанная модель и алгоритм пригодны для описания низкорейнольдсовых ламинарных течений. В этом случае пульсационные характеристики малы, и решаемые уравнения Рейнольдса переходят в уравнения гидродинамики неньютоновской жидкости. Другой особенностью алгоритма является то, что для частного случая ньютоновской жидкости, реализованная в нём модель турбулентности совпадает с $k-\varepsilon$ модель турбулентности [117].

3.2 Моделирование турбулентных течений ньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре

В настоящее время в литературе практически отсутствуют данные о характеристиках турбулентных течений ньютоновских жидкостей в каналах с эксцентриситетом. Вместе с тем, даже для концентрического канала в литературе приводятся лишь отрывочные сведения о характеристиках отдельных спиральных течений. Проведённая работа призвана восполнить этот пробел.

В этом параграфе рассмотрены установившиеся развитые турбулентные напорные течения в зазоре между двумя цилиндрами ньютоновской жидкости с заданным расходом. В общем случае оси цилиндров не совпадают, то есть имеет место эксцентриситет. Внутренний цилиндр может вращаться с постоянной угловой скоростью. Течение изучалось в широком диапазоне параметров: отношение радиусов θ менялось от 0.2 до 0.9, эксцентриситет – от 0 до 0.99, аксиальное число Рейнольдса – от 0 до 200 000, вращательное число Рейнольдса – от 0 до 5 000 000. Для моделирования применялся описанный в предыдущей главе алгоритм. В результате расчётов определялись осреднённые значения перепада давления, полей скорости и давления, кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости её диссипации. Ниже представлены результаты систематических расчётов, всего для ньютоновской жидкости выполнено около пятидесяти тысяч расчётов.

3.2.1 Характеристики аксиального напорного течения

В ламинарном напорном течении ньютоновской жидкости перепад давления вдоль канала пропорционален расходу жидкости через сечение, поэтому для описания зависимости перепада давления от безразмерных параметров течения удобно использовать параметр, равный произведению коэффициента Фаннинга fa на аксиальное число Рейнольдса Re_Q

$$fa Re = \frac{2(R_o - R_l)^2 \Delta p}{\nu Q l}, \quad (3.8)$$

характеризующий фактически гидравлическое сопротивление канала. Здесь R_o , R_l – радиусы внешнего и внутреннего цилиндров соответственно, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, Q – массовый расход через поперечное сечение канала площадью S , Δp – перепад давления, l – длина канала. Как было показано в предыдущей главе для случая установившегося ламинарного течения в зазоре форма профиля скорости и коэффициент $fa Re$ не зависят от аксиального числа Рейнольдса $Re_Q = (R_1 - R_2)Q / \mu S$ (μ – коэффициент динамической вязкости). Напротив, для турбулентного течения коэффициент гидравлического сопротивления монотонно растёт с увеличением аксиального числа Рейнольдса.

В случае течения с эксцентриситетом поле осреднённой скорости имеет только аксиальную ненулевую компоненту с максимумом и минимумом на оси симметрии зазора в широкой и узкой частях зазора соответственно. В турбулентном течении турбулентный перенос импульса в окружном направлении по сечению зазора многократно интенсивнее диффузионного переноса в случае ламинарного течения. Поэтому максимумы скорости в широком и узком месте зазора различаются не столь существенно, как в случае ламинарного течения. В связи с этим влияние эксцентриситета $e = \Delta / (R_1 - R_2)$, (Δ – расстояние между осями цилиндров) на сопротивление канала в турбулентном потоке не столь существенно (см. рис. 3.1). Так в ламинарном течении коэффициент гидравлического сопротивления уменьшается с ростом эксцентриситета почти вдвое, тогда как в турбулентных течениях это уменьшение составляет около двадцати пяти процентов (см. рис. 3.1) и слабо зависит от числа Рейнольдса.

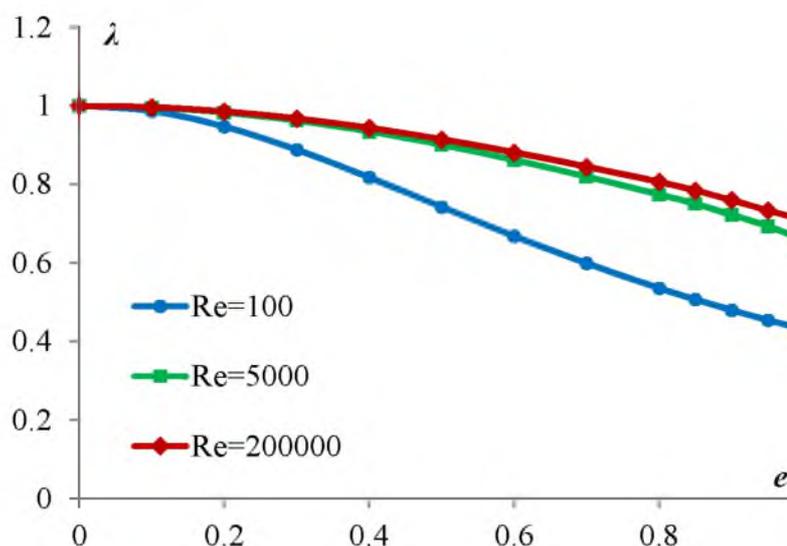


Рис. 3.1. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda = faRe / faRe_0$ от эксцентриситета в напорном течении для различных аксиальных чисел Рейнольдса.
 $\theta = R_2 / R_1 = 0.5$

Стоит, наконец, заметить, что при высоких значениях эксцентриситета локальное число Рейнольдса в узкой части зазора оказывается настолько малым, что течение здесь становится ламинарным. Такая ламинаризация достаточно типична для течений данного класса.

3.2.2 Особенности спирального течения в осесимметричном зазоре

Турбулентность в спиральном течении может быть вызвана большим расходом, быстрым вращением внутреннего цилиндра или обоими этими факторами. Структура такого течения, а также перепад давления вдоль канала, определяется, тем, какое течение, напорное или вращательное, доминирует и преимущественно вызывает турбулентные пульсации. Рас-

пределение турбулентной вязкости в осесимметричном случае, в основном формируется доминирующим течением и, в свою очередь, оказывает непосредственное влияние на распределение компонент осреднённой скорости более слабого течения. Последнее же практически не меняет турбулентную вязкость, а, значит, и распределение компонент осреднённой скорости доминирующего течения. Таким образом, распределение пульсационных характеристик, турбулентная вязкость и профили компонент осреднённой скорости практически полностью определяется параметрами доминирующего течения.

В случае, когда турбулентность вызвана вращением внутреннего цилиндра, турбулентные напряжения в заданном сечении существенно превосходят аксиальные, а кинетическая энергия турбулентных пульсаций имеет максимум вблизи внутреннего цилиндра и быстро затухает по мере удаления от него. Любое изменение расхода, при условии, что средняя аксиальная скорость остаётся меньше соответствующей азимутальной, практически никак не влияет на распределение турбулентных напряжений и энергии пульсаций. Таким образом, турбулентная вязкость определяется в этом случае преимущественно вращением внутреннего цилиндра, и не зависит от расхода. Поэтому гидравлическое сопротивление канала и перепад давления в нем также пропорциональны расходу, как и в ламинарных течениях. Такая пропорциональность имеет место даже при достаточно высоких числах Re_ω (см. рис. 3.2), соответствующих турбулентному режиму течения в случае без вращения. Тем не менее, значения коэффициента сопротивления будет значительно превышать характерные значения для ламинарного случая (рис. 3.2).

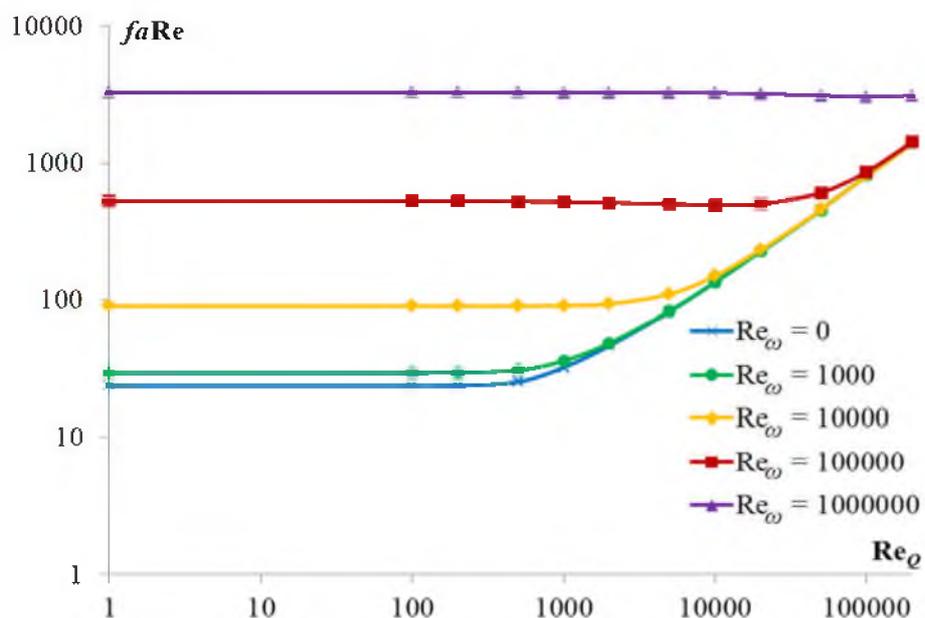


Рис. 3.2. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от аксиального числа Рейнольдса для различных вращательных чисел Рейнольдса. $\theta = 0.5$

Распределение аксиальной компоненты скорости при доминировании аксиального или вращательного течений похоже. Это объясняется весьма близким распределением осреднённой турбулентной вязкости в этих двух случаях: она растёт по мере удаления от стенок канала. Характер зависимости коэффициента сопротивления от расхода, однако, становится качественно иной, когда доминирует аксиальное течение. Значение коэффициента сопротивления канала (и перепада давления) в этом случае практически не зависит от скорости вращения внутреннего цилиндра и фактически совпадает с соответствующим значением для чисто напорного течения (см. рис. 3.2).

В литературе известно множество эмпирических и полуэмпирических формул (корреляций) связывающих коэффициент сопротивления канала с числом Рейнольдса. Такие корреляции разработаны для напорных течений, однако, как было показано выше, течения с относительно слабым вращением также будут хорошо описываться ими. В случае напорных течений наши данные хорошо согласуются, например, с корреляцией Идельчика [118], $faRe = 0.12Re_{\varrho} [\log(Re_{\varrho}/8)]^2$. Для случая, когда доминирует вращение внутреннего цилиндра, известных корреляций для турбулентного режима течения нет. Данные наших результатов моделирования позволили такую корреляцию создать. Она имеет вид

$$faRe = \left(-2\theta^2 + 2.5\theta + 0.2\right) \frac{Re_{\omega}^{0.85}}{40} + 10Re_{\omega}^{0.1}. \quad (3.9)$$

Эта корреляция описывает результаты моделирования с точностью 5%. Конечно, между этими двумя характерными случаями существует определённый диапазон параметров, когда нельзя выделить доминирующее течение и оба механизма генерации турбулентности вносят существенный вклад в формирование турбулентного потока. В этом диапазоне $Re_{\omega} \sim 2Re_{\varrho}$ и средние аксиальная и вращательная скорости близки. Чтобы описать зависимость перепада давления в этом диапазоне была построена универсальная корреляция, фактически сопрягающая две упомянутые и работающая, в том числе, в промежуточных режимах:

$$faRe = \frac{Re_{\omega}}{Re_{\omega} + Re_{\varrho}} \left[\left(-2\theta^2 + 2.5\theta + 0.2\right) \frac{Re_{\omega}^{0.85}}{40} + 10Re_{\omega}^{0.1} \right] + \frac{13Re_{\varrho}}{1.2Re_{\omega} + 12Re_{\varrho}} 0.12Re_{\varrho} [\log(Re_{\varrho}/8)]^2. \quad (3.10)$$

Данные численного моделирования описываются корреляцией (3.10) с точностью не ниже 7%. Стоит отметить, что типичные используемые в литературе корреляции имеют обычно точность $\sim 10\%$.

3.2.3 Характеристики спирального течения в канале с эксцентриситетом

Наличие в канале эксцентриситета приводит к нарушению осевой симметрии течения. Изменение картины течения в зависимости от эксцентриситета при ламинарном и тур-

булентном течении качественно похожи. При малых эксцентриситетах, вращение жидкости сонаправлено вращению внутреннего цилиндра, а линии тока охватывают внутренний цилиндр и по форме близки к окружностям. При малых значениях эксцентриситета и доминировании аксиального течения характер течения остаётся таким же, как и у напорного, с той лишь разницей, что профиль осреднённой аксиальной скорости несколько смещён в направлении вращения от плоскости симметрии эксцентрического зазора (см. рис. 3.3). При доминировании вращательного течения в случае малых эксцентриситетов максимумы осреднённой аксиальной скорости в широкой и узкой частях зазора практически не отличаются (рис. 3.3).

Характерной особенностью спирального течения с эксцентриситетом является образование возвратного течения. Формирование такого течения фактически является пороговым процессом и характеризуется некоторым критическим значением эксцентриситета e_* . Физически это связано с тем, что средняя скорость на выходе из узкой части зазора падает в азимутальном направлении, а давление растёт [119]. На некотором расстоянии от узкой части зазора кинетической энергии потока вблизи стенки недостаточно для того, чтобы переместить жидкость против сил давления, возрастающих в направлении потока. Вблизи этого сечения начинается отрыв потока от стенки и возникает возвратное течение. С увеличением эксцентриситета размеры возвратного течения увеличиваются, а циркуляция в ней усиливается. Когда эксцентриситет близок к единице, вся область зазора занята возвратным течением.

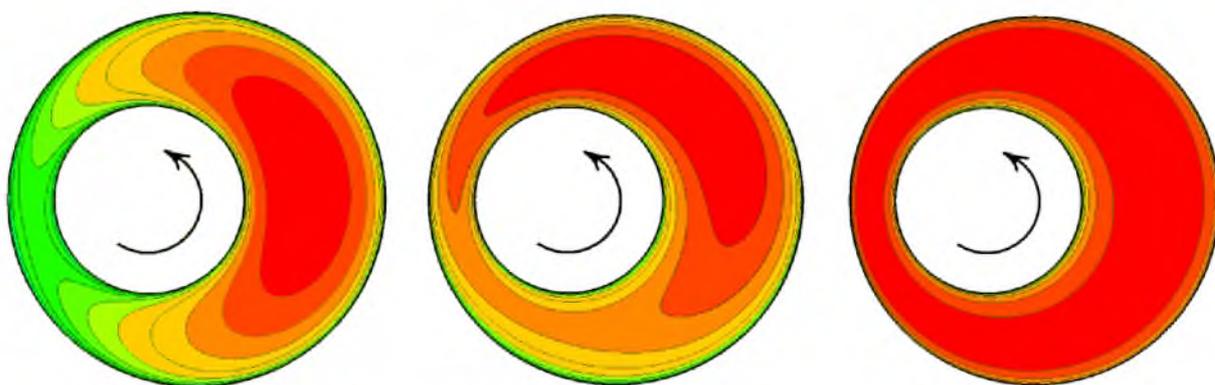


Рис. 3.3. Изолинии осреднённой аксиальной скорости. Красная цветовая гамма соответствует максимальному значению величины для данного поля. Разница между значениями скорости, соответствующим соседним изолиниям, для каждого рисунка одинакова.

$Re_\omega = 10^5$, $e = 0.5$, $\theta = 0.5$. Слева – $Re_\omega = 10^3$; посередине – $Re_\omega = 2 \cdot 10^4$; справа – $Re_\omega = 10^6$

Наиболее интересно формирование возвратного вихря происходит при доминировании вращательного течения. В этом случае отсутствует непрерывная зависимость характеристик течения (полей осреднённой скорости, давления и других величин) от эксцентриситета.

Критическое значение эксцентриситета, при котором наблюдается резкое изменение поля скорости, зависит от отношения радиусов и чисел Рейнольдса. Пример порогового перестроения течения приведён на рис. 3.4. Здесь при эксцентриситете $e = 0.81$ возвратного течения нет (рис. 3.4 слева), а при $e = 0.82$ возвратное течение уже сформировалось (рис. 3.4 справа). Область, занятую возвратным вихрем, на рис. 3.4, справа легко очертить: среднее значение аксиальной скорости в ней существенно выше, чем в зоне прямого течения вблизи внутреннего цилиндра, где быстрому движению жидкости в аксиальном направлении мешает близость стенок внешнего и внутреннего цилиндров (см. рис. 3.4 справа) в узкой части зазора.

Естественно, что различие в поле течения в случае наличия возвратного вихря и без него особенно выражено в каналах с малым отношением радиусов, где размеры области, занятой возвратным вихрем, сопоставимы или даже превосходят размеры области прямого течения.

Другая особенность возникает в течении со сформированным возвратным вихрем: прямой и возвратный потоки отрываются от стенки внешнего цилиндра, образуя ещё два малых вихря, расположенных там, где соединяются прямое и возвратное течение. Нерегулярность изолиний осреднённой аксиальной компоненты скорости в нижней части рис. 3.4 справа связана именно с этими вихрями.

Механизм генерации турбулентности, зависящий от доминирующего течения, определяет не только картину течения, но также характер изменения перепада давления с ростом эксцентриситета. Поэтому можно выделить три основных случая, соответствующих доминирующему аксиальному течению, вращательному течению и смешенному режиму.

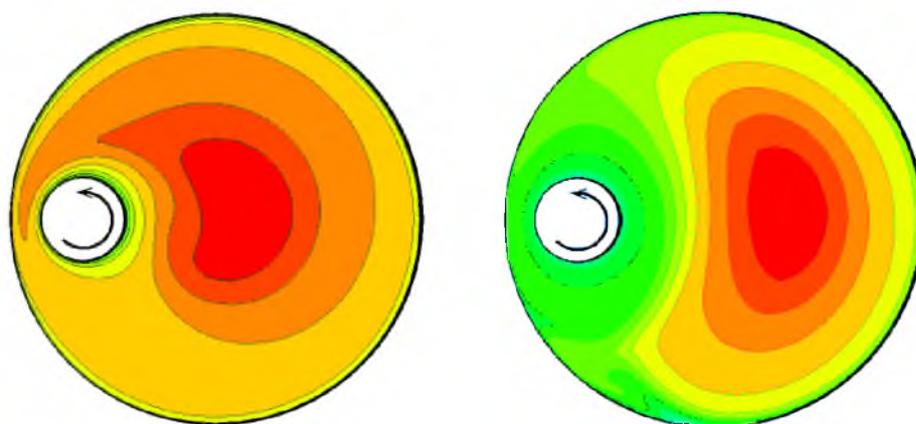


Рис. 3.4. Изолинии осреднённой аксиальной компоненты скорости при пороговом перестроении течения. $\theta = 0.2$, $Re_Q = 500$, $Re_\omega = 10^6$. ($e = 0.81$ – слева, $e = 0.82$ – справа)

В случае доминирования аксиального течения вращение в эксцентрическом канале ведёт к уменьшению перепада давления по сравнению со случаем чисто напорного течения (см. зелёную линию на рис. 3.5). Это происходит вследствие переноса жидкости из узкой ча-

сти зазора, где близость стенок обуславливает торможение потока в аксиальном направлении. В случае больших эксцентриситетов, когда область, занятая возвратным течением велика, количество жидкости, протекающей через узкое место зазора невелико, и не может существенно замедлить мощный аксиальный поток в области возвратного течения. Этим объясняется резкий спад сопротивления при высоких эксцентриситетах.

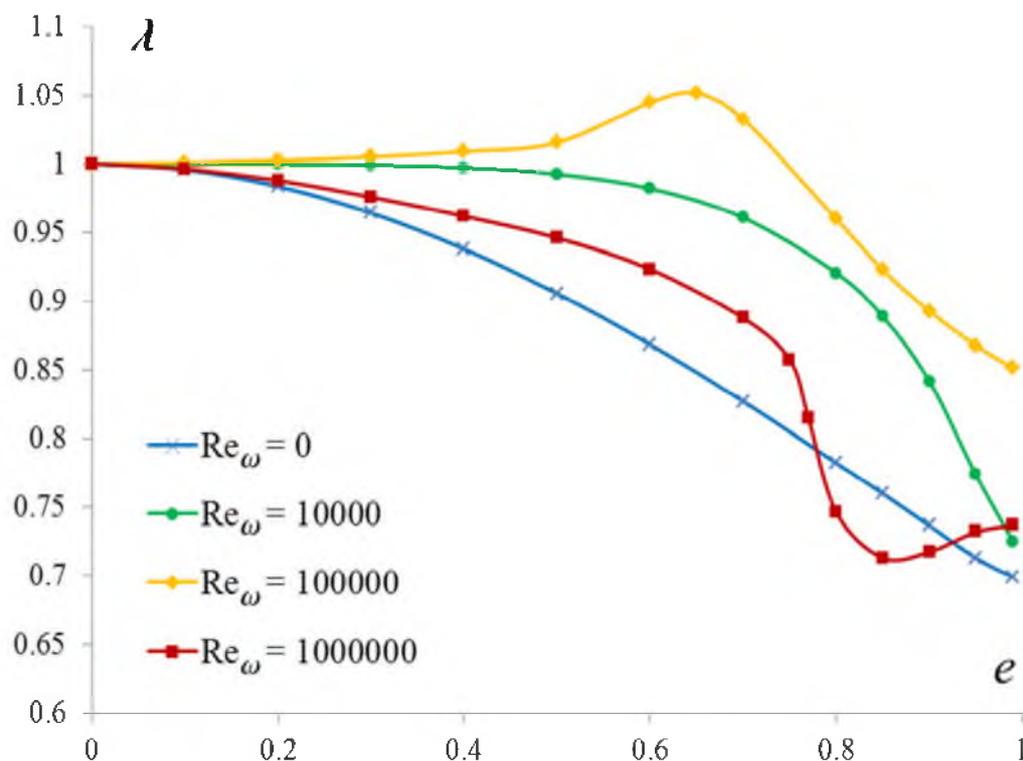


Рис. 3.5. Зависимость $\lambda = faRe/f_aRe_0$ (отношения коэффициента гидравлического сопротивления в эксцентрическом и концентрическом канале) от эксцентриситета для различных Re_ω .
 $\theta = 0.5, Re_0 = 5 \cdot 10^4$

С ростом вращательного числа Рейнольдса сопротивление будет увеличиваться, что обусловлено интенсификацией переноса замедленного в аксиальном направлении потока из узкой части зазора. В случае, когда вращательное и аксиальное числа Рейнольдса сопоставимы, средняя аксиальная скорость потока из-за быстрого вращения практически не меняется в окружном направлении. Поэтому эксцентриситет практически не влияет на перепад давления вплоть до значений $e = 0.4 \div 0.5$ (см. жёлтую линию на рис. 3.5). При значениях $e = 0.6 \div 0.7$ происходит образование возвратного течения, сопровождающегося некоторым увеличением энергии пульсаций. Видимо, этим обусловлен локальный максимум перепада давления при средних значениях эксцентриситета. Формирование и развитие возвратного вихря приводит к уменьшению аксиального сопротивления канала. Как и в случае с доминированием акси-

ального течения это связано с тем, что доля замедленной в аксиальном направлении жидкости, протекающей через самое узкое место зазора, уменьшается с ростом эксцентриситета, а доля жидкости циркулирующей в возвратном вихре (размер которого увеличивается), напротив, растёт.

В случае доминирования вращательного течения, распределение аксиальной компоненты скорости целиком формируется течением в плоскости сечения канала, поскольку как турбулентная вязкость, так и перенос аксиального импульса определяется именно этим течением. Поэтому пороговое перестроение течения резко меняет не только осреднённые поля скоростей (см. красную кривую на рис. 3.5), но и интегральные характеристики течения, например, зависимость перепада давления от эксцентриситета фактически терпит разрыв. Как правило, образование возвратного вихря сопровождается снижением энергии пульсаций в потоке и турбулентных напряжений в зоне возвратного течения. Поэтому средняя аксиальная скорость там выше, чем вблизи внутреннего цилиндра (рис. 3.4). Таким образом, появление возвратного течения приводит к резкому уменьшению сопротивления канала и перепада давления. Это уменьшение хорошо видно на рис. 3.4 (красная линия, пороговое перестроение происходит здесь при $e = 0.75$). Здесь, однако, стоит отметить, что при отношении радиусов $R_2/R_1 \sim 0.5$, для которого приведены данные на рис. 3.5, характерный скачок не столь ярко выражен, как для малых отношений радиусов. Связано это с тем, что в сравнении со случаем малых отношений радиусов размер области, занятой образованным возвратным течением, не так велик, а дальнейшее уменьшение перепада давления (при эксцентриситете $0.75 < e < 0.85$) вызвано быстрым ростом этой зоны (рис. 3.5, красная линия). В то же время для малых отношений радиусов последующий рост области, занятой возвратным течением, не столь значителен, в связи с чем, дальнейшее изменение перепада давления несущественно.

3.3 Моделирование турбулентных течений неньютоновской жидкости в цилиндрическом зазоре

3.3.1 Случай аксиального напорного течения

Рейнольдсов подход к описанию турбулентности, как известно, заключается в представлении характеристик потока в виде суммы осреднённой по времени и пульсационной составляющих. Коэффициент эффективной вязкости в таком подходе представляет собой сумму коэффициента молекулярной и турбулентной вязкости. Основное отличие турбулентных течений неньютоновской среды от турбулентности в ньютоновских жидкостях заключается в том, что молекулярная вязкость зависит теперь от пульсаций поля скорости. В псевдопластических средах молекулярная вязкость уменьшается при увеличении скорости сдвига.

Так для жидкостей Хершеля–Балкли зависимость коэффициента молекулярной вязкости от скорости сдвига имеет вид $\mu_e = |\dot{\gamma}|^{-1}(\tau_0 + k|\dot{\gamma}|^n)$. Поэтому при увеличении скорости сдвига для моделей степенных жидкостей и жидкостей Хершеля–Балкли с $n < 1$ молекулярная вязкость неограниченно уменьшается. Для жидкости Бингама это уменьшение ограничено величиной $\mu = k$. Локальная скорость сдвига с увеличением числа Рейнольдса в развитом турбулентном течении растёт не только за счёт увеличения средней скорости сдвига, но и за счёт увеличения интенсивности турбулентных пульсаций. Это приводит, в конечном счёте, к локальному уменьшению молекулярной вязкости. Поэтому сопротивление в напорном турбулентном течении степенных жидкостей ($\mu_e = k|\dot{\gamma}|^{n-1}$) растёт с увеличением числа Рейнольдса несколько медленнее, чем у ньютоновских жидкостей ($\mu_e = \mu = const$). Причём с уменьшением показателя степени этот эффект усиливается. Так на рис. 3.6 (слева), где представлена зависимость коэффициента сопротивления $f \text{Re} = 2\Delta p(R_1 - R_2)^2 / \mu(Q / \rho S)\Delta l$ от аксиального числа Рейнольдса для степенных жидкостей, видно расхождение линий при увеличении числа Рейнольдса, что свидетельствует об относительном уменьшении сопротивления для степенных жидкостей.

В другом характерном случае, соответствующем жидкостям Бингама, $\mu_e = |\dot{\gamma}|^{-1}(\tau_0 + \mu|\dot{\gamma}|)$, эффективная вязкость убывает с увеличением скорости сдвига, но в отличие от степенных, стремится к ненулевому значению μ . Поэтому с увеличением интенсивности пульсаций скорости течение такой жидкости становится всё более похожим на течение ньютоновской жидкости. Это, в частности, демонстрирует зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса, представленная на рис. 3.6, справа. Здесь видно, что жидкости с различным значением предельного сдвигового напряжения (им соответствуют различные числа Бингама $Bn = \tau_0 / k\dot{\Gamma}^n$, $\dot{\Gamma} = \sqrt{(\omega R_2)^2 + (Q / \rho S)^2} / (R_1 - R_2)$ – характерная скорость сдвига) дают практически одинаковое сопротивление при больших числах Рейнольдса. Важно отметить и другую особенность: с увеличением предельного напряжения используемая нами модель турбулентности демонстрирует затягивание перехода к турбулентному режиму течения. Это также хорошо видно на рис. 3.6, где начальный участок каждой линии – прямая, соответствующая ламинарному режиму. Так переход к турбулентному режиму при $Bn = 20$ наблюдается уже не при $\text{Re}_Q = 1000$, как в случае ньютоновской жидкости, а при числе Рейнольдса, в десять раз большем, $\text{Re}_Q = 10000$. Между ламинарным режимом и развитым турбулентным режимом, где наличие предельного напряжения сдвига уже практически не сказывается, существует диапазон чисел Рейнольдса, соответствующий переходному и сла-

ботурбулентному режиму. Здесь структура турбулентности отличается от турбулентной структуры ньютоновской жидкости, и сопротивление канала оказывается несколько выше.

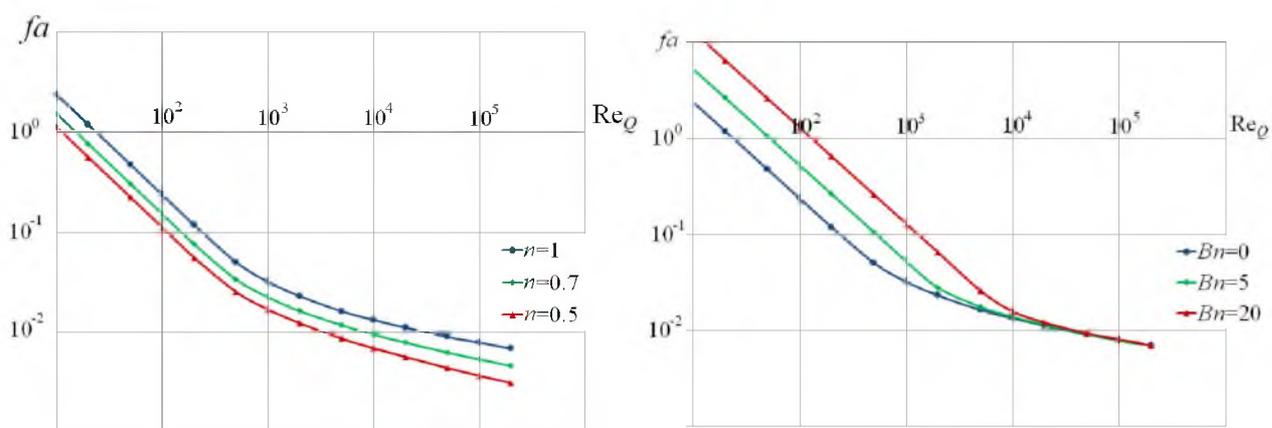


Рис. 3.6. Зависимость коэффициента сопротивления в концентрическом зазоре при $\theta = 0.5$ от аксиального числа Рейнольдса для степенных жидкостей (слева) и Бингамовских жидкостей (справа)

Зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса представлены для степенной жидкости и жидкости Бингама для демонстрации влияния показателя степени и числа Бингама. Однако отмеченные выводы можно распространить на случай любых жидкостей Хершеля–Балкли. Так течения жидкостей с различными предельными напряжениями сдвига и одинаковым показателем степени будут давать практически один и тот же перепад давления в развитых турбулентных течениях при достаточно больших числах Рейнольдса. В то же время переход в турбулентный режим у жидкостей с большим предельным напряжением будет наблюдаться при больших числах Рейнольдса. Представленные на рис. 3.6 зависимости коэффициента сопротивления получены для концентрического канала с отношением радиусов $\theta = R_i / R_o = 0.5$. Однако такого рода зависимость носит практически универсальный характер и наблюдается для всех эксцентриситетов и отношений радиусов.

Полученные нами расчётные данные для описываемых в этом разделе напорных течений зависимости падения давления от эксцентриситета хорошо описывается корреляцией Хасиисламоглу (Haciislamoglu) [120]. Зависимость коэффициента сопротивления от эксцентриситета в турбулентных течениях для всех жидкостей Хершеля–Балкли при любых числах Рейнольдса и отношениях радиусов носит практически универсальный характер (см. рис. 3.1). Влияние эксцентриситета на перепад давления несколько более существенно в случае больших значений показателя степени, малых значений предельного напряжения сдвига и близких диаметров. Однако во всех рассмотренных режимах течения различие между зависимостями относительного падения давления от эксцентриситета разнятся не более чем 10%. Причина этого в том, что сдвиговые напряжения определяются преимущественно турбу-

лентной вязкостью, влияние геометрии канала на распределение которой во всех случаях схоже.

3.3.2 Течение в концентрическом канале с вращением внутреннего цилиндра

Наличие вращения внутреннего цилиндра может стать причиной перехода течения в турбулентный режим, даже если напорное число Рейнольдса соответствует ламинарному режиму при тех же условиях. При этом возможны ситуации, когда течение турбулизуется лишь вблизи вращающегося внутреннего цилиндра и остаётся ламинарным на периферии. Такие переходные режимы течения характерны для неньютоновских жидкостей, они будут рассмотрены в следующем разделе, а здесь будут описаны только полностью развитые турбулентные течения.

Ключевой вопрос, на который здесь необходимо ответить, – как меняются характеристики турбулентного течения и перепад давления в канале, в частности, при наличии вращения. Как было показано в предыдущем разделе, посвящённом турбулентности ньютоновских жидкостей, преобладающее течение (напорное или вращательное) задаёт характеристики турбулентного потока и определяет параметры течения (например, перепад давления). Наличие не доминирующего течения при этом практически не сказывается на распределении турбулентных характеристик потока, определяющих напряжения и перепад давления. Можно считать, что доминирование вращательного течения условно имеет место при $Re_{\omega} > 2Re_Q$, в противном случае, преобладает напорное течение.

Для степенных флюидов зависимость коэффициента сопротивления $f_a Re$ от чисел Рейнольдса имеет такой же вид, что и для ньютоновских жидкостей (см. рис. 3.2). В случае доминирования вращательного течения коэффициент сопротивления практически не зависит от аксиального числа Рейнольдса, что означает, что связь между перепадом давления и расходом имеет вид $\Delta p / \Delta l = c(n, \theta) \cdot Q^n$. В случае доминирования напорного течения коэффициент сопротивления практически не зависит от вращательного числа Рейнольдса. При этом, как и в случае ньютоновской жидкости границей, разделяющей доминирующие течения, можно условно считать $Re_{\omega} \approx 2Re_Q$.

Турбулентные течения жидкостей Хершеля–Балкли с предельным напряжением, как было показано, с увеличением числа Рейнольдса, становятся близкими к течениям степенного флюида с тем же показателем степени. Это справедливо и для спиральных течений: увеличение, как расхода, так и вращения приводит к тому, что течение становится практически не отличимым от течения степенной жидкости с тем же показателем. Однако увеличение вращения и расхода влияет на такой переход не одинаково. Дело в том, что в преимуще-

ственно вращательном течении интенсивность турбулентных пульсаций вблизи внутреннего цилиндра значительно выше, чем на периферии зазора. Увеличение вращения внутреннего цилиндра приводит в большей степени к росту энергии пульсаций вблизи него, а их распространение на периферию демпфируется. В этом случае интенсивность пульсаций на периферии ещё не столь высока, чтобы элиминировать эффекты, вызванные наличием предельного напряжения. Тем не менее, дальнейший рост вращения всё-таки приводит к тому, что течения бингамовской и ньютоновской жидкости становятся практически не различимыми, однако это происходит уже после того как вращательное течение стало доминирующим (см. рис. 3.7 слева). Увеличение расхода в спиральном течении, напротив, сначала приводит к нивелированию влияния на течение предельного напряжения, то есть структура турбулентного течения жидкости Бингама становится схожей со структурой течения ньютоновской жидкости. При дальнейшем же увеличении расхода вращение внутреннего цилиндра перестаёт сказываться на перепаде давления, аксиальное течение становится доминирующим (см. рис. 3.7 справа).

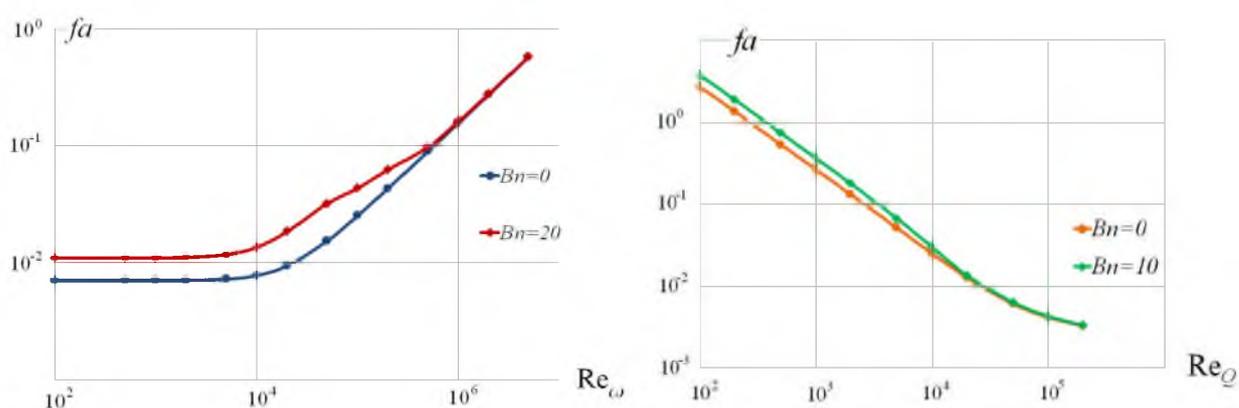


Рис. 3.7. Зависимость коэффициента сопротивления от вращательного (слева) и напорного (справа) числа Рейнольдса в спиральном течении жидкости Хершеля-Балкли. $\theta = 0.5$, $n = 0.5$, $Re_\omega = 10\,000$ (слева), $Re_Q = 100\,000$ (справа)

3.3.3 Ламинарно-турбулентные режимы течения

В развитом турбулентном течении ньютоновской жидкости происходит адвекция и диффузия турбулентных вихревых структур из области их генерации (вблизи стенки) в турбулентное ядро потока. При этом структура турбулентности практически не зависит от числа Рейнольдса. В предыдущих разделах отмечалось, что структура турбулентности в неньютоновской жидкости при достаточно высоких числах Рейнольдса схожа со структурой турбулентности ньютоновских сред. Однако, как было показано, отличия интегральных характеристик начинают появляться при сравнительно невысоких числах Рейнольдса, соответствующих турбулентному режиму течения. Различия в структуре турбулентности ньютонов-

сих и псевдопластических жидкостях обусловлено неоднородным распределением молекулярной вязкости. В псевдопластических жидкостях средняя молекулярная вязкость вблизи стенок, где находятся области с высокой скоростью сдвига, оказывается меньше чем в ядре потока как раз за счёт высокой скорости сдвига. Вблизи стенок также находятся области генерации турбулентности. Однако в отличие от ньютоновской жидкости распространение турбулентных вихревых структур из области их генерации в ядро потока затруднено из-за высокой молекулярной вязкости в последних. Действительно, в ядре потока средняя скорость, как правило, невысока, а снижение вязкости достигается преимущественно за счёт пульсаций скорости. Поэтому турбулентные вихревые структуры там быстро диссипируют. Прямое численное моделирование показало, что фактически в эти области могут проникнуть только турбулентные структуры с высокой энергией, и, как правило, это крупномасштабные вихри [115, 114, 69]. Такое демпфирование турбулентных пульсаций в ядре потока является, пожалуй, ключевой особенностью турбулентных течений псевдопластических жидкостей. В результате в некоторых случаях в поле течения одновременно сосуществуют турбулентная область с турбулентными пульсациями, и ламинарная, где таких пульсаций нет. Как правило, режимы, в которых появляются такого рода течения, соответствуют быстрому вращению внутреннего цилиндра при относительно невысоком расходе. Другим примером частично ламинарного течения может служить чисто напорное течение в узкой части эксцентрического зазора. Такое разделение наблюдается и в течениях ньютоновской жидкости [30], однако, для псевдопластических сред разделение на турбулентную и ламинарную области выражено более чётко, а зона перемежаемости уже. Естественно, что чем сильнее реология жидкости отличается от ньютоновской, тем в более широком диапазоне параметров наблюдается смешанное ламинарно-турбулентное течение.

Судить о том, в какой области произошла ламинаризация течения можно по двум критериям. Во-первых, по малости отношения кинетической энергии турбулентных пульсаций к кинетической энергии осреднённого потока. Этот критерий в основном используется для признания течения целиком ламинарным. Во-вторых, по локальному соотношению молекулярной и турбулентной вязкости. Этот критерий указывает на то, вклад каких эффектов вязких или пульсационных играет определяющую роль в формировании напряжений. Оба критерия весьма условны, поскольку провести чёткую границу между ламинарным и турбулентным течением невозможно.

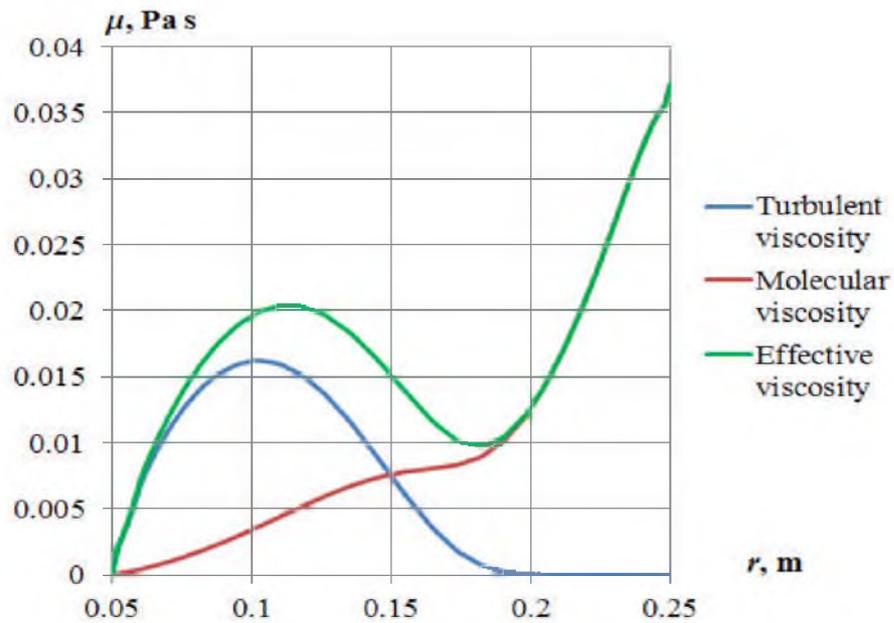


Рис. 3.8. Распределение молекулярной, турбулентной и эффективной вязкости по радиусу в концентрическом канале для степенной жидкости $\theta = 0.2, n = 0.2, Re_Q = 100, Re_\omega = 10\,000$

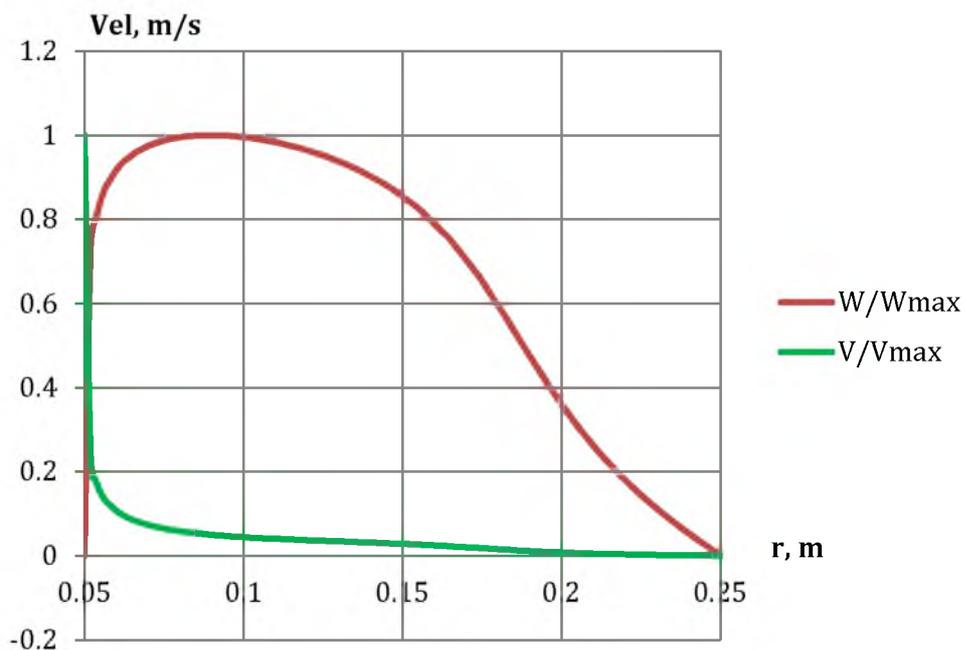


Рис. 3.9. Распределение нормализованной осреднённой аксиальной (красная линия) и окружной (зелёная линия) скорости по радиусу в концентрическом канале для степенной жидкости. $\theta = 0.2, n = 0.2, Re_Q = 100, Re_\omega = 10\,000$

Характерный пример распределения вязкости по радиусу в осесимметричном канале представлен на рис. 3.8. В этом примере для наглядности представлено течение степенной жидкости с показателем $n = 0.2$ (сильно неньютоновская) с сравнительно малым аксиальным числом Рейнольдса ($Re_Q = 100$), но достаточно большим вращательным числом Рейнольдса

($Re_{\omega} = 10000$), так что течение вблизи внутреннего цилиндра стало турбулентным. Осреднённая азимутальная скорость в течениях такого рода (особенно в ламинарных) быстро уменьшается по мере удаления от внутреннего цилиндра (см. рис. 3.8, зелёная линия) и течение на периферии канала остаётся ламинарным, а турбулентные пульсации сосредоточены вблизи внутреннего цилиндра. Они приводят здесь к уменьшению молекулярной вязкости, и определяющую роль играет турбулентная вязкость (синяя линия, рис. 3.8). По мере удаления от внутреннего цилиндра энергия турбулентных пульсаций снижается. Распространению турбулентных вихрей на периферию препятствует высокая вязкость, которая в отсутствие пульсаций практически целиком определяется скоростью аксиального сдвига. Эффективная вязкость – сумма молекулярной и турбулентной – минимальна вблизи внутреннего цилиндра, поэтому градиенты скорости здесь велики (см. рис. 3.9). Кроме того, максимум осреднённой аксиальной скорости достигается также вблизи внутреннего цилиндра в зоне турбулентности. Это говорит о том, что в данном случае турбулентность приводит к уменьшению сопротивления канала за счёт уменьшения вязкости турбулентными пульсациями.

Течение жидкостей с предельным напряжением сдвига в подобных ситуациях может оказаться не просто ламинарным на периферии, а вовсе перейти в неподвижное квазитвёрдое состояние, оставаясь при этом турбулентным вблизи внутреннего цилиндра. Очевидно, что увеличение расхода или скорости вращения должно приводить к тому, что область турбулентного течения, в конечном счёте, займёт всё пространство зазора. Поэтому увеличение расхода или скорости вращения в таких ситуациях приводит к расширению пояса, занятого турбулентным течением до тех пор, пока он не охватит всё пространство зазора.

Увеличение текучести жидкости за счёт турбулентных пульсаций в спиральном течении может оказывать существенное влияние на интегральные характеристики потока, такие как перепад давления. Например, появление турбулентной кольцевой зоны вблизи внутреннего цилиндра, вызванное его вращением, может привести к существенному уменьшению перепада давления. Зависимость отношения перепада давления в канале с вращающимся внутренним цилиндром к перепаду давления в том же канале и с тем же расходом, но без вращения от вращательного числа Рейнольдса представлена на рис. 3.10. Рассмотрим этот пример, соответствующий $Re_{\omega} = 200$, более подробно. Здесь при числах Рейнольдса $Re_{\omega} < 20000$ течение полностью ламинарное. Увеличение вращения внутреннего цилиндра в этом диапазоне чисел Рейнольдса приводит к некоторому снижению аксиального трения и уменьшению перепада давления. Это достигается за счёт, увеличения вклада тангенциальных напряжений в преодолении порогового значения τ_0 . Тем не менее, существенного увеличения толщины жидкого слоя при увеличении вращения в ламинарном режиме не проис-

ходит. Однако к значительному расширению этого слоя приводит переход в турбулентный режим течения вблизи внутреннего цилиндра. Это увеличение происходит за счёт турбулентных пульсаций, вызванных вращением внутреннего цилиндра. Поэтому речь здесь идёт об осреднённых размерах турбулентного, жидкого и квазитвёрдого слоёв. Жидкость легко протекает в аксиальном направлении внутри этого турбулентного слоя (см. рис. 3.11, зелёная линия), и сопротивление канала резко уменьшается (см. рис. 3.10, синяя линия). При дальнейшем увеличении скорости вращения интенсивность турбулентности вблизи внутреннего цилиндра растёт, размеры турбулентного кольца, занятые ею увеличиваются, а размеры квазитвёрдого, напротив, уменьшаются (рис. 3.11). Увеличение площади жидкого слоя приводит к тому, что всё движение жидкости в аксиальном направлении сосредотачивается вблизи него, и при некотором значении Re_{ω} квазитвёрдое кольцо и вовсе перестаёт двигаться, пристав к стенкам внешнего цилиндра (рис. 3.11). Снижение перепада давления при увеличении скорости вращения происходит до тех пор, пока жидкая область не охватит всё пространство зазора (рис. 3.11, синяя линия). После этого увеличение вращения ведёт лишь к интенсификации турбулентных пульсаций и росту перепада давления (рис. 3.10, синяя линия).

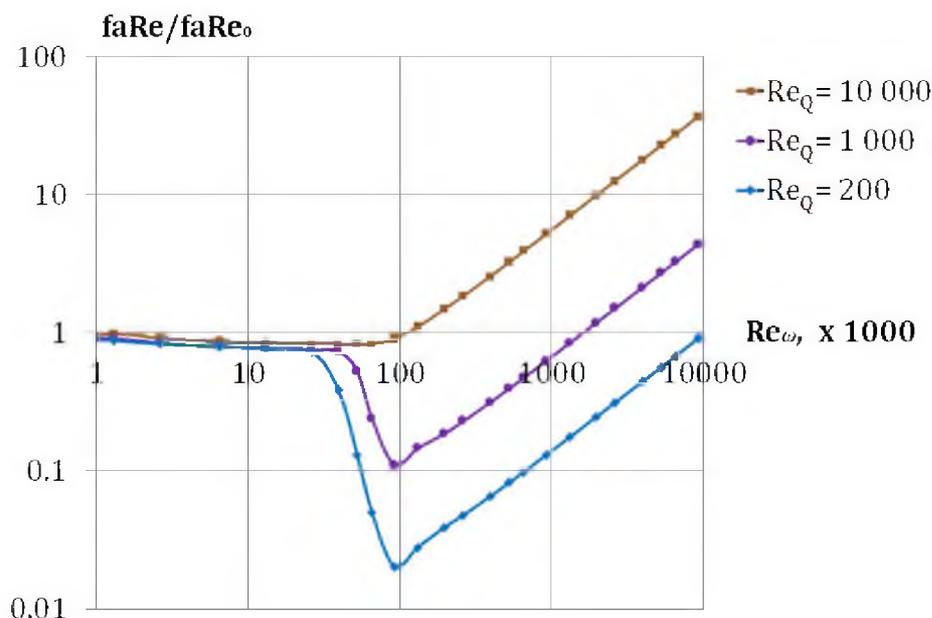


Рис. 3.10. Зависимость перепада давления от скорости вращения для жидкости Бингама.
 $\theta = 0.3$, $\mu = 0.005$, $\tau_0 = 0.3$

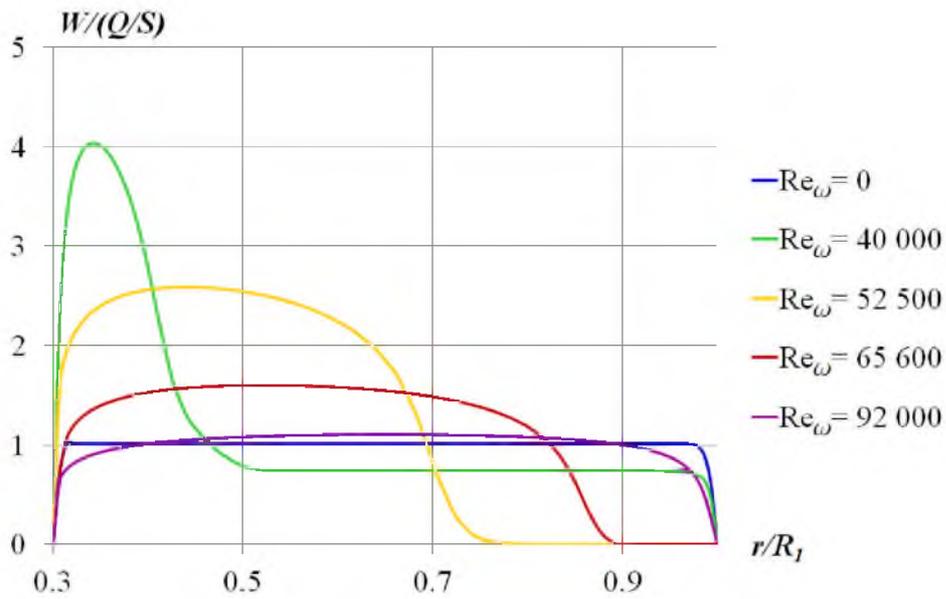


Рис. 3.11. Распределение осреднённой аксиальной компоненты скорости (нормированной на среднюю аксиальную скорость в канале). $\theta = 0.3$, $\mu = 0.005$, $\tau_0 = 0.3$.

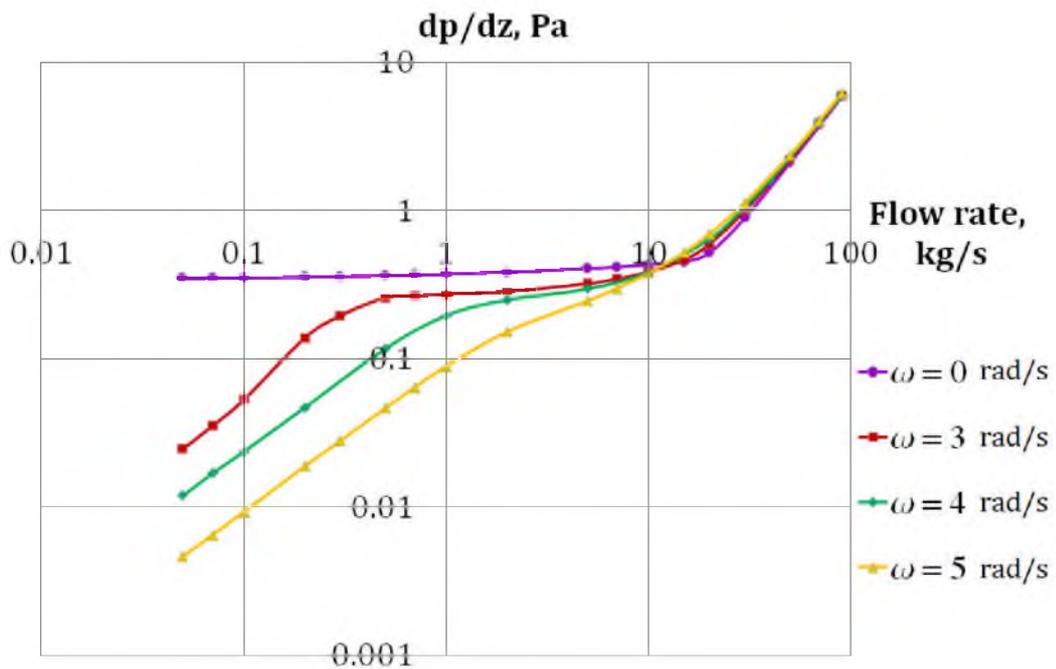


Рис. 3.12. Зависимость перепада давления от расхода для жидкости Бингама. $\theta = 0.3$, $\mu = 0.005$, $\tau_0 = 0.3$

В рассмотренном примере аксиальное течение было сравнительно слабым. Для течений с большим аксиальным числом Рейнольдса эффект уменьшения перепада давления вследствие турбулизации потока вращательным течением будет слабее (см. рис. 3.10). Причём при достаточно высоком числе Рейнольдса Re_Q этого эффекта и вовсе может не быть, в

этом случае аксиальное трение на стенках внутреннего цилиндра при ламинарном и частично-турбулентном течении имеет практически одно и то же значение.

Совершенно иначе перепад давления изменяется в спиральном течении при увеличении расхода. Независимо от наличия турбулентного пояса вблизи внутреннего цилиндра при невысоких значениях расхода перепад давления растёт вместе с расходом в соответствии с реологическим законом: для Бингамовских жидкостей – линейно, для жидкостей Хершеля–Балкли с $n < 1$ перепад давления пропорционален n -ой степени расхода. Если вращение внутреннего цилиндра привело к формированию турбулентного пояса вблизи внутреннего цилиндра, то дальнейшее увеличение расхода ведёт к расширению области, занятой турбулентным течением, такому случаю соответствуют зелёная и жёлтая линия на рис. 3.12. Рост перепада давления с расходом при этом несколько замедляется, что объясняется расширением жидкой зоны, вследствие турбулентных пульсаций. Когда квазидвёрдая область течения оказывается полностью разрушенной турбулентными пульсациями связь перепада давления с расходом близка к характерной для напорного течения, которое здесь доминирует. Красная линия на рис. 3.12 соответствует ламинарному режиму течения при малых значениях расхода. Видно, что характер перехода к полностью турбулентному режиму в этом случае похож на описанный ранее.

3.3.4 Влияние эксцентриситета в течении с вращением внутреннего цилиндра

Наличие эксцентриситета существенно влияло на перепад давления в ламинарных течениях. В полностью развитом турбулентном течении определяющую роль играют не вязкие, а пульсационные эффекты, поэтому структура такого течения схожа для различных реологических моделей. Поле скорости в этом случае для ньютоновской, степенной жидкостей, жидкостей Бингама и Хершеля–Балкли трансформируется при изменении эксцентриситета похожим образом, а зависимость коэффициента сопротивления от эксцентриситета практически повторяет зависимость, представленную на рис. 3.5 для ньютоновской жидкости. В связи с этим, наибольший интерес здесь представляют переходные частично ламинарные течения. Причём ламинарные области в потоке могут появиться при увеличении эксцентриситета, даже если их не было в концентрическом канале. Как правило, такое появление характерно для течений, где вращение доминирует. Связано это с уменьшением скорости потока вблизи внешнего цилиндра в широкой части зазора, где течение и переходит в ламинарный режим. В течениях жидкостей с предельным напряжением сдвига в этой области могут образовываться квазитвёрдые зоны (синий пояс на рис. 3.13), сжимая, таким образом, кольцо, охваченное турбулентным течением, до размеров узкой части зазора. Застывшая квазитвёрдая жидкость на периферии фактически запирает занятое ею пространство, тем самым

уменьшая эффективную площадь зазора. Естественно, что перепад давления при этом увеличивается.

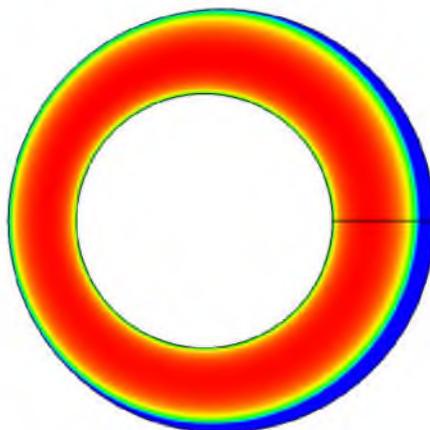


Рис. 3.13. Распределение осреднённой аксиальной компоненты скорости для жидкости Бингама. $\theta = 0.6$, $e = 0.2$. Неподвижная область (показана синим цветом) соответствует квазитвёрдому ядру

Подобное увеличение перепада давления характерно не только для тех случаев, когда квазитвёрдая область появляется при наличии эксцентриситета, но и вообще, когда турбулентный пояс вблизи внутреннего цилиндра запирается узким зазором между внешним и внутренним цилиндром, образованным из-за эксцентриситета. При этом дальнейшее увеличение эксцентриситета и уменьшение размеров жидкой зоны приводит к резкому увеличению трения между жидкостью и квазитвёрдым ядром на периферии. В результате оно «отклеивается» от стенок и начинает двигаться в аксиальном направлении. При этом между ним и внешним цилиндром образуется тонкий жидкий слой. Это немедленно приводит к уменьшению перепада давления.

Трансформация спирального течения при увеличении эксцентриситета также непременно сопровождается перестроением течения с образованием возвратного потока. Как уже отмечалось граница между ламинарным и турбулентным течением весьма условна, однако результаты моделирования показывают, что большая часть возвратного течения занята ламинарным течением, а прямое практически целиком турбулентное.

Все упомянутые трансформации течения приводят к изменению сопротивления в канале. В случае сильного преобладания вращательного течения эти изменения весьма существенны, в некоторых ситуациях результаты моделирования показывают, что падение давления может меняться на порядок при изменении эксцентриситета. Кроме того, структура течения существенным образом зависит от входных параметров и их даже незначительного изменения. Из-за этого, зависимость от эксцентриситета в подобных режимах может иметь бессистемный характер. Типичный пример такой зависимости коэффициента сопротивления

от эксцентриситета представлен на рис. 3.14. Тем не менее, диапазон изменения параметров, в котором они имеют место и соответствующий реальным условиям бурения, сравнительно не широк. Ламинарно-турбулентные режимы течения, в основном наблюдаются при малых отношениях радиусов, доминирующем вращении и для жидкостей, реология которых существенно отличается от ньютоновской.

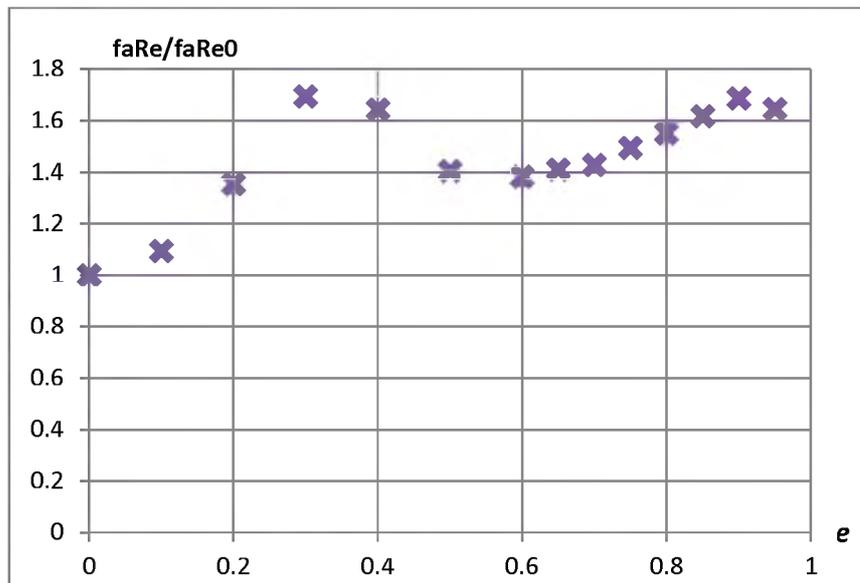


Рис. 3.14. Зависимость относительного сопротивления (нормированного на концентрический канал) для жидкости Бингама. $\theta = 0.6$, $Re_{\omega} = 5000$, $Re_Q = 20000$

4 Алгоритмы для быстрого определения параметров течения

На практике при решении инженерных и технологических задач важно знать не только качественное поведение характеристик течения, но и возможность быстрого их определения с высокой точностью. При этом определение этих характеристик на основе моделирования течения не всегда является приемлемым из-за недопустимо высоких затрат времени или вычислительных ресурсов (время, необходимое для численного моделирования течений в цилиндрическом зазоре, в зависимости от конкретного течения составляет от 30 секунд до суток на современном компьютере). Между тем в некоторых инженерных задачах подобное определение характеристик течений требуется проводить многократно для различных наборов входных параметров. Например, при бурении скважин необходим постоянный мониторинг и контроль перепада давления и других параметров течения, требующий их быстрого вычисления в постоянно меняющихся условиях. Поэтому раньше для этого использовались предварительно составленные различные инженерные таблицы, палетки. Более универсальный способ заключается в построении приближённой функций, описывающей зависимость той или иной характеристики от известных входных данных, – корреляций. Однако в том случае, когда нужная величина зависит сложным образом от многих параметров, построение корреляционных формул оказывается затруднительным или невозможным вовсе. Вместе с тем, благодаря развитию информационно-вычислительных технологий в последние два десятилетия современному инженеру для решения практических задач, как правило, достаточно иметь программные средства, позволяющие оперативно вычислить необходимые характеристики автоматически. В рамках данной работы разработаны алгоритмы для быстрого определения перепада давления, момента и сил, действующих на внутренний цилиндр, а также поля скорости в сечении канала. Описанию этих алгоритмов посвящена настоящая глава.

4.1 Описание базы данных течений и её организация

Проведённое систематическое моделирование течений в зазоре в широком диапазоне изменения параметров дало возможность создать базу данных течений этого класса. В ходе систематического моделирования было проведено около миллиона расчётов, охватывающих следующие диапазоны изменения параметров:

- отношение радиусов, $0.2 \leq \theta \leq 0.9$;
- эксцентриситет, $0 \leq e \leq 0.99$;

- напорное число Рейнольдса, $0 \leq Re_Q \leq 200000$;
- вращательное число Рейнольдса, $0 \leq Re_\omega \leq 5000000$;
- число Бингама, $0 \leq Bn \leq 1000$;
- показатель степени в реологическом законе, $0.2 \leq n \leq 1$.

Внутри каждого из этих диапазонов выбирался некоторый набор значений соответствующего параметра. В ходе систематического моделирования расчёты проводились для всевозможных комбинаций этих значений.

Время одного расчёта на современном компьютере составляет от нескольких минут до суток. Хотя в среднем это время составляет ~ 20 минут для ламинарных течений и ~ 40 минут для турбулентных. Систематические расчёты проводились на кластере в последовательном режиме (без распараллеливания) на ~ 200 ядрах в течение трёх лет.

Каждый расчёт в базе данных содержит практически всю информацию о течении: рассчитанные поля скорости, давления, эффективной вязкости, скорости сдвига, поля турбулентных характеристик (энергии пульсаций и скорости её диссипации, турбулентной вязкости). Помимо этого, в каждом расчёте есть данные по интегральным характеристикам: перепаду давления, моменту на внешнем и внутреннем цилиндре, силам, приложенным к ним, а также распределение напряжений на стенках цилиндров. Около 40% всех расчётов приходится на долю ламинарных течений, более 60% – на долю турбулентных. Часть ламинарных течений при этом рассчитано на основе алгоритма для моделирования турбулентных течений (при расчёте низкорейнольдсовых ламинарных течений этот алгоритм даёт результаты практически неотличимые от данных прямого численного решения уравнений гидродинамики). Это, прежде всего, расчёты при достаточно высоких числах Рейнольдса, близких к значениям, при которых возникает ламинарно-турбулентный переход. Объём информации по всем расчётам в сумме занимает порядка трёх терабайт на дисковом накопителе. Для автоматизации доступа к столь большому объёму информации были разработаны различные программные средства (утилиты и скрипты), позволяющие быстро извлекать необходимую информацию и представлять её в виде таблиц, графиков и т.п. Разработанные скрипты оперируют с любыми указанными выше скалярными и векторными величинами и полями и использовались для анализа результатов моделирования, представленных в предыдущих главах. Кроме того, набор скриптов и утилит был также разработан и для автоматической подготовки и проведения расчётов.

Созданная база данных может быть использована (и используется) для быстрого определения характеристик произвольных течений из указанного выше диапазона. Для этого существует два основных способа, первый из которых, заключается в использовании харак-

теристик рассчитанного течения с близкими параметрами. Однако более точный способ основан на интерполяции значений из базы данных по пространству независимых параметров. При этом предполагается непрерывная зависимость искомой характеристики от этих параметров. Разработанным в рамках этого подхода интерполяционным алгоритмам посвящены следующие главы.

4.2 Интерполяционный алгоритм для быстрого вычисления скалярных величин

При создании базы данных необходимо было, с одной стороны, сохранить разумный не слишком большой объём проводимых вычислений. А с другой, обеспечить достаточно высокую точность нахождения необходимой величины путём интерполяции. Это накладывает определённые ограничения на интерполяционный алгоритм. Например, в некоторых областях изменения входных параметров интегральные характеристики течения изменяются линейно. Использование линейной интерполяции в таких случаях позволяет избежать большого количества расчётов в этих областях, а применение линейной экстраполяции даёт возможность, проведя моделирование в узком диапазоне изменения параметров, распространить результаты за пределы этого диапазона. В связи с этим, для быстрого определения скалярных параметров на основе базы данных был реализован алгоритм полилинейной интерполяции [121]. Такой алгоритм, помимо этого, обладает высокой скоростью (малым числом арифметических операций), надёжностью и сравнительной простотой программной реализации.

Алгоритм полилинейной интерполяции был реализован рекурсивно, поэтому описать его удобно путём индукции по количеству независимых переменных (размерности задачи).

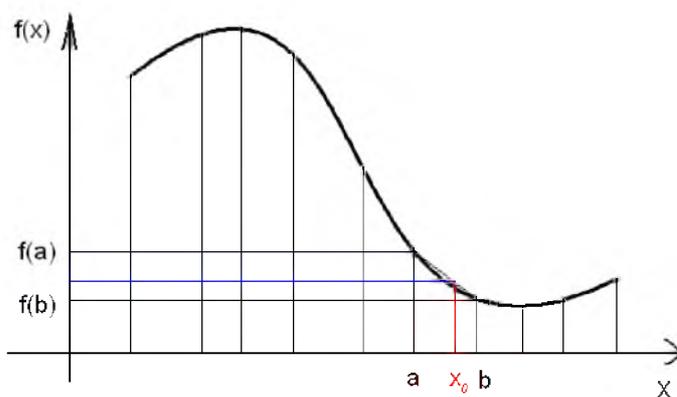


Рис. 4.1. Определение значения функции в точке x_0

Для функции одной переменной $f(x)$ значение в точке x_0 определяется как среднее с весами от значений в соседних узлах (см. рис. 4.1)

$$f(x_0) = p f(a) + (1 - p) f(b),$$

где $f(a)$ и $f(b)$ – известные значения функции в ближайших к x_0 узлах a и b , p – весовой параметр, определяемый по формуле: $p = (x_0 - a)/(b - a)$.

Для определения значения функции n переменных $f(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n)$ в точке $x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, x_0^n$ эта формула принимает вид

$$f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, x_0^n) = p^n f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, a^n) + (1 - p^n) f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, b^n),$$

где $f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, a^n)$ – интерполированное значение функции в ближайших к $\vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, x_0^n)$ узлах $\vec{a} = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, a^n)$ и $\vec{b} = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, b^n)$, p^n – весовой параметр, определяемый по формуле: $p^n = (x_0^n - a^n)/(b^n - a^n)$. Очевидно, что такой способ интерполяции пригоден для любого числа независимых переменных. Кроме того, описанный метод допускает линейную экстраполяцию, в случае, когда необходимо получить значение искомой величины за пределами диапазона изменения параметров.

В нашем случае функция f – суть безразмерная величина, через которую выражается искомая гидродинамическая характеристика, – зависит от шести независимых параметров: отношение радиусов, θ , эксцентриситет, e , напорное число Рейнольдса, Re_ϱ , вращательное число Рейнольдса, Re_ω , число Бингама, Bn , показатель степени в реологическом законе, n . Описанный интерполяционный алгоритм был реализован для определения перепада давления, а также гидродинамической силы и момента, приложенных к внутреннему цилиндру.

По результатам тестирования время работы алгоритма составляет доли секунды на современном компьютере, а отклонение интерполированных данных от данных моделирования составляло не более 5 %.

4.3 Интерполяционный алгоритм для быстрого вычисления поля скорости

Помимо перепада давления в практических приложениях необходимо знать поле скорости в цилиндрическом зазоре. Задача быстрого нахождения поля скорости существенно сложнее задачи о быстром нахождении одной скалярной величины, поскольку в этом случае

объем данных для интерполяции возрастает примерно в миллион раз. Тем не менее, эта задача была принципиально решена.

В базе данных сведения по полям скоростей в сечении хранятся в специальном бинарном формате. Поэтому задача быстрого определения поля скорости фактически решается в два этапа. Во-первых, нужно было выделить из имеющейся базы данных необходимую информацию по полям скоростей, затем её обработать и создать входные файлы для интерполяционного алгоритма. В базе значения компонент скорости известны в узлах вычислительной сетки, на которой был проведён расчёт течения. Техническая сложность заключается в том, что вычислительная сетка криволинейна, а её параметры (число узлов в различных направлениях и коэффициент сгущения к границе), как правило, различны даже в случаях с одинаковой геометрией сечения. В то же время, очевидно, что в реализации интерполяционного алгоритма для быстрого определения поля скорости необходимо иметь дело со значениями компонент скорости в узлах некоторой унифицированной сетки. При этом параметры этой сетки должны однозначно определяться геометрическими характеристиками цилиндрического зазора (отношением радиусов и эксцентриситетом). Это требовало привести поля скорости исходной базы данных к некоторому стандартному виду. Координаты этой «стандартной» сетки являются образами координат равномерной прямоугольной сетки размера $N_r \times N_\varphi$ в прямоугольнике $[0,1] \times [0,2\pi]$ при действии некоторого гладкого взаимно-однозначного отображения $F_{(e,\theta)}(x,y)$. Отображение $F_{(e,\theta)}(r,\varphi)$ переводит прямоугольник $[0,1] \times [0,2\pi]$ в сечение зазора с эксцентриситетом e , радиусом внешнего цилиндра 1, и радиусом внутреннего цилиндра θ . С помощью обратного отображения $F_{(e,\theta)}^{-1}(r,\varphi)$ «стандартная» сетка преобразуется в прямоугольную $N_r \times N_\varphi$. Значения в узлах «стандартной» сетки находятся при помощи переинтерполяции с расчётной сетки. Их можно записать в виде матрицы $N_r \times N_\varphi$. Таким образом, информация по скорости для течений из базы данных представляется в виде трёх матриц для каждой компоненты скорости; причём все матрицы имеют одинаковую размерность $N_r \times N_\varphi$. Совокупность всех таких матриц, заранее определённых для каждого течения из базы данных, является входными данными алгоритма для быстрого определения поля скорости.

На втором этапе – непосредственном нахождении поля скорости – производится его интерполяция по независимым параметрам задачи. При этом задача об интерполяции поля скорости сводится к многократному применению процедуры полилинейной интерполяция скалярной величины для каждого элемента матрицы. Описываемый класс течений характеризуется шестью безразмерными параметрами подобия: отношением радиусов (θ), эксцен-

триситетом (e), показателем степени у жидкости в реологической модели Хершеля–Балкли (n), числом Бингама (Bn), продольным и вращательным числами Рейнольдса (Re_Q и Re_ω). Определение поля какой-либо из компонент скорости для некоторого произвольного набора размерных входных параметров производится путём многомерной интерполяции по параметрам подобия на основе безразмерных полей скорости для просчитанных вариантов из базы данных. Результирующее поле скорости представляется изначально в виде матрицы $N_r \times N_\varphi$, каждый элемент которой соответствует значению какой-либо из компонент поля скорости в определённом узле «стандартной» сетки. При этом интерполяция производится для каждого элемента матрицы.

Программная реализация интерполяционного алгоритма для поля скорости несколько отличается от применяемой процедуры для вычисления скалярной величины. Это сделано в целях увеличения производительности за счёт сокращения числа операций. Описание этого алгоритма приведено ниже.

Пусть заданы произвольные значения параметров p_1, p_2, \dots, p_N (в нашем случае $N=6$, а параметры p_1, p_2, \dots, p_N соответствуют n, θ, e, Bn, Re_Q и Re_ω). Необходимо определить значение искомой переменной для этих значений параметров. По каждому значению параметра p_k находятся два ближайших значения $p_{k,min}, p_{k,max}$ из соответствующего множества S_k так что $p_{k,min} \leq p_k \leq p_{k,max}$, где $p_{k,min} \in S_k, p_{k,max} \in S_k$ и $k = 1, \dots, N$. Таким образом, в пространстве значений параметров задачи будет найден N -мерный параллелепипед, внутри которого лежит точка, соответствующая заданным значениям p_1, p_2, \dots, p_N , а вершины которого соответствуют значениям параметров $p_{k,min}$ или $p_{k,max}$, для которых определены нужные нам значения.

Искомое значение находится линейной интерполяцией по всем этим 2^N известным значениям скоростей, соответствующим вершинам описанного выше N -мерного параллелепипеда, следующим образом. Для начала определяются весовые коэффициенты по каждому параметру: $\alpha_k = (p_k - p_{k,min}) / (p_{k,max} - p_{k,min})$. Пусть $V_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_N}$ – известные значения скорости в вершинах вышеупомянутого N -мерного параллелепипеда, при этом $\delta_k = 0$, если скорость посчитана для значения $p_{k,min}$, и $\delta_k = 1$, если скорость посчитана для значения $p_{k,max}$. Тогда интерполяционное значение скорости можно вычислить по формуле

$$V \approx \sum_{p=0}^N \sum_{s_1=p} \left[\alpha_1^{\delta_1} \alpha_2^{\delta_2} \dots \alpha_N^{\delta_N} \sum_{s \leq p} (-1)^{p+s} V_s \right]$$

где $s_1 = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_N$, $s = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_N$, а V_s обозначает величину $V_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_N}$ при $s = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_N$. Суммы берутся по всем комбинациям $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$, обеспечивающим условие суммирования.

Такой подход представляет собой линейную интерполяцию при $N = 1$, билинейную интерполяцию при $N = 2$, и т.д. Кроме того, такой подход даёт возможность экстраполяции в случае, если не будет найден интервал, содержащий значение параметра p_k , т.е. значение p_k будет лежать вне границ соответствующего множества S_k . В таком случае берется «ближайший» интервал, а весовые коэффициенты будут иметь либо отрицательные значения, либо будут больше единицы.

Время работы описанного алгоритма зависит от размера матриц, представляющих поле скорости. Увеличение количества элементов матрицы влечёт линейное увеличение времени интерполяции. Тем не менее, для матриц размера 40×100 , обеспечивающих хорошую для применения в инженерных целях детализацию поля скорости, время работы интерполяционного алгоритма составляло порядка одной секунды на современном компьютере.

Применение программного обеспечения, разработанного на основе описанного подхода, для быстрого нахождения поля скорости ограничивается размером файлов, содержащих входные данные. Этот объём составляет около пятнадцати гигабайт, что стесняет его практическую применимость. В связи с этим в алгоритме были применены методики сжатия данных, описанию которых посвящён следующий параграф.

4.4 Применение методик сжатия данных для полей скорости

Применение методик сжатия обусловлено необходимостью уменьшения объёма входных файлов для интерполяционного алгоритма. Требование быстроты нахождения поля скорости накладывает определённые ограничения на структуру сжатых файлов с информацией о полях скорости. Прежде всего, необходима возможность быстрого восстановления отдельного набора матриц, необходимых для определения поля скорости в течении с конкретно заданными параметрами. Поэтому алгоритм сжатия должен быть применён к каждой матрице. По этой же причине не применимы стандартные методы архивации данных. Таким образом, матрицы с информацией по полям скорости заменяются на сжатые данные, которые восстанавливаются и вновь представляются в виде матриц непосредственно перед интерполяцией по набору входных параметров.

В конечном счёте, поля скорости воспроизводятся с некоторой точностью, в связи с чем разумно применение методик сжатия с потерями, поскольку они, как правило, дают большую степень сжатия. Уровень допустимых потерь точности при этом не должен был

превышать 3% (по отношению к максимальному по модулю элементу матрицы) – максимальной разницы между исходными значениями в матрице и восстановленными. Фактически сжатию подлежит множество матриц, содержащих информацию о распределении скорости, речь о которых шла в предыдущем параграфе. В разработанном алгоритме сжатия и восстановления были применены к столбцам этих матриц (отвечающих за распределение скорости в радиальном направлении) три основных методики, описанные ниже.

4.4.1 Сжатие при помощи воспроизводящих функций

Основная идея этого подхода заключается в представлении значений в столбцах матрицы y_1, \dots, y_{N_R} в виде значений некоторой непрерывной аналитической функции $f_\alpha^{rep}(x_1), \dots, f_\alpha^{rep}(x_{N_R})$, где $x_i = i / N_R$. При этом аппроксимирующая функция принадлежит некоторому семейству параметрических функций с параметром α , достаточно хорошо воспроизводящих значения в столбцах матриц y_1, \dots, y_{N_R} . Параметр α определяется из требования минимальности квадратов разности значений функции и соответствующих матричных элементов $\sum_i [f_\alpha^{rep}(x_i) - y_i]^2 \rightarrow \min$. Если это значение оказывается достаточно малым (т.е. $\sum_i [f_\alpha^{rep}(x_i) - y_i]^2 < 3\%$), то вместо y_1, \dots, y_{N_R} достаточно хранить лишь один параметр α . Однако в большинстве случаев это условие не выполняется. В этом случае $f_\alpha^{rep}(x)$ принимается в качестве первого приближения, а сжатию с применением методике изложенной ниже подлежит следующий набор значений $\tilde{y}_i = y_i - f_\alpha^{rep}(x)$, $i = 1, \dots, N_R$.

В качестве $f_\alpha^{rep}(x)$ использовались различные семейства воспроизводящих функций. Среди них наилучшие показатели сжатия были достигнуты при $f_\alpha^{rep}(x) = (1-x)e^{-\alpha x}$ для тангенциальной компоненты и $f_\alpha^{rep}(x) = \alpha(1-x)x$ для аксиальной компоненты.

4.4.2 Аппроксимация методом наименьших квадратов

Подход заключается в представлении значений в столбцах матрицы y_1, \dots, y_{N_R} в виде значений линейной комбинации базисных функций [122] $\Phi(x) = \sum_i^k c_i \varphi_i(x)$, где $x_i = i / N_R$. Значения коэффициентов c_i находятся из условия минимальности суммы квадратов локальных погрешностей $\sum_i [\Phi(x_i) - y_i]^2 \rightarrow \min$, следствием которого является система линейных уравнений с матрицей Грама

$$\begin{cases} \sum_i^k c_i(\varphi_i, \varphi_1) = (Y, \varphi_1); \\ \sum_i^k c_i(\varphi_i, \varphi_2) = (Y, \varphi_2); \\ \dots \\ \sum_i^k c_i(\varphi_i, \varphi_k) = (Y, \varphi_k). \end{cases}$$

Здесь $(\varphi_i, \varphi_k) = \sum_j^{N_R} \varphi_i(x_j) \varphi_k(x_j)$, $(Y, \varphi_k) = \sum_j^{N_R} y_j \cdot \varphi_k(x_j)$ – скалярное произведение в пространстве дискретных функций.

В качестве системы базисных функций тестировались различные базисные функции, но наилучшие показатели сжатия удалось достичь при использовании полиномов Лежандра для компонент скорости в плоскости сечения канала и $\sin(\pi i x)$ для аксиальной компоненты скорости. Количество базисных функций k для каждого случая определялось отдельно исходя из допустимого уровня потерь при сжатии в 3%. То есть разница между исходными и восстановленными значениями матрицы не должна была превышать этого значения. Оба семейства функций (полиномы Лежандра и синусы) представляют собой ортогональный набор функций, что обеспечивает лучшую аппроксимацию по сравнению с неортогональным набором (например, степенных функций) при одинаковом их количестве. Суть сжатия заключается в том, что вместо значений y_1, \dots, y_{N_R} достаточно хранить коэффициенты разложения c_1, \dots, c_k и их число k . На основе этой информации исходные значения легко восстанавливаются $y_j = \sum_i^k c_i \varphi_i(x_j)$, где $x_i = i / N_R$. Как правило, число коэффициентов k , требующихся для воспроизведения исходных значений в столбцах матрицы, как правило, на порядок меньше количества последних N_R , благодаря чему и возможно сжатие.

4.4.3 Побитовое сжатие

Побитовое сжатие основано на уменьшении разрядности переменных в компьютерном представлении. Значения y_1, \dots, y_{N_R} хранятся в переменных типа float, занимающих четыре байта памяти и имеющих восьмицифровую мантиссу и показатель степени, допускающий изменение в достаточно широком диапазоне. В действительности для хранения безразмерных значений компонент скорости нет необходимости ни в столь широком допустимом диапазоне, ни в точности переменных с семью знаками после запятой. В связи с этим можно определить переменную, занимающую всего лишь один байт и допускающую изменения в

диапазоне между минимальным ($y_{\min} \approx -1$) и максимальным значением $y_{\max} \approx 3$ безразмерных компонент скорости во всех течениях из базы данных. Такая переменная может принимать одно из $2^8=256$ значений, допускаемых однобайтовой переменной.

Степень сжатия этим методом постоянна и равна четырём. Как правило, остальные методики дают большую степень сжатия, поэтому этот метод применяется лишь в редких случаях, когда другие методики оказываются менее эффективными.

4.5 Тестирование и верификация интерполяционных алгоритмов

Тестирование алгоритмов проводилось на основе сравнения с результатами прямого моделирования. При этом параметры течения, для которых проводилось сопоставления результатов интерполяции и моделирования выбирались из областей быстрого изменения интерполируемых переменных (наихудшие случаи). Как и следовало ожидать, наибольшая погрешность достигается в тех случаях, когда имеет место пороговое перестроение. В остальных случаях погрешность определения скалярных величин (погрешность интерполяции) в ламинарных течениях была менее 4%, в турбулентных – менее 6%.

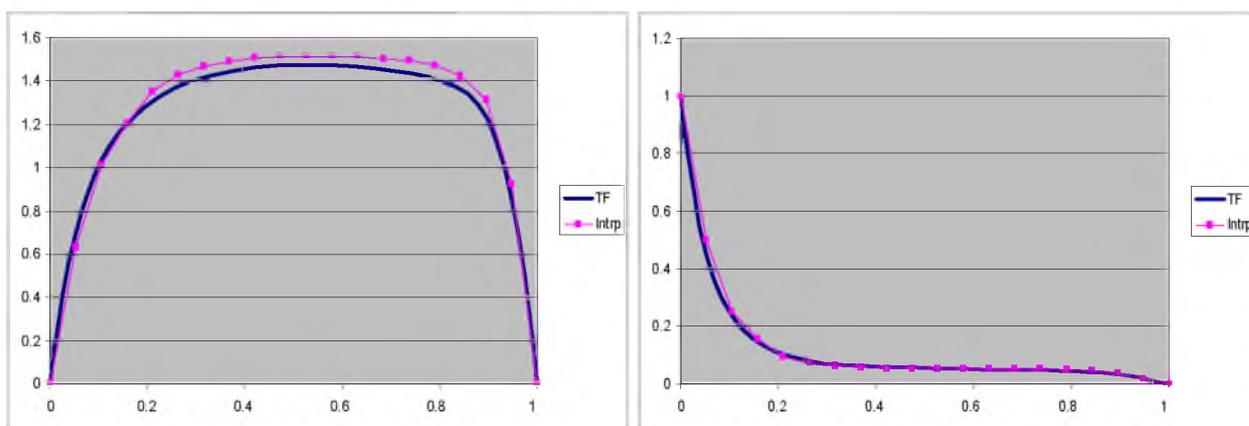


Рис. 4.2. Сопоставление интерполированных компонент скорости (розовые линии) и компонент скорости, полученных в результате прямого моделирования (синие линии) для жидкости Хершеля–Бакли при $n = 0.6, Bn = 7, Re_{\omega} = 400, Re_Q = 600, e = 0.65, \theta = 0.6$. Слева аксиальная компонента, а справа азимутальная.

Погрешность определения поля скорости, как правило, была несколько выше, что связано с погрешностью восстановления сжатых профилей. Во всех рассмотренных случаях погрешность определения поля скорости не превышала 8%. Результаты сопоставления представлены на рис. 4.2 и рис. 4.3, где видно, что хорошее совпадение наблюдается не только для профилей скорости, но и для изолиний.

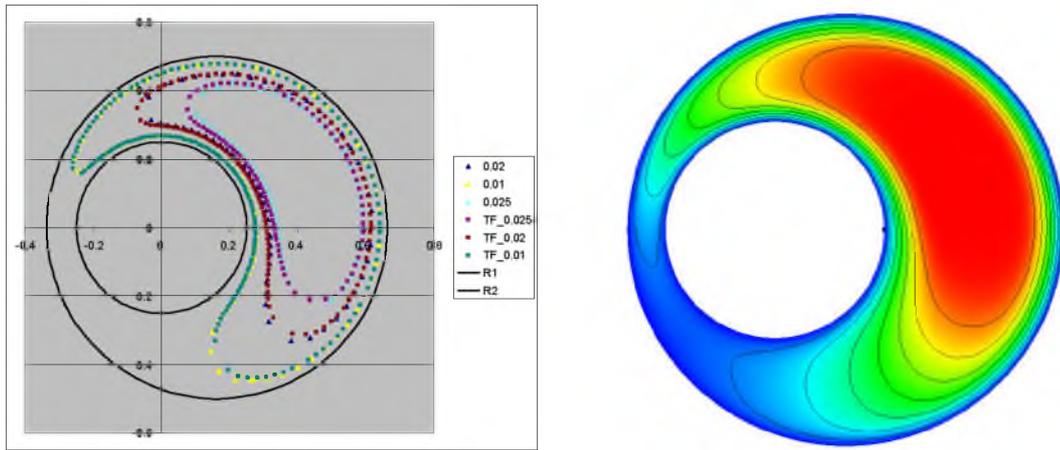


Рис. 4.3. Сопоставление изолиний интерполированной скорости (слева) и визуализация результата численного расчёта (справа). $Bn = 7$; $\theta = 0.5$; $e = 0.65$.

Таким образом, следует констатировать, что разработанный алгоритм пригоден для быстрого определения поля скорости. Необходимо также сделать замечание о вычислении перепада давления в наклонных каналах. В интерполяционном алгоритме и в проведённой работе вообще речь, как правило, шла о гидродинамическом перепада давления. В практических ситуациях, однако, необходимо учитывать также и гидростатический перепад, обусловленный весом жидкости в канале. Гидростатический перепад давления для несжимаемых жидкостей даётся формулой $\frac{\Delta p}{\Delta z} = \rho g L \cos \alpha$, где α – угол между каналом и направлением силы тяжести. Полный перепад давления есть сумма гидродинамического и гидростатического перепадов.

Заключение

Данная работа посвящена моделированию и изучению гидродинамических характеристик ламинарных и турбулентных течений обобщённых неньютоновских жидкостей в зазоре между двумя цилиндрами.

Разработка алгоритма для систематического моделирования этих течений является отдельной задачей, которая для класса ламинарных течений была решена в рамках данной работы. Разработанный алгоритм основан на методе конечных объёмов, пожалуй, наиболее широко применяемом для гидродинамического моделирования. Алгоритм развит на общий случай неструктурированных сеток с ячейками произвольной (выпуклой) формы и количеством граней, хотя для решения данной конкретной задачи использовались гексагональные криволинейные ортогональные сетки со сгущением к границам цилиндров, что позволило достичь большей эффективности вычислений (отношения погрешности к времени расчёта). Результаты тестирования и сопоставления алгоритма и программного обеспечения как с точными аналитическими решениями, так и с результатами экспериментов показали его пригодность для описания рассмотренного класса течений. Отличительной чертой алгоритма, позволяющей повысить эффективность, является оригинальный алгоритм построения сеток, учитывающий специфику задачи. Вместе с тем, благодаря объектно-ориентированной организации программного кода и оперирования с неструктурированными сетками алгоритм обладает широкими возможностями расширения для решения других гидродинамических задач.

Изучение структуры течений, позволило выделить основные свойства течений рассматриваемого класса, а также установить, как эти свойства меняются и зависят от входных параметров, определяющих геометрию канала, свойства флюида и режим течения. При проведении систематического моделирования ламинарных течений обобщённых неньютоновских жидкостей в зазоре между двумя цилиндрами получены следующие основные результаты.

- Для случая аксиального напорного течения (без вращения внутреннего цилиндра) сопротивление канала монотонно убывает с ростом эксцентриситета (при фиксированном объёмном расходе). Чем ближе значения диаметров, тем больше снижение сопротивления. Чем ближе реология жидкости к ньютоновской, тем существеннее снижение сопротивления вследствие эксцентриситета. Результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с опубликованными данными.

- Для ньютоновской жидкости вращение внутреннего цилиндра в эксцентрическом канале приводит к увеличению сопротивления. Причина этого в том, что вращение внутреннего цилиндра в эксцентрическом канале приводит к переносу медленных в аксиальном направлении потоков жидкости со стенок цилиндров внутрь области и дальнейшему перемешиванию этих потоков. В подавляющем большинстве случаев зависимость сопротивления от скорости вращения монотонна. Однако при малых отношениях радиусов и достаточно высоком эксцентриситете сопротивление канала растёт с увеличением скорости вращения при медленном вращении, а начиная с некоторых частот, начинает убывать.
- При некоторых значениях эксцентриситета (0.3÷0.8) во вращательном и спиральных течениях как ньютоновских, так и неньютоновских сред в широкой части зазора образуется область рециркуляции, где жидкость движется в направлении противоположном вращению внутреннего цилиндра. Её формирование приводит к изменению интегральных характеристик течения.
- В отличие от ньютоновских, в степенных жидкостях вращение внутреннего цилиндра в концентрическом канале ведёт к снижению сопротивления из-за уменьшения эффективной вязкости, вызванного вращением. Уменьшение сопротивления канала достигается за счёт увеличения момента сопротивления вращению на внутреннем цилиндре. Вместе с тем, последний может быть уменьшен за счёт увеличения расхода и, как следствие, перепада давления. Этот эффект может применяться в технике, для управления одной из этих характеристик течения с помощью изменения другой.
- В канале с эксцентриситетом вращение внутреннего цилиндра влечёт, с одной стороны, интенсификацию переноса импульса в аксиальном направлении, что повышает перепад давления, с другой – снижение эффективной вязкости за счёт увеличения скорости сдвига что, в свою очередь, приводит к уменьшению перепада давления. Таким образом, увеличение скорости вращения в ламинарном течении приводит к появлению эффектов с противоположным влиянием на перепад давления. В работе показано, что степень влияния этих эффектов определяется отношением чисел Рейнольдса, построенных по среднеаксиальной и вращательной скорости.
- Напорное ламинарное течение жидкости Бингама сопровождается образованием квазитвёрдых областей в течении. В напорном аксиальном течении в зависимости от эксцентриситета могут присутствовать одна область имеющая форму кольцевого цилиндра движущаяся поступательно в аксиальном направлении, две области, движущиеся с различными скоростями и разделённые жидким сдвиговым слоем, либо

одна неподвижная в узкой части эксцентрического зазора и одна движущаяся – в широкой.

- Отношения напорного и вращательного чисел Рейнольдса в течении вязкопластических сред определяет основной механизм формирования квазитвёрдых областей в течении, их положения и размеров, что в свою очередь влияет на интегральные характеристики течения. Показано, что вращение в эксцентрическом канале даже с относительно небольшой скоростью позволяет избежать образования неподвижных областей в течении, обусловленных наличием предельного напряжения. Кроме того, при определённых условиях присутствующие в течении квазитвёрдые области достаточно интенсивно обмениваются составляющими их частицами с жидкими областями в течении. Подбирать такие режимы особо важно при течении затвердевающих жидкостей (клеи, цементные растворы и т.п.).
- Момент вязких сил сопротивления вращению монотонно увеличивается с ростом эксцентриситета, причём это возрастание наиболее существенно при высоких значениях эксцентриситета. Чем ближе реология жидкости к ньютоновской, тем сильнее возрастает момент сопротивления при увеличении эксцентриситета.
- Сила гидродинамической реакции, действующая на внутренний цилиндр, складывается из сил вязкого трения и давления. Последний фактор, как правило, имеет определяющее значение. При малых и средних значениях эксцентриситета ($0 < e < 0.7 \div 0.9$) радиальная компонента этой силы отталкивает внутренний цилиндр от осесимметричного положения. При высоких эксцентриситетах эта сила меняет знак и, наоборот, отталкивает внутренний цилиндр от стенок внешнего. Тангенциальная компонента силы, за исключением некоторых отдельных случаев, индуцирует прецессионное движение внутреннего цилиндра в направлении его вращения.

Изучение структуры течений степенных и бингамовских жидкостей позволяет применить соответствующие выводы и заключения к течениям жидкости Хершеля–Балкли, поскольку эта модель фактически является их суперпозицией, и такая жидкость обладает свойствами как степенной, так и жидкости Бингама.

Для спиральных турбулентных течения даже в случае ньютоновской жидкости в литературе есть данные лишь по характеристикам отдельных течений. Их систематического исследования и, в частности, изучения зависимости от входных параметров до сих пор не проводилось. Результаты работы позволяют сформулировать следующие выводы относительно турбулентных течений обобщённых неньютоновских жидкостей в зазоре между двумя цилиндрами.

- Основным механизмом генерации турбулентности и турбулентного переноса импульса определяются отношением напорного и вращательного чисел Рейнольдса. В случае доминирования вращательного течения перепад давления оказывается практически пропорционален расходу (в ньютоновских жидкостях), как в ламинарных течениях. А в случае доминирования аксиального течения скорость вращения практически не оказывает влияния на перепад давления.
- На основе полученных в результате моделирования данных и их анализа, для определения коэффициента сопротивления в спиральных течениях ньютоновской жидкости в концентрическом канале построена новая корреляция (3.10), работающая в широком диапазоне чисел Рейнольдса.
- Влияние эксцентриситета на сопротивление канала в турбулентном течении оказывается не столь значительным как в ламинарном. Как правило, изменение сопротивления вследствие изменения эксцентриситета в развитом турбулентном течении не превосходит 20%, в то время как в ламинарных течениях разница в сопротивлении может превышать 50%.
- При доминировании вращательного течения отмечается пороговое перестроение течения при изменении эксцентриситета, сопровождающееся появлением возвратного вихря и быстрым изменением интегральных характеристик.
- Влияние наличия предельного напряжения в турбулентных течениях вязкопластических жидкостей нивелируется при увеличении числа Рейнольдса и интенсификации турбулентности.
- Выявлены режимы, в которых одновременно сосуществуют турбулентная и ламинарная области в течении. Такие режимы возникают при достаточно быстром вращении внутреннего цилиндра и сравнительно слабом аксиальном течении. Обнаружен эффект снижения перепада давления при переходе от полностью ламинарных течений к таким переходным режимам в жидкостях, реология которых сильно отличается от ньютоновской. И более того, если турбулентность вызвана быстрым вращением внутреннего цилиндра, то в определённых случаях перепад давления в турбулентном течении будет существенно ниже, чем в ламинарном при том же режиме аксиального течения. Этот эффект может быть использован на практике для снижения сопротивления канала с помощью искусственной генерации турбулентности.

Систематическое моделирование течений позволяет получить необходимую информацию о течениях изучаемого класса. В ходе систематического моделирования было проведено более миллиона расчётов. Это позволяет говорить, что фактически была создана уникальная база данных течений описанного класса. Информация из этой базы данных легла в основу быстрого инженерного алгоритма, позволяющего быстро находить неизвестные характеристики течения. Алгоритм основан на интерполяции результатов моделирования и разрабатывался для определения перепада давления и поля скорости. Тем не менее, он легко может быть расширен для быстрого нахождения практически любой другой характеристики течения (напряжений, момента сопротивления и т.д.). При этом для уменьшения объёма входных данных были использованы методики сжатия, позволившие уменьшить их размер более чем в 10 раз. Аналогов этого алгоритма, позволяющих быстро и достаточно точно вычислить характеристики изученного класса течений, нет.

Подытоживая, можно перечислить основные результаты работы:

- разработан алгоритм для моделирования ламинарных течений обобщённых ньютоновских жидкостей;
- в широком диапазоне параметров проведено систематическое моделирование псевдопластических жидкостей с предельным напряжением сдвига в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра;
- в результате систематического моделирования впервые выявлен ряд новых эффектов и закономерностей, приведено объяснение полученным результатам;
- разработан инженерный программный продукт, позволяющий быстро и достаточно точно определить неизвестные гидродинамические характеристики течений.

Это позволяет утверждать, что поставленные задачи выполнены, а цели настоящей работы достигнуты.

Вместе с тем, необходимо сделать ряд замечаний и упомянуть здесь то, что по различным причинам не было изучено, хотя напрямую связано с тематикой данной работы. Прежде всего, стоит упомянуть проблему ламинарно-турбулентного перехода, оставшуюся за рамками данной работы в силу огромной сложности этой задачи. Задача о нахождение критериев ламинарно-турбулентного перехода до сих пор удовлетворительно не решена даже для случая ньютоновской жидкости (хотя есть ряд работ по исследованию устойчивости неньютоновских сред). Более того, на практике переходу между режимами могут способствовать внешние факторы (звук, вибрации, шероховатость стенок и т.п.), которые нет возможности учесть в рамках приведённой в этой работе постановки. В этой работе промодели-

рованы отдельно ламинарные течения (возможно даже в тех режимах, где на практике такое течение будет, как правило, турбулентным). Турбулентные режимы описаны в рамках модели турбулентности Ментера (переноса сдвиговых напряжений). Эта модель хорошо описывает ламинарные течения при низких числах Рейнольдса (турбулентные характеристики течения, такие как кинетическая энергия пульсаций, при этом близки к нулевому значению), а область перехода «откалибрована» с помощью эмпирических коэффициентов для согласования в среднем с экспериментальными данными для классических течений. Поскольку ничего лучше этого нет, в инженерном алгоритме заложен похожий критерий переключения. Таким образом, эту особенность необходимо учитывать при нахождении данных в диапазоне чисел Рейнольдса, соответствующих переходным режимам.

Следующее замечание необходимо сделать относительно упрощённой формулировки поставленной гидродинамической задачи. Фактически, в ходе численного решения находилось стационарное и независящее от аксиальной координаты течение. Однако на практике вместо него может реализовываться нестационарное существенно трёхмерное течение. Простейшим примером здесь могут быть вихри Тейлора. Пороговые перестроения течений, вызванные изменением входных параметров, по-видимому, тоже являются следствием упрощённой формулировки задачи. В любом случае это явление требует дальнейшего изучения. Тем не менее, те случаи, когда стационарные двумерные течения являются неустойчивыми, составляют лишь малую долю среди всех рассмотренных течений. Об этом говорят и известные экспериментальные данные.

Стоит упомянуть ещё раз и о недостатках реологических моделях жидкостей, использованных в данной работе. Как уже отмечалось, в отличие от, например, степенной модели, реальные жидкости всегда имеют конечные максимальное и минимальное значение вязкости. В одних жидкостях эти значения различаются в несколько раз, в других отличие может быть в несколько порядков. Однако во многих работах отмечается, что реологические модели, включающие максимальную и минимальную вязкость, не столько увеличивают точность результатов моделирования, сколько доставляют сложностей, связанных с измерением и учётом этих параметров. Поэтому широкое применение более простых моделей вполне обосновано.

Наконец, стоит упомянуть о том, что модели турбулентности, основанные на осреднении по Рейнольдсу, иногда приводят к результатам с большой погрешностью. Тем не менее, такие подходы остаются единственным компромиссом не только для рассмотренной здесь задачи, но и многих других технологических задач. Поэтому систематическая экспериментальная верификация была бы крайне полезна, однако, как отмечалось, это слишком трудоёмкий и дорогостоящий проект.

Результаты, полученные в этой работе, могут применяться инженерами для проектировки различных технологических устройств. В частности программное обеспечение для быстрого определения характеристик течения в настоящий момент интегрировано в программный комплекс Advantage, разработанный для автоматизации и контроля за процессом бурения скважин компанией Baker Hughes. Это позволило более точно предсказывать давление в скважине и прогнозировать оптимальные режимы бурения и выноса шлама.

Список литературы

- [1] Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, Москва: Дрофа, 2003.
- [2] W. Snyder and G. Goldstein, "An analysis of fully developed laminar flow in an eccentric annulus," *AIChE Journal*, vol. 11, no. 3, pp. 462-467, 1965.
- [3] С. М. Тарг, *Основные задачи теории ламинарных течений*, Москва: Гостехиздат, 1951.
- [4] M. Renardy, *Mathematical Analysis of Viscoelastic Flows*, SIAM: Philadelphia, USA, 2000.
- [5] Д. Астарита и Д. Марруччи, *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*, Москва: Мир, 1978.
- [6] У. Л. Уилкинсон, *Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен*, Москва: Мир, 1964.
- [7] R. Bird, R. Armstrong and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1. Fluid mechanics.*, A Wiley-Interscience Publication: John Wiley & Sons, 1987.
- [8] E. Bingham, "An Investigation of the Laws of Plastic Flow," *U.S. Bureau of Standards Bulletin*, vol. 13, pp. 309-353, 1916.
- [9] W. Herschel and R. Bulkley, "Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen," *Kolloid Zeitschrift*, vol. 39, p. 291–300, 1926.
- [10] Д. М. Климов, А. Г. Петров и Д. В. Георгиевский, *Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость, перемешивание*, Москва: Наука, 2005.
- [11] W. C. Chin., *Computational Rheology for Pipeline and Annular Flow*, Gulf Professional Publishing, 2001.
- [12] L. N. Tao and W. Donovan, "Through-flow in concentric and eccentric annuli of fine clearance with and without relative motion of the boundaries," *Transactions of ASME*, no. 77, pp. 1291-1301, 1955.
- [13] П. А. Ушаков, «Влияние эксцентриситета на гидродинамические характеристики кольцевых каналов,» *Теплофизика высоких температур*, т. 14, № 1.
- [14] P. J. Redberger and M. E. Charles, "Axial laminar flow in a circular pipe containing a fixed eccentric core," *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 40, no. 4, p. 148–151, 1962.
- [15] I. Tosun, "Axial laminar flow in an eccentric annulus: An approximate solution," *AIChE Journal*, vol. 30, no. 5, p. 877–878, 1984.

- [16] V. Jonsson and E. Sparrow, "Results of laminar flow analysis and turbulent flow experiments for eccentric annular ducts," *AIChE Journal*, vol. 11, no. 6, p. 1143–1145, 1965.
- [17] J. Denton, Turbulent flow in concentric and eccentric annuli, Thesis (M.A.Sc.) – University of British Columbia, 1963.
- [18] Е. А. Гостев и И. С. Риман, «Течение жидкости в кольцевом канале, имеющем эксцентриситет,» *Промышленная аэродинамика. Аэродинамика вентиляторов и каналов*, № 30, p. 58–64, 1973.
- [19] P. Schmid and D. Henningson, *Stability and transition in shear flows*, Verlag: Springer, 2001.
- [20] M. Kamal, "Separation in the flow between eccentric cylinders," *ASME J. Basic Eng.*, p. 717–724, 1966.
- [21] J. Nouri, H. Umur and J. Whitelaw, "Flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in concentric and eccentric annuli," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 253, p. 617–641, 1993.
- [22] J. Nouri and J. Whitelaw, "Flow of Newtonian and non-Newtonian fluids in an eccentric annulus with rotation of the inner cylinder," *International journal of heat and fluid flow*, vol. 15, no. 2, p. 236–246, 1997.
- [23] M. Escudier, I. Gouldson, P. Oliveira and F. Pinho, "Effects of inner cylinder rotation on laminar flow of a Newtonian fluid through an eccentric annulus," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 21, p. 92–103, 2000.
- [24] G. Ooms and E. Kampman-Reinhartz, "Influence of drill pipe rotation and eccentricity on pressure drop over borehole during drilling," *European journal of mechanics. B, Fluids*, vol. 15, no. 5, p. 695–711, 1996.
- [25] G. Ooms and B. Kampman-Reinhartz, "Influence of drillpipe rotation and eccentricity on pressure drop over borehole with newtonian liquid during drilling," *SPE Drilling & Completion*, vol. 15, no. 4, p. 249–253, 2000.
- [26] P. Fang and R. Manglik, "The influence of inner cylinder rotation on laminar axial flows in eccentric annuli of drilling bore wells," *International journal of transport phenomena*, vol. 4, p. 257–274, 2002.
- [27] S. Wan, D. Morrison and I. Bryden, "The Flow of Newtonian and Inelastic Non-Newtonian Fluids in Eccentric Annuli with Inner-Cylinder Rotation," *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 13, p. 349–359, 2000.
- [28] N. Mori, T. Eguchi, K. Nakamura and A. Horikawa, "Pressure Flow of Non-Newtonian

- Fluids between Eccentric Double Cylinders with the Inner Cylinder Rotating," *Journal of the Textile Machinery Society of Japan*, vol. 38, no. 2, p. 46–53, 1985.
- [29] S. Chung and H. Sung, "Large-eddy simulation of turbulent flow in a concentric annulus with rotation of an inner cylinder," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 26, p. 191–203, 2005.
- [30] Н. В. Никитин, «Прямой расчет турбулентных течений в эксцентрических трубах,» *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, т. 46, № 3, p. 509–526, 2006.
- [31] H. Ninokata, T. Okumura, E. Merzari and T. Kano, "Annual report of the Earth Simulator Center. April, 2005 – March, 2006," The Earth Simulator Center, Yokohama, 2007.
- [32] A. Iyoho and J. Azar, "An Accurate Slot-Flow Model for Non-Newtonian Fluid Flow Through Eccentric Annuli," *SPE Journal*, vol. 21, no. 5, p. 565–572, 1981.
- [33] T. Guckes, "Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in an Eccentric Annulus," *Trans. ASME, J. Eng. Industry*, vol. 18, p. 498–506, 1975.
- [34] D. Uner, C. Ozgen and I. Tosun, "An approximate solution for non-Newtonian flow in eccentric annuli," *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 27, p. 698–701, 1988.
- [35] Y. Xiang-an, K. Xiang-yan and C. Jia-lang, "Perturbation solution of non-newtonian fluid axial laminar flow through eccentric annuli," *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 13, no. 3, p. 263–272, 1992.
- [36] D. Dodge and A. Metzner, "Turbulent flow of non-Newtonian systems," *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 5, no. 2, p. 189–204, 1959.
- [37] A. Metzner and J. Reed, "Flow of Non-Newtonian Fluids - Correlation of the Laminar, Transition, and Turbulent-Flow Regions," *A.I.Ch.E. Journal*, vol. 1, pp. 434-440, 1955.
- [38] W. Kozicki, C. Chow and C. Tiu, "Non-newtonian flow in ducts of arbitrary cross-sectional shape," *Chemical Engineering Science*, vol. 21, p. 665–679, 1966.
- [39] W. Kozicki and C. Tiu, "Improved parametric characterization of flow geometries," *Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 49, p. 562–569, 1971.
- [40] M. Kostic and J. Hartnett, "Predicting turbulent friction factor of non-newtonian fluids in non-circular ducts," *International Community in Heat and Mass Transfer*, vol. 11, p. 345–352, 1984.
- [41] K. C. Tam and C. Tiu, "A general correlation for purely viscous non-newtonian fluids flowing in ducts of arbitrary cross-section," *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, vol. 66, no. 4, p. 542–549, 1988.

- [42] J. Hartnett and M. Kostic, "Turbulent friction factor correlations for power law fluids in circular and non-circular channels," *International Communications in Heat Mass Transfer*, vol. 17, pp. 59-65, 1990.
- [43] N. Mitsuishi and Y. Aoyagi, "Non-Newtonian flow in non-circular ducts," *Chemical Engineering Science*, vol. 24, no. 2, pp. 309-319, 1969.
- [44] M. Escudier and I. Gouldson, "Concentric annular flow with centrebody rotation of a Newtonian and a shear-thinning liquid," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 16, p. 156–162, 1995.
- [45] M. Escudier, I. Gouldson and J. D.M., "Flow of shear-thinning fluids in a concentric annulus," *Experiments in Fluids*, vol. 18, p. 225–238, 1995.
- [46] N. Mori, M. Yagami, T. Eguchi, K. Nakamura and A. Horikawa, "Pressure flow of non-newtonian fluids between eccentric double cylinders with the inner cylinder rotating," *Journal of the Textile Machinery Society of Japan*, vol. 33, no. 3, p. 73–77, 1987.
- [47] C. Nouar and C. Z. H. Desaubry, "Numerical and experimental investigation of thermal convection for a thermodependent Herschel–Bulkley fluid in an annular duct with rotating inner cylinder," *European Journal of Mechanics B. Fluids*, vol. 17, pp. 875-900, 1998.
- [48] M. Escudier, P. Oliveira, F. Pinho and S. Smith, "Fully developed laminar flow of non-Newtonian liquids through annuli: comparison of numerical calculations with experiments," *Experiments in Fluids*, vol. 33, p. 101–111, 2002.
- [49] M. Escudier, P. Oliveira and F. Pinho, "Fully developed laminar flow of purely viscous non-Newtonian liquids through annuli, including the effects of eccentricity and inner-cylinder rotation," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 23, p. 52–73, 2002.
- [50] S. Roy and M. Zamora, "Annular flow-loop studies of non-newtonian reservoir drilling fluids," in *AADE Drilling Fluids Technical Conference*, Houston, 2006.
- [51] M. Zamora, S. Roy and K. Slater, "Comparing a Basic Set of Drilling Fluid Pressure-Loss Relationships to Flow-Loop and Field Data," in *AADE 2005 National Technical Conference and Exhibition*, Houston, USA, 2005.
- [52] S. Wroński and J. Jastrzębski, "The stability of the helical flow of pseudoplastic liquids in a narrow annular gap with a rotating inner cylinder," *Rheol Acta*, vol. 29, p. 442–452, 1990.
- [53] R. Di Prima and H. Swinney, *Hydrodynamics instabilities and the transition to turbulence*, New York: Springer, 1981.
- [54] "OpenFOAM," [Online]. Available: <http://www.openfoam.com/>.

- [55] "SU2," [Online]. Available: <http://su2.stanford.edu/>.
- [56] "OpenFVM," [Online]. Available: <http://openfvm.sourceforge.net/>.
- [57] G. F. Solver. [Online]. Available: http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page.
- [58] ISAAC. [Online]. Available: <http://isaac-cfd.sourceforge.net/>.
- [59] "OpenFlower," [Online]. Available: <http://openflower.sourceforge.net/>.
- [60] "Fluidyn," [Online]. Available: <http://www.fluidyn.com/fluidyn/>.
- [61] StarCCM+. [Online]. Available: <http://www.cd-adapco.com/products/star-ccm>.
- [62] "Comsol Multiphysics," [Online]. Available: <http://www.comsol.com/cfd-module>.
- [63] "ANSYS Fluent," [Online]. Available: <http://ansys.com/Products/Simulation+Technology/Fluid+Dynamics/Fluid+Dynamics+Products/ANSYS+Fluent>.
- [64] F. Pinho, "A model for the effect of turbulence on the molecular viscosity of generalized Newtonian fluids," in *Proceedings of COBEM*, San Paulo, 2003.
- [65] D. Cruz and F. Pinho, "Turbulent pipe flow predictions with a low Reynolds number $k-\epsilon$ model for drag reducing fluids," *Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics*, vol. 114, no. 2, pp. 109-148, 2003.
- [66] F. Pinho, "A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a $k-\epsilon$ type closure," *Journal of Non-newtonian Fluid Mechanics*, vol. 114, no. 2, pp. 149-184, 2003.
- [67] А. А. Гаврилов, А. В. Минаков, А. А. Дектерев и В. Я. Рудяк, «Математическая модель и численная методика моделирования развитого турбулентного течения неньютоновской вязкопластической жидкости,» в *Материалы международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент, практика"*, Новосибирск, 2011.
- [68] А. А. Гаврилов и В. Я. Рудяк, «Моделирование коэффициента молекулярной вязкости вязкопластических жидкостей в турбулентном режиме,» *Доклады АН ВШ РФ*, № 2, р. 69–80, 2013.
- [69] А. А. Гаврилов, Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Прямое численное моделирование турбулентного течения степенной жидкости в круглой трубе,» в *Доклады IV всероссийской конференции «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск, 2012.
- [70] А. А. Гаврилов, А. В. Минаков, А. А. Дектерев и В. Я. Рудяк, «Численный алгоритм

- для моделирования ламинарных течений в кольцевом канале с эксцентриситетом,» *СибЖИМ*, т. 13, № 44, р. 46–61, 2010.
- [71] А. А. Гаврилов, А. В. Минаков, А. А. Дектерев и В. Я. Рудяк, «Численный алгоритм для моделирования установившихся ламинарных течений неньютоновских жидкостей в кольцевом зазоре с эксцентриситетом,» *Вычислительные технологии*, т. 17, № 1, р. 44–57, 2012.
- [72] В. Я. Рудяк и Е. В. Подрябинкин, «Моделирование течений вязкой жидкости в цилиндрическом зазоре,» в *65-я Всероссийская научно-техническая конференция НГАСУ (Сибстрин)*, Новосибирск: НГАСУ, 2008.
- [73] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Численное моделирование течения ньютоновской жидкости в зазоре между двумя цилиндрами,» в *Всероссийский семинар «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск: НГАСУ, 2009.
- [74] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «О моменте и силе, действующих на внутреннюю трубу при течении ньютоновских и неньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом,» в *Тезисы докладов Всероссийского семинара «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск: НГАСУ, 2010.
- [75] Е. В. Подрябинкин, «Моделирование течений ньютоновских и неньютоновских жидкостей в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом,» в *Доклады Всероссийской молодежной конференции «Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей»*, Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2010.
- [76] Е. В. Подрябинкин, «О моменте и силах, действующих на вращающийся внутренний цилиндр при течении в зазоре,» в *Доклады Всероссийской молодежной конференции «Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей»*, Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2010.
- [77] В. Я. Рудяк и Е. В. Подрябинкин, «Анализ момента и силы, действующих на вращающийся внутренний цилиндр при течении ньютоновских и неньютоновских жидкостей в зазоре,» в *Материалы международной конференции "Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентности"*, Москва: МГУ, 2010.
- [78] Е. В. Подрябинкин, «Моделирование момента и силы, действующих на внутренний цилиндр при течении в эксцентричном межтрубном зазоре,» в *Тезисы докладов XI Всероссийской школы-конференции молодых ученых "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики"*, Новосибирск: ИТФ, 2010.

- [79] Е. В. Подрябинкин, «Алгоритм для численного решения уравнений гидродинамики псевдопластических сред,» в *Тезисы докладов Всероссийского семинара «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск: НГАСУ, 2011.
- [80] Е. В. Подрябинкин, «Моделирование течений жидкости Хершеля-Балкли в кольцевом зазоре с эксцентриситетом,» в *Тезисы докладов Всероссийского семинара «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск: НГАСУ, 2011.
- [81] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Моделирование турбулентных течений в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра,» в *Современные проблемы математики и механики: материалы II Всероссийской молодёжной научной конференции*, Томск: ТГУ, 2011.
- [82] Е. В. Подрябинкин, «Численный алгоритм для описания течений несжимаемых жидкостей в цилиндрическом зазоре,» в *Современные проблемы математики и механики: материалы докладов III Всероссийской молодёжной научной конференции*, Томск: ТГУ, 2012.
- [83] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Моделирование турбулентных течений жидкости Хершеля-Балкли в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра,» в *Доклады IV всероссийской конференции «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск: НГАСУ, 2012.
- [84] В. В. Тарасевич, Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Моделирование течений неньютоновской жидкости в межтрубном пространстве при поступательном движении внутренней трубы,» в *Доклады IV всероссийской конференции «Фундаментальные основы МЭМС- и нанотехнологий»*, Новосибирск: НГАСУ, 2012.
- [85] E. Podryabinkin and V. Rudyak, "Modeling the Flow of Drilling Fluids in a Borehole for Drilling Optimization," in *2012 Celle Drilling Conference*, Celle: Geoenergy-Celle, Germany, 2012.
- [86] Я. С. Игнатенко и Е. В. Подрябинкин, «Моделирование спирального течения жидкости Хершеля-Балкли через частично заблокированный кольцевой канал,» в *Труды XIII Международной молодёжной научной конференции «Интеллект и наука»*, Железногорск, 2013.
- [87] Е. В. Подрябинкин, «Моделирование турбулентных течений псевдопластических жидкостей в кольцевом канале,» в *Труды XIII Международной молодёжной научной конференции «Интеллект и наука»*, Железногорск, 2013.
- [88] E. Podryabinkin, A. Gavrillov, V. Rudyak and R. May, "Detailed Modeling of Drilling Fluid

- Flow in a Wellbore Annulus While Drilling," in *32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE13*, Nantes, France, 2013.
- [89] E. Podryabinkin and V. Rudyak, "Moment and Forces Exerted on the Inner Cylinder in Eccentric Annular Flow," *Journal of Engineering Thermophysics*, vol. 20, no. 3, p. 320–328, 2011.
- [90] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Моделирование течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом,» *Доклады АН ВШ РФ*, т. 19, № 2, p. 112–122, 2012.
- [91] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «Моделирование турбулентных течений в цилиндрическом зазоре с эксцентриситетом и вращением внутреннего цилиндра,» *Вестник НГУ: Физика*, т. 7, № 4, p. 79–87, 2012.
- [92] E. Podryabinkin, V. Rudyak and R. May, "Modeling of Drilling Fluids Flow in a Borehole for Drilling Optimization," *Oil and Gas European Magazine*, vol. 39, no. 1, p. 29–31, 2013.
- [93] P. E. and R. V., "Modeling of Turbulent Annular Flows of Hershel–Bulkley Fluids with Eccentricity and Inner Cylinder Rotation," *Статья принята к печати в Journal of Engineering Thermophysics*.
- [94] Е. В. Подрябинкин и В. Я. Рудяк, «О моменте и силах, действующих на внутренний цилиндр при течении в эксцентричном цилиндрическом зазоре,» *Труды НГАСУ*, т. 13, № 49, p. 60–73, 2010.
- [95] Е. В. Подрябинкин, «Алгоритм для численного решения уравнений гидродинамики,» *Труды НГАСУ*, т. 15, № 53, p. 43–57, 2012.
- [96] С. Патанкар, Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкостей, Москва: Энергоатомиздат, 1984.
- [97] К. Флетчер, Вычислительные методы в динамике жидкостей, Москва: Мир, 1991.
- [98] K. Hoffman, Computational Fluid Dynamics, Wichita, USA: Engineering Education System, 2000.
- [99] J. Ferziger and M. Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, 2002.
- [100] H. Jasak, "Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows," Ph.D. Thesis. Imperial College, University of London, 1996.
- [101] Ю. А. Быстров, С. А. Исаев, Н. А. Кудрявцев и А. И. Леонтьев, «Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб,» Судостроение, Москва, 2005.

- [102] A. Harten, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput.*, vol. 49, p. 357–393, 1983.
- [103] Д. В. Чирков и С. Г. Чёрный, «Сравнение точности и сходимости некоторых TVD-схем,» *Вычислительные технологии*, т. 5, № 5, pp. 86-107, 2000.
- [104] A. Date, *Introduction to Computational Fluid Dynamics*, New York: Cambridge University Press, 2005.
- [105] B. Stroustrup, *The C++ Programming Language*, Addison–Wesley Pub Co, 2000.
- [106] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine и H. V. d. Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied, 2000.
- [107] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2003.
- [108] T. Papanastasiou, "Flows of materials with yield," *Journal of Rheology*, vol. 31, no. 5, p. 385–404, 1987.
- [109] Y. Cengel, *Heat and Mass Transfer*, New York: Mc Graw Hill, 2007.
- [110] P. Szabo and O. Hassanger, "Flow of viscoplastic fluids in eccentric geometries," *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, vol. 45, p. 149–169, 1992.
- [111] S. Feng, Q. Li and S. Fu, "On the orbital motion of a rotating inner cylinder in annular flow," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 54, pp. 155-173, 2007.
- [112] К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев и Г. Д. Розенберг, *Нефтегазовая гидромеханика*, Ижевск: Москва, 2005.
- [113] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, *Теоретическая гидродинамика. Часть 2.*, Москва, 1963.
- [114] M. Rudman and H. Blackburn, "Direct numerical simulation of turbulent non-Newtonian flow using a spectral element method," *Applied Mathematical Modeling*, vol. 30, p. 1229–1248, 2006.
- [115] M. Rudman, H. Blackburn, L. Graham and L. Pullum, "Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids," *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, vol. 118, p. 33–48, 2004.
- [116] K. Abe, T. Kondoh and Y. Nagano, "A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows – 1. Flow field calculations," *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 37, no. 1, p. 139–151, 1994.
- [117] F. Menter, "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications," *AIAA Journal*, vol. 32, no. 8, p. 1598–1605, 1994.

- [118] И. Е. Идельчик, Справочник по гидравлическим сопротивлениям, Москва: Машиностроение, 1992.
- [119] Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, Москва: Наука, 1974.
- [120] M. Naciislamoglu and U. Cartalos, "Practical Pressure Loss Predictions in Realistic Annular Geometries," in *SPE 28304 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, New Orleans, 1994.
- [121] Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Москва: Наука, 1998.
- [122] Н. Н. Калиткин, Численные методы, Москва: Наука, 1978.

Приложение 1: Построение расчётных сеток в зазоре между двумя цилиндрами с эксцентриситетом

В этом приложении описан алгоритм построения сетки и приведены её параметры, используемые для систематического моделирования.

В случае концентрических цилиндров узлы расчётной сетки лежат на координатных линиях цилиндрической системы координат. Пусть сетка имеет N_r, N_φ, N_z разбиений по радиусу, углу и в аксиальном направлении соответственно, тогда для расчётной области с внешним радиусом $R_o = 1$, внутренним $R_i = \Theta$, ($0 < \Theta < 1$) и высотой $h = 1$ декартовы координаты узлов будут иметь вид

$$x_{ijk} = [\Theta + i \cdot (1 - \Theta) / N_r] \cdot \cos(j \cdot 2\pi / N_\varphi), \quad (\text{П1.1})$$

$$y_{ijk} = [\Theta + i \cdot (1 - \Theta) / N_r] \cdot \sin(j \cdot 2\pi / N_\varphi), \quad (\text{П1.2})$$

$$z_{ijk} = k / N_z, \quad (\text{П1.3})$$

где $i = 1, \dots, N_r + 1$, $j = 1, \dots, N_\varphi$, $k = 1, \dots, N_z + 1$. Такая сетка имеет равномерный шаг по радиусу и углу в цилиндрической системе координат. Однако изменить плотность узлов в радиальном или окружном направлении можно путём введения корректирующих функций $\rho_r(r), \rho_\varphi(\varphi)$ в эти выражения

$$x_{ijk} = \rho_r(\Theta + i \cdot (1 - \Theta) / N_r) \cdot \cos(\rho_\varphi(j \cdot 2\pi / N_\varphi)), \quad (\text{П1.4})$$

$$y_{ijk} = \rho_r(\Theta + i \cdot (1 - \Theta) / N_r) \cdot \sin(\rho_\varphi(j \cdot 2\pi / N_\varphi)), \quad (\text{П1.5})$$

$$z_{ijk} = k / N_z. \quad (\text{П1.6})$$

Для построения криволинейной ортогональной сетки в зазоре между двумя цилиндрами с эксцентриситетом используется теория конформных отображений. Известно, что дробно-линейное отображение переводит обобщённые окружности (окружности и прямые) на комплексной плоскости в обобщённые окружности, сохраняя при этом углы между ними (и, следовательно, сохраняет свойство ортогональности сетки). На основе этих свойств были найдены формулы, преобразующие осесимметричный цилиндрический зазор в цилиндрический зазор с эксцентриситетом. Следующее конформное отображение комплексной плоскости, оставляя на месте единичную окружность (соответствующую внешнему цилиндру), сдвигает начало координат на расстояние Δ вдоль оси OX

$$f(z) = (z + \Delta) / (1 + \Delta \cdot z). \quad (\text{П1.7})$$

В декартовых переменных это преобразование имеет вид

$$x' = [(x + \Delta)(1 + \Delta \cdot x) + \Delta \cdot y^2] / [(1 + \Delta \cdot x)^2 + \Delta^2 \cdot y^2] \quad (\text{П1.8})$$

$$y' = y(1 - \Delta)^2 / [(1 + \Delta \cdot x)^2 + \Delta^2 \cdot y^2] \quad (\text{П1.9})$$

Однако это преобразование изменяет радиус внутреннего цилиндра, а эксцентриситет не совпадает с параметром Δ . Поэтому для построения сетки в цилиндрическом зазоре с внешним радиусом $R_o = 1$, внутренним $R_i = \theta$, ($0 < \theta < 1$) эксцентриситетом e , ($0 \leq e < 1$) и высотой $h = 1$ используется сетка (П1.4)–(П1.6), построенная для концентрического зазора с радиусом внутреннего цилиндра

$$\Theta = \left[1 - e^2(1 - \theta)^2 + \theta^2 - \sqrt{(1 + e^2(1 - \theta)^2 - \theta^2)^2 - 4e^2(1 - \theta)^2} \right] / 2\theta. \quad (\text{П1.10})$$

После чего эта сетка преобразуется по формулам (П1.8)–(П1.9) с параметром

$$\Delta = \left[1 + e^2(1 - \theta)^2 - \theta^2 - \sqrt{(1 + e^2(1 - \theta)^2 - \theta^2)^2 - 4e^2(1 - \theta)^2} \right] / [e(1 - \theta)]. \quad (\text{П1.11})$$

Однако построенная таким образом сетка при больших e оказывается сильно разреженной в обоих координатных направлениях в широкой части зазора. Для устранения этого недостатка, а также реализации сгущения к стенкам цилиндров, в выражениях (П1.4)–(П1.6) в данной работе использовались следующие корректирующие функции

$$\rho_r = \theta + (1 - \theta)(1 - \cos((\pi - 2\alpha)x + \alpha) / \cos \alpha), \quad (\text{П1.12})$$

$$\rho_\varphi = \arctan(1 - e^2) \cdot \sin \varphi / [(1 + e^2) \cos \varphi - 2e], \quad (\text{П1.13})$$

где α – параметр, управляющий сгущением в радиальном направлении.

В ходе систематического моделирования использовались сетки со следующими параметрами

$$N_r = 60, N_\varphi = 150, N_z = 2, \alpha = \pi / 10.$$