

УТВЕРЖДАЮ

Директор Института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
академик РАН

 А. В. Литаврин

"5" сентября 2017 года



ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации Литаврина Андрея Викторовича

"Аutomорфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 "Математическая логика, алгебра и теория чисел"

Теория изоморфизмов и автоморфизмов классических групп – обширная область теории линейных групп, активно развивающаяся с середины прошлого столетия. В конце столетия стали изучать и автоморфизмы классических групп над кольцами, а также автоморфизмы групп Шевалле. Настоящая диссертация находится в русле этих исследований.

Для формулировки результатов, введем необходимые обозначения. Если K – ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и Φ – система корней, то алгеброй Шевалле \mathcal{L}_K типа Φ над K называется алгебра Ли над K с базисом Шевалле, составленным из элементов e_r , $r \in \Phi$, в совокупности с подходящей базой подалгебры Картана. Всего имеется 9 семейств алгебр Шевалле \mathcal{L}_K , соответствующих классическим типам A_n , B_n , C_n , D_n и исключительным типам G_2 , F_4 и E_n , $n = 6, 7, 8$. Подалгебра в \mathcal{L}_K с базисом из элементов e_r , $r \in \Phi^+$, называется нильтреугольной и обозначается символом $N\Phi(K)$. При $\Phi = A_{n-1}$ алгебра $N\Phi(K)$ изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K . При изучении автоморфизмов групп и алгебр Шевалле возникает естественный вопрос:

(А): Описать автоморфизмы алгебр Ли $N\Phi(K)$.

Этот вопрос исследовался в работах Гиббса, а также Као, Джанга и Вонга для типов B_n , C_n , F_4 при $K = 2K$ или даже при более сильных ограничениях: $K = 2K = 3K$. В. И. Левчук описал автоморфизмы кольца $NT(n, K)$, его ассоциированного кольца Ли (т. е. $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}) и присоединенной группы, которая допускает изоморфизм $\alpha \mapsto 1 + \alpha$ на унитарную группу $UT(n, K) = 1 + NT(n, K)$. Он же сформулировал в 1990 г. следующий вопрос.

(Б): Описать автоморфизмы нильтреугольных подколец $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле \mathcal{L}_K .

При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется. Так, расширяется подгруппа центральных автоморфизмов, т. е. действующих тождественно по модулю центра, добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца. Для изучения вопросов (А) и (Б) используется следующее обобщение понятия центрального автоморфизма. Автоморфизм группы или кольца Ли R , являющийся единичным по модулю m -го гиперцентра и внешним автоморфизмом

по модулю $(m - 1)$ -го гиперцентра, называется гиперцентральным высоты m или, кратко, гиперцентральным автоморфизмом, когда R не совпадает с m -м гиперцентром. Гиперцентральным автоморфизмом отнесется к стандартным, только если он является центральным автоморфизмом.

Степень нильпотентности кольца Ли $N\Phi(K)$, а потому и функция $\chi = \chi(\Phi, K)$ наивысшей высоты его гиперцентральных автоморфизмов ограничены числом Кокстера $h = h(\Phi)$ системы корней Φ . В связи с вопросом (Б) возникает вопрос о наилучшей оценке функции $\chi(\Phi, K)$ и, в частности, следующий вопрос.

(Б1): Всегда ли функция $\chi(\Phi, K)$ ограничена константой, не зависящей от ранга Φ ?

Отметим, что в автореферате этот вопрос отмечен как вопрос (С).

Оценка $\chi(\Phi, K) \leq 5$ функции высоты установлена при описании автоморфизмов унипотентной подгруппы над полем (с исключением для типа B_n) и $AutN\Phi(K)$ для типа A_n в работах В. М. Левчука.

Целью диссертации является решение вопросов (А), (Б), (Б1) для классических типов.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 37 наименований.

В **первой главе** диссертации формулируются основные задачи, приводятся определения алгебр Шевалле и ассоциированных с ними алгебраических систем, определяются стандартные автоморфизмы левых колец $N\Phi(K)$. В § 1.3 приводятся представления алгебр $N\Phi(K)$ классических типов B_n , C_n и D_n , а также находятся центральные ряды соответствующих колец Ли.

Основным результатом первой главы является теорема 1.4.1, которая утверждает, что всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n , $n > 4$, есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты ≤ 5 автоморфизмов.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ оставшихся классических типов – ортогональных типов B_n и D_n . В отличие от изученных случаев здесь появляются гиперцентральные автоморфизмы высоты, линейно зависящей от левого ранга n . В § 2.1 показано, что функция наивысшей высоты нестандартных гиперцентральных автоморфизмов нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов B_n и D_n достигает степени нильпотентности, в отличие от типов A_n и C_n . Таким образом, получен ответ на вопрос (Б1).

В § 2.1 выявляется зависимость при $2K \neq K$ функции $\chi(\Phi, K)$ от левого ранга для типов B_n и D_n . Для тех же алгебр $N\Phi(K)$ найдены автоморфизмы, действующие как нестандартный автоморфизм по модулю 2-го центра. Дается описание автоморфизмов кольца Ли $NB_n(K)$, $n > 4$.

В § 2.2 дается полное решение вопросов (А) и (Б) для типа D_n при $n > 4$. Исключительный тип D_4 был изучен ранее В. М. Левчуком. Тем самым завершено решение вопроса (Б) и, как следствие, вопроса (А) для классических типов.

Полученные результаты являются существенным продвижением в исследовании автоморфизмов нильтреугольных колец. Они обобщают и усиливают известные результаты, а также дают ответы на известные вопросы.

Вместе с тем работа не лишена недостатков:

– с. 6, 3-я строка снизу: вместо фразы “нестандартный автоморфизм” следует написать “нестандартные автоморфизмы”;

– с. 9, 5-я строка сверху: не понятен смысл следующего предложения “Подалгебра H абелева и K ”;

– на с. 26 и далее используются символы типа “ $1_{i,-m}^{(i)}$ ”, которые следовало определить;

– при обозначении базисных элементов следует разделять индексы запятой, иначе возникают сложности при чтении, как, например на с. 43 во 2-й строке снизу написан символ “ xe_{n-2n-3} ”, что, на самом деле, значит “ $xe_{n-2, n-3}$ ”;

– с. 50, 1-я строка сверху: вместо фразы о том, что задача завершена, лучше написать, что задача решена.

Данные замечания легко устранимы и не влияют на общую положительную оценку диссертации. Полученные результаты новы, а методы, которые применялись для получения этих результатов, требуют глубокого знания результатов и методов общей теории групп и колец, групп Шевалле, теории алгебр Ли. Они имеют несомненный теоретический интерес и будут применяться в дальнейших исследованиях по


теории групп и её приложений в Красноярском, Новосибирском, Томском университетах и математических институтах РАН, а так же использоваться в спецкурсах.

Все вошедшие в диссертацию результаты опубликованы, докладывались на различных алгебраических семинарах и конференциях. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Работа хорошо оформлена, все доказательства изложены ясным и грамотным математическим языком.

Вышесказанное позволяет заключить, что работа "Аutomорфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов" удовлетворяет требованиям п. 9 "Положения о присуждения ученых степеней", предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям по математике, а её автор, Литаврин Андрей Викторович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв рассмотрен на заседании лаборатории теории групп Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН 05.09.2017, протокол № 1213.

Отзыв подготовил
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.06), доцент,
ведущий научный сотрудник лаборатории
обратных задач математической физики


Валерий Георгиевич Бардаков

Заведующий лабораторией теории групп,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.06), доцент


Евгений Петрович Вдовин

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4; (8-383) 333-28-02; im@math.nsc.ru; http://www.math.nsc.ru

Подпись *В.Г. Бардакова, Е.П. Вдовина*
удостоверяю
Зав. орготделом *Л.П. Головкина*
ИМ СО РАН
«05» 09 2017 г.