Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский федеральный университет»

На правах рукописи

Литаврин Андрей Викторович

АВТОМОРФИЗМЫ НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ ПОДКОЛЕЦ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ КЛАССИЧЕСКИХ ТИПОВ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Левчук Владимир Михайлович

Красноярск – 2017

Оглавление

Введение

Следуя [22], алгеброй Шевалле $\mathcal{L}_K$ мы называем алгебру Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом K (с единицей) с базисом Шевалле [18, § 4.4], [26], сопоставленным произвольной системе корней Φ. Подалгебру в $\mathcal{L}_K$ с базисом из элементов e_r ($r \in \Phi^+$) базиса Шевалле называем *нильтреугольной* и обозначаем через $N\Phi(K)$. Для типа A_{n-1} она изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ (нижних) нильтреугольных $n \times n$ матриц над K.

В работе [17] изучается следующая проблема

(A): *Описать автоморфизмы алгебр Ли* $N\Phi(K)$.

Предметом диссертации является более общая проблема

(Б): *Описать автоморфизмы нильтреугольных подколец* $N\Phi(K)$ *алгебр Шевалле* $\mathcal{L}_K$.

Исследования автоморфизмов классических линейных групп отражаются в известных обзорах [9], [21] и др., а для алгебр и групп Шевалле см. [25], [12], [16]. Взаимосвязанное описание автоморфизмов кольца $NT(n, K)$, его ассоциированного кольца Ли (т.е. лиева кольца $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}) и присоединенной группы, изоморфной унитреугольной группе $UT(n, K)$, найдено в [8].

Автоморфизмы унипотентного радикала U в подгруппе Бореля групп лиева типа над полем K описал в 1970 году Дж. Гиббс [20] при $K = 2K = 3K$, см. также [4, Проблема (1.5)]. Описание группы автоморфизмов $Aut\, U$ завершил В. М. Левчук [7] в 1990 году. Задача **(Б)** ставилась в [7] и была решена там же для типа D_4.

С теориями автоморфизмов и изоморфизмов линейных групп и колец связаны теоретико-модельные исследования, восходящие к А.И. Мальцеву, см. [10], [28], [27] [13], [15], [3]. Для групп $UT(n, K)$, U и колец $NT(n, K)$, $N\Phi(K)$ см. Роуз [24], Велер [28], Видела [27], О.В. Белеградек [14]. Тесно связанные вопросы описания автоморфизмов и элементарных эквивалентностей как групп U, так алгебр и колец Ли $N\Phi(K)$ отмечаются в обзоре [5].

При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется. Так, расширяется подгруппа центральных автоморфизмов, т.е. действующих тождественно по модулю центра, добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца.

Для решения вопросов **(А)** и **(Б)** мы переносим методы [7], в частности, используя следующее обобщение понятия центральных автоморфизмов. Автоморфизм группы или кольца Ли R, являющийся единичным по модулю m-го гиперцентра и внешним автоморфизмом по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называем *гиперцентральным высоты m* или, кратко, *гиперцентральным автоморфизмом,* когда R не совпадает с m-м гиперцентром.

Ступень нильпотентности кольца Ли $N\Phi(K)$, а поэтому и функция $\chi = \chi(\Phi, K)$ наивысшей высоты его гиперцентральных автоморфизмов ограничены числом Кокстера $h = h(\Phi)$ системы корней Φ.

В связи с вопросом **(Б)**, естественно, возникает вопрос о наилучшей оценке функции $\chi(\Phi, K)$ и, в частности, следующий вопрос.

(Б1): *Всегда ли функция* $\chi(\Phi, K)$ *ограничена константой, не зависящей от ранга* Φ*?*

Вопрос **(А)** исследовался в [17] при $K = 2K = 3K$ – как и вопрос об *Aut* U Гиббсом [20], а для некоторых типов при более слабых ограничениях, например, $K = 2K$ для типов B_n, C_n и F_4; во всех случаях аннулятор $\mathcal{A}_2$ элемента 2 в K нулевой.

По существу, в этих описаниях появляется только один тип нестандартных автоморфизмов, называемых в [20] и [17] экстремальными; в нашей терминологии это гиперцентральный автоморфизм высоты 3 (тип C_n) или 2.

Оказывается, когда $\mathcal{A}_2 \neq 0$, как раз и появляются разнообразные исключительные автоморфизмы, что и потребовало для их систематизации ввести в [7] гиперцентральные автоморфизмы.

Оценка $\chi(\Phi, K) \leq 5$ функции высоты установлена в описаниях автоморфизмов групп U над полем (с исключением для типа B_n) в [7] и *Aut* $N\Phi(K)$ для типа A_n [8].

Целью диссертации является решение вопросов **(А)**, **(Б)** для классических типов.

Наряду с классическими методами общей теории групп и колец, используются методы исследования алгебр Шевалле и групп лиева типа, разработанные в красноярской алгебраической школе.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, включающего 37 наименований.

В § 1.1 главы 1, наряду с постановкой основных задач, приводятся определения алгебр Шевалле и ассоциированных с ними алгебраических систем. В параграфе 1.2 определены стандартные автоморфизмы лиевых колец $N\Phi(K)$. В § 1.3, с помощью известного специального представления алгебр $N\Phi(K)$ классических типов завершено описание их верхнего центрального (гиперцентрального) и нижнего центрального рядов; они оба стандартны лишь при $2K = K$.

В § 1.4 устанавливается основная в главе 1 теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n $(n > 4)$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты ≤ 5 автоморфизмов.*

В отличие от исследованных в теореме симплектического типа C_n и ранее типа A_n, в § 2.1 выявляется зависимость при $2K \neq K$ функции $\chi(\Phi, K)$ от лиева ранга для типов B_n и D_n. Для тех же алгебр $N\Phi(K)$ в параграфах 2.1 и 2.2 найдены автоморфизмы, действующие как нестандартный автоморфизм по модулю 2-го централа.

Полное решение вопросов **(А)** и **(Б)** для типа D_n в § 2.2 дает при $n > 4$ теорема 2.2.1; исключительный тип D_4 был изучен ранее (теорема 2.2.9). Для типа B_n вопросы решают предложение 2.1.1 (случай $n = 2$) и теорема 2.1.2, доказываемая в § 2.3.

Теорема 2.4.1 в § 2.4 отвечает на вопрос **(Б1)** о функции наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов.

Теорема 1.4.1 опубликована автором в [33] (она анонсировалась в [34]). Теоремы 2.1.2, 2.2.1 и 2.4.1 опубликованы в нераздельном соавторстве в работе [37]; соавтор В.М. Левчук.

Список публикаций [30] – [37] основных результатов диссертации включает публикации в изданиях из перечня ВАК.

Результаты диссертации апробировались на Красноярском алгебраическом семинаре при СФУ, на семинаре "Теория групп"(Новосибирск, ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева) и на международных конференциях ”Алгебра и логика: теория и приложения” (Красноярск, 2013), ”Алгебра и приложения” (Нальчик, 2014), "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 2015), "Молодежь и наука"(Красноярск, 2016).

Автор благодарен научному руководителю профессору Левчуку Владимиру Михайловичу за постановку задач и внимание к работе. Признателен сотрудникам кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

Глава 1. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле симплектического типа

В § 1.1 главы 1 приведены определения группы и алгебры Шевалле над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, ассоциированных с произвольной системой корней Φ. Отражено состояние исследований вопроса об автоморфизмах нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$ (проблема **(А)**) и более общей проблемы **(Б)** описания автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$.

Основные исключительные (нестандартные) автоморфизмы, возникающие, в первую очередь, при $2K \neq K$, предлагается систематизировать вместе с введенными гиперцентральными автоморфизмами. Изучается также вопрос **(Б1)** об оценке функции наибольшей высоты гиперцентральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$.

Нижний и верхний центральные ряды колец Ли $N\Phi(K)$ стандартны при некоторых ограничениях на (Φ, K) (см. § 1.2); их описание для классических типов завершено в § 1.3 с использованием специального представления подалгебр $N\Phi(K)$.

Описание автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа устанавливает в § 1.4 основная в главе 1 теорема 1.4.1.

1.1 Алгебры Шевалле и ассоциированные с ними алгебраические системы. Постановка основных задач

Известно [19], [18, Главы 2 и 3], что с произвольной простой конечномерной комплексной алгеброй Ли $\mathcal{L}_C$ ассоциируется единственная, с точностью до эквивалентности, система корней Φ евклидова пространства, которое выбирают с помощью формы Киллинга в подалгебре Картана H. Подалгебра H абелева и К. Шевалле [19] составляет в ней базу из ко-корней $h_r := 2r/(r,r)$. Числа Картана $A_{rs} = (h_r, s)$ $(r, s \in \Phi)$ – целые числа. Базу Π системы корней Φ и систему положительных корней $\Phi^+ \supset \Pi$ фиксируем.

В разложении Картана алгебра $\mathcal{L}_C$ представляется прямой суммой H и одномерных H-инвариантных подалгебр Ce_r $(r \in \Phi)$. Базис

$$\{e_r \ (r \in \Phi);\ h_s \ (s \in \Pi)\} \tag{1.1}$$

алгебры $\mathcal{L}_C$ Шевалле находит с следующими правилами умножения:

$$[e_r, e_{-r}] = h_r,\ \ [h_s, e_r] = A_{sr}e_r \ \ (r \in \Phi,\ s \in \Pi); \quad [h_r, h_s] = 0 \ \ (r, s \in \Pi);$$

$$[e_r, e_s] = N_{r,s}e_{r+s} \ (r, s, r+s \in \Phi); \quad [e_r, e_s] = 0 \ (r+s \notin \Phi \setminus \{0\}).$$

Здесь, $N_{r,s} = \pm(p+1)$, где $p = p(r,s)$ - наибольшее целое число $i \geq 0$ с условием $s - ir \in \Phi$. В частности,

$$1 \leq |N_{r,s}| \leq p(\Phi) := max\{(r,r)/(s,s) \mid r, s \in \Phi\}.$$

Целочисленность структурных констант базиса Шевалле алгебры $\mathcal{L}_C$ позволяет перейти ([18, § 4.4], [26]) к алгебре Ли $\mathcal{L}_K$ с аналогичным базисом над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Следуя [22], называем ее *алгеброй Шевалле.*

Известно [18, § 4.3], что *корневые автоморфизмы* $x_r(t)$ алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$, действующие при любых $r \in \Phi$ и $t \in K$ по правилу

$$x_r(t): \quad e_{-r} \to e_{-r} + th_r - t^2 e_r, \quad h_s \to h_s - tA_{sr}e_r \ (s \in \Pi),$$

$$e_r \to e_r, \quad e_s \to \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} t^i e_{ir+s} \quad (s \in \Phi \setminus \{\pm r\}),$$

$$M_{r,s,i} := \frac{1}{i!} N_{r,s} N_{r,r+s} \cdot \ldots \cdot N_{r,(i-1)r+s} \ \ (1 \le i \le q), \quad M_{r,s,0} := 1$$

($q = q(r,s)$ – наибольшее целое число $j \geq 0$ с условием $s + jr \in \Phi$), порождают *(элементарную) группу Шевалле* над K типа Φ.

Всего имеем 9 семейств алгебр Шевалле $\mathcal{L}_K$: классические типы A_n, B_n, C_n, D_n и исключительные типы G_2, F_4 и E_n $(n = 6, 7, 8)$.

Подалгебру в $\mathcal{L}_K$ с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называют *нильтреугольной.* Ее обозначаем через $N\Phi(K)$. Для типа A_{n-1} она изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над K.

В работе [17] изучается следующая проблема

(А): *Описать автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$.*

Предметом диссертации является более общая проблема

(Б): *Описать группу автоморфизмов нильтреугольного подкольца $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$.*

Ясно, что всякий автоморфизм θ основного кольца индуцирует на кольце Ли $N\Phi(K)$ *кольцевой автоморфизм*

$$\widetilde{\theta} : xe_r \to x^\theta e_r \quad (r \in \Phi^+,\ x \in K),$$

являющийся автоморфизмом алгебры Ли $N\Phi(K)$ лишь при $\theta = 1$. При переходе к кольцам Ли расширяется и подгруппа центральных автоморфизмов, т.е. действующих тождественно по модулю центра.

В [8] получено взаимосвязанное описание автоморфизмов кольца $NT(n, K)$, его ассоциированного кольца Ли (т.е. $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}) и присоединенной группы; она допускает изоморфизм $\alpha \to 1 + \alpha$ на унитреугольную группу $UT(n, K) = 1 + NT(n, K)$.

К группам лиева типа относят, помимо групп Шевалле, еще скрученные группы, определяемые как централизатор скручивающего автоморфизма в группах Шевалле типа A_n, D_n, E_6, F_4, G_2, и B_2, [18].

В 1970 г. Дж. Гиббс [20] описал автоморфизмы унипотентного радикала U в подгруппе Бореля групп лиева типа над полем K при $K = 2K = 3K$, см. также [4, Проблема (1.5)]. В 1990 г. описание $Aut\, U$ завершил В. М. Левчук [7]. Для групп Шевалле типа Φ имеем

$$U = U\Phi(K) := \langle\ x_r(t) \ \mid\ r \in \Phi^+,\ t \in K\ \rangle,$$

причем $U \simeq UT(n, K)$ для типа A_{n-1}.

Исследования автоморфизмов классических линейных групп отражают обзоры [9], [11], [21], а для алгебр и групп Шевалле – [25], [12], [2], [16] и др. С теорией автоморфизмов и изоморфизмов линейных групп и колец тесно связаны восходящие к А.И. Мальцеву теоретико-модельные исследования, [10], [28], [27], [13], [14], [15], [3]. Вопросы описания автоморфизмов и элементарных эквивалентностей колец Ли $N\Phi(K)$ отмечаются в обзоре [5].

Исследования $Aut\ U$ в [20] и вопроса **(А)** в [17] предполагали, что аннулятор $\mathcal{A}_2 = Ann_K(2)$ элемента 2 в кольце K нулевой, более того, $K = 2K$ для типов B_n, C_n и F_4 в [17], $K = 2K = 3K$ в [20]. В этих работах группа автоморфизмов расширяла подгруппу стандартных автоморфизмов, по существу, за счет одного типа автоморфизмов (называемых экстремальными), тождественных по модулю 2-го или – для типа C_n – 3-го гиперцентра.

Задача описания автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ ставилась в [7] и там же решена для типа D_4. Для решения вопросов **(А)** и **(Б)** мы переносим методы работы [7], выявившей, что разнообразные исключительные (не стандартные) автоморфизмы возникают именно при $\mathcal{A}_2 \neq 0$. Для их систематизации используется следующее обобщение понятия центральных автоморфизмов.

Определение 1.1.1. *Автоморфизм группы или кольца Ли R, являющийся единичным по модулю m-го гиперцентра и внешним автоморфизмом по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют гиперцентральным высоты m или, кратко, гиперцентральным автоморфизмом, когда R не совпадает с m-м гиперцентром.*

Функция $\chi = \chi(\Phi, K)$ наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ и ступень нильпотентности кольца Ли $N\Phi(K)$ ограничены числом Кокстера $h = h(\Phi)$. В описаниях

$Aut\ N\Phi(K)$ для типа A_n в [8] и $Aut\ U$ в [7] установлена оценка высоты ≤ 5. Естественно, возникает следующий вопрос.

(Б1): *Всегда ли функция* $\chi(\Phi, K)$ *ограничена константой, не зависящей от ранга* Φ*?*

Далее в этой главе и главе 2 мы решаем вопросы **(А)** и **(Б)** для классических типов Φ, устанавливая для этих случаев наилучшую оценку функции $\chi(\Phi, K)$. Поставленный в **(Б1)** вопрос в общем случае получает отрицательный ответ.

1.2 Стандартные автоморфизмы и центральные ряды

Кольцо Ли $N\Phi(K)$ порождают множества Ke_r, $r \in \Phi^+$, а если $p(\Phi)!K = K$, то даже Ke_r, $r \in \Pi$. В этих порождающих выписываются основные соотношения – помимо соотношений в кольце коэффициентов. Отсюда вытекает

Лемма 1.2.1. *Автоморфизм* ϕ *аддитивной группы кольца Ли* $N\Phi(K)$ *является его автоморфизмом тогда и только тогда, когда* ϕ *сохраняет основные соотношения:*

$$xe_r + ye_r = (x+y)e_r \quad (r \in \Phi^+,\ x, y \in K);$$

$$[xe_r, ye_s] = xyN_{r,s}e_{r+s} \quad (r, s, r+s \in \Phi^+),$$

$$[xe_r, ye_s] = 0 \quad (r, s \in \Phi^+, r+s \notin \Phi^+).$$

Выделим сейчас основные элементарные автоморфизмы и стандартные автоморфизмы, по аналогии с автоморфизмами групп Шевалле [18, Глава 12] и унипотентных подгрупп $U = U\Phi(K)$ [20].

Внутренним автоморфизмом алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$ называют всякий автоморфизм, порождаемый корневыми автоморфизмами $x_r(t)$ для всевозможных $r \in \Phi$ и $t \in K$. Ограничения на $N\Phi(K)$ корневых автоморфизмов $x_r(t)$ в случае $r \in \Phi^+$ порождают подгруппу *внутренних автоморфизмов алгебры Ли* $N\Phi(K)$, изоморфную фактор-группе унипотентной подгруппы $U = U\Phi(K)$ по центру.

Если граф Кокстера системы Φ ранга n корней одной длины в евклидовом n-мерном пространстве V допускает симметрию порядка $m > 1$, то она определяет изометрию τ пространства V, индуцирующую подстановки $\bar{}$ на Φ и на Φ^+, причем либо $m = 2$ и Φ типа A_n, D_n или E_6, либо $m = 3$ и Φ типа D_4. Согласно [18, Предложения 12.2.2, 12.2.3], для определенных констант $\gamma_r = \pm 1$ $(r \in \Phi)$ с условием $\gamma_s = 1$ $(s \in \Pi)$ *графовый автоморфизм* алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$ определяется по правилу

$$e_r \to \gamma_r e_{\bar{r}} \ \ (r \in \Phi), \quad h_r \to h_{\bar{r}} \ \ (r \in \Pi).$$

Ограничение этого автоморфизма на подалгебре $N\Phi(K)$ дает *графовый автоморфизм* подалгебры $N\Phi(K)$.

Диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \to \chi(r)e_r$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляют любому K-характеру χ решетки корней, то есть гомоморфизму подгруппы $\langle\Phi\rangle^+$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [18, § 7.1]. Хорошо известно, что χ определяется однозначно значениями на простых корнях.

Автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ называем *стандартным*, если он порождается внутренними, диагональными и графовыми автоморфизмами, а также кольцевыми и центральными автоморфизмами, которые определены в § 1.1.

Далее нам потребуются центральные ряды. Аналогично группам в произвольном кольце Ли R вводят нижний центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_n \supseteq \cdots \ , \quad \Gamma_{n+1}(R) := [\Gamma_n(R), R] \ (n \geq 1),$$

и верхний центральный или *гиперцентральный* ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots \ , \ Z_{i+1}(R) := \{g \in R \mid [g, R] \subseteq Z_i(R)\} \ (i \geq 0).$$

Как в [1] и [18], используем функцию высоты $ht(r)$ на корнях r системы Φ, максимальный корень ρ и число Кокстера $h := ht(\rho)+1$. В алгебре Ли $N\Phi(K)$ *стандартным центральным* называют ряд

$$L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$

$$L_i := \langle Ke_r | \ \ r \in \Phi^+, \ ht(r) \geq i\rangle \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

По аналогии с [7, Лемма 1] справедлива

Лемма 1.2.2. *Верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ при $p(\Phi)!K = K$ совпадают с её стандартным центральным рядом:* $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i} \ \ (1 \leq i \leq h)$.

В системе корней Φ ранга > 1 всегда существует и, кроме типа A_n, единствен простой корень q такой, что $s = \rho - q \in \Phi^+$. По аналогии с [20] (см. также лемму 1.2.1), линейное продолжение отображения

$$e_q \to e_q + fe_s, \quad e_a \to e_a \ (a \neq q) \tag{1.2}$$

является автоморфизмом алгебры Ли $N\Phi(K)$ для любого $f \in K$. Для типа C_n это внутренний автоморфизм, а в остальных случаях при $f \neq 0$ это гиперцентральный автоморфизм высоты 2.

Для Φ типа C_n $(n \geq 3)$ имеем $s - q \in \Phi^+$ и к гиперцентральному автоморфизму высоты 2 или 3 приводит отображение

$$e_q \to e_q + te_{s-q}, \ e_a \to e_a \ (a \in \Phi^+ \setminus \{q\}, \ t \in K). \tag{1.3}$$

Когда Φ типа B_n или C_n, условие на кольцо коэффициентов K в лемме 1.2.2 равносильно ограничению $2K = K$. Описание центральных рядов завершается в § 1.4 для классических типов (см. леммы 1.3.4 и 1.3.6).

1.3 Представление алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов

Нам потребуется представление из [7] алгебр $N\Phi(K)$ классического типа. Как и в [1, Таблицы I-IV], системы корней классического типа A_{n-1}, B_n, C_n и D_n выберем в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом ε_1, ε_2, $\ldots, \varepsilon_n$. Выбирая базу Π и положительные корни в Φ согласно [7], приходим к таблице 1.

Таблица 1 – Системы корней классического типа

Φ	Φ^+	Π
A_n	$\varepsilon_i - \varepsilon_j \ \ (1 \leq j < i \leq n+1)$	$\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ \ (1 \leq j \leq n)$
B_n	$\varepsilon_i \ (1 \leq i \leq n)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leq j < i \leq n)$	$\varepsilon_1, \ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \leq j < n)$
C_n	$2\varepsilon_i \ (1 \leq i \leq n)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leq j < i \leq n)$	$2\varepsilon_1, \ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \leq j < n)$
D_n	$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leq j < i \leq n)$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_1, \ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j \ (1 \leq j < n)$

Положительные корни систем классических типов записываются в виде

$$\varepsilon_i - m\varepsilon_j = p_{i,mj}, \quad 1 \le j \le i \le n,\ m \in \{0, -1, +1\}.$$

Сумма корней $p_{ij} + p_{kv}$ есть корень лишь когда $k = j$ или $v = i$ или (для типа $\neq A_n$) $v = -j$.

Полагая $e_r = e_{i,mj}$ при $r = p_{i,mj}$, произвольный элемент из $N\Phi(K)$ представляем суммой $\sum a_{iv} e_{iv}$ и Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$ над K. В частности, B_n^+ и C_n^+- матрицы имеют вид, соответственно

$$\begin{matrix} a_{10} \\ a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n0}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{1,-1} \\ a_{2,-2}\ a_{2,-1}\ a_{21} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n,-n}\ \dots\ a_{n,-2}\ a_{n,-1}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}. \end{matrix}$$

Отбрасывая в B_n^+-матрице нулевой столбец, получаем D_n^+-матрицу:

$$\begin{matrix} a_{2,-1}\ a_{21} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}. \end{matrix}$$

Согласно [7, Лемма 2], справедлива

Лемма 1.3.1. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что* $[e_{ij}, e_{jv}] = e_{iv}$ *и верны равенства:*

$$\Phi = B_n, D_n: \quad [e_{jv}, e_{i,-v}] = e_{i,-j} \quad (i > j > |v| > 0);$$

$$\Phi = C_n: \quad [e_{jm}, e_{i,-m}] = [e_{im}, e_{j,-m}] = e_{i,-j} \quad (i > j > m \geq 1);$$

$$\Phi = B_n: \quad [e_{i0}, e_{j0}] = 2e_{i,-j} \quad (i > j);$$

$$\Phi = C_n: \quad [e_{ij}, e_{i,-j}] = 2e_{i,-i} \ (i > j \geq 1).$$

Центральные ряды и порождающие множества кольца Ли $N\Phi(K)$ классического типа выписаны в § 1.2, кроме случаев, когда $2K \neq K$ и Φ типа B_n или C_n. Из леммы 1.3.1 легко вытекает

Лемма 1.3.2. *Кольцо Ли* $NB_n(K)$ $(n \geq 2)$ *порождают*

$$\{Ke_{ii-1} \ (1 \leq i \leq n); \quad Ke_{2,-1}\}. \tag{1.4}$$

Кольцо Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 2)$ *всегда порождают множества*

$$\{Ke_{ii-1} \ (2 \leq i \leq n); \quad Ke_{i,-i} \ (1 \leq i \leq n)\}, \tag{1.5}$$

причем ни одно из них нельзя отбросить, если $2K \neq K$. $\square$

Замечание. Как сразу же следует из леммы, кольца Ли $NC_n(K)$ и $NB_n(K)$ при $n \geq 3$ всегда не изоморфны. Подчеркнем это существенное отличие от унипотентных подгрупп U типа B_n и C_n; они изоморфны, когда основное поле или кольцо коэффициентов является совершенным характеристики 2.

Завершим сейчас описание центральных рядов.

Через T_{im} будем обозначать идеал алгебры $N\Phi(K)$ всех Φ^+-матриц $||a_{uv}||$ с условием $a_{uv}=0$, если $u<i$ или $v>m$. Пользуясь леммой 1.3.1, находим централизаторы $C(T_{im})$ для типа C_n.

Лемма 1.3.3. *Для кольца Ли* $N\Phi(K)$ *типа* C_n $(n\geq 3)$ *имеем:*

$$C(T_{ij}) = T_{1,-j-1} \quad (-i\leq j<i<n),$$

$$C(T_{nj}) = T_{1,-j-1} + \mathcal{A}_2 T_{nn-1} \quad (-n\leq j<n). \quad \square$$

Через T_0 обозначим подмодуль алгебры $NC_n(K)$, в котором базу образуют всевозможные элементы e_{iv}, $|v|<i$. Положим также

$$L_i' := L_i \cap T_0 \quad (1<i<2n).$$

Лемма 1.3.4. *Центральные ряды кольца Ли* $NC_n(K)$ $(n\geq 2)$ *записываются в виде:*

$$\Gamma_i = L_i' + \sum_{i/2<t\leq n} 2Ke_{t,-t} \quad (1<i<2n),$$

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 L_{2n-i-1} \quad (1\leq i<2n-1), \quad Z_{2n-1} = L_1.$$

Доказательство. С помощью леммы 1.3.3, идеалы $\Gamma_i,\ Z_i$ легко вычисляются индукцией по i. $\square$

В кольце Ли $NB_n(K)$ выделяем подмодули $R_j := \sum_{i=j}^n Ke_{i0}$ при $1\leq j\leq n$. Подмодуль в L_i с базой $\{e_{uv} \mid 0\leq v<u\leq n,\ u-v\geq i\}$ обозначаем через $L_i^{[0}$. Используя лемму 1.3.1, аналогично случаю $NC_n(K)$ получаем следующие две леммы.

Лемма 1.3.5. *В кольце Ли $NB_n(K)$ при $0 < i < n$ имеем*

$$C(T_{im}) = T_{1,-m-1} \quad (-i < m < 0),$$

$$C(T_{im}) = T_{1,-m-1} + \mathcal{A}_2 \cdot R_{m+1} \quad (0 \le m < i).$$

Равенства будут верны и при $i = n$, если в правых частях прибавить T_{nn-1}. В частности, идеал $T_{2,-1} + T_{n0} + \mathcal{A}_2 \cdot R_1$ самоцентрализуемый и поэтому максимальный абелев. $\square$

Лемма 1.3.6. *Центральные ряды кольца Ли $NB_n(K)$ $(n \ge 2)$ записываются в виде:*

$$\Gamma_i = L_i^{[0} + L_{i+2} + 2L_i \ (1 < i \le n), \quad \Gamma_i = 2L_i \ (i \ge 2n-2),$$

$$\Gamma_i = L_{i+2} + 2L_i \ (n < i \le 2n-3);$$

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 R_{n+1-i} \ (1 \le i \le n-2),$$

$$Z_{n+i} = L_{n-i} + \mathcal{A}_2 R_1 + \mathcal{A}_2 L_{n-i-2}^{[0} \ \ (0 \le i \le n-3),$$

$$Z_{n-1} = L_{n+1} + \mathcal{A}_2 R_2 + \mathcal{A}_2 e_{n1}, \qquad Z_{2n-2} = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1. \quad \square$$

1.4 Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа

В этом параграфе устанавливается описание автоморфизмов кольца Ли $NC_n(K)$. Основным результатом является

Теорема 1.4.1. *Пусть K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Всякий автоморфизм кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа C_n $(n > 4)$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты ≤ 5 автоморфизмов.*

Для доказательства теоремы вначале выявим некоторые характеристические идеалы.

Лемма 1.4.2. *В кольце Ли $NC_n(K)$ $(n \geq 3)$ идеал T_{ij} является характеристическим при $i < n$.*

Доказательство. Ясно, что идеалы Γ_i, Z_i характеристичны, как и их централизаторы. Используя лемму 1.3.3, вычисляем централизаторы:

$$C(\Gamma_{n+j}) = T_{1,j} + \mathcal{A}_2 e_{n,j+1},$$

$$C(\Gamma_j) = T_{1,-(n-j)-1} + \mathcal{A}_2 e_{n,-(n-j)} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Покажем характеристичность идеалов T_{ij} при $i < n$.

Идеал $T_{1,-1}$ является максимальным абелевым, так как он самоцентрализуемый, в силу леммы 1.3.1. Это же верно и для его образа относительно любого автоморфизма $\phi \in Aut\ N\Phi(K)$. Поэтому

$$\Gamma_n \subset T^{\phi}_{1,-1} \subset C(\Gamma_n) = T_{1,-1} + \mathcal{A}_2 e_{n,1} = T_{1,-1} + Z_n,$$

$$Z_n = L_n + \mathcal{A}_2 L_{n-1}, \quad T_{1,-1} = T^{\phi}_{1,-1} \mod Z_n.$$

Далее находим

$$(T_{2,-1} \cap T_0) + T_{n,-1} \subset Z_1 + [T^{\phi}_{1,-1}, L_1] \subset T^{\phi}_{1,-1} \subset$$

$$\subset C((T_{2,-1} \cap T_0) + T_{n,-1}) \subset C(T_{n,-1}) = T_{1,-1} + \mathcal{A}_2 T_{n,n-1}.$$

Если сейчас идеал $T^{\phi}_{1,-1}$ не лежит в $T_{1,-1}$, то он обязан содержать элемент $\alpha = ae_{n,1} \mod T_{1,-1}$ при $a \neq 0$. Это приводит к противоречию:

$$0 = [e_{2,-1}, \alpha] = [e_{2,-1}, ae_{n,1}] = ae_{n,-2}.$$

Это дает равенство $T^{\phi}_{1,-1} = T_{1,-1}$ и характеристичность $T_{1,-1}$.

Как следствие, получаем характеристичность идеала

$$T_{2,-1} = T_{1,-1} \cap [T_{1,-1}, L_1] + (T_{1,-1} \cap Z_{2n-2}).$$

Идеал $T_{2,1}$ содержит идеал $T_{2,-1}$ и, по его модулю, есть максимальный абелев идеал подалгебры с базисом $\{e_{i,v} \mid i \geq 2,\ -i \leq v < i\}$. Следовательно, $T_{2,1}$ и $T_{2,-2} = C(T_{2,1})$ - характеристические идеалы.

Из описания автоморфизмов кольца Ли $NA_n(K)$ [8] и изоморфности $NC_n(K)/T_{2,-2} \simeq NA_n(K)$ следует характеристичность идеалов $T_{1,j}$ $(1 \leq j \leq n-2)$ и их централизаторов $C(T_{1,j}) = T_{1,-j-1}$.

Характеристичность идеала $T_{i,i-1}$ $(1 < i < n)$ получаем из того, что он содержит характеристический идеал $T_{i,-i} = T_{1,-i}$ и по его модулю есть абелев идеал. Поскольку $T_{i,j} = T_{i,i-1} \cap T_{1,j}$, то идеалы $T_{i,j}$ $(i < n)$ также характеристичны. Лемма доказана. □

Выявим гиперцентральные автоморфизмы алгебры Ли $NC_n(K)$. Очевидно, автоморфизм (1.3) при любом $t \in K$ записывается в виде

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + ta_{nn-1}e_{n-1,-n+1}. \tag{1.6}$$

Любому элементу $t \in \mathcal{A}_3 = Ann_K(3)$ соответствует автоморфизм

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-1,-n+2} + a_{nn-2}e_{n-1,-n+1}). \tag{1.7}$$

Для любого элемента $t \in \mathcal{A}_2$ гиперцентральный автоморфизм получаем как линейное продолжение ϕ отображения

$$e_{nn-1} \to e_{nn-1} + te_{n-2,-n+3},\ e_{nn-2} \to e_{nn-2} + te_{n-1,-n+3}, \tag{1.8}$$

$$e_{nn-3} \to e_{nn-3} + te_{n-1,-n+2}$$

(образ e_{ij} опускаем, если действие тождественное). Оно тождественно на всех элементах e_{iv} базиса Шевалле, кроме трех из (1.8). Так как $[e_{nn-1}, e_{iv}] = 0$ при $i \leq n-2$, то соотношения

$$[e_{nn-1}, e_{iv}]^{\phi} = [e_{nn-1}^{\phi}, e_{iv}^{\phi}] = [te_{n-2,-n+3}, e_{iv}] = 0$$

для $v = n-3,\ i = n-2$ дают $2te_{n-2,-n+2} = 0$, откуда $2t = 0$. При этом условие ϕ-инвариантности основных соотношений в случаях $i = n, n-1$ также легко проверяется. Аналогично проверяются условия

$$[e_{nn-2}, e_{iv}]^{\phi} = [e_{nn-2}^{\phi}, e_{iv}^{\phi}] \ \ (e_{iv} \neq e_{nn-2}),$$

$$[e_{nn-3}, e_{iv}]^{\phi} = [e_{nn-3}^{\phi}, e_{iv}^{\phi}] \ \ (e_{iv} \neq e_{nn-3}).$$

Несложно проверяется, что при $t \in \mathcal{A}_2$ определены автоморфизмы:

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-2,-n+2} + a_{nn-2}e_{n-1,-n+2}); \tag{1.9}$$

$$\alpha \to \alpha + ta_{n-1,n-2}e_{n,-n+2}; \tag{1.10}$$

$$\alpha \to \alpha + t(a_{n-1n-2}e_{n,-n+3} + a_{n-1n-3}e_{n,-n+2}); \tag{1.11}$$

$$\alpha \to \alpha + t(a_{n-1n-2}e_{n-1,-n+1} + a_{nn-2}e_{n,-n+1}). \qquad (1.12)$$

Пусть ϕ - произвольный автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ при $n \geq 5$. Леммы 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5 и 1.4.6 описывают его действие на порождающих (1.5).

Лемма 1.4.3. *Всякий автоморфизм ϕ кольца Ли $NC_n(K)$ при $n \geq 5$ тождественен по модулю $T_{2,-2} + L_n$, с точностью до умножения на стандартные автоморфизмы.*

Доказательство. Пусть ϕ - автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ ($n \geq 5$). Тогда, в силу характеристичности, по лемме 1.4.2, идеала $T_{2,-2}$, получаем, что ϕ индуцирует автоморфизм на факторкольце $NC_n(K)/T_{2,-2} \simeq NA_n(K) \simeq NT(n+1, K)$.

С учетом характеристичности идеала $T_{1,-1}$ и известного описания $Aut\ NA_n(K)$ [8, Теорема 1], получаем тождественность ϕ на Ke_{nn-1} (аналогично, на $Ke_{iv}, v < i < n$) по модулю характеристического идеала $T_{2,-2} + T_{n-2,-1}$ (соответственно, $T_{2,-2} + L_n$), с точностью до умножения на стандартный автоморфизм (произведение диагонального, индуцированного кольцевого и внутреннего автоморфизмов). Поэтому для любых $x, y \in K$ и подходящих $y', y'' \in K$ получаем

$$0 = [xe_{21}, ye_{nn-1}]^\phi = [(xe_{21})^\phi, (ye_{nn-1})^\phi] = xy'e_{n-2,-2} +$$

$$+ xy''e_{n-1,-2} \mod T_{n,-1},$$

то есть $(Ke_{nn-1})^\phi \subset T_{2,-2} + L_n$. Таким образом, лемма доказана. $\square$

Лемма 1.4.4. *Автоморфизм* ϕ *кольца Ли* $NC_n(K)$, $n \geq 5$, *тождественный по модулю* $T_{2,-2} + L_n$, *с точностью до умножения на внутренний автоморфизм, действует на множествах* Ke_{ii-1}, $2 \leq i \leq n-3$ *как центральный автоморфизм. Кроме того,*

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-2,-n+2} + Ke_{n-2,-n+3},$$

$$(xe_{n-2n-3})^{\phi} \in xe_{n-2n-3} + T_{n,-n+2} + Ke_{n-2,-n+2},$$

$$(xe_{n-1n-2})^{\phi} \in xe_{n-1n-2} + Ke_{n-1,-n+1} + T_{n,-n+3}.$$

Доказательство. Исследуем образы

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = ||x_{uv}^{(i)}||, \ 1 < i \leq n, \ x \in K.$$

По лемме 1.3.1, с точностью до умножения ϕ на сопряжение элементом из $T_{2,-2} + L_{n-1}$, можно считать выполненными равенства:

$$1_{i,-m}^{(i)} = 0, \ 1 \leq m < i \leq n; \quad 1_{n,-i}^{(i)} = 0, \ 1 \leq i < n.$$

Учитывая перестановочность образа $||x_{uv}^{(i)}||$ и e_{j+1j}^{ϕ} $(1 \leq i < j < n)$, получаем, что ненулевые элементы матрицы $||x_{uv}^{(i)}||$ лежат лишь в i -той и n - той строках.

Когда $i \leq n-3$, имеем $x_{n,-m}^{(i)} = 0$ при всех $m \neq i, n, n-1$, поскольку элемент $(xe_{ii-1})^{\phi}$ перестановочен с элементами e_{n-1m}^{ϕ} $(1 \leq m \leq n-2, \ m \neq i)$.

Из перестановочности xe_{n-2n-3} с элементами e_{n-1m} $(m = 1, 2, ..., n-3)$ получаем, что $x_{n,-m}^{(i)} = 0$ при $m \neq i, n, n-1, n-2$. Аналогично перестановочность xe_{n-1n-2} с элементами e_{ii-1} $(2 \leq i \leq n-3)$

дает $x^{(n-1)}_{n,-s} = 0, \;\; 0 < s < n-3$. Перестановочность xe_{nn-1} с элементами e_{ii-1} $(2 \le i \le n-2)$ дает включение

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-2,-n+2} + Ke_{n-2,-n+3}.$$

Далее, при $1 < i \le n-2, \; x, y \in K$ находим произведение

$$[(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] =$$

$$= yxe_{i+1i-1} + \sum_{m=2}^{i-1} x^{(i)}_{i,-m} ye_{i+1,-m} \pm x^{(i)}_{n,-i} ye_{n,-i-1} \pm$$

$$\pm (x^{(i)}_{i,-i} y - y^{(i+1)}_{i+1,-i+1} x) e_{i+1,-i}.$$

Его $(i+1, m)$ - координата равна $yx^{(i)}_{im}$ $(-i < m < 0)$, а $(n, -i-1)$ - координата равна $x^{(i)}_{n,-i} y$. Пользуясь симметричностью по $x, y \in K$, получаем равенство $yx^{(i)}_{im} = xy^{(i)}_{im}$. Из него подстановкой $x = 1$ получаем $y^{(i)}_{im} = 0$ и, аналогично, $y^{(i)}_{n,-i} = 0$ при всех $y \in K$. Аналогично симметричность произведения $[(ye_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}]$ относительно $x, y \in K$ дает равенства $x^{(n-1)}_{n-1,-s} = 0$ при $s < n-1$.

Далее находим, при определенном выборе знаков $\pm$, следующие равенства

$$(yxe_{i+1i-1})^{\phi} = [(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = yxe_{i+1i-1} \pm yx^{(i)}_{i,-i} e_{i+1,-i},$$

$$(yxe_{i+2,i})^{\phi} = [(ye_{i+2,i+1})^{\phi}, (xe_{i+1i})^{\phi}] = yxe_{i+2,i} \pm yx^{(i)}_{i,-i} e_{i+2,-i-1},$$

$$0 = [(abe_{i+2,i})^{\phi}, (yxe_{i+1,i-1})^{\phi}] = \pm abx^{(i)}_{i,-i} ye_{i+2,-i-1},$$

откуда $x^{(i)}_{i,-i} = 0$ при $2 \le i \le n-3$. Используя ϕ-инвариантность перестановочности xe_{ii-1} $(2 \le i \le n-3)$ с элементом e_{nn-1}, получаем также $x^{(i)}_{n,-n+1} \in \mathcal{A}_2$.

По доказанному получаем, ϕ действует тождественно на множествах Ke_{ii-1} при $2 \leq i \leq n-3$, с точностью до умножения на внутренний и центральный автоморфизмы, а для случаев $i = n-2, n-1, n$ имеем:

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-2,-n+2} + Ke_{n-2,-n+3},$$

$$(xe_{n-2n-3})^{\phi} \in xe_{n-2n-3} + T_{n,-n+2} + Ke_{n-2,-n+2},$$

$$(xe_{n-1n-2})^{\phi} \in xe_{n-1n-2} + Ke_{n-1,-n+1} + T_{n,-n+3}.$$

Лемма доказана. $\square$

Подгруппу гиперцентральных автоморфизмов, порожденных автоморфизмами (1.6)-(1.12), обозначим через $V(C_n)$.

Лемма 1.4.5. *Пусть ϕ - автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$, $n \geq 5$, удовлетворяющий утверждениям леммы 1.4.4. Тогда, с точностью до умножения на центральный, внутренний автоморфизмы и автоморфизм из $V(C_n)$, ϕ тождественен на элементах из Ke_{ii-1} при $2 \leq i \leq n$.*

Доказательство. В силу выбора ϕ, для любых $x, y, z \in K$ существуют $\alpha_i, \beta_j, \gamma_m \in End(K^+)$ такие, что по модулю $T_{n,-n}$ выполняются равенства

$$(xe_{n-2n-3})^{\phi} = xe_{n-2n-3} + x^{\alpha_1}e_{n,-n+1} + x^{\alpha_2}e_{n,-n+2} + x^{\alpha_3}e_{n-2,-n+2},$$

$$(ye_{n-1n-2})^{\phi} = ye_{n-1n-2} + y^{\beta_1}e_{n,-n+2} + y^{\beta_2}e_{n-1,-n+1} + y^{\beta_3}e_{n,-n+3}$$

$$+y^{\beta_4}e_{n,-n+1},$$

$$(ze_{nn-1})^{\phi} = ze_{nn-1} + z^{\gamma_1}e_{n,-n+1} + z^{\gamma_2}e_{n,-n+2} + z^{\gamma_3}e_{n-1,-n+1}+$$

$$+z^{\gamma_4}e_{n-1,-n+2} + z^{\gamma_5}e_{n-2,-n+2} + z^{\gamma_6}e_{n-2,-n+3}.$$

Для произвольного $x \in K$ по модулю $T_{n,-n}$ получаем соотношения

$$0 = [(xe_{n-1n-2})^{\phi}, e^{\phi}_{n-1n-2}] = \pm(x1^{\beta_1} - x^{\beta_1})e_{n,-n+1},$$

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e^{\phi}_{nn-1}] = \pm 2(x1^{\gamma_1} - x^{\gamma_1})e_{n,-n} \pm (x1^{\gamma_3} - x^{\gamma_3})e_{n,-n+1}$$

$$\pm(x1^{\gamma_4} - x^{\gamma_4})e_{n,-n+2}.$$

Отсюда, при некотором $b \in \mathcal{A}_2$, получаем

$$x^{\gamma_1} = 1^{\gamma_1}x + b,\ x^{\beta_1} = 1^{\beta_1}x,\ x^{\gamma_3} = 1^{\gamma_3}x,\ x^{\gamma_4} = 1^{\gamma_4}x \quad (x \in K). \qquad (1.13)$$

Вычислим ϕ – образы элементов xye_{n-1n-3} и zye_{nn-2}.

$$(xye_{n-1n-3})^{\phi} = [(ye_{n-1n-2})^{\phi}, (xe_{n-2n-3})^{\phi}] = xye_{n-1n-3} - xy^{\beta_3}e_{n,-n+2}+$$

$$x^{\alpha_2}ye_{n,-n+1} + yx^{\alpha_3}e_{n-1,-n+2},$$

$$(zye_{nn-2})^{\phi} = [(ze_{nn-1})^{\phi}, (ye_{n-1n-2})^{\phi}] = zye_{nn-2} + (zy^{\beta_2} - yz^{\gamma_2})e_{n,-n+1}$$

$$-2yz^{\gamma_4}e_{n-1,-n+1} - yz^{\gamma_5}e_{n-1,-n+2} + 2zy^{\beta_4}e_{n,-n} - z^{\gamma_6}ye_{n-1,-n+3}.$$

Пользуясь их инвариантностью при изменениях $x, y \in K$, сохраняющих произведение xy, получаем при некотором $b \in \mathcal{A}_2$

$$x^{\beta_4} = x1^{\beta_4} + b,\ x^{\alpha_2} = 1^{\alpha_2}x,\ x^{\alpha_3} = 1^{\alpha_3}x,\ x^{\beta_3} = 1^{\beta_3}x, \qquad (1.14)$$

$$x^{\beta_2} = 1^{\beta_2}x,\ x^{\gamma_2} = 1^{\gamma_2}x,\ x^{\gamma_5} = 1^{\gamma_5}x,\ x^{\gamma_6} = 1^{\gamma_6}x.$$

Таким образом, умножением ϕ на корневые автоморфизмы и центральные автоморфизмы получаем $\alpha_2 = \beta_4 = 0$.

Произведение $[(ze_{nn-1})^{\phi}, (xye_{nn-2})^{\phi}]$ равно нулю. Его $(n,-n)$-координата при любых $x, y, z \in K$ равна

$$2(xzy^{\beta_2} - zyx^{\gamma_2} - xyz^{\gamma_2}) = 0.$$

Подстановки $x = z = 1$ и $z = y = 1$ дают включения

$$y^{\beta_2} \in \mathcal{A}_2 + 2 \cdot y \cdot 1^{\gamma_2}, \quad x^{\gamma_2} \in \mathcal{A}_2 + x(1^{\beta_2} - 1^{\gamma_2}),$$

которые показывают, что с точностью до умножения ϕ на корневой автоморфизм $(x_r(t),\ r = p_{n-1,-n+2})$ и автоморфизм (1.12) верны равенства $\beta_2 = \gamma_2 = 0$.

С другой стороны, соотношения

$0 = [(xe_{n-2n-3})^{\phi}, (ye_{nn-1})^{\phi}] = \pm 2x^{\alpha_1}ye_{n,-n} \pm 2xy^{\gamma_6}e_{n-2,-n+2}$,

$0 = [(xye_{nn-2})^{\phi}, (ze_{n-1n-3})^{\phi}] = \pm 2xyz^{\beta_3}e_{n,-n} \pm xyz^{\alpha_3}e_{n,-n+1}$,

$0 = [(xe_{n-1n-2})^{\phi}, (yze_{nn-2})^{\phi}] = \pm 2yzx^{\beta_1}e_{n,-n} \pm 2xyz^{\gamma_5}e_{n-1,-n+1}$.
дают ограничения

$$2K^{\alpha_1} = 0,\ 2K^{\beta_1} = 0,\ 2K^{\beta_3} = 0,\ 2K^{\gamma_5} = 0,\ 2K^{\gamma_6} = 0 \qquad (1.15)$$

и условие $\alpha_3 = 0$. Вместе с (1.13), (1.14) ограничения (1.15) показывают, что умножением ϕ на гиперцентральные автоморфизмы вида (1.10), (1.11), (1.8) мы можем добиться условий $\beta_1 = \beta_3 = \gamma_6 = 0$. Умножая ϕ на центральный автоморфизм, получаем $\alpha_1 = 0$.

В силу (1.13), (1.14) и соотношения

$$0 = [(e_{nn-1})^{\phi}, (e_{nn-2})^{\phi}] = (-2 \cdot 1^{\gamma_4} - 1^{\gamma_4})e_{n,-n+1} = -3 \cdot 1^{\gamma_4}e_{n,-n+1},$$

получаем $1^{\gamma_4} \in \mathcal{A}_3$, то есть $\gamma_4 = 0$, с точностью до умножения ϕ на автоморфизм (1.7).

С учетом $(1.13), (1.14), (1.15)$, с точностью до умножения ϕ на автоморфизмы (1.6), (1.9), справедливы условия $\gamma_3 = \gamma_5 = 0$. Умножая ϕ на произведение корневого и центрального автоморфизмов, получаем равенство $\gamma_1 = 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.4.6. *Пусть ϕ - автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$, $n \geq 5$, тождественный на Ke_{ii-1} $(2 \leq i \leq n)$. Тогда ϕ тождественен на $Ke_{i,-i}$ при $1 \leq i \leq n$, с точностью до умножения ϕ на стандартный автоморфизм.*

Доказательство. Из характеристичности идеалов $T_{1,-i}$ и перестановочности при $s \neq -i$ элементов $e_{i,-i}$ и e_{s+1s} вытекают включения

$$(xe_{1,-1})^{\phi} \in xe_{1,-1} + Ke_{n,-1} + Z_1, \tag{1.16}$$

$$(xe_{i,-i})^{\phi} \in Ke_{i,-i} + Ke_{n,-i} + Z_1 \ \ (i = 2, ..., n-1).$$

Эти включения и характеристичность идеала $T_{1,-1}$ дают:

$$(ye_{1,-1})^{\phi} = ye_{1,-1} + y^{\lambda}e_{n,-1} \mod Z_1, \quad \lambda \in End(K^+).$$

Используя абелевость идеала $T_{2,-2}$, находим произведение

$$[(ze_{21})^{\phi}, (ye_{1,-1})^{\phi}] = zye_{2,-1} + y^{\lambda}ze_{n,-1}.$$

Симметричность этого произведения, относительно y, z, дает $y^{\lambda_1} = 1^{\lambda_1}y$ для всякого $y \in K$. Поэтому ϕ действует тождественно на $Ke_{1,-1}$, с точностью до умножения на корневой автоморфизм.

В силу (1.16), существуют $\lambda_i, \delta_i \in End(K^+)$ такие, что по модулю центра выполняются равенства

$$(xe_{i,-i})^{\phi} = x^{\delta_i}e_{i,-i} + x^{\lambda_i}e_{n,-i}, \quad (2 \leq i \leq n-1, \ x \in K).$$

Для них получаем

$$(xe_{i+1,-i})^{\phi} = [(e_{i+1i})^{\phi}, (xe_{i,-i})^{\phi}] = x^{\delta_i}e_{i+1,-i}+x^{\lambda_i}e_{n,-i-1}\ (2 \le i \le n-2),$$

$$(xe_{n,-n+1})^{\phi} = [(e_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,-n+1})^{\phi}] = x^{\delta_i}e_{n,-n+1} + 2x^{\lambda_i}e_{n,-n}.$$

С другой стороны,

$$(xe_{i+1,-i})^{\phi} = [(xe_{ii-1})^{\phi}, (e_{i+1,-i+1})^{\phi}].$$

По условию леммы, ϕ тождественен на элементах $xe_{ii-1}, e_{i+1,-i+1}$. Отсюда $(xe_{i+1,-i})^{\phi} = xe_{i+1,-i}$. Как следствие, с точностью до умножения ϕ на стандартный автоморфизм, $\lambda_i = 0,\ \delta_i = 1\ (2 \le i \le n)$. Это завершает доказательство леммы. □

Окончание доказательства теоремы 1.4.1. По лемме 1.4.5, ϕ – тождественен на элементах из Ke_{ii-1} $(2 \le i \le n)$, с точностью до умножения на автоморфизмы из $V(C_n)$ и стандартные автоморфизмы. Тождественность ϕ на элементах из $Ke_{i,-i}$ $(1 \le i \le n)$ сейчас следует из леммы 1.4.6.

Так как кольцо Ли $NC_n(K)$ порождается (1.5), получаем разложимость ϕ в произведение стандартного автоморфизма и гиперцентрального автоморфизма из $V(C_n)$. Теорема доказана. □

Теорема 1.4.1 опубликована в [34, § 2] и [33].

Глава 2. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов

В § 2.1 показано, что функция наивысшей высоты нестандартных гиперцентральных автоморфизмов нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов B_n и D_n при всех n достигает ступени нильпотентности, в отличие от типов A_n и C_n.

К главным результатам главы 2 относятся теоремы 2.1.2 и 2.2.1, завершающие для классических типов решение вопроса **(Б)** и, как следствие, вопроса **(А)**.

2.1 Гиперцентральные автоморфизмы

Отметим, что гиперцентральный автоморфизм относится к стандартным, только если он является центральным автоморфизмом.

Как показывают уже найденные описания автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ для типа A_n ранее [8] и для типа C_n в § 1.4, случаи малых рангов, как правило, выпадают из общей схемы описания автоморфизмов. Для этих типов наивысшая высота гиперцентральных автоморфизмов достигает 3 при $n > 3$ и 5 при $n > 4$, соответственно. Строение подгруппы V автоморфизмов, порожденной нестандартными гиперцентральными автоморфизмами, выявляется единообразно при указанных ограничениях на ранг n.

Для исключительных малых рангов n могут появляться нестандартные автоморфизмы того же вида, но не гиперцентральные. Существенно может отличаться и строение V.

Проиллюстрируем на лиевой алгебре $NB_2(K) \simeq NC_2(K)$ возможность $V = 1$. Базу алгебры $NB_2(K)$ дают e_a, e_b, e_{a+b} и e_{2a+b}, где $\{a, b, a+b, 2a+b\}$ – положительная система корней Φ^+.

При $2K = 0$ центр Z алгебры Ли $NB_2(K)$ равен $Ke_{2a+b} + Ke_{a+b}$. Поэтому ее произвольный автоморфизм ϕ однозначно определяет матрицу $A \in GL(2, K)$ такую, что выполняется равенство столбцов

$$(e_a^\phi, e_b^\phi)^T = A(e_a, e_b)^T \mod Z, \quad Z = Ke_{2a+b} + Ke_{a+b}.$$

С другой стороны, легко проверяется по лемме 1.2.1, что любой матрице $A \in SL(2, K)$ однозначно соответствует автоморфизм $\widetilde{A}$ алгебры $NB_2(K)$, тождественный на элементах e_{2a+b}, e_{a+b} базиса и переводящий столбец $(e_a, e_b)^T$ в $A(e_a, e_b)^T$.

С учетом порождаемости группы $GL(2, K)$ подгруппой $SL(2, K)$ и диагональными матрицами, доказано

Предложение 2.1.1. *Если $2K = 0$, то группу автоморфизмов алгебры $NB_2(K)$ порождают $\widetilde{SL}(2, K)$, диагональные и центральные автоморфизмы.*

Выделим гиперцентральные автоморфизмы кольца Ли $NB_n(K)$, $n \geq 3$. Сопоставим в $Aut\ NB_n(K)$ каждому элементу $f \in K$ *полув-*

нутренний автоморфизм

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + f\sum_{i=1}^{n-1} a_{i0}e_{n,-i} \tag{2.1}$$

(при $f/2 \in K$ это автоморфизм $x_r(f/2)$, $r = p_{n0}$) и автоморфизм (1.2), записанный в виде

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + fa_{n-1n-2}e_{n,-n+2}. \tag{2.2}$$

Каждому элементу $t \in \mathcal{A}_2$ сопоставляем гиперцентральные высоты ≤ 5 автоморфизмы:

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + ta_{n-1n-2}e_{n,-n+3}, \tag{2.3}$$

$$\alpha \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-2,-n+3} + a_{nn-2}e_{n-1,-n+3} + a_{nn-3}e_{n-1,-n+2}), \tag{2.4}$$

$$\alpha \to \alpha + ta_{nn-1}e_{n-1,0}, \tag{2.5}$$

$$\alpha \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-2,0} + a_{nn-2}e_{n-1,0}). \tag{2.6}$$

(Соответствующие в [7] автоморфизмы группы $UB_n(K)$ имеют более жесткие ограничения на параметр t.) Следующие автоморфизмы (по лемме 1.2.1 и 1.3.1)

$$\chi_{t,d} : \alpha \to \alpha + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k,-1}(te_{k0} + de_{n,-k}) \qquad (t, d \in \mathcal{A}_2), \tag{2.7}$$

$$\zeta_{i,t} : \ \alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + t\sum_{k=i+1}^{n} a_{ki}e_{k,-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{2.8}$$

аддитивные по t и t, d, соответственно, являются гиперцентральными высоты, близкой к ступени нильпотентности. Сходный с (2.8) автоморфизм группы $UC_n(K)$ над совершенным полем K характеристики 2, изоморфной $UB_n(K)$, указан в [23]; он специфичен именно для типа B_n, принимая во внимание теорему 1.4.1 и то, что $NC_n(K) \not\simeq NB_n(K)$ (см. замечание после леммы 1.3.2).

При $2K \neq K$ к порождающим множествам Ke_{ii-1} $(1 \leq i \leq n)$ кольца Ли $NB_n(K)$ следует добавить $Ke_{2,-1}$, с учетом леммы 1.3.1 и равенства $[Ke_{20}, Ke_{10}] = 2Ke_{2,-1}$. Подгруппу в $Aut\ NB_n(K)$, изоморфную присоединенной группе в $\mathcal{A}_2$, образуют автоморфизмы

$$\delta_c^{(-1)}:\ e_{kv} \to (1{+}c)e_{kv}\ (0 < -v < k \leq n), \quad e_{kv} \to e_{kv}\ (0 \leq v < k \leq n),$$

при обратимом $1 + c \in 1 + \mathcal{A}_2$; их называем *полудиагональными.*

Далее через $V(B_n)$ обозначаем подгруппу группы $Aut\ NB_n(K)$, которую порождают автоморфизмы (2.1) – (2.7) и автоморфизмы $\zeta_{i,t}$ при $2 \leq i \leq n-2,\ t \in \mathcal{A}_2$.

К главным результатам главы 2 относится следующая теорема, которая доказывается в § 2.3.

Теорема 2.1.2. *Всякий автоморфизм кольца Ли $NB_n(K), n > 4$, есть произведение автоморфизма из $V(B_n)$, стандартного, вида $\delta_c^{(-1)}$ и автоморфизма $\zeta_{1,t}$ из (2.8).*

В § 2.2 мы опишем автоморфизмы кольца Ли $ND_n(K)$, завершив тем самым решение для классических типов вопроса **(Б)** и, как следствие, **(А)**. Ранее вопрос **(А)** об автоморфизмах алгебр Ли $N\Phi(K)$ исследовался в [17] при нулевом аннуляторе $\mathcal{A}_2$ в K элемента 2, более того, при $K = 2K$ для типов B_n, C_n и F_4.

Нильтреугольная алгебра Ли $ND_n(K)$ представляется в алгебре $NB_n(K)$ подалгеброй всех B_n^+-матриц, у которых 0-й столбец состоит из нулей, которая инвариантна относительно автоморфизмов (2.2), (2.3), (2.4) и (2.8). Их ограничения индуцируют автоморфизмы подалгебры, которые считаем автоморфизмами алгебры $ND_n(K)$ с сохранением обозначений. Они порождают подгруппу в $Aut\ ND_n(K)$, обозначаемую через $V(D_n)$.

По аналогии с $Aut\ U$ в [7] некоторые гиперцентральные автоморфизмы построены в [17] при $\mathcal{A}_2 \neq 0$.

2.2 Группа автоморфизмов кольца Ли $ND_n(K)$

Вначале выявим автоморфизмы алгебры Ли $ND_n(K)$ $(n > 4)$ с нестандартным действием по модулю централа Γ_2, не являющиеся гиперцентральными. Согласно [8, § 4],

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, K)\ :\ 2a_{11}a_{12} = 2a_{21}a_{22} = 0 \right\}$$

есть подгруппа группы $SL(2, K)$. В системах корней Φ типа D_n можно выбрать симметрию $\bar{\ }$ порядка 2 и пару простых симметричных корней r и $\bar{r}$, причем однозначно, кроме типа D_4. Как и в [8, § 4] для типа $A_3 = D_3$, любой матрице $A \in S$ соответствует автоморфизм $\widetilde{A}$ алгебры Ли $ND_n(K)$, характеризуемый действием

$$\widetilde{A}:\ \ e_r \to a_{11}e_r + a_{12}e_{\bar{r}},\ \ e_{\bar{r}} \to a_{21}e_r + a_{22}e_{\bar{r}},\ \ e_s \to e_s\ \ (s \in \Pi \setminus \{r, \bar{r}\}).$$

В представлении $ND_n(K)$ из § 1.3 он действует по правилу

$$\widetilde{A}:\ e_{2,-1} \to a_{11}e_{2,-1} + a_{12}e_{21},\ e_{21} \to a_{21}e_{2,-1} + a_{22}e_{21}, \tag{2.9}$$

$$e_{j,-1} \to a_{11}e_{j,-1} + a_{12}e_{j1}, \quad e_{j1} \to a_{21}e_{j,-1} + a_{22}e_{j1} \quad (j = 3, ..., n),$$

$$e_{j,-k} \to (1 + 2a_{12}a_{21})e_{j,-k}, \quad e_{jk} \to e_{jk} \quad (1 < k < j \leq n).$$

Для произвольной матрицы $A = ||a_{ij}|| \in S$ отображение (2.9) есть эндоморфизм K-модуля $ND_n(K)$. Легко проверить, что эндоморфизм сохраняет основные соотношения из леммы 1.2.1. Учитывая лемму 1.3.1 и равенства $\widetilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}$, эндоморфизм $\widetilde{A}$ есть автоморфизм алгебры Ли $ND_n(K)$. Очевидно, отображение $t \to \zeta_{1,t}$ $(t \in \mathcal{A}_2)$ есть изоморфизм группы $(\mathcal{A}_2, +)$ на пересечение $V(D_n) \cap \widetilde{S}$.

Ясно, что $S = SL(2, K)$ при $2K = 0$. Когда K – кольцо Z_n классов вычетов целых чисел с четным $n > 2$, нестандартный по модулю Γ_2 автоморфизм $\widetilde{A}$ получаем, например, при

$$A = \begin{pmatrix} 1 - n/2 & -n/2 \\ n/2 & 1 + n/2 \end{pmatrix} \in S \subseteq SL(2, K).$$

Замечание. Если в кольце K аннулятор элемента 2 нулевой, то характеризация пирсовых разложений в [8, Лемма 4] показывает, что любой автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$ действует по модулю $\Gamma_2 = Z_{h-2}$ как произведение диагонального и кольцевого автоморфизмов на *идемпотентный автоморфизм*, то есть $\widetilde{A}$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 - e & e \\ -e & 1 - e \end{pmatrix}$ для подходящего идемпотента $e = e^2$ кольца K.

Автоморфизмы кольца Ли $ND_n(K)$ описывает

Теорема 2.2.1. *Всякий автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$, $n \geq 5$, есть произведение стандартного автоморфизма на автоморфизм из $\widetilde{S} \cdot V(D_n)$.*

Заметим, что идеалы $T_{i,-1}$ алгебры Ли $ND_n(K)$ не инвариантны относительно графового автоморфизма. В то же время справедлива

Лемма 2.2.2. *Идеал T_{iv} кольца Ли $ND_n(K)$ $(n \geq 5)$ при $0 < |v| < i < n$, $v \neq -1$, является характеристическим.*

С помощью леммы 1.3.1 вычисляем централизаторы идеалов T_{ij}.

Лемма 2.2.3. *В кольце Ли $ND_n(K)$ справедливы формулы:*

$$C(T_{iv}) = T_{1,-v-1} \quad (0 < |v| < i < n),$$

$$C(T_{nj}) = T_{1,-j-1} + T_{nn-1} \quad (-n+1 < j < n).$$

Доказательство леммы 2.2.2. Вначале докажем характеристичность идеала T_{31}. В силу леммы 2.2.3,

$$T_{32} \subset C(\Gamma_{n+1}), \quad T_{21} \subset C(\Gamma_n),$$

и включения сохраняются при любом автоморфизме ϕ кольца Ли $ND_n(K)$. Поскольку централы $\Gamma_i = L_i$ и их централизаторы – характеристические идеалы, то $T_{32}^{\phi} \subset C(\Gamma_{n+1})$, $T_{21}^{\phi} \subset C(\Gamma_n)$. Характеристичность идеала T_{31} сейчас следует из соотношений

$$T_{31}^{\phi} = [T_{32}^{\phi}, T_{21}^{\phi}] \subset [C(\Gamma_{n+1}), C(\Gamma_n)] \subset [T_{22} + T_{nn-1}, T_{21} + T_{n2}] = T_{31}.$$

Равенства $T_{3,-2} = C(T_{31}), T_{21} = C(T_{3,-2})$ дают характеристичность идеалов $T_{3,-2}$ и T_{21}. Действуя автоморфизмом ϕ на соотношение $0 = [T_{31}, T_{32}] \mod T_{3,-2}$, получаем

$$0 = [T_{31}^{\phi}, T_{32}^{\phi}] = [T_{31}, T_{32}^{\phi}] \mod T_{3,-2}.$$

В частности, в идеале T_{32}^{ϕ} являются нулевыми $(n,3)$-проекция и поэтому (n,j)-проекции при всех $j \geq 3$. Отсюда $T_{32}^{\phi} = T_{32} \mod T_{21}$. Поскольку фактор-кольцо $ND_n(K)/T_{21}$ изоморфно $NA_{n-2}(K)$, то, в силу описания автоморфизмов из [8], идеалы T_{2j}, а также их централизаторы $T_{2,-j-1} = C(T_{2j})$ $(1 \leq j < n)$ характеристичны. Характеристичность идеала T_{ii-1} $(3 \leq i \leq n-1)$ следует сейчас из того, что он содержит характеристический идеал $T_{i+1,-i}$ и по его модулю есть максимальный абелев идеал в кольце Ли $ND_n(K)$.

Произвольный идеал T_{iv} из леммы $(0 < |v| < i < n,\ v \neq -1)$ является пересечением уже найденных характеристических идеалов и, следовательно, также характеристичен. $\square$

Пусть ϕ-произвольный автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$. Следующая лемма устанавливает ϕ-инвариантность идеалов $T_{i,-1}$ и описывает действие ϕ по модулю Γ_2.

Лемма 2.2.4. *Произвольный автоморфизм ϕ кольца Ли $ND_n(K)$ при $n > 4$ есть произведение автоморфизма, стандартного по модулю $\Gamma_2 = Z_{h-2}$, и подходящего автоморфизма $\widetilde{A}$, $A \in S$. С точностью до умножения ϕ на автоморфизмы из $\widetilde{S}$, все идеалы $T_{i,-1}$ являются ϕ-инвариантными.*

Доказательство. Пусть ϕ – произвольный автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$. Учитывая изоморфизмы $ND_n(K)/T_{21} \simeq NA_{n-2}(K) \simeq NT(n-1,K)$ и известное описание $Aut\, NA_{n-2}(K)$ [8, Теоремы 1 и 2], с точностью до умножения ϕ на стандартный автоморфизм, можем считать ϕ тождественным на множествах Ke_{ii-1} $(3 \leq i \leq n-1)$ по модулю $T_{21} + Ke_{n2}$ и на множествах Ke_{nn-1} по модулю $T_{21} + T_{n-2,2}$. В силу изоморфностей $T_{23}/T_{43} \simeq NA_3(K) \simeq NT(4,K)$ и [8, Теорема 2], существует также матрица $||a_{ij}|| \in S$ такая, что

$$(xe_{2m'})^{\phi} = x(a_{m1}e_{2,-1} + a_{m2}e_{21}) \mod T_{3,1},$$

$$x \in K,\ m = 1,2,\ 1' = -1, 2' = 1.$$

Умножением ϕ на подходящий автоморфизм из $\widetilde{S}$ добиваемся сейчас тождественности ϕ на множествах $Ke_{2m'}$ $(m = 1,2)$ по модулю T_{31} и поэтому по модулю $\Gamma_2 = Z_{h-2}$.

Пользуясь включением $T^{\phi}_{2,-1} \subset Ke_{2,-1} + T_{31}$ и равенством $T^{\phi}_{3,-1} = [T^{\phi}_{32}, T^{\phi}_{2,-1}]$, получаем ϕ-инвариантность идеала $T_{3,-1}$, а затем и всех идеалов $T_{i,-1},\ i > 2$. Учитывая, что $T_{2,-1}$ – максимальный абелев идеал, легко получаем также его ϕ-инвариантность. □

Лемма 2.2.5. *Произвольный автоморфизм ϕ кольца Ли $ND_n(K)$, $n \geq 5$, с точностью до умножения на стандартный автоморфизм и автоморфизм из $\widetilde{S}$, действует тождественно по модулю $T_{3,-1}$.*

Доказательство. Исследуем ϕ-образы порождающих множеств $Ke_{2,-1}, Ke_{ii-1}(2 \leq i \leq n)$.

Учитывая леммы 2.2.4 и 2.2.2, все идеалы $T_{ij},\ i<n$, можно считать ϕ-инвариантными и действие ϕ тождественное по модулю L_2 и, в частности, на $T_{2,-1}$ по модулю $T_{3,-1}$. Поэтому ϕ индуцирует автоморфизм фактор-кольца $ND_n(K)/T_{2,-1}\simeq NA_{n-1}(K)\simeq NT(n,K)$.

Более точно, учитывая [8, теорема 1], получаем тождественность ϕ на Ke_{nn-1} по модулю $T_{3,-1}+T_{j1}$ для $j\geq n-2$. Если $j<n$, то соотношение $[Ke^{\phi}_{2,-1}, Ke^{\phi}_{nn-1}]=0$ приводит к противоречию. Поэтому $(ye_{nn-1})^{\phi}=ye_{nn-1}+y^{\lambda}e_{n1}$ по модулю $T_{3,-1}$, где $\lambda\in End(K^+)$; с точностью до умножения ϕ на $Ke_{n-1,1}$-сопряжение, $1^{\lambda}=0$. В силу тождественности ϕ на $(n-1,-1)$-проекции идеала $T_{n-1,-1}$, получаем $(n,-n+1)$-координату $-y^{\lambda}x$ элемента

$$(yxe_{n,-1})^{\phi}=[(ye_{nn-1})^{\phi},(xe_{n-1,-1})^{\phi}].$$

Учитывая симметричность образа $(yxe_{n,-1})^{\phi}$ относительно x и y, получаем $xy^{\lambda}=x^{\lambda}y$ для любых $x,y\in K$. Отсюда $y^{\lambda}=y1^{\lambda}=0$ при любом $y\in K$ и $(Ke_{nn-1})^{\phi}\subset Ke_{nn-1}+T_{3,-1}$. Когда $i=2$ или $4\leq i\leq n-1$, перестановочность $(e_{2,-1})^{\phi}$ и $(Ke_{ii-1})^{\phi}$ дает

$$(Ke_{ii-1})^{\phi}\subset Ke_{ii-1}+T_{3,-1}.$$

Пусть в оставшемся случае $(xe_{32})^{\phi}=xe_{32}+x'e_{n1}\mod T_{3,-1}$. Тогда

$$xe_{3,-1}=[xe_{32},e_{2,-1}],\quad (xe_{3,-1})^{\phi}=xe_{3,-1}+x'e_{n,-2}\mod T_{1,-3}.$$

Равенство $e_{42}=[e_{43},e_{32}]$ дает $(e_{42})^{\phi}=e_{42}\mod T_{4,-1}$ и $[(xe_{3,-1})^{\phi},(e_{42})^{\phi}]=-x'e_{n,-4}$. Учитывая перестановочность элементов $(e_{3,-1})^{\phi}$ и e^{ϕ}_{42}, получаем $(Ke_{32})^{\phi}\subset Ke_{32}+T_{3,-1}$. □

Лемма 2.2.6. *Если автоморфизм ϕ кольца Ли $ND_n(K),\ n \geq 5$, тождественен по модулю $T_{3,-1}$, то, с точностью до умножения на внутренний автоморфизм, верны включения*

$$(xe_{2,-1})^{\phi} \in xe_{2,-1} + Z_1, \quad (xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + Ke_{i,-i+1} + Z_1$$

$$(2 \leq i \leq n-2,\ x \in K),$$

$$(xe_{n-1,n-2})^{\phi} \in xe_{n-1,n-2} + Ke_{n-1,-n+2} + T_{n,-n+3},$$

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Z_1 + Ke_{n-2,-n+3}.$$

Доказательство. Исследуем образы $(xe_{ii-1})^{\phi} = ||x_{uv}^{(i)}||,\ 2 \leq i \leq n,\ x \in K$.

Для фиксированного $i < n$, в силу характеристичности идеала T_{ii-1}, получаем равенства $x_{u,v}^{(i)} = 0$ при всех $v < u < i$ и $x \in K$. С точностью до умножения ϕ на сопряжение элементом из $T_{2,-1}$, можно считать выполненными также равенства

$$1_{i,-m}^{(i)} = 0 \ \ (1 \leq m < i-1,\ 2 \leq i \leq n); \tag{2.10}$$

$$1_{n,-i}^{(i)} = 0 \ \ (2 \leq i < n-1).$$

Учитывая перестановочность образа $||x_{uv}^{(i)}||$ и e_{j+1j}^{ϕ} $(2 \leq i < j < n)$, получаем, что ненулевые элементы матрицы $||x_{uv}^{(i)}||$ лежат лишь в i -той и n - той строках.

Когда $2 \leq i \leq n-3$, имеем $x_{n,-m}^{(i)} = 0$ при всех $m \neq i, n-1$, поскольку элемент $(xe_{ii-1})^{\phi}$ перестановочен с элементами e_{n-1m}^{ϕ} $(1 \leq m \leq n-2,\ m \neq i)$. Из перестановочности xe_{n-2n-3} с элементами e_{n-1m} $(m = 1, 2, ..., n-3)$ получаем, что $x_{n,-m}^{(i)} = 0$ при $m \neq n-1, n-$

2. Перестановочность xe_{n-1n-2} с элементами e_{ii-1} $(2 \le i \le n-3)$ дает $x^{(n-1)}_{n,-s} = 0, \quad 0 < s < n-3$. Из перестановочности xe_{nn-1} с элементами e_{ii-1} $(2 \le i \le n-2)$ и $e_{3,1}$ получаем

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-1,-n+2} + \sum_{s=3}^{n-2} Ke_{s,-s+1}.$$

При $2 \le i \le n-2,\ x, y \in K$ находим произведение

$$[(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = yxe_{i+1i-1} + \sum_{m=1}^{i-1} x^{(i)}_{i,-m} ye_{i+1,-m} \pm x^{(i)}_{n,-i} ye_{n,-i-1} \pm$$

$$\pm y^{(i+1)}_{i+1,-i+1} xe_{i+1,-i} \pm xye^{(i+1)}_{n,-i+1} e_{n,-i}.$$

Его $(i+1, m)$ - координата равна $yx^{(i)}_{im}$ $(-i < m < 0)$, а $(n, -i-1)$ - координата равна $x^{(i)}_{n,-i}y$. Пользуясь симметричностью по $x, y \in K$, приходим к равенству $yx^{(i)}_{im} = xy^{(i)}_{im}$. Подстановка $x = 1$ и соотношения (2.10) дают $y^{(i)}_{im} = 0$ при $m \ne -i+1$; аналогично, при всех $y \in K$ находим $y^{(i)}_{n,-i} = 0$. Симметричность по x и y произведения $[(ye_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}]$ приводит к равенствам $x^{(n-1)}_{n-1,-m} = 0$ при $0 < m < n-2$. Таким образом,

$$(xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + Ke_{i,-i+1} + Ke_{n,n-1} \quad (2 \le i \le n-3,\ x \in K),$$

$$(xe_{n-1,n-2})^{\phi} \in xe_{n-1,n-2} + Ke_{n-1,-n+2} + T_{n,-n+3},$$
$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-1,-n+2} + \sum_{s=3}^{n-2} Ke_{s,-s+1}.$$

Покажем, что оценку образа $(xe_{nn-1})^{\phi}$ можно улучшить. Учитывая равенства

$$e^{\phi}_{i+1,i-1} = [e^{\phi}_{i+1,i}, e^{\phi}_{ii-1}] = e_{i+1,i-1} + 1^{(i)}_{i,-i+1} e_{i+1,-i+1} \ (2 \le i \le n-3,\ n \ge 5),$$

получаем соотношения

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e_{31}^{\phi}] = x_{2,-1}^{(n)} e_{3,-2} \quad (i=2,\ n \geq 5),$$

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e_{i+1,i-1}^{\phi}] = x_{i,-i+1}^{(n)} e_{i+1,-i} + x_{i-1,-i+2}^{(n)} e_{i+1,-i+2}$$

$$(3 \leq i \leq n-3,\ n \geq 6).$$

Они дают равенства $x_{i,-i+1}^{(n)} = 0$ при $2 \leq i \leq n-3,\ n \geq 5$. Отсюда получаем включение

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Ke_{n-2,-n+3} + T_{n-1,-n+2}$$

и находим ϕ-образ e_{nn-2}:

$$(e_{nn-2})^{\phi} = [(e_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}] =$$

$$e_{nn-2} + 1_{n-1,-n+2}^{(n-1)} e_{n,-n+2} - 1_{n-2,-n+3}^{(n)} e_{n-1,-n+3}.$$

Поэтому соотношения

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{nn-2})^{\phi}] = x_{n-1,-n+2}^{(n)} e_{n,-n+1} - x_{n-2,-n+3}^{(n)} e_{n,-n+3} -$$

$$-x1_{n-2,-n+3}^{(n)} e_{n,-n+3} = x_{n-1,-n+2}^{(n)} e_{n,-n+1} - (x_{n-2,-n+3}^{(n)} + x1_{n-2,-n+3}^{(n)}) e_{n,-n+3}$$

приводят к равенствам

$$x_{n-1,-n+2}^{(n)} = 0, \quad (x_{n-2,-n+3}^{(n)} + x1_{n-2,-n+3}^{(n)}) = 0 \quad (x \in K).$$

Элемент $(xe_{nn-2})^{\phi}$ имеет $(n,-n+1)$ -координату $x_{n,-n+2}^{(n)}$, поскольку

$$[(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}] = xe_{nn-2} + 1_{n-1,-n+2}^{(n-1)} e_{n,-n+2} -$$

$$x_{n,-n+2}^{(n)} e_{n,-n+1} - x_{n-2,-n+3}^{(n)} e_{n-1,-n+3}.$$

Учитывая равенство

$$[(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}] = [(e_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}] = (xe_{nn-2})^{\phi},$$

находим $x^{(n)}_{n,-n+2} = x1^{(n)}_{n,-n+2}$. Поскольку $1^{(n)}_{n,-n+2} = 0$, то получаем $x^{(n)}_{n,-n+2} = 0$ и

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Z_1 + Ke_{n-2,-n+3} \quad (x \in K).$$

Учитывая перестановочность $xe_{2,-1}$ с элементами $e_{i,i-1}$ $(4 \leq i \leq n)$ и e_{21}, получаем включение $(xe_{2,-1})^{\phi} \in xe_{2,-1} + Z_1 + Ke_{n,-2}$. Полагая $(xe_{2,-1})^{\phi} = ||x^{(1)}_{uv}||$, с точностью до умножения ϕ на Ke_{n1}-сопряжение (т.е. корневой автоморфизм $x_r(t)$ при $r = p_{n1}$), имеем $1^{(1)}_{n,-2} = 0$. Симметричность по x, y элемента

$$(xye_{3,-1})^{\phi} = [(xe_{3,2})^{\phi}, (ye_{2,-1})^{\phi}] = xye_{3,-1} + xy^{(1)}_{n,-2}e_{n,-3} \quad (x, y \in K)$$

дает $x^{(1)}_{n,-2} = 1^{(1)}_{n,-2}x = 0$ при любом $x \in K$. Отсюда $(xe_{2,-1})^{\phi} \in xe_{2,-1} + Z_1$. $\square$

Лемма 2.2.7. *Всякий автоморфизм ϕ кольца Ли $ND_n(K)$ при $n \geq 5$, единичный по модулю $T_{3,-1}$, есть произведение внутреннего, центрального и из $V(D_n)$ автоморфизмов.*

Доказательство. Можно считать, что ϕ удовлетворяет утверждениям леммы 2.2.6. Тогда для подходящих $\alpha_j, \sigma, \gamma_1, \gamma_2 \in End(K^+)$ по модулю центра имеем:

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = xe_{ii-1} + x^{\alpha_i}e_{i,-i+1} \quad (2 \leq i \leq n-2),$$

$$(ye_{n-1,n-2})^{\phi} = ye_{n-1,n-2} + y^{\alpha_{n-1}}e_{n-1,-n+2} + y^{\gamma_1}e_{n,-n+2} + y^{\gamma_2}e_{n,-n+3},$$

$$(ze_{nn-1})^{\phi} = ze_{nn-1} + z^{\sigma}e_{n-2,-n+3} \quad (x, y, z \in K).$$

Отсюда находим:

$$(yxe_{i+1,i-1})^{\phi} = [(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = yxe_{i+1,i-1} + yx^{\alpha_i}e_{i+1,-i+1} \quad (2.11)$$

$$(2 \le i \le n-3),$$

$$(yxe_{n-1,n-3})^{\phi} = [(ye_{n-1,n-2})^{\phi}, (xe_{n-2,n-3})^{\phi}] = \quad (2.12)$$

$$= yxe_{n-2,n-3} + yx^{\alpha_{n-2}}e_{n-1,-n+3} - xy^{\gamma_2}e_{n,-n+2},$$

$$(yxe_{n,n-2})^{\phi} = [(ye_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}] = \quad (2.13)$$

$$= yxe_{n,n-2} + yx^{\alpha_{n-1}}e_{n,-n+2} - xy^{\sigma}e_{n-1,-n+3}.$$

Учитывая соотношения $(xye_{i+1,i-1})^{\phi} = (yxe_{i+1,i-1})^{\phi}$, получаем

$$yx^{\alpha_i} = y^{\alpha_i}x, \ yx^{\gamma_2} = y^{\gamma_2}x, \ yx^{\sigma} = y^{\sigma}x \quad (x, y \in K).$$

Подстановкой $y = 1$ приходим к равенствам $x^{\alpha_i} = 1^{\alpha_i}x$, $x^{\gamma_2} = 1^{\gamma_2}x$, $x^{\sigma} = 1^{\sigma}x$. Далее,

$$0 = [(ye_{n-1,n-2})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}] = (yx^{\gamma_1} - xy^{\gamma_1})e_{n,-n+1} \quad (x, y \in K).$$

Отсюда $(yx^{\gamma_1} - xy^{\gamma_1}) = 0$ и, следовательно, $x^{\gamma_1} = x1^{\gamma_1}$. Таким образом,

$$x^{\alpha_i} = 1^{\alpha_i}x, \ x^{\gamma_1} = 1^{\gamma_1}x, \ x^{\gamma_2} = 1^{\gamma_2}x, \ x^{\sigma} = 1^{\sigma}x \quad (x \in K).$$

Используя равенства (2.11), (2.12), (2.13), находим соотношения

$$0 = 0^{\phi} = [e^{\phi}_{ii-1}, e^{\phi}_{i+1,i-1}] = 2 \cdot 1^{\alpha_i}e_{i+1,-i} \qquad (2 \le i \le n-3),$$
$$0 = 0^{\phi} = [e^{\phi}_{n-2,n-3}, e^{\phi}_{n-1,n-3}] = 2 \cdot 1^{\alpha_{n-2}}e_{n-1,-n+2},$$
$$0 = 0^{\phi} = [e^{\phi}_{n-1,n-2}, e^{\phi}_{n,n-2}] = 2 \cdot 1^{\alpha_{n-1}}e_{n,-n+1},$$

показывающие, что $1^{\alpha_i} \in \mathcal{A}_2,\ 2 \leq i \leq n-1$. Из соотношения

$$0 = 0^\phi = [e^\phi_{nn-1}, e^\phi_{nn-3}] =$$

$$[e^\phi_{nn-1}, e_{nn-3} + 1^{\alpha_{n-2}} e_{n,-n+3} + 1^\sigma e_{n-1,-n+2}] = 2 \cdot 1^\sigma e_{n,-n+2},$$

следует, что $1^\sigma \in \mathcal{A}_2$. Аналогично,

$$0 = 0^\phi = [e^\phi_{n-1,n-2}, e^\phi_{n-1,n-3}] = -2 \cdot 1^{\gamma_2} e_{n,-n+1}, \quad 1^{\gamma_2} \in \mathcal{A}_2.$$

Поэтому, с точностью до умножения ϕ на автоморфизмы (2.2), (2.3), (2.4) и (2.8) из $V(D_n)$, имеем

$$\alpha_i = 0 \ \ (2 \leq i \leq n-1), \ \ \gamma_1 = \gamma_2 = \sigma = 0,$$

то есть ϕ – центральный автоморфизм. $\square$

Вместе с леммой 2.2.5 доказанная лемма завершает доказательство теоремы 2.2.1. $\square$

Из теоремы 2.2.1 сразу же вытекает

Следствие 2.2.8. *Все гиперцентральные автоморфизмы кольца Ли $ND_n(K)$ $(n \geq 5)$ лежат в $V(D_n)$. При $\mathcal{A}_2 = 0$ подгруппу $V(D_n)$ порождают автоморфизмы (2.2).*

Группа автоморфизмов кольца Ли $ND_4(K)$ описана в [7]. Пусть Φ - система корней типа D_4, q - простой корень системы Φ , неподвижный относительно всех симметрий графа Кокстера, r_1, r_2, r_3 - остальные простые корни и $s = q + r_1 + r_2 + r_3$ – предмаксимальный корень. Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать с помощью тождества Якоби так, что

$$1 = c_{q,r_i} = c_{q+r_i,r_j} = c_{q+r_i,s-r_i} = c_{s-r_i,r_i} = c_{qs} \quad (i \geq 1,\ j \leq 3,\ i \neq j).$$

Нам потребуется перманент $per\ (\beta)$ квадратной матрицы β: *его определяют по формуле, аналогичной, формуле определителя* $det\ (\beta)$*, однако, все его члены входят в* $per\ (\beta)$ *со знаком плюс.*

Оказывается, любая матрица

$$\beta = ||b_{uv}|| \in SL(3,K), \quad 2b_{mj}b_{mi} = 0,\ 1 \leq i,j,m \leq 3,\ i \neq j,$$

определяет автоморфизм алгебры $ND_4(K)$ по правилу:

$$\widehat{\beta}:\ e_{r_i} \to \sum_{m=1}^{3} b_{im}e_{r_m}, \quad e_{q+r_i+r_j} \to per \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} \\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} \\ e_{s-r_1} & e_{s-r_2} & e_{s-r_3} \end{bmatrix},$$

$$e_q \to e_q, \quad e_{q+r_i} \to \sum_{m=1}^{3} b_{im}e_{q+r_m},$$

$$e_s \to per\ (\beta)e_s, \quad e_{s+q} \to per\ (\beta)e_{s+q} \quad (i \neq j).$$

Множество всех таких матриц $\beta \in SL(3,K)$ обозначим через M.

Согласно [7, Теорема 8], справедлива

Теорема 2.2.9. *Всякий автоморфизм лиева кольца* $ND_4(K)$ *над коммутативным кольцом* K *с 1 есть произведение автоморфизма*

$$e_q \to e_q + ce_s + \sum_{m=1}^{3} d_m e_{s-r_m},\ e_{q+r_i} \to e_{q+r_i} + d_i e_s,$$

при $c, d_i \in K,\ 2d_i = 0\ (i = 1,2,3)$*, диагонального, кольцевого, внутреннего и центрального автоморфизмов на подходящий автоморфизм из* $\widehat{M}$*.*

Таким образом, задача **(Б)** для типа D_n полностью завершена.

2.3 Группа автоморфизмов кольца Ли $NB_n(K)$

В этом параграфе доказывается теорема 2.1.2, описывающая автоморфизмы кольца (и, как следствие, алгебры) $N\Phi(K)$ типа B_n.

Теорема будет вытекать из нижеследующих лемм.

Члены Z_i гиперцентрального ряда кольца $N\Phi(K)$ типа B_n вычислены в лемме 1.3.6. Используя леммы 1.3.1 и 1.3.5, мы находим, как характеристические идеалы, также централизаторы $C(Z_i)$.

Лемма 2.3.1. *В кольце Ли* $NB_n(K)$, $n \geq 3$, *имеем*

$$C(Z_{n-1}) = T_{3,-2} + T_{n1} + R_2 + Ann(\mathcal{A}_2)T_{10},$$

$$C(Z_{n-2}) = T_{11} + T_{n2} = T_{10} + T_{21} + T_{n2},$$

$$C(Z_{n-j}) = T_{1,j-1} + T_{nj} = T_{10} + T_{21} + \dots + T_{j,j-1} + T_{nj} \quad (2 \leq j \leq n-2).$$

Далее, ϕ – произвольный автоморфизм кольца Ли $NB_n(K)$.

Лемма 2.3.2. *Всякий автоморфизм* ϕ *кольца Ли* $NB_n(K)$, $n > 4$, *с точностью до умножения на кольцевой, диагональный, внутренний, вида* $\zeta_{1,t}$ *из (2.8) и* δ_c *автоморфизмы, действует тождественно по модулю* Γ_2.

Доказательство. Автоморфизм ϕ определяет эндоморфизмы σ_i, $0 \le i \le n$, аддитивной группы K^+ кольца K такие, что x^{σ_0} $(x \in K)$ – $(2,-1)$-проекция элемента $(xe_{2,-1})^{\phi}$, а x^{σ_i} при $1 \le i \le n$ есть $(i, i-1)$-проекция элемента $(xe_{i,i-1})^{\phi}$. При $3 \le j \le n-2$ выполняются равенство $K^{\sigma_j} = K$ и, следовательно, включение $\sigma_j \in Aut(K^+)$, поскольку

$$C(Z_{n-j}) = Ke_{jj-1} = (Ke_{jj-1})^{\phi} = K^{\sigma_j} e_{jj-1}$$

$$\mathrm{mod}\ C(Z_{n-j+1}) + \Gamma_2 \cap C(Z_{n-j}).$$

Произведения $V_{i,j} := [(Ke_{ii-1})^{\phi}, (Ke_{j,j-1})^{\phi}]$, по лемме 1.3.1, при $i - j \neq \pm 1$ равны нулю. Так как $V_{3,1} = 0$, то $(2,1)$-проекция в $(Ke_{10})^{\phi}$ дает нуль в произведении с $K^{\sigma_3} = K$ и равна нулю, а $(2,-1)$-проекция лежит в $2K$, поскольку ее произведение с K^{σ_3}, очевидно, совпадает по модулю $2K$ с $(3,-1)$-проекцией в $V_{3,1}$. Поэтому ϕ определяет эндоморфизмы ψ_{ij}, $'$ и $''$ из кольца $End(K^+)$, для которых по модулю Γ_2 выполняются равенства

$$(xe_{21})^{\phi} = x^{\psi_{11}} e_{21} + x^{\psi_{12}} e_{2,-1} + x' e_{10}, \quad (xe_{10})^{\phi} = x^{\sigma_1} e_{10},$$

$$(xe_{2,-1})^{\phi} = x^{\psi_{21}} e_{21} + x^{\psi_{22}} e_{2,-1} + x'' e_{10}, \qquad\qquad x \in K,$$

Матрица $\Psi(\phi) := ||\psi_{ij}||$ и соответствующая матрица $\Psi(\phi^{-1})$ для автоморфизма ϕ^{-1}, очевидно, взаимнообратны и лежат в $GL(2, End(K^+))$, откуда $\sigma_1 \in Aut\ (K^+)$. Перестановочность $(Ke_{2,-1})^{\phi}$ с $(Ke_{10})^{\phi}$ и $(Ke_{21})^{\phi}$ дает $\psi_{21} = 0$ и $\sigma_2 = \psi_{11} \in Aut(K^+)$; отсюда $''$ – нулевой эндоморфизм и $\sigma_0 = \psi_{22}$ индуцирует автоморфизм фактор-группы $K^+/(2K)$.

При $n \geq 4$ по модулю $C(Z_2) = T_{1n-3} + T_{nn-2}$ для подходящих $\mu, \mu' \in End(K^+)$ находим

$$(Ke_{n-1,n-2})^{\phi} = K^{\sigma_{n-1}} e_{n-1,n-2} + K^{\mu} e_{nn-1},$$

$$(Ke_{nn-1})^{\phi} = K^{\sigma_n} e_{nn-1} + K^{\mu'} e_{n-1,n-2}$$

Равенства $V_{n,n-2} = 0$ и $[(Ke_{n-1,n-2})^{\phi}, (Ke_{n-1,n-3})^{\phi}] = 0$ дают $\mu = \mu' = 0$. Поскольку подмножество $(Ke_{2,-1})^{\phi} \subset T_{11}+T_{n2}$ и все $(Ke_{ii-1})^{\phi}$ порождают Γ_1, то при $n > 4$ получаем $\sigma_{n-1}, \sigma_n \in Aut(K^+)$. Таким образом, все $\sigma_j \in Aut\ (K^+),\ 1 \leq j \leq n$.

Вычислив $(i+1, i-1)$-проекции элементов $[(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = (yxe_{i+1i-1})^{\phi}$, находим

$$y^{\sigma_{i+1}} x^{\sigma_i} = (yx)^{\sigma_{i+1}} \cdot 1^{\sigma_i} = 1^{\sigma_{i+1}} \cdot (yx)^{\sigma_i}, \quad x, y \in K,\ 1 \leq i < n.$$

Отсюда следуют равенства $K^{\sigma_{i+1}} \cdot 1^{\sigma_i} = 1^{\sigma_{i+1}} \cdot K^{\sigma_i} = K$, показывающие обратимость элементов 1^{σ_j}. С точностью до умножения ϕ на диагональный автоморфизм, $1^{\sigma_j} = 1$ $(1 \leq j \leq n)$. Поэтому

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i,\ \ y^{\sigma_i} x^{\sigma_i} = (yx)^{\sigma_i}\ (x, y \in K,\ \ 1 \leq i < n)$$

и, с точностью до умножения ϕ на кольцевой автоморфизм, $\sigma_j = 1$.

Из соотношений $V_{i,j} = 0,\ i - j \neq \pm 1$, следует, что нулевыми в $(Ke_{i,i-1})^{\phi}$ являются $(j+1, j)$-проекции при $1 \leq j < i-1$ и $(1,0)$-проекция при $i > 3$, а также при $i = 3$, поскольку $[[V_{43}, (Ke_{21})^{\phi}], (Ke_{32})^{\phi}] = 0$. Равенство нулю $(i-1, i-2)$-проекции элементов из $(Ke_{ii-1})^{\phi}$, $1 < i \leq n$, показывает при $i < n$ их перестановочность с $V_{i+1,i} = (Ke_{i+1i-1})^{\phi}$.

Когда $i = 2$, это означает, что выше в записи элементов $(xe_{21})^\phi$ эндоморфизм $'$ нулевой. Следовательно, при любом $x \in K$ существуют $\lambda_1, \lambda_0 \in End(K^+)$ такие, что по модулю $\Gamma_3 \cap T_{32}$ имеем

$$(xe_{21})^\phi = xe_{21} + x^{\lambda_1}e_{20} + x^{\psi_{12}}e_{2,-1}, \quad (xe_{2,-1})^\phi = x^{\sigma_0}e_{2,-1} + x^{\lambda_2}e_{20}.$$

Отсюда $(3,-1)$-проекция элемента $[(ye_{32})^\phi, (xe_{21})^\phi] = (yxe_{31})^\phi$ равна $yx^{\psi_{12}}$ и $x^{\psi_{12}} = 1^{\psi_{12}} \cdot x \ \ (x, y \in K)$. Аналогично $(3,0)$-проекция в $(yxe_{31})^\phi$ равна yx^{λ_1}, $\ x^{\lambda_1} = 1^{\lambda_1}x$ и поэтому $1^{\lambda_1} = 0$ и $\lambda_1 = 0$, с точностью до умножения ϕ на автоморфизм из $x_r(K)$ с $r = p_{10}$. Тогда $(3,-2)$-проекция произведения $[e_{31}^\phi, (Ke_{21})^\phi]$ совпадает с $2(1^{\psi_{12}})K$ и вместе с ним равна нулю, то есть $2(1^{\psi_{12}}) = 0$. С точностью до умножения ϕ на автоморфизм $\zeta_{1,t}$ из (2.8), $\psi_{12} = 0$. Так как

$$[(ye_{31})^\phi, (xe_{2,-1})^\phi] = yx^{\sigma_0}e_{3,-2} \mod T_{42},$$

$$(2xe_{2,-1})^\phi = [(xe_{20}), e_{10}]^\phi = 2xe_{2,-1} \mod T_{32},$$

то $x^{\sigma_0} = 1^{\sigma_0}x$, $\ 2x1^{\sigma_0} = 2x$, $\ 1 + t := 1^{\sigma_0}$ - обратимый элемент, $2t = 0$ и $\phi = \delta_t \mod \Gamma_2$.

Как уже доказано, $(2,-1)$-проекция в $(Ke_{i,i-1})^\phi$ является нулевой при $i = 1, 2$. Из соотношения $[(Ke_{31})^\phi, (Ke_{32})^\phi] = 0$ это легко сейчас следует для $i = 3$. Когда $3 < i \leq n$, это находим, используя соотношения $[[\cdots[[(Ke_{i,i-1})^\phi, (Ke_{i-1,i-2})^\phi], \cdots], (Ke_{21})^\phi], (Ke_{i,i-1})^\phi] = 0$. Лемма доказана. $\square$

Характеристичность идеалов T_{10} и $T_{2,-1} + \mathcal{A}_2R_1$ кольца Ли $NB_n(K)$, $\ n > 4$, устанавливает

Лемма 2.3.3. *Идеалы* T_{10} *и* $T_{2,-1}+\mathcal{A}_2R_1$ *кольца Ли* $NB_n(K)$ *при* $n>4$ *характеристичны.*

Доказательство. Учитывая лемму 2.3.2, достаточно доказать инвариантность требуемых идеалов относительно всякого автоморфизма ϕ кольца Ли $NB_n(K)$ при $n>4$ действующего тождественно по модулю Γ_2.

Идеал $C(Z_{n-2})$ характеристичен и, по лемме 2.3.1, равен $T_{10}+T_{21}+T_{n2}$. Соотношения $[(Ke_{10})^\phi,(Ke_{ii-1})^\phi]=0,\ 3\le i\le n$, дают включения $(Ke_{10})^\phi\subset T_{10}+T_{n2}$. Аналогично, $(Ke_{2,-1})^\phi\subset T_{10}+T_{n2}$. Включение $T_{10}^\phi\subset T_{10}+T_{n2}$ и ϕ-инвариантность идеала $T_{10}+\Gamma_{n-2}$ получаем сейчас, используя найденные включения и соотношения

$$T_{10}=[T^{(-1)},L_1]+Ke_{2,-1}+Ke_{10}+R_2,$$

$$T^{(-1)}:=Ke_{2,-1}+Ke_{3,-1}+...+Ke_{n,-1},$$

$$Ke_{i0}=[Ke_{i1},e_{10}]\ \ (2\le i\le n),\quad Ke_{i,-1}=[Ke_{i2},e_{2,-1}]\ \ (3\le i\le n),$$

$$(T_{10}+\Gamma_{n-2})^\phi\subset T_{10}+T_{n2}+\Gamma_{n-2}=T_{10}+\Gamma_{n-2}.$$

Учитывая лемму 2.3.2, идеал $T_{10}+\Gamma_{n-2}$ даже характеристичен. Характеристичность идеалов T_{10} и $T_{2,-1}+\mathcal{A}_2R_1$ сейчас показывают равенства

$$[T_{10}+\Gamma_{n-2},L_1]=2Ke_{2,-1}+R_2+T_{3,-1}+T_{n1},$$

$$F:=[[T_{10}+\Gamma_{n-2},L_1],L_1]=2Ke_{2,-1}+2Ke_{3,-1}+Ke_{3,-2}+T_{4,-1}+R_3,$$

$$C(F)=T_{2,-1}+\mathcal{A}_2R_1,\quad C(T_{2,-1}+\mathcal{A}_2R_1)=T_{10}.$$

□

Следующие леммы 2.3.4, 2.3.5 и 2.3.6 описывают действие автоморфизма ϕ на порождающих (1.5) кольца Ли $NB_n(K)$ при $n \geq 5$. Через Q обозначим подгруппу автоморфизмов порождаемых автоморфизмами (2.5), (2.6) и (2.7).

Лемма 2.3.4. *Пусть ϕ – автоморфизм кольца Ли $NB_n(K)$, $n > 4$, действующий тождественно по модулю Γ_2. Тогда, с точностью до его умножения на стандартный и из Q автоморфизмы, $T_{2,-1}^{\phi} = T_{2,-1}$ и ϕ действует на множествах Ke_{ii-1} $(1 \leq i \leq n)$ тождественно по модулю $T_{2,-1}$. Кроме того,*

$$(xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + T_{i,-1} \quad (2 < i < n).$$

Доказательство. По лемме 2.3.3 имеем ϕ-инвариантность идеала T_{10}, следовательно, ϕ индуцирует автоморфизм фактор-кольца $NB_n(K)/T_{10} \simeq NA_{n-1}(K) \simeq NT(n,K)$. Известное описание $Aut\ NA_n(K)$ [8, Теоремы 1 и 2] и характеристичность идеала $C(Z_{n-2}) = T_{11} + T_{n2}$ дают тождественность ϕ, с точностью до умножения на диагональный, индуцированный кольцевой и внутренний автоморфизмы, на $Ke_{iv}, v < i < n$, по модулю $T_{10} + T_{n1}$ и, аналогично, на Ke_{nn-1} по модулю $T_{10} + T_{n-2,1}$.

Пользуясь ϕ-инвариантностью идеала $T_{2,-1} + \mathcal{A}_2 R_1$ и леммой 2.3.2, находим

$$xe_{2,-1}^{\phi} = xe_{2,-1} + \sum_{s=2}^{n} x^{\alpha_s} e_{s0} \mod T_{3,-1} \quad (x \in K)$$

для подходящего $\alpha_s \in Hom(K^+, \mathcal{A}_2),\ 2 \leq s \leq n$. Поэтому

$$0 = [(xe_{2,-1})^{\phi}, (e_{ii-1})^{\phi}] = \pm x^{\alpha_{i-1}} e_{i0} \mod T_{3,-1} + T_{i+1,0}$$

$$(2 \leq i \leq n,\ i \neq 3),$$

откуда $\alpha_i = 0$ при $3 \leq i \leq n-1$. Равенства $ye_{3,-1} = [ye_{2,-1}, e_{32}]$ и ϕ-инвариантность соотношения $[e_{3,-1}, e_{2,-1}]$ также дают:

$$y^{\alpha_2} = y \cdot 1^{\alpha_2}, \quad 1^{\alpha_2} \in \mathcal{A}_2 \quad (x, y \in K).$$

Отсюда $(Ke_{2,-1})^{\phi} \subset T_{2,-1}$, с точностью до умножения ϕ на центральный и $\chi_{t,0}$ вида (2.7) автоморфизмы. Из ϕ-инвариантности равенства $T_{2,-1} = Ke_{2,-1} + [[Ke_{2,-1}, L_1] + Ke_{2,-1}, L_1]$ следует, что $T_{2,-1}^{\phi} = T_{2,-1}$ и ϕ индуцирует автоморфизм фактор-кольца $NB_n(K)/T_{2,-1} \simeq NA_n(K)$.

Известное описание $Aut\ NA_n(K)$ [8, Теорема 1] и ϕ-инвариантность идеала T_{10} дают тождественность ϕ, с точностью до умножения на стандартный автоморфизм, на Ke_{nn-1} по модулю $T_{2,-1} + T_{n-2,0}$ и на $Ke_{iv},\ v < i < n$, по модулю $T_{2,-1} + T_{n0}$. Поэтому

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = xe_{ii-1} + x^{\sigma_i}e_{n0} \mod T_{2,-1}\ (1 \leq i \leq n-1), \tag{2.14}$$

$$(xe_{nn-1})^{\phi} = xe_{nn-1} + x^{\beta_1}e_{n0} + x^{\beta_2}e_{n-1,0} + x^{\beta_3}e_{n-2,0} \mod T_{2,-1}$$

для подходящих $\sigma_i, \beta_j \in End(K^+)$. Когда $3 \leq i \leq n-1$, соотношения

$$0 = [(xe_{ii-1})^{\phi}, (e_{10})^{\phi}] = 2x^{\sigma_i}e_{n,-1} \mod M,$$

$$M := T_{3,-2} + Ke_{2,-1} + ... + Ke_{n-1,-1},$$

дают $K^{\sigma_i} \subseteq \mathcal{A}_2$; с точностью до умножением ϕ на центральный автоморфизм, $\sigma_i = 0$.

Очевидно, для подходящих $u_1, u_2 \in T_{2,-1}$ также имеем

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (ye_{10})^{\phi}] =$$

$$= [xe_{nn-1} + x^{\beta_1}e_{n0} + x^{\beta_2}e_{n-1,0} + x^{\beta_3}e_{n-2,0} + u_1, ye_{10} + u_2] =$$

$$= 2yx^{\beta_2}e_{n-1,-1} + 2yx^{\beta_3}e_{n-2,-1} \mod T_{n,-1} \ \ (x, y \in K).$$

Полагая здесь $y = 1$, приходим к условиям $2K^{\beta_2} = 2K^{\beta_3} = 0$. Соотношения

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (ye_{nn-1})^{\phi}] = (xy^{\beta_2} - yx^{\beta_2})e_{n0} \mod T_{2,-1}$$

приводят к равенствам $(xy^{\beta_2} - yx^{\beta_2}) = 0$. Подстановкой $x = 1$ получаем $y^{\beta_2} = y \cdot 1^{\beta_2}$ для всех $y \in K$, так что $\beta_2 = 0$, с точностью до умножения ϕ на автоморфизм (2.5). Соотношения

$$(xye_{n,n-2})^{\phi} = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (ye_{n-1,n-2})^{\phi}] =$$

$$= xye_{n,n-2} - x^{\beta_3}ye_{n-1,0} \mod T_{2,-1},$$

$$(xye_{n,n-2})^{\phi} = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (ye_{n-1,n-2})^{\phi}] = [(ye_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}]$$

дают $x^{\beta_3} = 1^{\beta_3} \cdot x$ $(x \in K)$ и, с точностью до умножения ϕ на автоморфизм (2.6), $\beta_3 = 0$.

Далее с помощью соотношений

$$(ye_{n-1,0})^{\phi} = [(ye_{n-1,1})^{\phi}, (e_{1,0})^{\phi}] = ye_{n-1,0} \mod T_{2,-1}$$

находим при подходящих $u_1, u_2 \in T_{2,-1}$:

$$(xye_{n0})^{\phi} = [xe_{nn-1} + x^{\beta_1}e_{n0} + u_1, ye_{n-1,0} + u_2] =$$

$$= xye_{n0} + 2x^{\beta_1}ye_{n,-n+1} \mod M',$$

$$M' := Ke_{n,-n+2} + ... + Ke_{n,-1};$$

$$2x^{\beta_1}y = 2y^{\beta_1}x, \quad (y^{\beta_1}x - x^{\beta_1}y) \in \mathcal{A}_2 \ \ (x, y \in K).$$

Отсюда подстановкой $x = 1$ получаем $y^{\beta_1} = 1^{\beta_1} \cdot y + y^{\beta}$, $\beta \in Hom(K^+, \mathcal{A}_2)$. Умножение ϕ на корневой вида $x_r(t)$ $(r = p_{n-1,0})$ и центральный автоморфизмы дает $\beta_1 = 0$. Соотношения

$$0 = [(xe_{10})^{\phi}, (ye_{10})^{\phi}] = (x^{\sigma_1}y - xy^{\sigma_1})e_{n,-1}, \ (x^{\sigma_1}y - xy^{\sigma_1}) = 0 \ (x, y \in K)$$

аналогично дают условие $y^{\sigma_1} = 1^{\sigma_1}y$ и, с точностью до умножения ϕ на корневой автоморфизм вида $x_r(t)$, $r = p_{n1}$, можем считать $\sigma_1 = 0$. Аналогично, в силу соотношений

$$(ye_{n-1,0})^{\phi} = [(ye_{n-1,1})^{\phi}, (e_{1,0})^{\phi}] = ye_{n-1,0} \mod T_{2,-1},$$

$$0 = [(xe_{21})^{\phi}, (ye_{n-1,0})^{\phi}] = 2x^{\sigma_2}ye_{n,-n+1} \mod M'',$$

$$M'' := Ke_{3,-2} + Ke_{4,-2} + ... + Ke_{n,-2},$$

получаем $\sigma_2 = 0$, с точностью до умножения ϕ на центральный автоморфизм.

Таким образом, *с точностью до умножения на стандартные и из Q автоморфизмы, ϕ действует на множествах Ke_{ii-1} при $(1 \leq i \leq n)$ тождественно по модулю $T_{2,-1}$.*

Нам остается уточнить действие ϕ на Ke_{ii-1}, $2 < i < n$, по модулю $T_{i,-1}$. В $T_{2,-1}$ зафиксируем $e_{s,-k} \notin T_{i,-1}$ $(1 \leq k < s < i)$ и подалгебру T' с базой из ее матричных единиц $e_{uv} \neq e_{s,-k}$. Предполагая $k \neq s-1$, приходим к равенствам

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = xe_{ii-1} + x^{\lambda_i}e_{s,-k} + u \ (3 \leq i \leq n-1), \ (e_{k+1,k})^{\phi} = e_{k+1,k} + v$$

для подходящих $u \in T'$, $v \in T_{2,-1}$ и $\lambda_i \in End(K^+)$. Поскольку элементы $[xe_{ii-1}, v]$ и $[u, e_{k+1k}]$ имеют нулевую $(s, -k-1)$ - координату, то $\lambda_i = 0$, в силу соотношений

$$0 = [xe_{ii-1}, e_{k+1k}]^{\phi} = [xe^{\phi}_{ii-1}, e^{\phi}_{k+1k}] = [xe_{ii-1}, v] \pm x^{\lambda_i} e_{s,-k-1} + [u, e_{k+1k}].$$

При $k = s-1$ существуют $u \in T' \cap (T_{i,-1} + \sum_{j=2}^{i-1} Ke_{j,-j+1})$ и, как и выше, v, λ_i такие, что

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = xe_{ii-1} + x^{\lambda_i} e_{s,-k} + u, \quad (e_{n,s-1})^{\phi} = e_{n,s-1} + v,$$

$$0 = [xe_{ii-1}, e_{n,s-1}]^{\phi} = [xe_{ii-1}, v] \pm x^{\lambda_i} e_{n,-s} + [u, e_{n,s-1}].$$

Эти соотношения также приводят к равенствам $\lambda_i = 0$, поскольку произведения $[xe_{ii-1}, v]$ и $[u, e_{n,s-1}]$ имеют нулевую $(n,-s)$-координату. Таким образом, $(xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + T_{i,-1}$, $2 < i < n$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.3.5. *Если автоморфизм ϕ кольца Ли $NB_n(K)$ $(n \geq 5)$ удовлетворяет утверждениям леммы 2.3.4, то, с точностью до его умножения на внутренний автоморфизм,*

$$(xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + Ke_{i,-i+1} + Z_1 \quad (2 \leq i \leq n-2,\ x \in K),$$

$$(xe_{n-1,n-2})^{\phi} \in xe_{n-1,n-2} + Ke_{n-1,-n+2} + T_{n,-n+3},$$

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Z_1 + Ke_{n-2,-n+3},\ (xe_{10})^{\phi} \in xe_{10} + Ke_{n,-1} + Z_1.$$

Доказательство. Исследуем образы

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = ||x^{(i)}_{uv}||\ \ 1 \leq i \leq n,\ x \in K.$$

С точностью до умножения ϕ на сопряжение элементом из $T_{2,-1}$, имеем

$$1^{(i)}_{i,-m} = 0 \ \ (1 \leq m < i-1,\ 2 \leq i \leq n); \tag{2.15}$$

$$1^{(i)}_{n,-i} = 0 \;\; (2 \le i < n-1).$$

В силу перестановочности матрицы $||x^{(i)}_{uv}||$ с элементами e^{ϕ}_{j+1j} при $2 \le i < j < n$, ее ненулевые элементы лежат лишь в i -той и n - той строках.

Когда $2 \le i \le n-3$, элемент $(xe_{ii-1})^{\phi}$ перестановочен с элементами e^{ϕ}_{n-1m} $(1 \le m \le n-2, \; m \ne i)$, откуда $x^{(i)}_{n,-m} = 0$ при всех $m \ne i, n-1$. Перестановочность xe_{n-2n-3} с элементами e_{n-1m} $(m = 1, 2, ..., n-3)$ дает $x^{(n-2)}_{n,-m} = 0$ при $m \ne n-1, n-2$.

Аналогично, равенства $[Ke_{n-1n-2}, e_{ii-1}] = 0 \;\; (2 \le i \le n-3)$ дают $x^{(n-1)}_{n,-s} = 0, \;\; 0 < s < n-3$. Далее, при $2 \le i \le n-2$ находим $(yxe_{i+1i})^{\phi}$:

$$[(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = yxe_{i+1i-1} + \sum_{m=1}^{i-1} x^{(i)}_{i,-m} ye_{i+1,-m} \pm x^{(i)}_{n,-i} ye_{n,-i-1} \pm$$

$$\pm y^{(i+1)}_{i+1,-i+1} xe_{i+1,-i} \pm xye^{(i+1)}_{n,-i+1} e_{n,-i}.$$

Симметричность произведения по $x, y \in K$ показывает, что $yx^{(i)}_{i,-m} = xy^{(i)}_{i,-m}$ $(0 < m < i)$. С учетом (2.15) отсюда получаем $y^{(i)}_{i,-m} = 0$ при $0 < m < i-1$; аналогично, $y^{(i)}_{n,-i} = 0$. Симметричность произведения $[(ye_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}]$ по x и y приводит к равенствам $x^{(n-1)}_{n-1,-m} = 0$ при $0 < m < n-2$. Итак:

$$(xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + Ke_{i,-i+1} + Ke_{n,-n+1}, \;\;\; 2 \le i \le n-2;$$

$$(xe_{n-1,n-2})^{\phi} \in xe_{n-1,n-2} + Ke_{n-1,-n+2} + T_{n,-n+3} \;\;\;\; (x \in K).$$

Перестановочность xe_{nn-1} с элементами e_{ii-1} $(2 \le i \le n-2)$ дает включение

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-1,-n+2} + \sum_{s=2}^{n-2} Ke_{s,-s+1}.$$

Улучшим оценку образа $(xe_{nn-1})^{\phi}$. Используя соотношение

$$e^{\phi}_{i+1,i-1} = [e^{\phi}_{i+1,i}, e^{\phi}_{ii-1}] = e_{i+1,i-1} + 1^{(i)}_{i,-i+1} e_{i+1,-i+1} \quad (2 \leq i \leq n-3),$$

получаем $0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e^{\phi}_{31}] = x^{(n)}_{2,-1} e_{3,-2}$ для $n \geq 5$, а при $n \geq 6$, $3 \leq i \leq n-3$ также

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e^{\phi}_{i+1,i-1}] = x^{(n)}_{i,-i+1} e_{i+1,-i} + x^{(n)}_{i-1,-i+2} e_{i+1,-i+2}.$$

Поэтому $x^{(n)}_{i,-i+1} = 0$, $2 \leq i \leq n-3$, то есть $(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Ke_{n-2,-n+3} + T_{n-1,-n+2}$ при $n \geq 5$. Учитывая также соотношения

$$(e_{nn-2})^{\phi} = [(e_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}] =$$

$$= e_{nn-2} + 1^{(n-1)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+2} - 1^{(n)}_{n-2,-n+3} e_{n-1,-n+3},$$

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{nn-2})^{\phi}] =$$

$$= x^{(n)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+1} - (x^{(n)}_{n-2,-n+3} + x \cdot 1^{(n)}_{n-2,-n+3}) e_{n,-n+3},$$

приходим к равенствам

$$x^{(n)}_{n-1,-n+2} = 0, \quad x^{(n)}_{n-2,-n+3} + x \cdot 1^{(n)}_{n-2,-n+3} = 0 \quad (x \in K).$$

Поскольку произведения $[(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}]$ и $[(e_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}]$ равны

$$(xe_{nn-2})^{\phi} = xe_{nn-2} + x \cdot 1^{(n-1)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+2} -$$

$$- x^{(n)}_{n,-n+2} e_{n,-n+1} - x^{(n)}_{n-2,-n+3} e_{n-1,-n+3},$$

то $(n, -n+1)$ -координата элемента $(xe_{nn-2})^{\phi}$ равна $x^{(n)}_{n,-n+2}$, так что $x^{(n)}_{n,-n+2} = x \cdot 1^{(n)}_{n,-n+2}$. В силу (2.15), $x^{(n)}_{n,-n+2} = 0$ и требуемое включение для элементов $(xe_{nn-1})^{\phi}$ $(x \in K)$ доказано.

Требуемое в лемме включение для элементов $(xe_{10})^{\phi}$ получаем, используя ϕ-инвариантность соотношений $[Ke_{10}, e_{ii-1}] = 0,\ 3 \leq i \leq n$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.3.6. *Всякий автоморфизм ϕ кольца Ли $NB_n(K)$ при $n \geq 5$, с точностью до его умножения на стандартный и из $V(B_n)$ автоморфизмы, действует тождественно на порождающих множествах $Ke_{2,-1},\ Ke_{ii-1}$ $(1 \leq i \leq n)$.*

Доказательство. Учитывая лемму 2.3.5, при всех $x, y, z \in K$ по модулю центра имеем

$$(xe_{ii-1})^{\phi} = xe_{ii-1} + x^{\alpha_i} e_{i,-i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-2,$$

$$(ye_{n-1,n-2})^{\phi} = ye_{n-1,n-2} + y^{\alpha_{n-1}} e_{n-1,-n+2} + y^{\gamma_1} e_{n,-n+2} + y^{\gamma_2} e_{n,-n+3},$$

$$(ze_{nn-1})^{\phi} = ze_{nn-1} + z^{\sigma} e_{n-2,-n+3}$$

для подходящих эндоморфизмов $\alpha_i, \gamma_1, \gamma_2, \sigma$ аддитивной группы K^+ кольца K. Поэтому

$$(yxe_{i+1,i-1})^{\phi} = [(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = yxe_{i+1,i-1} + yx^{\alpha_i} e_{i+1,-i+1}$$

$$(2 \leq i \leq n-3),$$

$$(yxe_{n-1,n-3})^{\phi} = [(ye_{n-1,n-2})^{\phi}, (xe_{n-2,n-3})^{\phi}] =$$

$$= yxe_{n-2,n-3} + yx^{\alpha_{n-2}} e_{n-1,-n+3} - xy^{\gamma_2} e_{n,-n+2},$$

$$(yxe_{n,n-2})^\phi = [(ye_{nn-1})^\phi, (xe_{n-1,n-2})^\phi] =$$

$$= yxe_{n,n-2} + yx^{\alpha_{n-1}}e_{n,-n+2} - xy^\sigma e_{n-1,-n+3}.$$

В силу коммутативности основного кольца K, имеем $(xye_{i+1,i-1})^\phi = (yxe_{i+1,i-1})^\phi$, откуда $yx^{\alpha_i} = y^{\alpha_i}x,\ yx^{\gamma_2} = y^{\gamma_2}x,\ yx^\sigma = y^\sigma x$ при любых $x, y \in K$. Далее,

$$0 = 0^\phi = [(ye_{n-1,n-2})^\phi, (xe_{n-1,n-2})^\phi] = (yx^{\gamma_1} - xy^{\gamma_1})e_{n,-n+1}$$

и поэтому $(yx^{\gamma_1} - xy^{\gamma_1}) = 0$. Отсюда подстановкой $y = 1$ приходим к равенствам

$$x^{\alpha_i} = 1^{\alpha_i}x, \quad x^{\gamma_1} = 1^{\gamma_1}x, \quad x^{\gamma_2} = 1^{\gamma_2}x, \quad x^\sigma = 1^\sigma x \quad (x \in K). \qquad (2.16)$$

Найденные выше выражения элементов $(yxe_{i+1,i-1})^\phi$ дают при $x = y = 1$ соотношения

$$0 = [e^\phi_{ii-1}, e^\phi_{i+1,i-1}] = 2 \cdot 1^{\alpha_i}e_{i+1,-i}, \quad (2 \le i \le n-3),$$

$$0 = [e^\phi_{n-2,n-3}, e^\phi_{n-1,n-3}] = 2 \cdot 1^{\alpha_{n-2}}e_{n-1,-n+2},$$

$$0 = [e^\phi_{n-1,n-2}, e^\phi_{n,n-2}] = 2 \cdot 1^{\alpha_{n-1}}e_{n,-n+1},$$

доказывающие первое из включений

$$1^{\alpha_i} \in \mathcal{A}_2 \quad (2 \le i \le n-1), \quad 1^\sigma \in \mathcal{A}_2, \quad 1^{\gamma_2} \in \mathcal{A}_2. \qquad (2.17)$$

Второе включение получаем, вычислив образ $e^\phi_{nn-3} = [e^\phi_{nn-1}, e^\phi_{n-1,n-3}]$, из соотношений

$$e^\phi_{nn-3} = e_{nn-3} + 1^{\alpha_{n-2}}e_{n,-n+3} + 1^\sigma e_{n-1,-n+2},$$

$$0 = [e^\phi_{nn-1}, e^\phi_{nn-3}] = 2 \cdot 1^\sigma e_{n,-n+2}.$$

Последнее в (2.17) включение дают равенства

$$0 = [e_{n-1,n-2}^{\phi}, e_{n-1,n-3}^{\phi}] = -2 \cdot 1^{\gamma_2} e_{n,-n+1}.$$

Учитывая (2.16), (2.17), добиваемся сейчас условий $\alpha_i = 0$ $(2 \leq i \leq n-1)$, $\gamma_2 = \sigma = 0$, умножая ϕ на автоморфизмы (2.8), (2.3),(2.4). Полученный автоморфизм ϕ действует тождественно на множествах Ke_{ii-1}, $2 \leq i \leq n$, кроме случая $i = n-1$, где $(ye_{n-1,n-2})^{\phi} = ye_{n-1,n-2} + y^{\gamma_1} e_{n,-n+2}$. Умножая ϕ еще на автоморфизм (2.2) Гиббса, получим $\gamma_1 = 0$.

В силу леммы 2.3.5, имеем $(xe_{10})^{\phi} = xe_{10} + x^{\lambda} e_{n,-1} \mod Z_1$ для подходящего $\lambda \in End(K^+)$. Более точно, $x^{\lambda} = 1^{\lambda} \cdot x$, в силу симметричности по x и y произведения

$$[(ye_{21})^{\phi}, (xe_{10})^{\phi}] = (xye_{20})^{\phi} = xye_{20} + yx^{\lambda} e_{n,-2}, \quad x, y \in K.$$

Поэтому, с точностью до умножения ϕ на автоморфизм (2.1), $\lambda = 0$.

Учитывая перестановочность $xe_{2,-1}$ с элементами e_{ii-1}, $i \neq 3$, и леммы 2.3.4 и 2.3.2, получаем

$$(xe_{2,-1})^{\phi} = xe_{2,-1} + x^{\alpha} e_{n,-2} \mod Z_1,$$

где $\alpha \in End(K^+)$. Поскольку образ

$$(xye_{3,-1})^{\phi} = [(xe_{32})^{\phi}, (ye_{2,-1})^{\phi}] = xye_{3,-1} + xy^{\alpha} e_{n,-3}$$

симметричен относительно x и y, получаем

$$x^{\alpha} = x \cdot m, \quad m := 1^{\alpha} \qquad (x \in K).$$

Перестановочность $e_{2,-1}$ и $e_{3,-1}$ влечет включение $m \in \mathcal{A}_2$. Умножением на автоморфизм $\chi_{0,t}$ вида (2.7), приводим ϕ к центральному автоморфизму. Лемма доказана. $\square$

Леммы 2.3.4, 2.3.5 и 2.3.6 завершают доказательство теоремы 2.1.2. $\square$

2.4 Функция наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов

Как показывают известные описания автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа A_n и C_n, функция $\chi(\Phi, K)$ в этих случаях ограничена константой и, в частности, не зависит от ранга Φ. В частности:

$\chi(\Phi, K) = 5$, если $\mathcal{A}_2 \neq 0$ и Φ типа $C_n,\ n > 4$;

$\chi(\Phi, K) = 4$, если $\mathcal{A}_2 = 0,\ \mathcal{A}_3 \neq 0$ и Φ типа $C_n,\ n > 4$;

$\chi(\Phi, K) = 2$, если $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = 0$ и Φ типа $C_n,\ n > 4$.

В то же время, для типов B_n и D_n, функция $\chi(\Phi, K)$ при $2K \neq K$ может зависеть от лиева ранга. Более точно, верна

Теорема 2.4.1. *Функция $\chi(\Phi, K)$ наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ ограничена константой, не зависящей от ранга Φ, кроме случаев:*

(1) $\chi(\Phi, K) = n - 1$, если $\mathcal{A}_2 = 0$, $2K \neq K$ и Φ типа B_n;

(2) $\chi(\Phi, K) = h(\Phi) - 2$, *если* $\mathcal{A}_2 \neq 0,\ 2K \neq 0$ *и* Φ *типа* B_n *или* $\mathcal{A}_2 \neq 0$ *и* Φ *типа* D_n*;*

(3) $\chi(\Phi, K) = h(\Phi) - 4 = 2n - 4$, *если* $\mathcal{A}_2 \neq 0,\ 2K = 0$ *и* Φ *типа* B_n.

Доказательство. Ясно, что доказательство требуется лишь для классических типов – A_n, B_n, C_n и D_n. Для "исключительных" типов G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8 число Кокстера $h = h(\Phi)$ равное, соответственно, $6, 12, 12, 18$ и 30, [1, Таблицы V - IX]. Поэтому известная оценка $\chi(\Phi, K) < h(\Phi)$ дает здесь числовую верхнюю границу функции $\chi(\Phi, K)$.

Подалгебра $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над K (с нулями на главной диагонали и над ней).

Известно, что унитреугольная группа $UT(n, K)$ изоморфна присоединенной группе кольца $NT(n, K)$. Группы автоморфизмов присоединенной группы и ассоциированного с $NT(n, K)$ кольца Ли (их пересечение дает группу автоморфизмов кольца $NT(n, K)$) над любым ассоциативным (не обязательно коммутативным) кольцом K с единицей взаимосвязанно описаны в [8]. Высота гиперцентральных автоморфизмов здесь ≤ 4, и поэтому $\chi(A_n, K) \leq 4$, где $\chi(A_n, K)$ – значение функции $\chi(\Phi, K)$ для Φ типа A_n.

Описание автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа дает теорема 1.4.1. В этом случае высота гиперцентральных автоморфизмов ≤ 5.

Всякий гиперцентральный автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$ при $\mathcal{A}_2 = 0$ порождается, по теореме 2.2.1, центральными автоморфизмами и автоморфизмами вида (2.2) высоты 2. Если $\mathcal{A}_2 \neq 0$, то гиперцентральные автоморфизмы образуют подгруппу автоморфизмов $V(D_n)$ из теоремы 2.2.1, и поэтому здесь оценка $\chi(D_n, K) \leq h(\Phi) - 2 = 2n - 4$ неулучшаемая.

Для типа B_n $(n > 4)$ по теореме 2.1.2 аналогично получаем $\chi(B_n, K) = 2$ при $2K = K$. Если же $2K \neq K$, но $\mathcal{A}_2 = 0$, то гиперцентральные автоморфизмы наибольшей высоты $n - 1$ дают полувнутренние автомрфизмы.

По лемме 1.3.6, при $\mathcal{A}_2 \neq 0$ ступень нильпотентности кольца Ли $NB_n(K)$ также равна $h(\Phi) - 2$, если $2K \neq 0$; здесь $\chi(B_n, K) = h(\Phi) - 2 = 2n - 2$. Наконец, когда $2K = 0$, ступень нильпотентности равна $h(\Phi) - 4$ и $\chi(B_n, K) = h(\Phi) - 4 = 2n - 4$, по теореме 2.1.2.

Доказательство теоремы завершено. $\square$

Заключение

Основные результаты диссертации направлены на решение вопросов **(А)**, **(Б)** и **(Б1)**.

1. Завершено описание автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов лиева ранга >4 над произвольным ассоциативно ком-

мутативным кольцом K с единицей (вопрос **(А)**); ранее оно было известно при ограничениях вида $2K = K$ и $3K = K$.

2. Выявлена линейная зависимость наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ от лиева ранга n, когда Φ типа B_n или D_n и, соответственно, $2K \neq K$ или $\mathcal{A}_2 := Ann_K(2) \neq 0$; в остальных случаях высота ограничена константой. (Решение вопроса **(Б1)**, см. теорема 2.4.1.).

3. Описаны автоморфизмы колец Ли $N\Phi(K)$ типов B_n, C_n и D_n и завершено решение вопроса **(Б)** для классических типов лиева ранга $>$4 (см. теоремы 2.1.2, 1.4.1 и 2.2.1).

Список литературы

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. // М.: Мир, 1972.

[2] Бунина Е.И. Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами / Е.И. Бунина // Успехи математических наук. – 2007. – Т. 62, – вып. 5. – С.143–144.

[3] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами / Е. И. Бунина // Мат. сб.. – 2010. – Т. 201. – № 3. – С. 3–20.

[4] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле / А. С. Кондратьев // Успехи математических наук. – 1986. – Т. 41. – № 1 (247). – С. 57–96.

[5] Левчук В.М. Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле / В.М. Левчук // Математический форум, группы и графы.-Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. – 2011. – Т. 6. – С. 71–80.

[6] Левчук В. М. Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально нильпотентных матричных групп и колец/ В. М. Левчук, Е. В. Минакова // Докл. АН РФ. – 2009. – Т. 425. – № 2. – С. 165–168.

[7] Левчук В.М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле / В.М. Левчук // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29. – № 2. – С. 141–161. №3. – С. 316–338.

[8] Левчук В.М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов / В.М. Левчук // Сибирский матем. журнал. – 1983. – Т.24. – № 4. – С. 543–557.

[9] Мерзляков Ю.И. Автоморфизмы классических групп. // М.: Мир. 1976.

[10] Мальцев А. И. Об одном соответствии между кольцами и группами /А. И. Мальцев // Мат. сб.. – 1960. – Т. 50. – С. 257–266.

[11] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами / В. М. Петечук // Математический сборник. – 1982. – Т. 117. – № 4. – С. 534–547.

[12] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings / E. Abe // Algebra and Analysis. – 1993. – Vol. 5. – No. 2. – P.74-90.

[13] Beidar C.I. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups / C.I. Beidar , A.V. Mikhalev // Contemporary Math.. – 1992. – Vol. 131. – C. 29–35.

[14] Belegradek O. V. Model theory of unitriangular groups / O. V. Belegradek // Amer. Math. Soc. Transl.. – 1999. – Vol. 195. – No. 2. P. 1–116.

[15] Bunina E.I. Combinatorial and logical aspects of linear groups and Chevalley groups / E.I. Bunina, A.V. Mikhalev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85. – No. 1–3. – P. 57–74.

[16] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings / E.I. Bunina // J. Algebra. – 2012. – Vol. 355. – No.1. – P. 154–170.

[17] Cao Y. Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings / Y. Cao, D. Jiang, D. Wang // International Journal of Algebra and Computation. – 2007. – Vol. 17. – No. 3. – P. 527–555.

[18] Carter R. Simple groups of Lie type // New York: Wiley and Sons. 1972.

[19] Chevalley C. Sur certain groupes simples / C. Chevalley // Tohoku Math. J. – 1955. – Vol. 7. – P. 14–66.

[20] Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups / J. Gibbs // J. Algebra. – 1970. – Vol. 14. – No. 2. – P. 203–228.

[21] Hahn A. J. Homomorphisms of algebraic and classical groups: a survay / A. J. Hahn, D. G. James, B. Weisfelier // Can. Math. Soc. – 1984. – No. 4. – P. 249–296.

[22] Hurley J. F. Ideals in Chevalley algebras / J. F. Hurley // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 137. – No. 3. – P. 245–258.

[23] Levchuk V. M. Chevalley groups and their unipotent subgroups / V. M. Levchuk // Contemp. Math., AMS. – 1992. – Vol. 131. – Part 1. – P. 227–242.

[24] Rose B.I. The χ_1-categoricity of strictly upper triangular matrix rings over algebraically closed fields / B.I. Rose // J. Symbolic Logic. – 1978. – Vol. 43. – No. 2. – P. 250–259.

[25] Seligman G.B. On automorphisms of Lie algebras of classical type / G.B. Seligman // Trans.Amer. Math. Part I. – 1959. – Vol. 92.–P. 430–448. Part II. – 1960. – Vol. 94. – P. 452–481. Part III. – 1960. – Vol. 97. – P. 286–316.

[26] Stein M. R. Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings / M. R. Stein // Amer. J. Math. – 1971. – Vol. 93. – No. 4.– P. 965-1004.

[27] Videla C. R. On the model theory of the ring NT (n, R) / C. R. Videla // J. of Pure and Appl. Algebra. – 1988. – Vol. 55. – P. 289–302.

[28] Wheeler W.H. Model Theory of strictly upper triangular matrix ring / W.H. Wheeler // J. Symbolic Logic. – 1980. – Vol. 45. – P. 455–463.

[29] Li Fu-an Recent Progress on Classical and Algebraic K-Theory in China / Fu-an Li , Hong You // In book Group Theory in China (Eds. Zhe-Xian Wan and Sheng-Ming Shi). – 1996. – P. 41–56.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[30] Литаврин А. В. Автоморфизмы нильподалгебр алгебр Шевалле малых лиевых рангов / А.В. Литаврин // Алгебра и логика :

теория и приложения : тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти В. П. Шункова. Красноярск, 21–27 июля 2013 г. – Красноярск, 2013. – С. 86–87. – 0,06 п.л.

[31] Литаврин А. В. Автоморфизмы максимальной нильпотентной подалгебры алгебры Шевалле симплектического типа / А. В. Литаврин // Алгебра и приложения : труды Международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина. Нальчик, 06–11 сентября 2014 г. – Нальчик, 2014. – С. 81–82. – 0,06 п.л.

[32] Литаврин А. В. Автоморфизмы нильпотентной подалгебры NΦ(K) алгебры Шевалле / А. В. Литаврин // Мальцевские чтения : тезисы докладов международной конференции, посвященной 75-летию Ю. Л. Ершова. Новосибирск, 03–07 мая 2015 г. – Новосибирск, 2015. – С. 165. – 0,07 п.л.

[33] Литаврин А. В. Автоморфизмы нильпотентной подалгебры NΦ(K) алгебры Шевалле симплектического типа / А. В. Литаврин // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2015. – Т. 13. – С. 41–55. – 1 п.л.

[34] Левчук В. М. Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения / В. М. Левчук, **А. В. Литаврин**, Н. Д. Ходюня, В. В. Цыганков // Владикавказский математический журнал. – 2015. – Т. 17, вып. 2. – С. 37–46. – 0,87 / 0,22 п.л.

[35] Левчук В. М. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле ортогональных типов / В. М. Левчук, **А. В. Литаврин** // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. – 2016. – Т. 17, № 2. – С. 324–327. – 0,53 / 0,26 п.л.

[36] Литаврин А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов [Электронный ресурс] / А. В. Литаврин // Проспект Свободный – 2016 : электронный сборник материалов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных, посвящённой Году образования в Содружестве Независимых Государств. Красноярск, 15–25 апреля 2016 г. – Красноярск, 2016. – С. 39–41. – 0,19 п.л.

[37] Левчук В. М. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле [Электронный ресурс] / В. М. Левчук, **А. В. Литаврин** // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – Т. 13. – С. 467–477. – DOI: 10.17377/semi.2016.13.040. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf (дата обращения: 12.05.2017). – 0,92 / 0,46 п.л. (Scopus)

Наиболее употребительные обозначения

Φ – система корней евклидова пространства, Π – ее база, Φ^+ – система положительных корней;

K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей, $End(K^+)$ – кольцо эндоморфизмов аддитивной группы $K^+ := (K, +)$;

$\mathcal{A}_m$ – аннулятор $\{x \in K \mid x \cdot m = 0\}$ в K элемента $m \in K$;

$\mathcal{L}_K$ – алгебра Шевалле над K с базисом Шевалле [18, § 4.3] и умножением $[,]$;

$N\Phi(K)$ – подалгебра в $\mathcal{L}_K$, базис которой дают элементы базиса Шевалле e_r $(r \in \Phi^+)$;

$x_r(t)$ – корневой автоморфизм алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$ при $r \in \Phi,\ t \in K$;

$U(\Phi, K)$ – унипотентная подгруппа $\langle x_r(t) \mid r \in \Phi^+,\ t \in K\rangle$ группы Шевалле.