Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Горно-Алтайский государственный университет»

На правах рукописи

Казанцева Алена Алексеевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА НА ПЕРЕМЕННОЙ КОНЕЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Чуешев Виктор Васильевич

Горно-Алтайск – 2014

Содержание

Введение

Мультипликативные функции и дифференциалы Прима для специальных характеров на компактной римановой поверхности нашли приложения в уравнениях математической физики в работах П. Аппеля [15], С.П. Новикова, И.М. Кричевера [6], в теоретической физике (Р. Дик [17; 18], С. Климек [26]), а также в аналитической теории чисел в работах Х. Фаркаша, И. Кра [20] и в теории пространств Тейхмюллера в работах Л.В. Альфорса, Л. Берса [1], С.Л. Крушкаля [7] и К. Эрла [19].

В работах Ф. Прима, Г. Роста [30], Р. Ганнинга [22], Х. Фаркаша, И. Кра [20], В.В. Чуешева [12; 13], М.И. Головиной [3] начато построение основ теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Отметим, что классическая теория абелевых дифференциалов и дифференциалов Прима строилась только на фиксированной компактной римановой поверхности.

В диссертационной работе А.А. Казанцевой построены основы теории дифференциалов Прима на переменной конечной римановой поверхности и с переменными характерами. Причем используются новые средства геометрической теории функций: пространства Тейхмюллера, группы характеров, векторные расслоения из дифференциалов Прима над пространством Тейхмюллера, универсальное многообразие Якоби, расслоения целых дивизоров с голоморфными сечениями над пространством Тейхмюллера, сложная техника работы с классами дивизоров на римановой поверхности и матричные аналоги тэта-рядов Пуанкаре.

В работе также дано построение теории однозначных мероморфных функций и абелевых дифференциалов положительных порядков на римановой поверхности с конечным числом проколов, что является важной составной частью задачи о построении теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на римановых поверхностях F' типа $(g, n), g \geq 2, n \geq 1$. В сравнении с компактным случаем [9; 20], получаем следующие различия: 1) Комплексное векторное пространство голоморфных дифференциалов на компактной римановой поверхности F конечномерно, а на поверхности F' (с проколами) бесконечномерно; 2) На поверхности F нет непостоянных голоморфных функций, а на F' существуют непостоянные голоморфные функции; 3) На компактной римановой поверхности F мероморфные функции и дифференциалы имеют конечное число нулей и полюсов, а в нашем случае возможно счетное число нулей и полюсов.

Известно, что для построения теории однозначных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы положительных порядков [20], которые имеют минимальное количество полюсов: либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей F_μ. В данной работе дано полное конструктивное описание дивизоров элементарных, как абелевых дифференциалов, так и дифференциалов Прима всех родов. В классических работах не ставился вопрос о том, как даже известные элементарные абелевы дифференциалы $\tau_Q^{(m)}$, τ_{PQ} [9; 20] зависят от модулей компактной римановой поверхности. В работе А.А. Казанцевой впервые доказана голоморфная зависимость от модулей $[\mu]$ для римановой поверхности F'_μ типа (g, n).

Метод дивизоров и применение многообразий Якоби для переменной поверхности [19; 20] позволяют дать методы для развития теории, как мультипликативных дифференциалов, так и однозначных дифференциалов. Векторные расслоения были изучены в работах Н. Стинрода [10], Г. Грауэрта [21] и поэтому результаты по теории функций в данной работе естественно сформулировать в терминах векторных расслоений над пространствами Тейхмюллера.

В первой главе построены основы теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на переменной римановой поверхности типа (g, n). Построены все виды элементарных дифференциалов Прима для любых положительных порядков $q \geq 1$ и переменных характеров на переменной римановой поверхности типа (g, n), а так же мультипликативные функции и единицы на таких поверхностях. С помощью когомологического расслоения Ганнинга над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_{g,n}$ изучены два важных векторных расслоения, состоящие из мероморфных дифференциалов Прима, над произведением пространства Тейхмюллера и группы характеров римановой поверхности типа (g, n). Кроме того, в этих расслоениях найдены базисы дифференциалов Прима, которые голоморфно зависят и от модулей римановой поверхности типа (g, n), и от характеров. В частности, найдена размерность и построен базис в первой голоморфной группе когомологий де Рама для характеров на таких поверхностях.

Во второй главе изучаются классические абелевы $q-$дифференциалы на *переменной* поверхности типа (g, n) для $q \geq 1$. Методы из первой главы, примененные к дифференциалам Прима, можно успешно применять и для случая абелевых (однозначных) дифференциалов на переменных конечных римановых поверхностях. Таким образом, в главе 2 построены основы теории абелевых $q-$дифференциалов, как аналог теории дифференциалов Прима, включающие в себя: построение всех типов элементарных абелевых $q-$дифференциалов и описание двух важных векторных расслоений таких дифференциалов над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_{g,n}$. Кроме того, для важного класса гиперэллиптических поверхностей найдены явные базисы голоморфных абелевых $q-$дифференциалов и дифференциалов Прима для несущественных характеров, которые голоморфно зависят от точек ветвления (модулей) гиперэллиптических поверхностей.

В третьей главе двумя методами доказано существование мультипликативных функций и $q-$дифференциалов Прима ($q \geq 1$) для любых матричных характеров на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$, без условия регулярности функции, определяющей матричный тэта-ряд Пуанкаре, на границе круга.

Глава 1.

Дифференциалы Прима на переменной конечной римановой поверхности

В главе 1 построены основы теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на переменной римановой поверхности типа (g, n). Найдены все виды элементарных дифференциалов Прима для произвольных переменных характеров на переменной римановой поверхности типа (g, n), а так же мультипликативные функции и единицы на таких поверхностях. С помощью когомологического расслоения Ганнинга над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_{g,n}$ изучены два важных векторных расслоения, состоящих из мероморфных дифференциалов Прима, над произведением пространства Тейхмюллера и группы характеров римановой поверхности типа (g, n). Кроме того, в этих расслоениях найдены базисы дифференциалов Прима, которые голоморфно зависят и от модулей римановой поверхности типа (g, n) и от характеров.

§1.1. Предварительные сведения

Абстрактная риманова поверхность есть пара (F, Σ), состоящая из связного хаусдорфова топологического 2-многообразия F и комплексно-аналитической структуры Σ на F [7; 20].

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — компактная риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. Зафиксируем различные точки $P_1, \ldots, P_n \in F$. Пусть $F' = F \backslash \{P_1, \ldots, P_n\}$ —

поверхность типа (g,n), $n \geq 1$, $g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и униформизирующая поверхность F'_0, т. е. $F'_0 = U/\Gamma'$, которая имеет алгебраическое представление $\Gamma' = \langle A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g, C_1, \ldots, C_n : \prod\limits_{j=1}^{g}[A_j, B_j]C_1 \ldots C_n = I \rangle$, где $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ для $A, B \in \Gamma'$, а I — тождественное отображение. Здесь $A_j, B_j, j = 1, \ldots, g,$ — гиперболические, а $C_1, \ldots, C_n$ — параболические элементы [7].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F' задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F'_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F'_0, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F'_0 и норма $\|\mu\|_{L_\infty(F'_0)} < 1$. Эту структуру на F' будем обозначать через F'_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F'_0. Пусть $M(F')$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F' с топологией C^∞ сходимости на F'_0, $Diff^+(F')$ — группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F' на себя, которые оставляют неподвижными все проколы, и $Diff_0(F')$ — нормальная подгруппа в $Diff^+(F')$, состоящая из всех диффеоморфизмов, гомотопных тождественному диффеоморфизму на F'_0. Группа $Diff^+(F')$ действует на $M(F')$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in Diff^+(F')$, $\mu \in M(F')$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_{g,n}(F') = \mathbb{T}_{g,n}(F'_0)$ есть фактор-пространство $M(F')/Diff_0(F')$ [1; 7].

Так как отображение $U \to F'_0 = U/\Gamma'$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F'_0 поднимается до $\Gamma'-$дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U), \|\mu\|_\infty = esssup_{z \in U}|\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), z \in U, T \in \Gamma'$.

Если $\Gamma'-$дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbb{C}} \backslash U$, положив $\mu =$

0, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм такой, что $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(z) w_z$. Отображение $T \to T^\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ' на квазифуксову группу

$$\Gamma'_\mu = w^\mu \Gamma' (w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, \ldots, B_g^\mu, C_1^\mu, \ldots, C_n^\mu : \prod_{j=1}^{g} [A_j^\mu, B_j^\mu] C_1^\mu \ldots C_n^\mu = I \rangle.$$

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса [1] и других авторов утверждают, что: 1) $\mathbb{T}_{g,n}(F')$ является комплексным многообразием размерности $3g - 3 + n$ при $g \geq 2, n \geq 1$; 2) $\mathbb{T}_{g,n}(F')$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Psi : M(F') \to \mathbb{T}_{g,n}(F')$ будет голоморфным и, при этом, Ψ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из Γ'_μ голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ конечных римановых поверхностей F'_μ.

Два $\Gamma'-$дифференциала Бельтрами μ и ν будут конформно эквивалентными, если и только если $w^\mu T (w^\mu)^{-1} = w^\nu T (w^\nu)^{-1}, T \in \Gamma'$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ в $\pi_1(F')$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g \cup \{\gamma_1^\mu, \ldots, \gamma_n^\mu\}$ в $\pi_1(F'_\mu)$, и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g \cup \{C_1^\mu, \ldots, C_n^\mu\}$ в Γ'_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbb{T}_{g,n}$. Отсюда получаем отождествления $M(F')/Diff_0(F') = \mathbb{T}_{g,n}(F') = \mathbb{T}_{g,n}(\Gamma')$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F'_\mu; \{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g \cup \{\gamma_1^\mu, \ldots, \gamma_n^\mu\}]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ'_μ [1; 7].

В работе Л. Берса [1, с. 99] построены формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi) d\xi, \ldots, \zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi) d\xi$, $[\mu] \in \mathbb{T}_g$, $\xi \in w^\mu(U)$ такие, что для любого $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ эти формы являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на F_μ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], \ldots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис, двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ на

F_μ, причем он голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ для F_μ. Кроме того, матрица $b-$периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^{g}$ на F_μ, состоит из комплексных чисел $\pi_{jk}[\mu] = \int\limits_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)dw, \xi \in w^\mu(U)$, и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbb{C}^g$ по правилу:

$$\varphi_j(\xi) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)dw, j = 1, \ldots, g.$$

Фактор-пространство $J(F) = \mathbb{C}^g/L(F)$ называется отмеченным многообразием Якоби для $F = F_0$, где $L(F)$ — решетка над $\mathbb{Z}$, порожденная столбцами $e^{(1)}, \ldots, e^{(g)}, \pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(g)}$ матрицы (I_g, Ω). Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть якобиан $J(F_\mu)$ поверхности F_μ [19; 20].

Далее, для любого натурального числа $m > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени m на F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени m, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_m из этого расслоения в универсальное расслоение Якоби, при $m \geq 1$, ограничение которого на слои является продолжением отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $m = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu] \backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ — $g-$кратное симметрическое произведение поверхности F_μ на себя и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g - 2$ [20]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$ можно получить (для любого $m \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла s для $\Psi : M(F) \to \mathbb{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [19].

Характером ρ для F'_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F'_\mu), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором

$$(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), \ldots, \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu), \rho(\gamma_1^\mu), \ldots, \rho(\gamma_n^\mu)) \in (\mathbb{C}^*)^{2g+n}.$$

Определение 1.1.1. *Мультипликативной функцией f на F'_μ для характера ρ назовем мероморфную функцию f на $w^\mu(U)$ такую, что $f(Tz) = \rho(T)f(z), z \in w^\mu(U), T \in \Gamma'_\mu$.*

Определение 1.1.2. *$q-$дифференциалом Прима относительно фуксовой группы Γ' для ρ, т. е. $(\rho, q)-$дифференциалом, называется дифференциал $\omega(z)dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\omega(z),\ z \in U$,*
$T \in \Gamma',\ \rho : \Gamma' \to \mathbb{C}^*$.

Определение 1.1.3. *Абелевым дифференциалом первого рода называется голоморфный дифференциал. Абелевым дифференциалом второго рода называется мероморфный дифференциал, у которого все вычеты равны нулю. Абелевым дифференциалом третьего рода называется мероморфный дифференциал, который имеет хотя бы один простой полюс на F [9; 20].*

Если f_0 — мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то

$$f_0(P) = f_0(P_0) \exp \int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu,\ c_j([\mu], \rho) \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, g,\ c_j$ зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом, интегрирование от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ — сечение К. Эрла [19] над $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$. Получим, что характер ρ для f_0 имеет вид:

$$\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho),$$

$$\rho(b_k^\mu) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu], \rho)\pi_{jk}([\mu])),\ k = 1, \ldots, g.$$

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) — *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Определение 1.1.4. *Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F' = U/\Gamma'$ для ρ называется мультипликативно точным, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z), T \in \Gamma', z \in U$, т. е. f — мультипликативная функция на F' класса C^2 для ρ.*

Обозначим через $Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ для $\rho \in Hom(\Gamma'_\mu, \mathbb{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma'_\mu \to \mathbb{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), S, T \in \Gamma'_\mu$ [22].

Пусть ϕ - замкнутый дифференциал Прима на $F' = F'_0$ для ρ. Проинтегрировав его, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где $\phi = df(z), z \in U$, $f(z)$ — интеграл Прима на круге U для ϕ, который определяется с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma'$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, определено $\phi_{f,z_0} : \Gamma' \to \mathbb{C}$ отображение периодов для ϕ. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0. Если $f_1(z) = f(z) + c$ — другой интеграл Прима для ϕ, то $\phi_{f_1,z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) + c\sigma(T), T \in \Gamma'$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f,z_0} и ϕ_{f_1,z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma'$. Они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma', \rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma', \rho) = Z^1(\Gamma', \rho)/B^1(\Gamma', \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F', где $B^1(\Gamma', \rho)$ – одномерное подпространство порожденное σ,

$\sigma(T) = 1 - \rho(T), T \in \Gamma'$.

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить, так называемые, классические периоды. Для $T \in \Gamma'$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T) = \int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство

$$\phi_{z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T).$$

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Р. Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma', \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F' для ρ. Поэтому корректно определено $\mathbb{C}-$линейное отображение $p : \phi \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F' для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma', \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода с конечным числом полюсов на F'_μ для характера ρ [9; 20].

Лемма 1.1.1. *Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, то ω — мультипликативно точный дифференциал на F'_μ для ρ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это для фиксированных поверхности и характера. Классические периоды $\omega_{z_0}(\widetilde{\gamma}_1), \ldots, \omega_{z_0}(\widetilde{\gamma}_k)$ получаются при обходе по петлям $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_k$ вокруг отдельных полюсов $Q_1, \ldots, Q_k$ для дифференциала ω соответственно. Они все обращаются в нуль, так как эти периоды равны вычетам относительно полюсов второго или большего порядка для ветвей нашего многозначного дифференциала.

Если класс периодов $[\omega] = 0$, то отсюда классический период $\omega_{z_0}(T) = c\sigma(T), c \neq 0$ для любого T, где $\omega_{z_0}(T) = f(Tz_0) - f(z_0) = c(1 - \rho(T))$, а f — некоторый интеграл Прима для ω. Тогда $\widetilde{f} = (f - c)$ будет мультипликативной функцией для ρ и $\omega = d\widetilde{f} = d(f - c)$. Поэтому, периоды по Ганнингу $\widetilde{\omega}_{z_0}(a_1), \ldots, \widetilde{\omega}_{z_0}(b_g), \widetilde{\omega}_{z_0}(\gamma_1), \ldots, \widetilde{\omega}_{z_0}(\gamma_n)$ все равны нулю для некоторого представителя из класса $[\omega]$. Следовательно ω является мультипликативно точным дифференциалом для ρ на F'_μ. Лемма 1.1.1 доказана.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \ldots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, k$.

Обозначим через $r_\rho(D^{-1})$ размерность комплексного векторного пространства мультипликативных функций f кратных дивизору D^{-1} для характера ρ, и через $i_{\rho^{-1}}(D)$ – размерность комплексного векторного пространства дифференциалов Прима, кратных дивизору D для характера ρ^{-1}, соответственно на F_μ.

Теорема (Римана-Роха для характеров) [13; 20]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство*

$$r_\rho(D^{-1}) = degD - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Теорема (Абеля для характеров)[13; 20]. *Пусть D — дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1^\mu, \ldots, a_g^\mu,\ b_1^\mu, \ldots, b_g^\mu\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ — характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера $\rho \Leftrightarrow degD = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \log \rho(b_j^\mu) e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \log \rho(a_j^\mu) \pi^{(j)}[\mu] (\equiv \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu], \ldots, e^{(g)}[\mu], \pi^{(1)}[\mu], \ldots, \pi^{(g)}[\mu]$, где $\varphi[\mu] : F_\mu \to J(F_\mu)$.

Отметим, что, по теореме Л. Берса [1, с. 99], отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

Определение 1.1.5. *Точка P называется мультипликативной точ-*

кой Вейерштрасса для несущественного (существенного) характера ρ *на* F, *если для* P *существует мультипликативный не пробел* $j, 1 < j \leq g$ $(1 < j \leq g-1)$, *т. е. существует мультипликативная функция* f *для* ρ *на* F *с единственным полюсом в* P *точно порядка* $j, 1 < j \leq g$ $(1 < j \leq g-1)$ *[13].*

Теорема 1.1.1 [13]. *Для любого* $q \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$, *мультипликативные* $q-$*точки Вейерштрасса на переменной компактной римановой поверхности* F_μ *рода* $g > 1$ *локально голоморфно зависят от модулей* $[\mu]$ *компактной римановой поверхности* F_μ *и от характеров* ρ, *а пробелы в мультипликативных* $1-$*точках Вейерштрасса и веса в мультипликативных* q*-точках Вейерштрасса являются локально постоянными функциями от* $[\mu]$ *и от* ρ *со значениями в* $\mathbb{N}$.

§1.2. Когомологическое расслоение Ганнинга на конечной римановой поверхности

Обозначим через $Z^1(\Gamma', \rho)$, для $\rho \in Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)$, множество всех отображений $\phi : \Gamma' \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), S, T \in \Gamma'$ [22]. Отметим основные свойства таких отображений:

1) так как $\phi(S \cdot I) = \phi(S) + \rho(S)\phi(I)$ и $\rho(S) \neq 0$, то $\phi(I) = 0$;

2) $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как $0 = \phi(I) = \phi(SS^{-1}) = \phi(S) + \rho(S)\phi(S^{-1})$;

3) $\phi([A,B][C,D]) = \phi([A,B]) + \rho([A,B])\phi([C,D]) = \phi([A,B]) + \phi([C,D])$, так как $\rho([A,B]) = 1$;

4) $\phi([A,B]) = \sigma(B)\phi(A) - \sigma(A)\phi(B)$ для любых $A, B \in \Gamma'$, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma'$.

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma', \rho)$ единственным образом определяется упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_g), \phi(B_1), \ldots,$ $\phi(B_g), \phi(C_1), \ldots, \phi(C_n)$.

Лемма 1.2.1. *Для любого $\phi \in Z^1(\Gamma', \rho)$ верно равенство*

$$\sum_{j=1}^{g} (\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)) + \phi(C_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho(C_1 \dots C_j)\phi(C_{j+1}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $I = \prod_{j=1}^{g}[A_j, B_j]C_1 \dots C_n$ следует, что

$$0 = \phi(I) = \phi(\prod_{j=1}^{g}[A_j, B_j]) + \rho(\prod_{j=1}^{g}[A_j, B_j])\phi(C_1 \dots C_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{g}(\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)) + \phi(C_1 \dots C_n).$$

Найдем

$$\phi(C_1 \dots C_n) = \phi(C_1) + \rho(C_1)\phi(C_2 \dots C_n) = \phi(C_1) + \rho(C_1)(\phi(C_2)+$$

$$+\rho(C_2)\phi(C_3 \dots C_n)) = \phi(C_1) + \rho(C_1)\phi(C_2) + \rho(C_1C_2)\phi(C_3)+$$

$$+\rho(C_1C_2C_3)\phi(C_4) + \dots + \rho(C_1 \dots C_j)\phi(C_{j+1}) + \dots + \rho(C_1 \dots C_{n-1})\phi(C_n).$$

Лемма 1.2.1 доказана.

Голоморфный дифференциал Прима $\phi = \phi(z)dz$ $(q = 1)$ для характера ρ на F', определенный на односвязном круге U, может быть записан в виде $\phi = df(z)$, где $df(Tz) = \rho(T)df(z)$, $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T)$, $\phi(T) = \phi_{z_0,f}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$ для любого $T \in \Gamma'$, $z \in U$, $z_0 \in U$. Легко проверить, что $\phi \in Z^1(\Gamma', \rho)$.

Пусть Γ'_μ – квазифуксова группа первого рода типа (g, n), элементы которой голоморфно зависят от модулей $[\mu]$, униформизирующая переменную отмеченную конечную риманову поверхность F'_μ [7].

Лемма 1.2.2. *Голоморфное главное $Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)$-расслоение $E = \bigcup_{[\mu]} Hom(\Gamma'_\mu, \mathbb{C}^*)$ аналитически эквивалентно тривиальному расслоению $\mathbb{T}_{g,n}(F') \times Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)$ над базой $\mathbb{T}_{g,n}(F')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Глобальная тривиализация (карта) Θ сопоставляет паре $([F'_\mu];\rho_\mu) \in [F'_\mu] \times Hom(\Gamma'_\mu, \mathbb{C}^*)$ упорядоченный набор

$$\Big([F'_\mu], \rho_\mu(A_1^\mu), ..., \rho_\mu(A_g^\mu), \rho_\mu(B_1^\mu), ..., \rho_\mu(B_g^\mu),$$
$$\rho_\mu(C_1^\mu), ..., \rho_\mu(C_{n-1}^\mu)\Big) \in [F'_\mu] \times [\mathbb{C}^*]^{2g+n-1}.$$

Она задает послойную биекцию из E на $\mathbb{T}_{g,n}(F') \times [\mathbb{C}^*]^{2g+n-1}$ и определяет на E глобальную комплексную аналитическую структуру. Аналогично, отображение $\Theta_0 : ([F'_\mu];\rho) \to ([F'_\mu];\rho(A_1), \dots, \rho(B_g), \rho(C_1), \dots, \rho(C_{n-1}))$ задаёт глобальную карту на прямом произведении $\mathbb{T}_{g,n}(F') \times Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)$. Определим отображение ψ по правилу $\psi : ([F'_\mu];\rho_\mu) \to ([F'_\mu];\rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu)$, $\rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu)$, $j = 1, ..., g$, и $\rho(C_k) = \rho_\mu(C_k^\mu)$, $k = 1, \dots, n-1$. Оно будет изоморфизмом из переменного слоя $Hom(\Gamma'_\mu, \mathbb{C}^*)$ на постоянный слой $Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)$ при каждом фиксированном $[F'_\mu]$. В картах Θ и Θ_0 отображение ψ имеет вид $(id;id)$, а значит будет биголоморфным изоморфизмом из E на произведение $\mathbb{T}_{g,n}(F') \times Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)$ над базой $\mathbb{T}_{g,n}(F')$. Лемма 1.2.2 доказана.

Рассмотрим $Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ комплексное $(2g+n-1)$-мерное векторное пространство для ρ при $n \geq 1$. Пусть $B^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ — одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, порожденное элементом σ при $\rho \neq 1$. Тогда $H^1(\Gamma'_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)/B^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ — комплексное $(2g+n-2)$-мерное векторное пространство для $\rho \neq 1$, и $(2g+n-1)$-мерное пространство для $\rho \equiv 1$ [22].

В дальнейшем будем предполагать, что $\rho(\gamma_j^\mu) = 1,\ j = 1, \dots, n$.

Множество $G' = \bigcup\limits_{[\mu], \rho \neq 1} H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ будем называть когомологическим расслоением Ганнинга над базой $\mathbb{T}_{g,n} \times Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*) \backslash \{1\}$ [22]. Для G' при $\rho \neq 1$ используем изоморфизм Ганнинга [22] между комплексным векторным пространством $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ и векторным пространством $Hom_\rho([\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu], \mathbb{C})$, состоящим из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu] \to (\mathbb{C}, +)$ с условием, что

$\phi_0(STS^{-1}) = \rho(S)\phi_0(T), T \in [\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu], S \in \Gamma'_\mu$. Здесь $[\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu]$ — коммутант группы Γ'_μ. Таким образом, расслоение G' изоморфно векторному расслоению $\bigcup\limits_{[\mu],\rho\neq 1} Hom_\rho([\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu], \mathbb{C})$.

Кроме того, матрицы перехода для этого расслоения можно будет определить через $2g$ координатных окрестностей $U_j = \{\rho : \rho(A^\mu_j) \neq 1\}, U_{g+j} = \{\rho : \rho(B^\mu_j) \neq 1\}$, $j = 1, \ldots, g$, которые покрывают базу $Hom(\Gamma'_\mu, \mathbb{C}^*)\backslash\{1\}$, при условии $\rho(\gamma^\mu_j) = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Для окрестности U_1 будет $\sigma(A^\mu_1) \neq 0$. Любой элемент $\phi_0 \in Hom_\rho([\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu], \mathbb{C})$ при $\rho \in U_1$ можно задать как $\phi_0 = \phi^\mu_1|_{[\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu]}$ для $\phi^\mu_1 \in Z^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ такого, что $\phi_1(A^\mu_1) = 0$ и $\phi_1(T) = \sigma(A^\mu_1)^{-1}\phi_0([T, A^\mu_1]), T \in \Gamma'_\mu$ [22].

Теорема 1.2.1. *Когомологическое расслоение Ганнинга G' над $\mathbb{T}_{g,n}(F') \times (Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*)\backslash\{1\})$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g + n - 2$ при $n \geq 1$, $g \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $G'|_{U[\mu_0]\times U_l}$ гомеоморфно $U[\mu_0] \times U_l \times \mathbb{C}^{2g+n-2}$, где координаты на слоях задаются так, что над $U[\mu_0] \times U_l$ имеем

$\xi^l_j = \phi_0([A^\mu_{\tilde{j}}, A^\mu_l]) = \sigma(A^\mu_l)\phi^\mu_l(A^\mu_{\tilde{j}}) - \sigma(A^\mu_{\tilde{j}})\phi^\mu_l(A^\mu_l)$,

$\eta^l_j = \phi_0([B^\mu_{\tilde{j}}, A^\mu_l]) = \sigma(A^\mu_l)\phi^\mu_l(B^\mu_{\tilde{j}}) - \sigma(B^\mu_{\tilde{j}})\phi^\mu_l(A^\mu_l)$,

$\zeta^l_m = \phi_0[C^\mu_m, A^\mu_l] = \phi_l[C^\mu_m, A^\mu_l] =$

$\sigma(A^\mu_l)\phi_l(C^\mu_m) - \sigma(C^\mu_m)\phi_l(A^\mu_l) = \sigma(A^\mu_l)\phi_l(C^\mu_m)$,

а над $U[\mu_0] \times U_{g+l}$ имеем

$\xi^{g+l}_j = \phi_0([A^\mu_{\tilde{j}}, B^\mu_l])$, $\eta^{g+l}_j = \phi_0([B^\mu_{\tilde{j}}, B^\mu_l])$,

$\zeta^{g+l}_m = \phi_0[C^\mu_m, B^\mu_l] = \phi_{g+l}[C^\mu_m, B^\mu_l] = \sigma(B^\mu_l)\phi_{g+l}(C^\mu_m)$,

$\widetilde{j} = 1, \ldots, (l-1), l+1, \ldots, g$, $l = 1, \ldots, g$, $m = 1, \ldots, n$.

Над U_1 получаем соотношения:

$\xi^1_j = \phi_0([A^\mu_{j+1}, A^\mu_1]) = \phi^\mu_1([A^\mu_{j+1}, A^\mu_1]) = \sigma(A^\mu_1)\phi^\mu_1(A^\mu_{j+1})$;

$\eta^1_j = \phi_0([B^\mu_{j+1}, A^\mu_1]) = \sigma(A^\mu_1)\phi^\mu_1(B^\mu_{j+1}), j = 1, \ldots, g-1$;

$\zeta_m^1 = \phi_0[C_m^\mu, A_1^\mu] = \phi_1[C_m^\mu, A_1^\mu] = \sigma(A_1^\mu)\phi_1(C_m^\mu)$, $m = 1, \dots, n$.

Таким образом, координаты $\xi_j^1,\ \eta_j^1,\ \zeta_m^1$ слоя над фиксированным $([\mu], \rho)$ однозначно задают числа $\phi_1^\mu(A_1^\mu) = 0, \phi_1^\mu(A_2^\mu), \dots, \phi_1^\mu(A_g^\mu), \phi_1^\mu(B_1^\mu), \phi_1^\mu(B_2^\mu), \dots, \phi_1^\mu(B_g^\mu), \phi_1^\mu(C_1^\mu), \dots, \phi_1^\mu(C_n^\mu)$, а значит и весь класс когомологий $[\phi_1^\mu]$, где

$$\sum_{j=1}^{g}(\sigma(B_j^\mu)\phi(A_j^\mu) - \sigma(A_j^\mu)\phi(B_j^\mu)) + \sum_{k=1}^{n}\phi(C_k^\mu) = 0,$$

а значит

$$\phi_1^\mu(B_1^\mu) = \sigma(A_1^\mu)^{-2}\left[\sum_{j=1}^{g-1}\left(\sigma(B_{j+1}^\mu)\xi_j^1 - \sigma(A_{j+1}^\mu)\eta_j^1\right) + \zeta_1^1 + \dots + \zeta_n^1\right].$$

Аналогично поступаем для остальных окрестностей.

Координаты $\xi_j^l,\ \eta_j^l,\ \zeta_m^l$ являются линейными комбинациями от $\phi_l^\mu(A_j^\mu)$, $\phi_l^\mu(B_j^\mu),\ \phi_l^\mu(C_m^\mu)$ с голоморфными коэффициентами на $U[\mu_0] \times (U_k \cap U_l)$, так как $\phi_l^\mu|_{[\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu]} = \phi_0 = \phi_k^\mu|_{[\Gamma'_\mu, \Gamma'_\mu]}$ над $U[\mu_0] \times (U_k \cap U_l)$. Здесь ϕ_k^μ и ϕ_l^μ определяются аналогично, как ϕ_1^μ над U_1, над U_k и U_l соответственно.

Затем $\phi_k^\mu(A_j^\mu),\ \phi_k^\mu(B_j^\mu),\ \phi_k^\mu(C_m^\mu)$ — линейные комбинации от $\xi_j^k,\ \eta_j^k,\ \zeta_m^k$ с голоморфными коэффициентами на U_k. Поэтому координаты $\xi_j^l,\ \eta_j^l,\ \zeta_m^l$ будут линейными комбинациями от $\xi_j^k,\ \eta_j^k,\ \zeta_m^k$ с голоморфными коэффициентами на $U[\mu_0] \times (U_k \bigcap U_l)$. Таким образом, матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на $U[\mu_0] \times (U_k \cap U_l)$ и G' – голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{T}_{g,n} \times (Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*) \backslash \{1\}$. Теорема доказана.

Замечание 1.2.1. В случае $n = 0$ эта теорема доказана в статье Ганнинга [22] для рода $g = 2$ и в книге [13] для рода $g \geq 2$.

§1.3. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы [9; 20] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. это либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей. В этом параграфе будет найден общий вид элементарных $(\rho, q)-$дифференциалов Прима на F'_μ.

Пространство $M_1(\rho)$ состоит из дифференциалов Прима для ρ на F', которые имеют конечное число полюсов на F' и допускают мероморфное продолжение на F. Пространство $M_2(\rho)$ состоит из дифференциалов для ρ имеющих конечное число полюсов на F' и в проколах при аналитическом продолжении могут быть изолированные существенно особые точки.

Предложение 1.3.1. *Дивизор D степени $(2g-2)q$ является дивизором мероморфного (ρ, q)-дифференциала ω на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ для характера ρ при $q \geq 1$, если и только если $\varphi(D) = -2Kq + \psi(\rho)$ в $J(F)$, где K – вектор констант Римана голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей F и от выбора базисной точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_0 – абелев 1-дифференциал на F. Тогда $f = \phi/\omega_0^q$ – мультипликативная функция на F для ρ. По теореме Абеля для характеров имеем равенства:

$$\psi(\rho) = \varphi((f)) = \varphi((\phi)) - \varphi((\omega_0)^q) = \varphi(D) + 2Kq.$$

Обратно, если $\varphi(D) = -2Kq + \psi(\rho), \quad degD = (2g-2)q$, то, учитывая равенство $\varphi((\omega_0)) = -2K$, имеем $\varphi(D) = q\varphi((\omega_0)) + \psi(\rho)$. Поэтому $\varphi(D/(\omega_0)^q) = \psi(\rho)$ и по теореме Абеля существует функция f для ρ такая, что $(f) = D/(\omega_0)^q$. Отсюда $\phi = f\omega_0^q$ – дифференциал Прима для ρ с $(\phi) = D$. Предложение доказано.

Найдем общий вид (ρ, q)-дифференциалов с единственным полюсом в точке Q точно порядка $m \geq 2$ на F'_μ, где $q \geq 1$.

Теорема 1.3.1. *Для любых точки Q, характера ρ на F'_μ типа (g,n), $g \geq 2, n \geq 1$, и $m \geq 2, q \geq 1$ существует элементарный (ρ,q)-дифференциал $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ класса $M_1(\rho)$ с полюсом точно порядка m в точке Q, у которого общий вид дивизора $(\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m}\frac{1}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$, где $\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1}\dots R_N) + \varphi(P_1^{k_1}) + \dots + \varphi(P_n^{k_n}) + \psi(\rho), k_j \geq 0, j = 1,\dots,n$, при этом точки $R_{g+1},\dots,R_N$ выбираются произвольно на $F'_\mu \backslash \{Q\}$, и $N = (2g-2)q + m + k_1 + \dots + k_n$. Кроме того, эти дифференциалы локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана-Роха для (ρ,q)-дифференциалов на F_μ [13] найдем размерность $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^q_\rho(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}})$, где $k_j \geq 0, k_j \in \mathbb{N}, j = 1,\dots,n$. Имеем

$$i_{\rho,q}(D) = (g-1)(2q-1) - \deg D + r(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}),$$

где $D = \frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}, Z_\mu^{q-1}$ — канонический класс дивизоров однозначных $(q-1)$-дифференциалов на F_μ, $f[\mu]$ — любая мультипликативная функция для ρ на F_μ, локально голоморфно зависящая от $[\mu]$ и ρ [13]. Отсюда $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}) = (g-1)(2q-1)+m+k_1+\dots+k_n \geq 3$. Здесь $r(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}) = 0$, так как $\deg(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}) > 0$ при наших условиях. Действительно, имеем что $\deg(f[\mu]) = 0$, $\deg Z_\mu^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geq 0$ и $\deg(\frac{1}{D}) \geq m > 0$. Также этот факт можно доказать по-другому. Если существует функция $g \neq 0$ для ρ на F_μ с условием $(g) \geq Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(f[\mu])Z_\mu^{q-1}$, то

$$0 = \deg(g) \geq \deg(Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}(f[\mu])Z_\mu^{q-1}) \geq 2.$$

Противоречие.

Ясно, что $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}) = i_{\rho,q}(\frac{1}{Q^{m-1} P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}) + 1$. Следовательно существует (ρ,q)-дифференциал $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ, т. е. $(\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$ на $F_\mu, R_j \neq Q, j = 1,\dots,N$, а значит $(\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}) = \frac{R_1\dots R_N}{Q^m}$ на F'_μ.

Такие (ρ, q)-дифференциалы $\omega = \tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ из $M_1(\rho)$ на F'_μ определяются неединственно на F'_μ из-за своих нулей и полюсов, т. е.

$$(\omega) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m} \frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}, k_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

Зафиксируем $k_1, ..., k_n$, как порядки возможных полюсов в точках $P_1, ...,$ P_n соответственно. Причем степень $\deg(\omega) = (2g-2)q$ на F_μ. Отсюда следует, что $N = (2g-2)q + m + k_1 + \dots + k_n$.

По предложению 1.3.1 получаем уравнение

$$\varphi_{P_0}(R_1 \dots R_N) - \varphi_{P_0}(Q^m) - \varphi_{P_0}(P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Последнее уравнение понимаем как равенство в переменном Якобиане $J(F_\mu)$, т. е. в слое из универсального расслоения Якоби, лежащем над отмеченной поверхностью $F_\mu (\equiv [\mu])$. Следовательно,

$$\varphi(R_1 \dots R_N) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) + k_1\varphi(P_1) + \dots + k_n\varphi(P_n) + \psi(\rho) = a$$

или

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = a - \varphi(R_{g+1} \dots R_N). \qquad (*)$$

Таким образом, для определения нулей нашего дифференциала имеем $N - g = m + (2g-2)q - g + k_1 + \dots + k_n \geq 2$ свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F'_μ. Решая проблему обращения Якоби, найдем дивизор $R_1 \dots R_g$, который будет единственным голоморфным решением уравнения, если правая сторона не принадлежит $W^1_g[\mu]$ [20]. Это можно сделать так как $\dim W^1_g[\mu] \leq g-2$, но $N - g > g - 2$ или $(2g-2)(q-1) + m + k_1 + \dots + k_n \geq m > 0$. Поэтому, дивизор $(\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}) = \frac{R_1 \dots R_g}{Q^m} \frac{R_{g+1} \dots R_N}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}$ имеет наиболее общий вид для (ρ, q)-дифференциалов $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ класса $M_1(\rho)$ с единственным полюсом точно порядка $m \geq 2$ на $F'_\mu = F_\mu \backslash \{P_1, \dots, P_n\}$ для точки $Q \in F'_\mu$.

При этом можно получить, что точки $R_1, \ldots, R_g$ тоже отличны от точки Q, и голоморфно зависят от наших параметров, так как правая сторона (*) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ. Докажем от противного. Действительно, пусть $R_1 = Q$, тогда имеем равенство

$$\varphi(R_2 \ldots R_g) = -2Kq + \varphi(Q^{m-1}) + \varphi(P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}) -$$

$$-\varphi(R_{g+1} \ldots R_{2g-1} \ldots R_N) + \psi(\rho).$$

Рассмотрим дивизор $D = R_2 \ldots R_g R_{g+1} \ldots R_{2g-1}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \ldots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках [19] и классической теореме Римана-Роха имеем неравенство $g-1+1 \leq r(\frac{1}{D}) = 2g-2-g+1+i(D)$, и $i(D) \geq 1$. Поэтому существует ненулевой голоморфный абелев 1-дифференциал ω на F_μ такой, что $(\omega) \geq D$, а значит $(\omega) = D$. Отсюда получаем, что $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде

$$2K(1-q) + \varphi(Q^{m-1}) + \varphi(P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}) + \psi(\rho) = \varphi(R_{2g} \ldots R_N).$$

Заметим, что $N-(2g-1) \geq 1$ при $q \geq 1$ и $g > 1, \quad k_1 > 0, \quad k_j \geq 0, \quad j = 1, ..., 2$. Множество заданное выражением слева будет нульмерно, а справа будет не менее, чем одномерно. Следовательно можно выбрать точки $R_{2g}, \ldots, R_N$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Противоречие. Поэтому точка Q будет действительно единственный полюс точно порядка m для нашего дифференциала $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ на F'_μ. Теорема 1.3.1 доказана.

Найдем общий вид (ρ, q)-дифференциалов третьего рода с единственными простыми полюсами в различных точках Q_1, Q_2 на F'_μ, где $q \geq 1$.

Теорема 1.3.2. *Для любых различных точек Q_1, Q_2 на поверхности F'_μ типа $(g, n), g \geq 2, n \geq 1, q \geq 1$, и характера ρ на F'_μ существует элементарный $(\rho, q)-$дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}$ третьего рода класса*

$M_1(\rho)$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}) = \frac{R_1\ldots R_N}{Q_1Q_2}\frac{1}{P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}$, где $\varphi(R_1\ldots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1}\ldots R_N) + \varphi(P_1^{k_1}) + \cdots + \varphi(P_n^{k_n}) + \psi(\rho)$, $k_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$, и $N = (2g-2)q + 2 + k_1 + \cdots + k_n$. При этом точки $R_{g+1},\ldots,R_N$ выбираются произвольно на $F'_\mu\backslash\{Q_1,Q_2\}$. Кроме того, эти дифференциалы локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана-Роха для (ρ,q)-дифференциалов на F_μ [13] найдем размерность

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}) = \dim_{\mathbb{C}}\Omega^q_\rho(\frac{1}{Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}),$$

где $k_j \geq 0, k_j \in \mathbb{N}, j = 1,\ldots,n$. Имеем $i_{\rho,q}(D) = (g-1)(2q-1) - \deg D + r(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D})$, где $D = \frac{1}{Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}$, Z_μ^{q-1} — канонический класс дивизоров однозначных $(q-1)$-дифференциалов на F_μ, $f[\mu]$ — любая мультипликативная функция для ρ на F_μ, локально голоморфно зависящая от $[\mu]$ и ρ. Отсюда $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}) = (g-1)(2q-1)+1+k_1+\cdots+k_n(\geq 1)$. Здесь $r(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}) = 0$, так как $\deg(\frac{(f[\mu])Z_\mu^{q-1}}{D}) > 0$ при наших условиях. Действительно, $\deg(f[\mu]) = 0, \deg Z_\mu^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geq 0$ и $\deg(\frac{1}{D}) \geq 1 > 0$. Также этот факт можно доказать по-другому. Если существует функция $g \neq 0$ для ρ на F_μ с условием $(g) \geq Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}(f[\mu])Z_\mu^{q-1}$, то

$$0 = \deg(g) \geq \deg(Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}(f[\mu])Z_\mu^{q-1}) \geq 1.$$

Противоречие.

Ясно, что $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}) = i_{\rho,q}(\frac{1}{P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}})+1$. Следовательно существует не нулевой (ρ,q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ с единственным простым полюсом в точке Q_1 на F'_μ, т. е. $(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1\ldots R_N}{Q_1P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}$ на $F_\mu, R_j \neq Q_1, j = 1,\ldots,N$, а значит $(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1\ldots R_N}{Q_1}$ на F'_μ.

Аналогично $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_2P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}) = i_{\rho,q}(\frac{1}{P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}})+1$ и существует не нулевой (ρ,q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_2}$ с единственным простым полюсом в точке Q_2

на F'_μ. Теперь искомый дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1Q_2} = c_1\tau_{\rho,q;Q_1} + c_2\tau_{\rho,q;Q_2}$, где $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$.

Такие (ρ, q)-дифференциалы $\omega = \tau_{\rho,q;Q_1Q_2}$ из $M_1(\rho)$ на F'_μ определяются неединственно на F'_μ из-за своих нулей и полюсов, т. е. $(\omega) = \frac{R_1 \ldots R_N}{Q_1Q_2}\frac{1}{P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}$, $k_j \geq 0, j = 1, \ldots, n, R_1, \ldots, R_N \neq Q_1, Q_2$. Зафиксируем $k_1, \ldots, k_n$, как порядки возможных полюсов в точках $P_1, \ldots, P_n$ соответственно. Причем степень $\deg(\omega) = (2g-2)q$ на F_μ. Отсюда следует, что $N = (2g-2)q + 2 + k_1 + \cdots + k_n$.

По предложению 1.3.1 получаем уравнение

$$\varphi_{P_0}(R_1 \ldots R_N) - \varphi_{P_0}(Q_1Q_2) - \varphi_{P_0}(P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Следовательно, $\varphi(R_1 \ldots R_N) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) + k_1\varphi(P_1) + \cdots + k_n\varphi(P_n) + \psi(\rho) = a$ или

$$\varphi(R_1 \ldots R_g) = a - \varphi(R_{g+1} \ldots R_N). \qquad (**)$$

Таким образом, для определения нулей нашего дифференциала имеем $N-g = 2+(2g-2)q-g+k_1+\cdots+k_n \geq 2$ свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F'_μ. Решая проблему обращения Якоби, найдем дивизор $R_1 \ldots R_g$, который будет единственным голоморфным решением уравнения, если правая сторона в (**) не принадлежит $W_g^1[\mu]$ [20]. Это можно сделать так как $\dim W_g^1[\mu] \leq g - 2$, но при наших условиях выполняется $N - g > g - 2$, или это равносильно неравенству $(2g-2)q + 2 + k_1 + \cdots + k_n - g > g - 2$ или $k_1 + \ldots + k_n > -2$. Поэтому, дивизор $(\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}) = \frac{R_1 \ldots R_g}{Q_1Q_2}\frac{R_{g+1} \ldots R_N}{P_1^{k_1}\ldots P_n^{k_n}}$ имеет наиболее общий вид для (ρ, q)-дифференциалов $\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}$ класса $M_1(\rho)$ третьего рода с единственными простыми полюсами в точках $Q_1, Q_2 (\in F'_\mu)$ на $F'_\mu = F_\mu \backslash \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Кроме того, точки $R_1, \ldots, R_g$ тоже можно выбрать отличными от точек Q_1, Q_2. Докажем это от противного.

1) Пусть $R_1 = Q_1$. Тогда получаем равенство $\varphi(R_2...R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_2) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}) + \psi(\rho)$. Рассмотрим дивизор $D = R_2 \ldots R_{2g-1}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \ldots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках получаем неравенство $i(D) \geq 1$. Поэтому $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде $-2K(q-1) + \varphi(Q_2) - \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}) + \psi(\rho) = \varphi(R_{2g} \ldots R_N)$. Заметим, что $N - (2g-1) \geq 1$ при $q \geq 1$ и $g > 1$. Следовательно можно выбрать точки $R_{2g}, \ldots, R_N$ так на $F'_\mu \backslash \{Q_1, Q_2\}$, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Противоречие. Поэтому точка Q_1 будет действительно полюс точно первого порядка для нашего дифференциала на F'_μ.

2) Пусть $R_1 = Q_1, R_2 = Q_2$. Тогда получаем равенство $\varphi(R_3 \ldots R_g) = -2K[\mu]q - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}) + \psi(\rho)$. Рассмотрим дивизор $D = R_3...R_{2g}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \ldots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках снова имеем неравенство $i(D) \geq 1$. Поэтому $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде $-2K(q-1) - \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}) + \psi(\rho) = \varphi(R_{2g+1} \ldots R_N)$. Заметим, что $N - 2g \geq 1$ при $q \geq 1, \quad g > 1, k_1 > 0, \quad k_j \geq 0, \quad j = 2, ..., n$. Следовательно можно выбрать точки $R_{2g+1}, \ldots, R_N$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Противоречие. Поэтому точки Q_1, Q_2 будут действительно единственными полюсами точно первого порядка для нашего дифференциала на F'_μ. Теорема 1.3.2 доказана.

Для любого существенного характера элементарный дифференциал $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q} = (\tau_{\rho,q;Q})^{(m-1)}_Q$ полученный $(m-1)$ кратным дифференцированием по параметру Q, будет дифференциалом Прима второго рода с единственным полюсом в Q и асимптотиками вида $\frac{1}{z^m} + O(1), z(Q) = 0$.

Следствие 1.3.1. *На переменной римановой поверхности F'_μ типа*

(g,n) *рода* $g\geq 2, n\geq 1$, *для любых точки* $Q(\in F'_\mu)$, $q\geq 1$, *характера* ρ *и* $m\geq 1,\ m\in\mathbb{N}$, *существует дифференциал Прима*

$$\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}=\left(\frac{1}{z^m}+O(1)\right)dz^q,\quad z(Q)=0,$$

голоморфно зависящий от $[\mu]$ *и* ρ.

§1.4. Дифференциалы Прима для несущественного характера

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов класса M_1 второго рода для характера ρ, а через $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ — подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов Прима для ρ на F'_μ. Пусть $\tau^{(m)}_{\widetilde{P}_j}$ — абелев дифференциал второго рода на F_μ с единственным полюсом точно порядка m в точке $\widetilde{P}_j, j=1,\ldots,g$, с нулевыми a-периодами, соответственно. Точки $\widetilde{P}_1,\ldots,\widetilde{P}_g$ выбираются из условия $r_\rho(\frac{1}{\widetilde{P}_1\ldots\widetilde{P}_g})=1$ [9; 20].

Для любого характера $\rho\neq 1$ определим отображение из $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'_\mu,\rho)$, сопоставляя дифференциалу ω его класс периодов $[\omega]$. Пусть $\omega\in\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ поднят на U, где $F'_\mu=U/\widetilde{\Gamma}$, и $\widetilde{\Gamma}$ — фуксова группа первого рода униформизирующая F'_μ в U [1; 7]. Найдем классические периоды $\omega_{z_0}(T)=\int\limits_{z_0}^{Tz_0}\omega+m_{n+1}\int\limits_{\gamma_{n+1}}\omega+\cdots+m_{n+k}\int\limits_{\gamma_{n+k}}\omega$, где $m_j\in\mathbb{Z}$, $j=n+1,\ldots,n+k$. Здесь обозначили через $\gamma_{n+1},\ldots,\gamma_{n+k}$ петли обходящие только вокруг полюсов $Q_1,\ldots,Q_k$ для ω на F'_μ соответственно. Причем интеграл $\int_{z_0}^{Tz_0}\omega$ берется по некоторому фиксированному специальному пути в круге U, не проходящему через полюса для ω.

Так как ω — дифференциал Прима второго рода, то все вычеты в полюсах равны нулю. Поэтому существует глобальная первообразная — мероморфная функция $f(z)$ на U такая, что $\omega=df$ на $F'_\mu\backslash\{Q_1,...,Q_k\}$. Теперь поднимем $\omega=df$ на U, относительно $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}$, и получим, что $\omega_{z_0}(T)=$

$\int\limits_{z_0}^{Tz_0} df(z)$ для любого $T \in \widetilde{\widetilde{\Gamma}}$, где $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}$ — фуксова группа первого рода на U униформизирующая поверхность F''_μ, которая получается из F'_μ удалением всех k полюсов $Q_1, \ldots, Q_k$ дифференциала ω.

Зададим отображение

$$\Omega_{2,\rho}(F'_\mu) \ni \omega \to [\omega] = \{\omega_{z_0}(A_1), \ldots, \omega_{z_0}(B_g), \omega_{z_0}(C_1), \ldots,$$

$$\omega_{z_0}(C_n), \omega_{z_0}(\gamma_{n+1}), \ldots, \omega_{z_0}(\gamma_{n+k})\} \in H^1(\widetilde{\widetilde{\Gamma}}, \rho'),$$

где $\rho'(\gamma_s) = 1, s = n+1, \ldots, n+k$ и $\rho' = \rho$ на $\Gamma'_\mu \cong \widetilde{\Gamma}$. Так как все $\omega_{z_0}(\gamma_s)$, $s = n+1, \ldots, n+k$, равны нулю, то $[\omega]$ выражается только через $\omega_{z_0}(A_1), \ldots, \omega_{z_0}(B_g), \omega_{z_0}(C_1), \ldots, \omega_{z_0}(C_n)$, которые удовлетворяют уравнению из леммы 1.2.1, а для $\rho \neq 1$ имеем $\omega_{z_0}(A_k) = 0$ при $\rho(A_k) \neq 1$, и $\omega_{z_0}(B_k) = 0$ при $\rho(B_k) \neq 1$. Значит отображение $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu) \ni \omega \to [\omega] \in H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ корректно определено.

Если класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$ для $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F'_μ, а значит, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. Если $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$, то, как раньше, все $\omega_{z_0}(\gamma_s) = 0$, $s = n+1, \ldots, n+k$, где γ_s — петля, обходящая только один полюс Q_s для ω. По условию $\omega = df$, где f — мультипликативная мероморфная функция на F'_μ, а значит все периоды по Ганнингу для ω на F'_μ равны нулю. Следовательно $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$.

Поэтому для любого $\rho \neq 1$ отображение периодов из $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, задаваемое по правилу $\omega + \Omega_{e,\rho}(F'_\mu) \to [\omega + \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)] = [\omega]$ будет корректно определено, взаимно однозначно и линейно. Следовательно $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu) \leq 2g + n - 2$ для любого $\rho \neq 1$.

Теорема 1.4.1. *Векторное расслоение*

$$E_1 = \bigcup \Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2$ над базой $\mathbb{T}_{g,n}\times(L_g\backslash\{1\})$ при $g\geq 2, n\geq 2$. Причем следующие наборы классов смежности дифференциалов Прима: либо

$$f_0\zeta_1,\dots,\widehat{f_0\zeta_k},\dots,f_0\zeta_g,f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)},\dots,f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)},f_0\tau_{P_2P_1},\dots,f_0\tau_{P_nP_1}, \quad (1)$$

либо

$$f_0\zeta_1,\dots,\widehat{f_0\zeta_k},\dots,f_0\zeta_g,f_0\tau_{\widetilde{P}_1}^{(2)},\tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2\widetilde{P}_2^2},\dots,\tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2\widetilde{P}_g^2},f_0\tau_{P_2P_1},\dots,f_0\tau_{P_nP_1}, \quad (2)$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где f_0 — мультипликативная единица на F_μ для ρ, а числа $n_1,...,n_g$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в точке P_1 на F_μ для ρ и $r_\rho(\frac{1}{\widetilde{P}_1\dots\widetilde{P}_g})=1$ на F_μ, точки $\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_g\in F'_\mu$, $\rho(a_k)\neq 1$, и $df_0(\widetilde{P}_1)=0$, $resf_0\tau_{\widetilde{P}_1}^{(2)}=0$, $\widetilde{P}_1\in F'_\mu$, $\tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2,\widetilde{P}_j^2}$ – дифференциал Прима для ρ с нулевыми вычетами в точках $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_j$, $j=2,...,g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это расслоение корректно определено над такой базой по лемме 1.2.2. Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}}\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)\geq 2g+n-2$$

и построим базис этих фактор пространств.

Докажем, что при $\rho\neq 1,\rho(A_k)\neq 1$, дифференциалы из набора (2) [3] представляют линейно независимые над $\mathbb{C}$ классы смежности в нашем фактор пространстве. При $\rho_0\neq 1$ на $\pi_1(F'_{\mu_0})$ существует $A_k\in\Gamma'_{\mu_0}$ с условием, что $\rho_0(A_k)=exp2\pi ic_k\neq 1$. Поэтому $c_k\neq 0$ для любого ρ из достаточно малой окрестности $U(\rho_0)\subset L_g\backslash\{1\}$ и любого $[\mu]\in U[\mu_0]$. Так как $df_0=2\pi ic_1f_0\zeta_1+\dots+2\pi ic_gf_0\zeta_g$ на F_μ, то $f_0\zeta_k$ выражается линейно через df_0 и остальные слагаемые последней суммы. Следовательно вместо одного из дифференциалов $f_0\zeta_1,\dots,f_0\zeta_g$ можно взять df_0, который представляет нулевой класс смежности. Предположим, что существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами

$$c'_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{c'_k f_0\zeta_k} + \dots + c'_g f_0\zeta_g + \tilde{c}_1 f_0 \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + \tilde{c}_2 \tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2\widetilde{P}_2^2} + \ldots + \tilde{c}_g \tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2\widetilde{P}_g^2} +$$

$$+\widetilde{\widetilde{c}}_1 f_0 \tau_{P_2P_1} + \dots + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} f_0 \tau_{P_nP_1} = df,$$

где f_0 — мультипликативная мероморфная функция для несущественного характера ρ на F'_μ, $\rho(A_k) \neq 1$.

Обойдем точку P_2 по малой петле γ_2, выходящей из $\widetilde{P}_{2,0}$. Тогда выражение слева будет иметь вычет $\widetilde{\widetilde{c}}_1 f_0(\widetilde{P}_{2,0})\rho(\gamma_2)$, а для правой стороны этот вычет равен нулю. Но $f_0(\widetilde{P}_{2,0}) \neq 0$, $\rho(\gamma_2) = 1$, а значит $\widetilde{\widetilde{c}}_1 = 0$. Аналогично считаем вычет по малым петлям обходящим отдельно вокруг точек $P_3, \dots, P_n$ и получаем, что $\widetilde{\widetilde{c}}_2 = \dots = \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} = 0$. После этого остается сумма $c'_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{c'_k f_0\zeta_k} + \dots + c'_g f_0\zeta_g + \tilde{c}_1 f_0 \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + \tilde{c}_2 \tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2\widetilde{P}_2^2} + \ldots + \tilde{c}_g \tau_{\rho;\widetilde{P}_1^2\widetilde{P}_g^2} = df$.

Рассмотрим коэффициенты $\widetilde{c}_j$, $j = 1, \dots, g$.

1) Если df имеет устранимые особые точки во всех проколах, то это равенство на F'_μ влечет, что существует мероморфная мультипликативная функция на F_μ с простыми полюсами в $\widetilde{P}_1, \dots, \widetilde{P}_g$, но это невозможно из-за выбора этих точек и $r_\rho(\frac{1}{\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g}) = 0$;

2) Если df при продолжении на F_μ имеет в проколах хотя бы один полюс или существенно особую точку, то для комбинации слева эта точка (прокол) не будет особой, а для df она особая. Получили противоречие.

Таким образом, $\widetilde{c}_j = 0$, $j = 1, \dots, g$.

Рассмотрим коэффициенты $c'_1, \dots, c'_g$ и равенство

$c'_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{c'_k f_0\zeta_k} + \dots + c'_g f_0\zeta_g = df$ при $\rho(A_k) \neq 1:$

1) Если f при продолжении с F'_μ на F_μ имеет во всех проколах устранимые особые точки, то из этого равенства следует, что f является мультипликативной единицей на F_μ и $f = c''_1 f_0$. Если $c''_1 = 0$, то $\zeta_1, \dots, \widehat{\zeta_k}, \dots, \zeta_g$ будут линейно зависимы на F_μ. Противоречие.

Если $c_1''\neq 0$, то $c_1''df_0=df=\sum\limits_{j\neq k}c_j'f_0\zeta_j$. Для $\rho_0\neq 1,\ \rho_0(A_k)\neq 1$ имеем $c_1''df_0=2\pi i(\sum\limits_{j\neq k}c_1''c_jf_0\zeta_j)+2\pi ic_1''c_kf_0\zeta_k$ на F_μ, где $c_1''c_k\neq 0$. Отсюда получаем на F_μ равенство вида $(\sum\limits_{j\neq k}(c_1''2\pi ic_j-c_j')\zeta_j)+c_1''2\pi ic_k\zeta_k=0$. Противоречие с линейной независимостью абелевых дифференциалов $\zeta_1,\dots,\zeta_g$;

2) Если f при продолжении с F_μ' на F_μ имеет в проколах полюс или существенно особую точку, то слева и справа получаем разные особые точки. Следовательно, все $c_j'=0,\ j=1,\dots,g,\ j\neq k$.

Таким образом дифференциалы из набора (2) представляют линейно независимые над $\mathbb{C}$ классы смежности в нашем фактор пространстве.

Покажем, что дифференциалы из набора (1) представляют линейно независимые классы смежности. Действительно, если существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами

$$c_1'f_0\zeta_1+\dots+\widehat{c_k'f_0\zeta_k}+\dots+c_g'f_0\zeta_g+\widetilde{c}_1f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}+\dots+\widetilde{c}_gf_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)}+$$

$$+\widetilde{\widetilde{c}}_1f_0\tau_{P_2P_1}+\dots+\widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}f_0\tau_{P_nP_1}=df,$$

то все $\widetilde{\widetilde{c}}_1=\dots=\widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}=0$, как и в предыдущем случае.

Получаем равенство

$$c_1'f_0\zeta_1+\dots+\widehat{c_k'f_0\zeta_k}+\dots+c_g'f_0\zeta_g+\widetilde{c}_1f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}+\dots+\widetilde{c}_gf_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)}=df.$$

Рассмотрим коэффициенты $\widetilde{c}_j$:

1) если f при продолжении имеет устранимые особые точки во всех проколах, то значит существует мультипликативная функция с единственным полюсом в P_1 точно некоторого порядка n_j, но это невозможно из-за мультипликативных пробелов Вейерштрасса в точке P_1 на F_μ;

2) если f при продолжении имеет полюс или существенно особую точку хотя бы в одном из проколов, то слева и справа будут особенности разных типов.

Поэтому $\widetilde{c}_1=\dots=\widetilde{c}_g=0$.

Продолжая, как в предыдущем случае, показываем, что $c'_j = 0$ для любого $j \neq k$, при ρ с условием, что $\rho(A_k) \neq 1$. Теорема 1.4.1 доказана.

Обозначим через $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu)$ пространство дифференциалов класса M_1 для ρ, кратных дивизору $\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}$ на F'_μ, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ — подпространство голоморфных мультипликативно точных дифференциалов для ρ на F'_μ.

Теорема 1.4.2. *Векторное расслоение*

$$E_2 = \bigcup \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2+s$ *над базой* $\mathbb{T}_{g,n} \times (L_g \backslash \{1\})$ *при* $g \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 1$. *Причем набор классов смежности дифференциалов*

$$f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}, \dots, f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)},$$

$$f_0\tau_{P_2P_1}, \dots, f_0\tau_{P_nP_1}, f_0\tau_{Q_1P_1}, \dots, f_0\tau_{Q_sP_1}, \tag{3}$$

будет базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, ..., n_g$ *— мультипликативные пробелы Вейерштрасса в* P_1 *для* ρ *на* F_μ, $\rho(a_k) \neq 1$, $Q_1, \dots, Q_s$ *— различные точки на* F'_μ, *голоморфно зависящие от* $[\mu]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение периодов

$$\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu) \ni \omega \to [\omega] \in H^1(\Gamma'', \rho).$$

Класс $[\omega]$ задаётся набором классических периодов $(\omega(A_1) = 0, \omega(A_2), ...,$ $\omega(A_g), \omega(B_1), \dots, \omega(B_g), \omega(\gamma_1), \dots, \omega(\gamma_{n-1}), \omega(\widetilde{\gamma}_1), \dots, \omega(\widetilde{\gamma}_s))$. Здесь период $\omega(\gamma_n)$ выражается через остальные $2g+n+s-2$ периодов и $F''_\mu = F'_\mu \backslash \{Q_1, \dots, Q_s\} = F_\mu \backslash \{P_1, \dots, P_n\} \cup \{Q_1, \dots, Q_s\}$, $F''_\mu = U/\Gamma''$.

Если $\Omega(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu) \ni \omega \to [\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma'', \rho)$, то дифференциал ω — мультипликативно точный на F'_μ. Точки $Q_1, \dots, Q_s$ – устранимые особые точки для ω, так как $2\pi i(res_{Q_j}\omega) = \int_{\widetilde{\gamma}_j} \omega = 0$, $j = 1, \dots, s$. Поэтому

$\omega \in \Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$. Следовательно отображение периодов корректно определено, взаимнооднозначно, линейно отображает фактор пространство $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1\dots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'', \rho)$. Поэтому

$$\dim \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu) \leq 2g + n + s - 2.$$

Докажем обратное неравенство для размерностей и построим базис. Набор классов смежности дифференциалов из (3) будет линейно независим над $\mathbb{C}$. Действительно, если

$$c'_1 f_0 \zeta_1 + \dots + \widehat{c'_k f_0 \zeta_k} + \dots + c'_g f_0 \zeta_g + \widetilde{c}_1 f_0 \tau_{P_1}^{(n_1+1)} + \dots + \widetilde{c}_g f_0 \tau_{P_1}^{(n_g+1)} +$$

$$+ \widetilde{\widetilde{c}}_1 f_0 \tau_{P_2 P_1} + \dots + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} f_0 \tau_{P_n P_1} + c''_1 f_0 \tau_{Q_1 P_1} + \dots + c''_s f_0 \tau_{Q_s P_1} = df,$$

то $\widetilde{\widetilde{c}}_1 = \dots = \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} = c''_1 = \dots = c''_s = 0$ из-за того, что f мультипликативная мероморфная функция для ρ на F'_μ и ее вычет равен нулю относительно точек $P_2, \dots, Q_s$. Остается равенство

$$c'_1 f_0 \zeta_1 + \dots + \widehat{c'_k f_0 \zeta_k} + \dots + c'_g f_0 \zeta_g + \widetilde{c}_1 f_0 \tau_{P_1}^{(n_1+1)} + \dots + \widetilde{c}_g f_0 \tau_{P_1}^{(n_g+1)} = df.$$

Отсюда сразу получаем, что $\widetilde{c}_1 = \dots = \widetilde{c}_g = 0$ так как нет мультипликативной функции f для несущественного характера ρ с одним полюсом в P_1 точно порядка n_j для некоторого j. Теперь

$$c'_1 f_0 \zeta_1 + \dots + \widehat{c'_k f_0 \zeta_k} + \dots + c'_g f_0 \zeta_g = df$$

и, как в доказательстве теоремы 1.4.1, получаем, что $c'_j = 0$ для всех $j \neq k$. Отсюда размерность фактор пространства больше или равна $2g + n + s - 2$ и построен базис. Теорема 1.4.2 доказана.

Следствие 1.4.1. *Голоморфное векторное расслоение (со слоями состоящими из первых голоморфных групп когомологий де Рама для ρ на F'_μ)*

$$E'_2 = \bigcup_{[\mu], \rho \neq 1} H^1_{hol,\rho}(F'_\mu) = \bigcup \Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению ранга $2g+n-2$ над базой $\mathbb{T}_{g,n} \times (L_g \backslash \{1\})$ при $g \geq 2,\ n \geq 2$.

Зададим отображение периодов χ из $\Omega_\rho(1; F'_\mu)$ на $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$, сопоставляя ω его класс периодов $[\omega]$, который определяется набором классических периодов $(\int\limits_{a_1^\mu} \omega, ..., \int\limits_{a_g^\mu} \omega, \int\limits_{b_1^\mu} \omega, ..., \int\limits_{b_g^\mu} \omega, \int\limits_{\gamma_1^\mu} \omega, ..., \int\limits_{\gamma_{n-1}^\mu} \omega)$. Выбираем представитель в $[\omega]$ определенный условием $\int\limits_{a_1^\mu} \omega = \omega(A_1^\mu) = 0$.

Отображение χ имеет ядро $Ker\chi = \Omega_{e,\rho}(1, F'_\mu)$. Это пространство будет бесконечномерным, так как полюса дифференциала на F'_μ можно выбирать в проколах произвольным образом. Учитывая следствие 1.4.1 получаем, что фактор пространство $\Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ изоморфно конечномерному пространству $H^1(\Gamma'_\mu, \rho)$. Таким образом доказано следствие 1.4.2.

Следствие 1.4.2. *На любой поверхности F'_μ типа (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 2$ для несущественного характера ρ имеет место изоморфизм*

$$\Omega_\rho(1; F'_\mu) \cong Ker\chi \oplus H^1_{hol,\rho}(F'_\mu),$$

где $Ker\chi = \Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$ — бесконечномерное векторное пространство и $dim_{\mathbb{C}} H^1_{hol,\rho}(F'_\mu) = 2g+n-2$.

§1.5. Мультипликативные функции и единицы на переменной конечной римановой поверхности

Пусть на F'_μ типа (g, n) задана мультипликативная функция f класса $M_1(\rho)$ для любого характера ρ. Тогда она имеет мероморфное продолжение $\widetilde{f}$ для ρ на F_μ с дивизором

$$(\widetilde{f}) = D = \frac{R_1^{\alpha_1} ... R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} ... Q_s^{\beta_s}} \cdot P_1^{k_1} ... P_n^{k_n}, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, ..., n,$$

на F_μ, где $R_j, Q_k \in F'_\mu, \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, ..., m, \beta_k \in \mathbb{N}, k = 1, ..., s$, и

$$0 = \deg D = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} k_j - \sum_{j=1}^{s} \beta_j.$$

Рассмотрим однозначный абелев дифференциал $\omega(z)dz = \frac{\widetilde{f}'(z)}{\widetilde{f}(z)}dz$ третьего рода на F_μ с простыми полюсами $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s, P_1, ..., P_n$ и вычетами $\alpha_1, ..., \alpha_m, -\beta_1, ..., -\beta_s, k_1, ..., k_n$ соответственно. Тогда

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} + \sum_{j=1}^{n} k_j \tau_{P_j P_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (4)$$

где $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., g$, и P_0 не принадлежит $suppD$ [13; 20]. Отсюда $\widetilde{f}(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$ на F_μ.

Пусть мультипликативная функция $f \in M_2(\rho)$ на F'_μ типа $(g, n), n \geq 1$, т. е. она имеет аналитическое продолжение $\widetilde{f}$ на F_μ, у которого в проколах $P_1, ..., P_l, 1 \leq l \leq n$, будут с.о.т. Предположим, что в окрестности $U(P_j)$ функция $f(P) \sim e^{q_j(k_j)(P)}, k_j(P_j) = \infty, q_j$ – некоторые многочлены от $k_j, \;\; j = 1, ..., l$, а в проколах $P_{l+1}, ..., P_n$ возможны либо полюса, либо нули порядков $r_{l+1}, ..., r_n$ соответственно. Положим $g(P) = \frac{f(P)}{\chi_{P_1,...,P_l}(P)}$ на F'_μ, где $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ будет l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с теми же асимптотиками в точках $P_1, ..., P_l$, как у функции $\widetilde{f}$ [4]. Она будет мультипликативной функцией класса $M_1(\rho)$, и её мероморфное продолжение $\widetilde{g}$ имеет дивизор

$$(\widetilde{g}) = D = \frac{R_1^{\alpha_1} ... R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} ... Q_s^{\beta_s}} \cdot P_{l+1}^{r_{l+1}} ... P_n^{r_n}, r_j \in \mathbb{Z}, j = l+1, ..., n,$$

на F_μ. Тогда $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j + \sum\limits_{j=l+1}^{n} r_j$. Дифференциал $\omega(z)dz = \frac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)}dz$ будет абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s, P_{l+1}, ..., P_n$, и

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} + \sum_{j=l+1}^{n} r_j \tau_{P_j P_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (5)$$

где $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., g$. Таким образом доказана.

Теорема 1.5.1. *Мультипликативная функция f на F'_μ типа (g, n), $g \geq 2, n \geq 1$, для любого характера ρ, с условием $\rho(\gamma_j^\mu) = 1, j = 1, ..., n$, имеет следующее представление:*

1) $\widetilde{f}(P) = \exp\int\limits_{P_0}^{P}\omega(z)dz$, *где* $\omega(z)dz$ *задана формулой (4) для* f *из класса* $M_1(\rho)$ *на* F'_μ*;*

2) $\widetilde{f}(P) = \chi_{P_1,...,P_l}(P)\exp\int\limits_{P_0}^{P}\omega(z)dz$, *где* $\omega(z)dz$ *задается формулой (5) для* f *из класса* $M_2(\rho)$ *на* F'_μ*, где* $1 \leq l \leq n$*, которая имеет асимптотики вида* $e^{q_j(k_j)(P)}$ *в* $U(P_j), j = 1, ..., l$*. Здесь* $\widetilde{f}$ *– мероморфное продолжение функции* g *с* F'_μ *на* F_μ *и* $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ *–* l*-точечная функция Бейкера-Ахиезера на* F_μ*. Эти функции локально голоморфно зависят от* $[\mu]$ *и* ρ*.*

Построим мультипликативные единицы на F'_μ типа $(g, n), n \geq 2$, для любого характера $\rho \in Hom(\Gamma'_\mu, \mathbb{C}^*)$. Для искомой мультипликативной единицы f с характером ρ на F'_μ можно проколы $P_1, ..., P_s$ объявить её «нулями», а остальные проколы $P_{s+1}, ..., P_n$ её «полюсами». Например, для $n = 2$, наряду с дивизором $\frac{P_1}{P_2}$, связанным с проколами, можно брать дивизоры $\frac{P_1^m}{P_2^m}, m \geq 2$.

Возьмем общий дивизор $D = \frac{P_1^{m_1}...P_s^{m_s}}{P_{s+1}^{m_{s+1}}...P_n^{m_n}}, m_j \in \mathbb{N}, j = 1, ..., n$, с условием $\sum\limits_{k=1}^{s} m_k = \sum\limits_{k=s+1}^{n} m_k$, т. е. $\deg D = 0$. Тогда мультипликативная функция f на F_μ вида

$$f = \exp\int\limits_{P_0}^{P}(\sum_{j=1}^{s} m_j\tau_{P_jP_0} - \sum_{j=s+1}^{n} m_j\tau_{P_jP_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j\zeta_j)$$

имеет некоторый характер ρ и $(f) = D$ на F_μ, где P_0 не принадлежит $suppD$.

После удаления проколов $P_1, ..., P_n$, эта мультипликативная мероморфная функция на F_μ будет мультипликативной единицей на F'_μ, где характер определяется по формуле

$$\rho_f(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k, \quad \rho_f(b_k^\mu) = \exp[2\pi i\sum_{j=1}^{g} c_j\pi_{jk} + 2\pi i(\sum_{j=1}^{s} m_j\int\limits_{P_0}^{P_j}\zeta_k -$$

$$-\sum_{j=s+1}^{n} m_j \int\limits_{P_0}^{P_j} \zeta_k)], k=1,...,g, \rho_f(\gamma_l^{\mu}) = \exp(\pm 2\pi i m_l) = 1, l=1,...,n, \quad (6)$$

т. е. $\rho = \rho_f \in Hom(\Gamma_\mu, \mathbb{C}^*)$. По теореме Абеля для характеров $\psi(\rho_f) = \varphi_{P_0}(D)$ в $J(F_\mu)$ [20].

Рассмотрим два случая: а) $\psi(\rho) = \varphi_{P_0}(D) \equiv 0$ в $J(F_\mu)$; б) $\psi(\rho) \equiv \varphi_{P_0}(D) \neq 0$ в $J(F_\mu)$ для F_μ.

а) Если $\psi(\rho) \equiv 0 \equiv \varphi_{P_0}(D)$ в $J(F_\mu)$, то $\rho = \rho_f$ — несущественный характер на F'_μ, определенный по формуле (6). Здесь

$$\varphi(D) = \sum_{j=1}^{s} m_j \varphi(P_j) - \sum_{j=s+1}^{n} m_j \varphi(P_j) = \{(\sum_{j=1}^{s} m_j \int\limits_{P_0}^{P_j} \zeta_k - \sum_{j=s+1}^{n} m_j \int\limits_{P_0}^{P_j} \zeta_k)\},$$

где $k = 1,...,g$ и числа $m_1,...,m_n \in \mathbb{N}$ уже выбраны с условием $\deg D = 0$. По теореме Абеля D – дивизор некоторой однозначной мероморфной функции f_0 на F_μ и $(f_0) = D$. Функция $\widetilde{f}_0 = \frac{f}{f_0}$ будет иметь несущественный характер ρ на F_μ, так как $(\widetilde{f}_0) = \frac{(f)}{(f_0)} = 1$. Поэтому $\widetilde{f}_0$ – мультипликативная единица на F_μ для несущественного ρ. Таким образом доказано

Предложение 1.5.1. *На поверхности $F'_\mu = F_\mu \backslash \{P_1,...,P_n\}$ типа (g,n), $n \geq 2, g \geq 2$, для любого дивизора $D = \frac{P_1^{m_1}...P_s^{m_s}}{P_{s+1}^{m_{s+1}}...P_n^{m_n}}$ (ассоциированного с проколами), $n > s \geq 1$, и несущественного характера ρ таких, что $\deg D = 0, \varphi_{P_0}(D) = 0 = \psi(\rho)$ в $J(F_\mu)$ существует мультипликативная единица f для несущественного характера ρ на F'_μ, которая представляется в виде $f = f_0 \cdot \widetilde{f}_0$, где $\widetilde{f}_0$ – мультипликативная единица для ρ на F_μ, и f_0 – однозначная мероморфная функция с дивизором $(f_0) = D$ на F_μ.*

б) Если $\psi(\rho) = \varphi(D) = \sum\limits_{j=1}^{s} m_j \varphi(P_j) - \sum\limits_{k=s+1}^{n} m_k \varphi(P_k) \neq 0$ в $J(F_\mu)$ для натуральных чисел $m_1,...,m_n$ с условием $m_1 + ... + m_s - m_{s+1} - ... - m_n = 0$, то характер ρ удовлетворяющий (6) будет существенным на F_μ.

По теореме Абеля для характеров из $0 \neq \varphi_{P_0}(D) \equiv \psi(\rho)$ следует, что существует мультипликативная функция f_0 для существенного характера ρ на F_μ с $(f_0) = D$. Поэтому существует мультипликативная единица f_0 на F'_μ для ρ. Если f — другая такая мультипликативная единица на F'_μ, то $\widetilde{f_0} = \frac{f}{f_0}$ будет однозначной голоморфной функцией на F_μ. Поэтому $f = cf_0$ на $F'_\mu, c \neq 0$. Таким образом доказано

Предложение 1.5.2. *На поверхности $F'_\mu = F_\mu \backslash \{P_1, ..., P_n\}$ типа (g, n), $n \geq 2, g \geq 2$, для любого дивизора $D = \frac{P_1^{m_1} ... P_s^{m_s}}{P_{s+1}^{m_{s+1}} ... P_n^{m_n}}$, $n > s \geq 1$, и существенного характера ρ таких, что $\deg D = 0, \varphi_{P_0}(D) = \psi(\rho) \neq 0$ в $J(F)$ существует мультипликативная единица f на F'_μ с существенным характером ρ и $(f) = D$ на F_μ, определенная однозначно с точностью до умножения на ненулевую комплексную константу.*

§1.6. Дифференциалы Прима для существенного характера

Лемма 1.6.1. *На поверхности F'_μ типа (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 1$, для существенного характера ρ существует $(\rho, 1)$-дифференциал $\tau = \tau_{\rho; Q^2 P_1}$, где $Q \in F'_\mu$, и $(\tau) = \frac{R_1 ... R_N}{Q^2 P_1 P_2^{k_2} ... P_n^{k_n}}$ на F_μ, где $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 2, \ldots, n$, $R_k \neq P_1, Q$, $k = 1, \ldots, N$, $N = 2g - 2 + 3 + k_2 + \cdots + k_n$, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ, и $res_Q \tau = 0$.*

Доказательство проводится аналогично, как в параграфе 3.

Теорема 1.6.1. *Векторное расслоение*

$$E_3 = \bigcup \Omega_{2,\rho}(F'_\mu) / \Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2 + n$ над базой $\mathbb{T}_{g,n} \times Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*) \backslash L_g$ при $g \geq 2$, $n \geq 2$. Причем следующие наборы классов смежности дифференциалов Прима: либо

$$\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \tau^{(2)}_{\rho; \tilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(2)}_{\rho; \tilde{P}_{g-1}}, \tau_{\rho; P_2 P_1}, \ldots, \tau_{\rho; P_n P_1}, \tau_{\rho; Q_0^2 P_1}; \qquad (7)$$

либо

$$\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_{g-1},\tau^{(n_1+1)}_{\rho;P_1},\dots,\tau^{(n_{g-1}+1)}_{\rho;P_1},\tau_{\rho;P_2P_1},\dots,\tau_{\rho;P_nP_1},\tau_{\rho;Q_0^2P_1}; \tag{8}$$

либо

$$\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_{g-1},\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_1},\dots,\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_{g-1}},\tau_{\rho;P_1},\dots,\tau_{\rho;P_n} \tag{8$'$}$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $Q_0\in F'_\mu$*, числа* $n_1,\dots,n_{g-1}$ *— мультипликативные пробелы Вейерштрасса в точке* P_1 *на поверхности* F_μ*, и* $i_{\rho^{-1}}(\widetilde{P}_1\dots\widetilde{P}_{g-1})=0$*,* $\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_{g-1}\in F'_\mu$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — существенный характер на F'_μ. Зададим отображение Φ из пространства $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ в $H^1(\Gamma'_\mu,\rho)$, по правилу: сопоставим дифференциалу ω его класс периодов $[\omega]\in H^1(\Gamma'_\mu,\rho)$.

Если $\omega\in\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega]=0$ в $H^1(\Gamma'_\mu,\rho)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F'_μ, а значит $\omega\in\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. Ясно также, что любой дифференциал ω из $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$ имеет нулевой класс периодов. Таким образом, ядро отображения Φ совпадает с $\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. Следовательно, это отображение корректно определено на фактор пространстве $\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)$. При этом Φ взаимнооднозначно и линейно. Отсюда получаем, что $\dim_{\mathbb{C}}\Omega_{2,\rho}(F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F'_\mu)\le 2g+n-2$.

Докажем, что верно обратное неравенство для размерностей и построим три вида базисов в нашем фактор пространстве. Из [13, с. 105] следует существование базиса $\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_{g-1}$ в пространстве голоморфных дифференциалов Прима на F_μ для существенного характера ρ, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ. По теореме [13, с. 74] существует $g-1$ различных точек $\tilde{P}_1,\dots,\tilde{P}_{g-1}$ на F_μ таких, что $r_\rho(\frac{1}{\tilde{P}_1\dots\tilde{P}_{g-1}})=0$. Если некоторые из этих точек попали в проколы, то применяя технику шевеления дивизоров, как в [13, с. 111], можно получить набор $\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_{g-1}\in F'_\mu$ с таким же свойством.

Кроме того, по теореме о мультипликативных пробелах Вейерштрасса для существенного характера ρ в точке P_1 на F_μ имеется точно $g-1$ пробелов $n_1, \ldots, n_{g-1}$ удовлетворяющих условию $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_{g-1} < 2g$ на поверхности F_μ [13, с. 69; 20].

В теоремах 1.3.1 и 1.3.2 доказано существование двух наборов дифференциалов Прима для ρ на F'_μ : $\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_1}, \ldots, \tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_{g-1}}$ — элементарные дифференциалы второго рода с единственными полюсами второго порядка в точках $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_{g-1}$ соответственно; $\tau_{\rho;P_2P_1}, \ldots, \tau_{\rho;P_nP_1}$ — элементарные дифференциалы третьего рода с простыми полюсами в точках P_j и P_1, $j = 2, \ldots, n$, соответственно.

Предположим, что набор (7) будет представлять линейно зависимые классы смежности в нашем фактор пространстве для существенного характера ρ, т. е. существует линейная комбинация с не равными нулю коэффициентами:

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_{g-1}} +$$

$$+\tilde{\tilde{c}}_1\tau_{\rho;P_2P_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_{n-1}\tau_{\rho;P_nP_1} + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{\rho;Q_0^2P_1} = df,$$

при фиксированном $Q_0 \in F'_\mu$, где f — мультипликативная функция на F'_μ, (возможно с полюсами любых порядков и существенно особыми точками на F_μ для ветвей этой функции).

Рассмотрим коэффициенты $\tilde{\tilde{c}}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$. Пусть γ_j — петля обходящая только точку P_j, $j = 2, \ldots, n$, тогда классический период $\int\limits_{\gamma_j} df = c\sigma(\gamma_j)$ и выбирая вместо f функцию $(f-c)$ получим, что период $\int\limits_{\gamma_j} d(f-c) = 0$. Следовательно все коэффициенты $\tilde{\tilde{c}}_1 = \cdots = \tilde{\tilde{c}}_{n-1} = 0$.

Таким образом имеем равенство

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_{g-1}} + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{\rho;Q_0^2P_1} = df.$$

Функция f не может иметь полюсов в точках $P_2, \ldots, P_n$ и существенно особых точек в точках $P_1, \ldots, P_n$, так как их нет в левой части. Таким образом, f может иметь либо только устранимые особые точки во всех проколах, либо только полюс в проколе P_1 :

1) Если P_1 — устранимая особая точка для f, то все проколы в этом случае будут устранимые особые точки для f на F_μ. Значит $\tilde{\tilde{c}}_n = 0$ и из оставшегося равенства получаем $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_{g-1} = 0$, так как не существует мультипликативной функции с простыми полюсами $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_{g-1}$ на F_μ по условию $r_\rho(\frac{1}{\tilde{P}_1 \ldots \tilde{P}_{g-1}}) = 0$;

2) Если P_1 — полюс порядка $m \geq 1$ для функции f, где $P_2, \ldots, P_n$ устранимые особые точки, то df имеет полюс в P_1 порядка $m+1 \geq 2$. Но в выражении слева в точке P_1 полюс первого порядка, а значит $\tilde{\tilde{c}}_n = 0$. Продолжая, как в первом случае, получим $\tilde{c}_1 = \cdots = \tilde{c}_{g-1} = 0$.

Осталось рассмотреть равенство $c_1'\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}'\tilde{\zeta}_{g-1} = df$:

1) Если f имеет в проколах P_j все устранимые особые точки, то f — мультипликативная единица на F_μ для существенного характера ρ. Поэтому $f \equiv 0$. Остается равенство $c_1'\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}'\tilde{\zeta}_{g-1} = 0$ и в силу линейной независимости таких дифференциалов на F_μ для ρ получаем, что все коэффициенты $c_1' = \cdots = c_{g-1}' = 0$;

2) Если f имеет хотя бы в одном проколе полюс или существенно особую точку, то различные особенности слева и справа, а значит $df = 0$. Как и в первом случае получаем, что $c_1' = \cdots = c_{g-1}' = 0$.

Теперь рассмотрим линейную комбинацию для набора (8) с не нулевыми коэффициентами

$$c_1'\widetilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}'\widetilde{\zeta}_{g-1} + \widetilde{c}_1\tau_{\rho;P_1}^{(n_1+1)} + \cdots + \widetilde{c}_{g-1}\tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}+1)} +$$

$$+\widetilde{\widetilde{c}}_1\tau_{\rho;P_2P_1} + \cdots + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}\tau_{\rho;P_nP_1} + \widetilde{\widetilde{c}}_n\tau_{\rho;Q_0^2P_1} = df$$

на F'_μ. Также, как для предыдущего базиса, получаем, что $\widetilde{\widetilde{c}}_1 = \cdots = \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} = 0$. Осталось равенство

$$c_1'\widetilde{\zeta}_1 + \cdots + c_{g-1}'\widetilde{\zeta}_{g-1} + \widetilde{c}_1\tau_{\rho;P_1}^{(n_1+1)} + \cdots + \widetilde{c}_{g-1}\tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}+1)} + \widetilde{\widetilde{c}}_n\tau_{\rho;Q_0^2P_1} = df$$

на F'_μ. Снова f имеет либо только устранимые особые точки во всех проколах, либо только полюс в проколе P_1 :

1) если P_1 — устранимая особая точка для f, то все проколы устранимые особые точки для f на F_μ и $\widetilde{\widetilde{c}}_n = 0$.

2) если P_1 — полюс порядка $m \geq 1$ для f, снова $P_2, \ldots, P_n$ — устранимые особые точки для f, то df имеет в P_1 полюс порядка $m+1 \geq 2$ и $\widetilde{\widetilde{c}}_n = 0$.

После этого получаем равенство $c'_1\widetilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\widetilde{\zeta}_{g-1} + \widetilde{c}_1\tau^{(n_1+1)}_{\rho;P_1} + \cdots + \widetilde{c}_{g-1}\tau^{(n_{g-1}+1)}_{\rho;P_1} = df$. Если в проколах есть хотя бы одна существенно особая точка для f, то получаем противоречие, так как их нет в выражении слева. Поэтому f имеет единственный полюс в P_1 некоторого порядка n_j на F_μ, что противоречит мультипликативным пробелам в P_1 на F_μ. Следовательно $\widetilde{c}_1 = \cdots = \widetilde{c}_{g-1} = 0$. Осталось равенство $c'_1\widetilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\widetilde{\zeta}_{g-1} = df$ на F'_μ. Как и раньше, показывается, что $c'_1 = \cdots = c'_{g-1} = 0$.

Проведем доказательство для набора $(8')$. Рассмотрим линейную комбинацию для этого набора с ненулевыми коэффициентами

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_{g-1}} + \widetilde{\widetilde{c}}_1\tau_{\rho;P_1} + \cdots + \widetilde{\widetilde{c}}_n\tau_{\rho;P_n} = df,$$

где f — мультипликативная функция на F'_μ (возможно с полюсами любых порядков и существенно особыми точками на F_μ для ветвей этой функции).

Рассмотрим коэффициенты $\widetilde{\widetilde{c}}_j,\ j = 1, \ldots, n$. Пусть γ_j — петля обходящая только точку $P_j,\ j = 1, \ldots, n$, тогда классический период $\int\limits_{\gamma_j} df = c\sigma(\gamma_j)$ и выбирая вместо f функцию $(f - c)$ получим, что $\int\limits_{\gamma_j} d(f-c) = 0$. Следовательно все коэффициенты $\widetilde{\widetilde{c}}_1 = \cdots = \widetilde{\widetilde{c}}_n = 0$.

Таким образом имеем равенство

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_1} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau^{(2)}_{\rho;\tilde{P}_{g-1}} = df.$$

Здесь $\tilde{c}_1 = \dots = \tilde{c}_{g-1} = 0$, так как не существует мультипликативной функции с простыми полюсами $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_{g-1}$ на F_μ, с учетом условия $r_\rho(\frac{1}{\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_{g-1}}) = 0$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично, как для базиса (7). Теорема 1.6.1 доказана.

Теорема 1.6.2. *Векторное расслоение*

$$E_4 = \bigcup \Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1, F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2+n+s$ *над базой* $\mathbb{T}_{g,n} \times (Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*) \backslash L_g)$ *при попарно различных точках* $Q_1, \dots, Q_s$, $s \geq 1$, *на поверхности* F'_μ *типа* (g, n), $g \geq 2$, $n \geq 2$. *Причем набор классов смежности дифференциалов Прима: либо*

$$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \tau_{\rho;P_1}^{(n_1(P_1)+1)}, \dots, \tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)},$$

$$\tau_{\rho;P_2P_1}, \dots, \tau_{\rho;P_nP_1}, \tau_{\rho;Q_1P_1}, \dots, \tau_{\rho;Q_sP_1}, \tau_{\rho;P_2^2P_1}, \tag{9}$$

либо

$$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \tau_{\rho;P_1}^{(n_1(P_1)+1)}, \dots, \tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)},$$

$$\tau_{\rho;P_1}, \tau_{\rho;P_2}, \dots, \tau_{\rho;P_n}, \tau_{\rho;Q_1}, \dots, \tau_{\rho;Q_s}, \tag{9'}$$

где $n_1, \dots, n_{g-1}$ *— мультипликативные пробелы Вейерштрасса в* P_1 *на* F_μ *для* ρ, *задает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать только линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора (9). Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты равны нулю, следующего вида:

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \dots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau_{\rho;P_1}^{(n_1(P_1)+1)} + \dots + \tilde{c}_{g-1}\tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)} +$$

$$+\tilde{\tilde{c}}_2\tau_{\rho;P_2P_1} + \dots + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{\rho;P_nP_1} + \tilde{\tilde{c}}_{n+1}\tau_{\rho;Q_1P_1} + \dots + \tilde{\tilde{c}}_{n+s}\tau_{\rho;Q_sP_1} + c'\tau_{\rho;P_2^2P_1} = df.$$

Если f имеет существенно особые точки в проколах, то сразу получаем противоречие, так как их нет в выражении слева. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, с помощью вычетов и периодов, получим, что $\tilde{\tilde{c}}_j = 0, \ j = 2, \ldots, n+s$. Остается равенство

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau_{\rho;P_1}^{(n_1(P_1)+1)} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)} + c'\tau_{\rho;P_2^2P_1} = df.$$

Так как $n_1(P_1)+1 \geq 2$, то все остальные показатели ≥ 2 [13]. Вычет при обходе только вокруг P_1 будет кратен c', т. е. имеет вид $Mc', M \neq 0$, а справа, из-за мультипликативной точности df, классический период при обходе только вокруг P_1 можно сделать нулевым. Отсюда $c' = 0$. Продолжая доказательство аналогично, как в предыдущей теореме, получаем, что все остальные коэффициенты равны нулю. Классы смежности дифференциалов из набора (9) образуют базис в нашем фактор пространстве.

Докажем линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора (9′). Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты равны нулю, следующего вида:

$$c'_1\tilde{\zeta}_1 + \cdots + c'_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + \tilde{c}_1\tau_{\rho;P_1}^{(n_1(P_1)+1)} + \cdots + \tilde{c}_{g-1}\tau_{\rho;P_1}^{(n_{g-1}(P_1)+1)} +$$

$$+\tilde{\tilde{c}}_1\tau_{\rho;P_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_n\tau_{\rho;P_n} + \tilde{\tilde{c}}_{n+1}\tau_{\rho;Q_1} + \cdots + \tilde{\tilde{c}}_{n+s}\tau_{\rho;Q_s} = df.$$

С помощью вычетов и периодов получаем, что все $\tilde{\tilde{c}}_j = 0, \ \ j = 1, ..., n+s$. Далее доказательство продолжается, как и для набора (9). Теорема 1.6.2 доказана.

Следствие 1.6.1. *Векторное расслоение*

$$E'_4 = \bigcup H^1_{hol,\rho}(F'_\mu) = \bigcup \Omega_\rho(1; F'_\mu)/\Omega_{e,\rho}(1; F'_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-2$ *над базой* $\mathbb{T}_{g,n} \times (Hom(\Gamma', \mathbb{C}^*) \backslash L_g)$ *при* $g \geq 2, \ n \geq 2.$

Глава 2.

Однозначные дифференциалы на переменной конечной римановой поверхности

Во второй главе впервые изучаются классические абелевы (однозначные) $q-$дифференциалы на *переменной* поверхности типа (g, n). Методы из первой главы примененные к дифференциалам Прима можно успешно применять и для случая абелевых дифференциалов на переменных конечных римановых поверхностях. Таким образом в главе 2 будут построены основы теории абелевых $q-$дифференциалов, как аналог теории дифференциалов Прима, включающие в себя построение элементарных абелевых $q-$дифференциалов ($q \geq 1$) и описание двух важных векторных расслоений таких дифференциалов над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_{g,n}$. Кроме того, для важного класса гиперэллиптических поверхностей, будут построены явные базисы голоморфных абелевых $q-$дифференциалов и дифференциалов Прима для характеров, которые голоморфно зависят от точек ветвления (модулей) гиперэллиптических поверхностей.

§2.1. Элементарные $q-$дифференциалы

Для построения общей теории однозначных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы [4; 9; 20] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. это либо один полюс порядка $m \geq 2$, либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей.

В этом параграфе будет найден общий вид элементарных $q-$дифференциалов на переменной римановой поверхности F'_μ типа (g,n). Пространство M_1 на F'_μ состоит из дифференциалов на F'_μ, которые имеют конечное число полюсов и допускают мероморфное продолжение на F_μ. Пространство M_2 состоит из дифференциалов имеющих конечное число полюсов на F' и в проколах при аналитическом продолжении могут быть изолированные существенно особые точки.

Найдем общий вид q-дифференциалов с единственным полюсом в точке Q точно порядка $m \geq 1$ на F'_μ, где $q \geq 1$.

Теорема 2.1.1. *На переменной римановой поверхности F'_μ типа (g,n), $g \geq 2$, $n \geq 1$, для любых натуральных чисел $m \geq 1, q \geq 1$ существует элементарный q–дифференциал $\tau^{(m)}_{q;Q} = (\frac{1}{z^m}+O(1))dz^q$, $z(Q)=0$, с полюсом в любой точке $Q \in F'_\mu$ точно порядка m класса M_1, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau^{(m)}_{q;Q}) = \frac{R_1\cdots R_N}{Q^m}\cdot\frac{1}{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$, где $k_1>0$, $k_j \geq 0$, $j=2,...,n$, $N=(2g-2)q+m+k_1+...+k_n$, и $\varphi(R_1\cdots R_g) = -2K[\mu]q+\varphi(Q^m)-\varphi(R_{g+1}\cdots R_N)+\varphi(P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n})$ в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. При этом точки $R_{g+1},\dots,R_N$ и $Q=Q[\mu]$ выбираются как локально голоморфные сечения расслоений целых дивизоров степени $N-g$ и 1 над достаточно малыми односвязными окрестностями из $\mathbb{T}_{g,n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана-Роха для q-дифференциалов на F_μ [13] найдем размерность $i_q(\frac{1}{Q^mP_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}) = \dim_{\mathbf{C}}\Omega^q(\frac{1}{Q^mP_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}})$, где $k_j \geq 0, k_j \in \mathbb{N}, j=1,\dots,n$. Имеем $i_q(D) = (g-1)(2q-1)-\deg D + r(\frac{Z_\mu^{q-1}}{D})$, где $D=\frac{1}{Q^mP_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}$, Z_μ^{q-1} — канонический класс дивизоров однозначных $(q-1)$-дифференциалов на F_μ. Отсюда

$$i_q(\frac{1}{Q^mP_1^{k_1}\dots P_n^{k_n}}) = (g-1)(2q-1)+m+k_1+\dots+k_n \geq 2.$$

Здесь $r(\frac{Z_\mu^{q-1}}{D})=0$, так как $\deg(\frac{Z_\mu^{q-1}}{D})>0$ при наших условиях. Действительно, имеем $\deg Z_\mu^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geq 0$ и $\deg(\frac{1}{D}) \geq m \geq 1 > 0$. Также этот факт можно доказать по-другому. Если существует однозначная функция $h \neq 0$ на F_μ с условием $(h) \geq Q^m P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n} Z_\mu^{q-1}$, то $0 = \deg(h) \geq \deg(Q^m P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n} Z_\mu^{q-1}) \geq 1$. Противоречие.

Ясно, что $i_q(\frac{1}{Q^m P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}) = i_q(\frac{1}{Q^{m-1} P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}) + 1$. Следовательно существует q-дифференциал $\tau_{q;Q}^{(m)}$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ, т. е. $(\tau_{q;Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}$ на F_μ, $R_j \neq Q$, $j = 1, \dots, N = (2g-2)q + m + k_1 + \dots + k_n$, так как степень $\deg(\tau_{q;Q}^{(m)}) = (2g-2)q$ на F_μ и $(\tau_{q;Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m}$ на F'_μ.

Такие q-дифференциалы можно задавать в виде $\tau_{q;Q}^{(m)} = f\omega_0^q$ из класса M_1 на F_μ. Дивизор

$$(\tau_{q;Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \dots R_N}{(\omega_0)^q Q^m} \cdot \frac{(\omega_0)^q}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}}, \quad k_1 > 0, k_j \geq 0, j = 2, \dots, n,$$

$$(f) = \frac{R_1 \cdots R_N}{(\omega_0)^q Q^m} \cdot \frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}},$$

где точка Q не принадлежит дивизору фиксированного голоморфного абелева 1-дифференциала ω_0 на F_μ. Эти дифференциалы определяются неединственно из-за своих нулей и полюсов на F_μ.

Зафиксируем $k_1, \dots, k_n$, как порядки возможных полюсов в точках $P_1, \dots, P_n$ соответственно. Отсюда по классической теореме Абеля для функции f получаем уравнение

$$\varphi_{P_0}(R_1 \dots R_N) = \varphi_{P_0}(Q^m) + \varphi_{P_0}(P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}) - 2K[\mu]q$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, где $K[\mu]$ — вектор констант Римана, голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей F_μ, и от выбора базисной точки P_0 [20]. Следовательно,

$$\varphi(R_1 ... R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) + \varphi(P_1^{k_1} ... P_n^{k_n}) - \varphi(R_{g+1} ... R_N). \qquad (1)$$

Таким образом, для определения нулей нашего дифференциала имеем $N - g = m + (2g-2)q - g + k_1 + \dots + k_n > g - 2$ свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на $F'_\mu \backslash \{Q\}$ и голоморфно зависящими от модулей $[\mu]$. Решая проблему обращения Якоби, найдем дивизор $R_1 \dots R_g$, который будет единственным голоморфным решением уравнения, если правая сторона в равенстве (1) не принадлежит $W^1_g[\mu]$ [13; 20]. Это можно сделать так как $\dim W^1_g[\mu] \le g-2$, но $N-g > g-2$.

При этом можно получить, что точки $R_1, \dots, R_g$ тоже отличны от точки Q, и голоморфно зависят от наших параметров, так как правая сторона (1) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$. Докажем от противного. Действительно, пусть $R_1 = Q$, тогда имеем равенство

$$\varphi(R_2...R_g) = -2Kq + \varphi(Q^{m-1}) + \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}) - \varphi(R_{g+1}...R_{2g-1}R_{2g}...R_N).$$

Рассмотрим дивизор $D = R_2 \dots R_g R_{g+1} \dots R_{2g-1}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \dots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках [20] и классической теореме Римана-Роха имеем неравенство

$$g - 1 + 1 \le r(\frac{1}{D}) = 2g - 2 - g + 1 + i(D),$$

и $i(D) \ge 1$. Поэтому существует ненулевой голоморфный абелев 1-дифференциал ω на F_μ такой, что $(\omega) \ge D$, а значит $(\omega) = D$. Отсюда получаем, что $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде

$$-2K(1-q) - \varphi(Q^{m-1}) - \varphi(P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}) = \varphi(R_{2g} \dots R_N).$$

Заметим, что $N - (2g-1) \ge 1$ при $q \ge 1$ и $g > 1, \;\; k_1 > 0$. Множество заданное выражением слева будет нульмерно, а справа будет не менее, чем одномерно. Следовательно можно выбрать точки $R_{2g}, \dots, R_N$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Противоречие. Поэтому точка Q будет действительно единственным полюсом точно порядка m для нашего дифференциала $\tau^{(m)}_{q;Q}$ на F'_μ.

Таким образом, дивизор $(\tau^{(m)}_{q;Q}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m} \frac{1}{P_1^{k_1} \dots P_n^{kn}}$ имеет наиболее общий вид для q-дифференциалов $\tau_{q;Q}^{(m)}$ класса M_1 с единственным полюсом Q точно порядка $m \geq 1$ на $F'_\mu = F_\mu \backslash \{P_1, \ldots, P_n\}$.

Следовательно существует дифференциал $\tilde{\tau}_{q;Q}^{(m)}$ с разложением

$$\tilde{\tau}_{q;Q}^{(m)} = (\frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m+1}}{z^{m-1}} + ... + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + O(1))dz^q, \quad c_{-m} \neq 0, z(Q) = 0.$$

В частности имеем разложение

$$\tilde{\tau}_{q;Q}^{(2)} = (\frac{1}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + C_0 + C_1 z + \ldots)dz,$$

где c_{-1} - вычет в полюсе Q для некоторой ветви этого дифференциала на F_μ. Рассмотрим дифференциал

$$\tau_{q;Q}^{(2)} = \tilde{\tau}_{q;Q}^{(2)} - c_{-1}\tau_{q;Q} = (\frac{1}{z^2} + O(1))dz.$$

Дальше будем рассуждать по индукции относительно параметра m. Пусть по предположению индукции утверждение верно для $(m-1)$ включительно и докажем утверждение для m. Для данного m имеем дифференциал вида (2). Тогда получим некоторую ветвь дифференциала

$$\tau_{q;Q}^{(m)} = \frac{\tilde{\tau}_{q;Q}^{(m)} - c_{-1}\tau_{q;Q} - c_{-2}\tau_{q;Q}^{(2)} - \ldots - c_{-m+1}\tau_{q;Q}^{(m-1)}}{c_{-m}} = (\frac{1}{z^m} + O(1))dz^q,$$

где $z(Q) = 0$. Теорема доказана.

Найдем общий вид $q-$дифференциалов третьего рода с единственными простыми полюсами в различных точках Q_1, Q_2 на F'_μ, где $q \geq 1$.

Теорема 2.1.2. *На переменной римановой поверхности F'_μ типа (g,n), $g \geq 2$, $n \geq 1$, для любого натурального числа $q \geq 1$ существует элементарный q–дифференциал $\tau_{q;Q_1Q_2}$ класса M_1 третьего рода точно с простыми полюсами $Q_1 = Q_1[\mu], Q_2 = Q_2[\mu] \in F'_\mu$, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{q;Q_1Q_2}) = \frac{R_1 \cdots R_N}{Q_1Q_2} \cdot \frac{1}{P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}}, k_1 > 0, \ k_j \geq 0, \ j = 2, ..., n, \ N = (2g-2)q+2+k_1+...+k_n$, где $\varphi(R_1 \cdots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1} \cdots R_N) + \varphi(P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n})$*

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. *При этом точки* $R_{g+1},...,R_N$ *и* $Q_1 = Q_1[\mu]$, $Q_2 = Q_2[\mu]$ *выбираются как локально голоморфные сечения расслоений целых дивизоров степени* $N-g$ *и 2 над достаточно малыми односвязными окрестностями из* $\mathbb{T}_{g,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $q \geq 1$ такие дифференциалы τ_{q,Q_1Q_2} можно получить в виде $\tau = f\omega_0^q$, где f — однозначная функция имеющая дивизор $(f) = \frac{R_1\cdots R_N}{(\omega_0)^q Q_1Q_2} \cdot \frac{1}{P_1^{k_1}...P_n^{k_n}}$, где $N = (2g-2)q + 2 + k_1 + ... + k_n$ и

$$\varphi(R_1...R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}). \quad (2)$$

Дивизор $R_1 \dots R_g$ будет единственным решением уравнения (2), если правая сторона не принадлежит $W_g^1[\mu]$, это возможно так как $N-g > g-2$ при наших условиях. При этом можно выбрать точки $R_j \neq Q_1, Q_2$, $j = g+1, \dots, N$, и локально голоморфно зависящие от $[\mu]$. Кроме того, точки $R_1, \dots, R_g$ тоже можно выбрать отличными от точек Q_1, Q_2. Докажем это от противного.

1) Пусть $R_1 = Q_1$. Тогда получаем равенство

$$\varphi(R_2...R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_2) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}).$$

Рассмотрим дивизор $D = R_2 \dots R_g R_{g+1} \dots R_{2g-1}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \dots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках получаем неравенство $i(D) \geq 1$. Поэтому $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде

$$-2K(q-1) + \varphi(Q_2) - \varphi(P_1^{k_1}...P_n^{k_n}) = \varphi(R_{2g} \dots R_N).$$

Заметим, что $N - (2g-1) \geq 1$ при $q \geq 1$ и $g > 1$. Следовательно можно выбрать точки $R_{2g}, \dots, R_N$ так на $F'_\mu \backslash \{Q_1, Q_2\}$, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Противоречие. Поэтому точка Q_1 будет действительно полюс точно простого порядка для нашего дифференциала на F'_μ.

2) Пусть $R_1 = Q_1, R_2 = Q_2$. Тогда получаем равенство

$$\varphi(R_3 \ldots R_g) = -2K[\mu]q - \varphi(R_{g+1} \ldots R_N) + \varphi(P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}).$$

Рассмотрим дивизор $D = R_3 \ldots R_g \cdot R_{g+1} \ldots R_{2g}$ степени $2g-2$ с $g-1$ свободными точками $R_{g+1}, \ldots, R_{2g-1}$. По теореме о свободных точках снова имеем неравенство $i(D) \geq 1$. Поэтому $\varphi(D) = -2K$. Предыдущее равенство перепишется в другом виде

$$-2K(q-1) - \varphi(P_1^{k_1} \ldots P_n^{k_n}) = \varphi(R_{2g+1} \ldots R_N).$$

Заметим, что $N - 2g \geq 1$ при $q \geq 1, \quad g > 1, \quad k_1 > 0$. Следовательно можно выбрать точки $R_{2g+1}, \ldots, R_N$ так, чтобы это соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Противоречие. Поэтому точки Q_1, Q_2 будут действительно единственными полюсами точно первого порядка для нашего дифференциала на F'_μ. Теорема доказана.

Замечание 2.1.1. Из теоремы 2.1.1, в частном случае при $m = 1$, можно получить только более короткое доказательство существования дифференциала $\tau_{q;Q_1Q_2} = \tau_{q;Q_1} + \tau_{q;Q_2}$ на F'_μ для любого $q \geq 1$. Однако это равенство не позволяет описать явно общий вид дивизора для дифференциала $\tau_{q;Q_1Q_2}$.

§2.2. Векторные расслоения однозначных мероморфных дифференциалов над пространствами Тейхмюллера

В этом параграфе будут изучены два основных типа векторных расслоений, со слоями состоящими из q-дифференциалов, над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_{g,n}$.

Обозначим через $\Omega_2(F'_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов класса M_1 второго рода на F'_μ, а через $\Omega_{2,e}(F'_\mu)$ – подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменной поверхности F'_μ [9; 20].

Обозначим через $\widetilde{E}_1 = \bigcup \Omega_2(F'_\mu)/\Omega_{2,e}(F'_\mu)$ векторное расслоение у которого над точкой $[\mu]$ из базы $\mathbb{T}_{g,n}$ лежит слой $\Omega_2(F'_\mu)/\Omega_{2,e}(F'_\mu)$.

Теорема 2.2.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n-1$ над базой $\mathbb{T}_{g,n}$ при $g \geq 2, \ \ n \geq 1$. При этом наборы классов смежности дифференциалов: либо*

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{P_1}^{(n_1+1)}, ..., \tau_{P_1}^{(n_g+1)}, \tau_{P_2P_1}, ..., \tau_{P_nP_1}, \tag{3}$$

либо

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{\widetilde{P}_1}^{(2)}, ..., \tau_{\widetilde{P}_g}^{(2)}, \tau_{P_2P_1}, ..., \tau_{P_nP_1} \tag{4}$$

задают базисы локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, \ldots, n_g$ – пробелы Вейерштрасса в P_1 на F_μ и $r(\frac{1}{\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g}) = 1$ на F_μ, где $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g \in F'_\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим отображение Φ из пространства $\Omega_2(F'_\mu)/\Omega_{2,e}(F'_\mu)$ на $\mathbb{C}^{2g+n-1}$ по правилу: сопоставляя ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi : \omega \to (\int\limits_{a_1^\mu} \omega, ..., \int\limits_{a_g^\mu} \omega, \int\limits_{b_1^\mu} \omega, ..., \int\limits_{b_g^\mu} \omega, \int\limits_{\gamma_1^\mu} \omega, ..., \int\limits_{\gamma_{n-1}^\mu} \omega) \in \mathbb{C}^{2g+n-1}.$$

Ядро отображения Φ совпадает с $\Omega_{2,e}(F'_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды равны нулю, то и $\int\limits_{\gamma_n^\mu} \omega = 0$, а значит и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F'_μ и принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F'_\mu)$. Так как отображение Φ взаимнооднозначно и линейно на фактор пространстве, то

$$\dim \Omega_2(F'_\mu)/\Omega_{2,e}(F'_\mu) \leq 2g + n - 1.$$

Докажем обратное неравенство $\dim \Omega_2(F'_\mu)/\Omega_{2,e}(F'_\mu) \geq 2g + n - 1$ и построим два базиса в этом фактор пространстве.

Возьмем мероморфные дифференциалы из списка (3) на поверхности F'_μ. Покажем, что классы смежности с такими дифференциалами будут линейно независимыми над $\mathbb{C}$ на F'_μ. От противного. Предположим, что существует линейная комбинация с ненулевыми комплексными коэффициентами равная нулевому классу, тогда верно равенство

$$c_1\zeta_1 + ... + c_g\zeta_g + \widetilde{c}_1\tau_{P_1}^{(n_1+1)} + ... + \widetilde{c}_g\tau_{P_1}^{(n_g+1)} + \widetilde{\widetilde{c}}_1\tau_{P_2P_1} + ... + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}\tau_{P_nP_1} = df,$$

где df – точный дифференциал второго рода на F'_μ и при аналитическом продолжении с F'_μ на F_μ в проколах он может иметь либо устранимые особые точки (у.о.т.), либо полюса, либо существенно особые точки (с.о.т.).

Пусть $\widetilde{\widetilde{c}}_1 \neq 0$, обойдем точку P_2 по малой петле, но тогда выражение слева будет иметь период $2\pi i \cdot \widetilde{\widetilde{c}}_1$, а для правой стороны этот период равен нулю. По-другому, сразу считаем периоды по малым петлям обходящим отдельно вокруг точек $P_2, ..., P_n$, и получаем, что они равны числам $\widetilde{\widetilde{c}}_1, ..., \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}$ (умноженным на $2\pi i$) соответственно, но для правой части эти периоды равны нулю. Таким образом, $\widetilde{\widetilde{c}}_1 = ... = \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1} = 0$.

Рассмотрим коэффициент $\widetilde{c}_g$. Если у функции f в точке P_1 при продолжении на F_μ будет единственный полюс порядка n_g на F_μ, то это невозможно из-за пробелов Вейерштрасса в точке P_1, и $\widetilde{c}_g = 0$ [9; 20].

Если df при аналитическом продолжении с F'_μ на F_μ имеет в одном проколе полюс или с.о.т., например в проколе P_1, то в P_1 слева и справа различные особые точки и получаем противоречие. Таким образом доказали, что $\widetilde{c}_1 = ... = \widetilde{c}_g = 0$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $c_1, ..., c_g$. Если при аналитическом продолжении df в проколах имеем полюса или с.о.т., то их нет у комбинации $\sum_{j=1}^{g} c_j\zeta_j$ на F_μ. Поэтому f будет голоморфна на F_μ, и значит f будет константой, $df = 0$. Получили противоречие с линейной независимостью $\zeta_1, ..., \zeta_g$ на F_μ. Отсюда $c_1 = ... = c_g = 0$. Таким образом доказали, что дифференциалы

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{P_1}^{(n_1+1)}, ..., \tau_{P_1}^{(n_g+1)}, \tau_{P_2P_1}, ..., \tau_{P_nP_1}$$

представляют линейно независимые классы смежности над $\mathbb{C}$ нашего фактор пространства на F'_μ и его размерность $\geq 2g + n - 1$.

Следовательно размерность нашего фактор пространства равна $2g + n - 1$ и построен явный базис (3) в фактор пространстве.

Обозначим через $P_1, ..., P_n$ проколы и они фиксированы. Выберем точки $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ на F'_μ с условием $i(\widetilde{P}_1 ... \widetilde{P}_g) = 0$ или это равносильно тому, что не существует мероморфной функции f на F_μ с такими простыми полюсами. Рассмотрим набор классов смежности дифференциалов из списка (4), для которого надо показать линейную независимость над $\mathbb{C}$. Возможно, что точки $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ попадут на проколы $P_1, ..., P_n$. Тогда придется из списка $\tau_{\widetilde{P}_1}^{(2)}, ..., \tau_{\widetilde{P}_g}^{(2)}$ удалить часть этих дифференциалов и значит не наберем нужное для нашей оценки число линейно независимых классов.

Применим технику шевеления дивизоров степени g, т. е. чтобы точки $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ не попадали в проколы, но при этом по прежнему составляли не специальный дивизор [20].

Известно, что в пространстве F_g (всех целых дивизоров степени g на F) множество всех специальных дивизоров образуют замкнутое подмногообразие положительной комплексной коразмерности. В частности, множество всех не специальных дивизоров будет открыто и плотно в F_g [20].

Пусть все $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ попали в проколы, обозначим их через $\widetilde{P}_1 = P_1, ...,$ $\widetilde{P}_g = P_g$. Рассмотрим малые фиксированные диски окружающие эти точки и непересекающиеся друг с другом, а также не содержащие остальные проколы. Возьмем в этих окрестностях близкие точки $\widetilde{\widetilde{P}}_1, ..., \widetilde{\widetilde{P}}_g$ отличные от $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ соответственно. Если оказалось, что $i(\widetilde{\widetilde{P}}_1 ... \widetilde{\widetilde{P}}_g) \neq 0$, то возьмем фиксированные окрестности этих точек не содержащие точек $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ и лежащие в тех же окрестностях. Тогда учитывая открытость множества не специальных дивизоров F_g, возьмем точки $P'_1, ..., P'_g$ близкие к $\widetilde{\widetilde{\widetilde{P}}}_1, ..., \widetilde{\widetilde{\widetilde{P}}}_g$ соответственно, для которых $i(P'_1...P'_g) = 0$.

Рассмотрим снова список (4), уже с условием, что $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ не попадают ни в один из проколов. Предположим, что существует линейная комбинация классов смежности

$$c_1[\zeta_1] + ... + c_g[\zeta_g] + \widetilde{c}_1[\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}] + ... + \widetilde{c}_g[\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}] + \widetilde{\widetilde{c}}_1[\tau_{P_2P_1}] + ... + \widetilde{\widetilde{c}}_{n-1}[\tau_{P_nP_1}] = [df],$$

где не все коэффициенты равны нулю. Тогда аналогично, как раньше получим, что $\widetilde{\widetilde{c}}_j = 0, j = 1, ..., n-1$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $\widetilde{c}_j, j = 1, ..., g$. Напомним, что точки $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ лежат внутри F'_μ. Если df имеет у.о.т. во всех проколах, то это равенство на F_μ влечет, что существует мероморфная функция с простыми полюсами в $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$, но по выбору этих точек это невозможно. Если df при продолжении на F_μ имеет хотя бы один полюс или с.о.т. в одном из проколов, то для комбинации слева эта точка (прокол) не будет особой, а для df она особая. Противоречие. Таким образом, $\widetilde{c}_j = 0, j = 1, ..., g$.

Аналогично, как раньше, получается, что все $c_j = 0, j = 1, ..., g$. Таким образом, доказали оценку снизу для набора (4).

Кроме того, эти дифференциалы локально голоморфно зависят от параметров $[\mu]$ по доказанному ранее предложению 1.2.2 и 1.2.3. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. *Голоморфное векторное расслоение* $\widetilde{E}_1$ *аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению ранга* $2g+n-1$ *над* $\mathbb{T}_{g,n}$ *при* $g \geq 2, n \geq 1$.

Доказательство сразу следует из теоремы Грауэрта, так как база $\mathbb{T}_{g,n}$

односвязна [21].

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1Q_2...Q_s}; F'_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов класса M_1, у которых в попарно различных точках $Q_1, Q_2, ..., Q_s (\in F'_\mu)$ полюса не выше первого порядка, а через $\Omega_e(1; F'_\mu)$ – подпространство точных голоморфных дифференциалов на переменной поверхности F'_μ.

Положим $\widetilde{E}_2 = \bigcup \Omega(\frac{1}{Q_1Q_2...Q_s}; F'_\mu)/\Omega_e(1; F'_\mu)$ – векторное расслоение у которого над точками $[\mu]$ из базы $\mathbb{T}_{g,n}$ лежат такие фактор пространства. Дивизор $Q_1...Q_s$ понимается как глобальное вещественно аналитическое сечение расслоения целых дивизоров степени s над $\mathbb{T}_{g,n}$ [19], причем точки $Q_j, j = 1, ..., s$, не совпадают с проколами $P_1, ..., P_n$ для F_μ.

Теорема 2.2.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g+n+s-1$ над базой $\mathbb{T}_{g,n}$ при $g \geq 2, \ \ n \geq 1, \ \ s \geq 1$. При этом набор классов смежности дифференциалов*

$$\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_g, \tau_{P_1}^{(n_1+1)}, \tau_{P_1}^{(n_2+1)}, ..., \tau_{P_1}^{(n_g+1)},$$

$$\tau_{P_2P_1}, \tau_{P_3P_1}, ..., \tau_{P_nP_1}, \tau_{Q_1P_1}, \tau_{Q_2P_1}, ..., \tau_{Q_sP_1} \tag{5}$$

задает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим отображение из $\Omega(\frac{1}{Q_1Q_2...Q_s}; F'_\mu)$ на $\mathbb{C}^{2g+n+s-1}$ по правилу

$$\omega \to (\int_{a_1^\mu} \omega, \int_{a_2^\mu} \omega, ..., \int_{a_g^\mu} \omega, \int_{b_1^\mu} \omega, \int_{b_2^\mu} \omega, ..., \int_{b_g^\mu} \omega,$$

$$\int_{\gamma_1^\mu} \omega, \int_{\gamma_2^\mu} \omega, ..., \int_{\gamma_{n-1}^\mu} \omega, \int_{d_1} \omega, \int_{d_2} \omega, ..., \int_{d_s} \omega),$$

где γ_k^μ – простая петля, обходящая только точку $P_k, \ \ k = 1, ..., n$, а $\ \ d_j$ – простая петля, обходящая только точку $Q_j, \ \ j = 1, ..., s$.

Если эти $2g+n-1+s$ периода равны нулю для дифференциала ω, то все его периоды будут равны нулю на F'_μ, а значит, дифференциал ω

будет точным на F'_μ. Кроме того, $res_{Q_j}\omega = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d_j}\omega = 0$ для любого $j = 1, ..., s$. Поэтому этот дифференциал ω будет голоморфным на F'_μ, т. е. $\omega \in \Omega_e(1; F'_\mu)$. Следовательно это отображение корректно определено на классах смежности нашего фактор пространства. Причем отображение будет взаимно однозначно и линейно. Отсюда следует, что размерность этого фактор пространства будет меньше или равна $2g + n - 1 + s$.

Докажем обратное неравенство для размерностей и построим базис этого фактор пространства. Покажем, что классы смежности дифференциалов из набора (5) будут на F'_μ линейно независимыми над $\mathbb{C}$.

От противного. Предположим, что существует линейная комбинация с ненулевыми комплексными коэффициентами равная нулевому классу, тогда верно равенство

$$c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + ... + c_g\zeta_g + \widetilde{c}_1\tau_{P_1}^{(n_1+1)} + \widetilde{c}_2\tau_{P_1}^{(n_2+1)} + ... + \widetilde{c}_g\tau_{P_1}^{(n_g+1)} +$$

$$+c'_1\tau_{P_2P_1} + c'_2\tau_{P_3P_1} + ... + c'_{n-1}\tau_{P_nP_1} + \widetilde{c'}_1\tau_{Q_1P_1} + \widetilde{c'}_2\tau_{Q_2P_1} + ... + \widetilde{c'}_s\tau_{Q_sP_1} = df,$$

где f - однозначная голоморфная функция на F'_μ. Эта функция f при продолжении на F_μ не может иметь существенно особых точек, так как их нет для левой части равенства на F_μ.

Коэффициенты $c'_1 = ... = c'_{n-1} = \widetilde{c'}_1 = ... = \widetilde{c'}_s = 0$, так как в противном случае функция f будет иметь логарифмические особые точки в $P_2, P_3, ..., P_n, Q_1, Q_2, ..., Q_s$ на F'_μ и не будет однозначной в окрестностях этих точек.

Пусть среди чисел $\widetilde{c}_1, ..., \widetilde{c}_g$ есть ненулевые, тогда: если функция f при продолжении с F'_μ на F_μ имеет мероморфное продолжение, то она в точке P_1 имеет единственный полюс точно порядка n_j для некоторого j, что невозможно из-за пробелов в P_1. Таким образом, $\widetilde{c}_1 = ... = \widetilde{c}_g = 0$.

Пусть среди чисел $c_1, c_2, ..., c_g$ есть ненулевые, тогда:

1) если функция f при продолжении с F'_μ на F_μ имеет мероморфное продолжение, например полюс в проколе P_1, то в P_1 в равенстве дифференциалов слева и справа различные особые точки. Следовательно числа $c_1 = ... = c_g = 0$;

2) если функция f при продолжении с F'_μ на F_μ имеет только устранимые особые точки в проколах $P_1, ..., P_n$, то df - голоморфный дифференциал и f - однозначная голоморфная функция на F_μ. Поэтому f будет постоянной и $df = 0$ на F_μ. Но дифференциалы $\zeta_1, ..., \zeta_g$ являются линейно независимыми над $\mathbb{C}$ и значит $c_1 = ... = c_g = 0$.

Поэтому дифференциалы из набора (5) представляют линейно независимые над $\mathbb{C}$ классы смежности нашего фактор пространства на F'_μ и его размерность больше или равна $2g + n - 1 + s$.

Следовательно размерность будет равна $2g + n - 1 + s$ и построен явный базис в фактор пространстве, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$. Теорема 2.2.1 доказана.

Замечание 2.2.1. Обозначим через $H^1_{hol}(F'_\mu)$ (первую голоморфную группу когомологий де Рама на F'_μ) фактор пространство полученное факторизацией пространства голоморфных 1-дифференциалов на F'_μ по подпространству точных голоморфных дифференциалов. Векторное расслоение $\widetilde{E} = \bigcup H^1_{hol}(F'_\mu)$ над $\mathbb{T}_{g,n}$ ранга $2g + n - 1$ аналитически эквивалентно тривиальному голоморфному векторному расслоению того же ранга по теореме Грауэрта. Этот результат доказан в книге [20, с.88-90] для фиксированной поверхности типа (g, n).

§2.3. Базисы голоморфных дифференциалов на переменных гиперэллиптических римановых поверхностях

В этом параграфе, так как для гиперэллиптической поверхности теорема Нётера [20] не применима, предлагается другой способ построения базисов голоморфных и мероморфных абелевых $q-$дифференциалов и $(\rho, q)-$дифференциалов Прима для любых характеров на переменной гиперэллиптической римановой поверхности.

По определению на гиперэллиптической римановой поверхности F рода $g \geq 2$ существует мероморфная однозначная функция z, имеющая точно два полюса с учетом кратности, причем эта функция будет единственна с точностью до дробно-линейных преобразований в плоскости переменного z [9; 20]. Точки ветвления функции z есть точно все $2g+2$ точки Вейерштрасса на F. Без ограничения общности можно считать, что $e_j = z(P_j) \neq \infty$, $j = 1, ..., 2g+2$, где $P_1, ..., P_{2g+2}$ – точки ветвления функции z на F. В книге [20, с. 102] показано, что функция

$$w = \sqrt{\prod_{j=1}^{2g+2} (z - z(P_j))}$$

является однозначной мероморфной на F с дивизором

$$(w) = P_1 ... P_{2g+2} / Q_1^{g+1} Q_2^{g+1},$$

где $Q_1 Q_2$ – полярный дивизор для z на F.

С помощью пары таких функций z и w можно задать саму F_e в виде комплексной кривой, аффинная часть которой определяется уравнением:

$$S_{F_e} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j), e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = -1\}, \qquad (I)$$

где $e = (e_1, ..., e_{2g+2}) \in \mathbb{C}^{2g+2}$. После добавления конечного числа точек к S_{F_e} она будет компактной римановой поверхностью F_e рода $g \geq 2$ [9; 20].

Каждая переменная гиперэллиптическая риманова поверхность F_e рода $g \geq 2$ имеет единственную реализацию в виде:

$$w^2 = z(z-1) \prod_{k=1}^{2g-1} (z - e_k), \qquad (II)$$

где $e_1, ..., e_{2g-1}$ – попарно различные точки на $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, и $P_1 = z^{-1}(0)$, $P_2 = z^{-1}(1), P_{j+2} = z^{-1}(e_j), j = 1, ..., 2g-1$, и $P_{2g+2} = z^{-1}(\infty)$.

Множество всех гиперэллиптических римановых поверхностей F_e рода $g \geq 2$ параметризуется точками $e = (e_1, ..., e_{2g-1})$ из пространства $[\mathbb{C}\setminus\{0,1\}]^{2g-1}\setminus M$, где M есть обьединение всех множеств вида $\{e_j = e_k, j \neq k,\ j, k = 1, ..., 2g-1\}$.

Теорема [20, с. 350]. *Точки ветвления для двулистного представления переменной гиперэллиптической римановой поверхности являются голоморфными функциями от матрицы периодов. Кроме того, переменная отмеченная гиперэллиптическая риманова поверхность полностью определяется по своей матрице периодов.*

Предложение [20]. *Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$. Тогда F - гиперэллиптическая риманова поверхность, если и только если существует конформная инволюция J на F, т. е. $J^2 = id$, которая имеет $2g+2$ неподвижных точек.*

Следствие [20]. *Если $g \geq 2$, то каждая неподвижная точка для гиперэллиптической инволюции есть точка Вейерштрасса для этой поверхности.*

Будем обозначать через (F, Σ) пару, где F – компактная риманова поверхность рода g и Σ – упорядоченный набор $a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g$ гомотопических классов петель, образующих каноническое рассечение на F, или упорядоченный набор образующих в $\pi_1(F)$. Следуя Л. В. Альфорсу [1, с. 60] пары $[F_0, \Sigma_0]$ и $[F, \Sigma]$ – отмеченных гиперэллиптических римановых поверхностей рода $g \geq 2$, с инволюциями J_0 и J соответственно, назовем гиперэллиптически эквивалентными, если отображение, переводящее $[F_0, \Sigma_0]$ на $[F, \Sigma]$, переводит также $J_0\Sigma_0$ в систему эквивалентную $J\Sigma$. Это отношение эквивалентности совместимо с конформной эквивалентностью отмеченных компактных римановых поверхностей. Обозначим через $\mathbb{H}_g$ множество классов конформной эквивалентности отмеченных гиперэллиптических римановых поверхностей рода $g \geq 2$. Тогда $\mathbb{H}_g \subset \mathbb{T}_g$. Множество $\mathbb{H}_g$ разлагается на классы гиперэллиптически эквивалентных поверхностей. Эти классы являются связными компонентами $\mathbb{H}_g$ в топологии Тейхмюллера, причем эти компоненты замкнуты и изолированы. Л. В. Альфорс [1, с. 68; 79] доказал, что на каждой компоненте $\mathbb{H}_g$ существует единственная комплексно-аналитическая структура, совместимая с топологией Тейхмюллера, относительно которой голоморфна матрица из $b-$периодов. Эта структура имеет комплексную размерность $2g-1$. Кроме того, топология Тейхмюллера на $\mathbb{H}_g$ совпадает с топологией, которая определяется расположением точек ветвления в стандартном представлении (II) для гиперэллиптической римановой поверхности. Кроме того, связные компоненты в $\mathbb{H}_g$ являются аналитическими подмногообразиями без особенностей в пространстве $\mathbb{T}_g$ при $g \geq 2$.

Дифференциалы вида $\frac{z^j dz}{w}$, $j = 0, ..., g-1$, образуют базис голоморфных абелевых дифференциалов на F_e рода $g \geq 2$, которые голоморфно зависят от модулей e отмеченных гиперэллиптических римановых поверхностей. Действительно, если $(z) = Q_3Q_4/Q_1Q_2$, то

$$(dz) = \frac{P_1...P_{2g+2}}{Q_1^2Q_2^2}, (\frac{z^j dz}{w}) = \frac{(z)^j(dz)}{(w)} = Q_1^{g-j-1}Q_2^{g-j-1}Q_3^jQ_4^j \geq 1$$

при $0 \leq j \leq g-1$. Отсюда

$$(\zeta_1, ..., \zeta_g) = \frac{dz}{w}(1, z, ..., z^{g-1})(X^t)^{-1}$$

– канонический базис голоморфных абелевых дифференциалов на отмеченной переменной гиперэллиптической римановой поверхности $[F_e, \{a_j^e, b_j^e\}_{j=1}^g]$, где $X = (x_{ij})$,

$$x_{ij} = \int_{a_j} \frac{z^{i-1}dz}{w} = 2\int_{e_{2j-1}}^{e_{2j}} \frac{z^{i-1}dz}{w}, i, j = 1, ..., g, [20, c.322].$$

Заметим, что дифференциалы $\frac{z^j dz}{w}$ при $j \geq g$ будут мероморфными на F_e с полюсами в Q_1, Q_2. При $j = g$ дифференциал $\frac{z^g dz}{w}$ будет абелевым дифференциалом третьего рода на F_e с простыми полюсами Q_1, Q_2 при $Q_1 \neq Q_2$, а

$$\tau_{Q_1Q_2} = (res_{Q_1}\frac{z^g dz}{w})^{-1}[\frac{z^g dz}{w} - \sum_{j=1}^{g}(\int_{a_j}\frac{z^g dz}{w})\zeta_j]$$

– нормированный абелев дифференциал третьего рода на F_e с простыми полюсами в Q_1 и Q_2 с вычетами $+1$ и -1 соответственно, голоморфно зависящий от e. При $j \geq g+1$ дифференциалы $\frac{z^j dz}{w}$ будут абелевыми дифференциалами второго рода на F_e с полюсами в Q_1 и Q_2 порядка $j - g + 1 (\geq 2)$, голоморфно зависящими от модулей e.

Предложение 2.3.1. *На переменной гиперэллиптической римановой поверхности F_e рода $g \geq 2$:*

1) двукратные произведения базисных голоморфных абелевых дифференциалов порождают $(2g-1)$-мерное подпространство в $(3g-3)$-мерных слоях голоморфного векторного расслоения $\bigcup \Omega^2(1; F_e)$ над пространством $\mathbb{H}_g$ гиперэллиптических римановых поверхностей, причем $2g - 1 = 3g - 3 \Longleftrightarrow g = 2$.

2) при $q \geq 3$ q-кратные произведения базисных голоморфных абелевых дифференциалов порождают $(q(g-1)+1)$-мерное подпространство в $(2q-1)(g-1)$-мерном пространстве $\Omega^q(1; F_e)$ слое векторного расслоения над $\mathbb{H}_g$, при этом равенство $(2q-1)(g-1) = q(g-1)+1$ выполняется, если и только если $q = 2, g = 2$. Таким образом, при $g \geq 3$ это подпространство всегда собственное при любом $q \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Набор состоящий из голоморфных квадратичных дифференциалов следующего вида

$$\frac{z^{k+j}dz^2}{w^2}, 0 \leq k + j \leq 2(g-1), \tag{6}$$

порождает $(2g-1)$-мерное подпространство. Для получения полного базиса в пространстве $\Omega^2(1;F_e)$ на F_e рода $g\geq 3$, нужно к набору (6) добавить еще множество из $g-2$ голоморфных квадратичных дифференциалов

$$\frac{z^j dz^2}{w}, j=0,...,g-3,$$

на F_e. Действительно, дивизоры

$$(\frac{z^j dz^2}{w}) = (\frac{z^j dz}{w})(dz) = Q_1^{g-j-1}Q_2^{g-j-1}Q_3^jQ_4^j\frac{P_1...P_{2g+2}}{Q_1^2Q_2^2} =$$

$$Q_1^{g-j-3}Q_2^{g-j-3}Q_3^jQ_4^jP_1...P_{2g+2}\geq 1$$

только при $g-j-3\geq 0$ или при $0\leq j\leq g-3$.

2) Рассмотрим набор голоморфных q-дифференциалов вида:

$$\frac{z^{j_1}...z^{j_q}}{w^q}dz^q, 0\leq j_k\leq g-1, k=1,...,q. \tag{7}$$

Тогда $0\leq j_1+...+j_q\leq q(g-1)$ и этот набор образует базис в $(q(g-1)+1)$-мерном подпространстве. Заметим, что равенство $(2q-1)(g-1)=q(g-1)+1$ выполняется если и только если $q=2, g=2$. Поэтому, при $g\geq 3$ это подпространство всегда собственное при любом $q\geq 2$ на F_e. Предложение доказано.

Теорема 2.3.2. *Для любого $q\geq 2$ к набору (7) нужно добавить $(q-1)(g-1)-1$ голоморфных $q-$дифференциалов на переменной гиперэллиптической римановой поверхности F_e рода $g\geq 2$ так, чтобы объединение дало базис в $\Omega^q(1;F_e)$, причем их можно конструктивно выбрать из следующего набора q-дифференциалов на F_e :*

$$k=1; \frac{z^j dz^q}{w}, j=0,1,...;$$

$$k=2; \frac{z^j dz^q}{w^2}, j=0,1,...;$$

$$...$$

$$k = s; \frac{z^j dz^q}{w^s}, j = 0, 1, ...; \tag{8}$$

$$...$$

$$k = q-1; \frac{z^j dz^q}{w^{q-1}}, j = 0, 1, ...$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечисленные в (8) q-дифференциалы будут линейно независимыми над $\mathbb{C}$ на F_e. Но среди них надо отобрать только голоморфные и в нужном числе. Для этого найдем дивизоры этих дифференциалов при $j \geq 0, 1 \leq k \leq q-1$:

$$(\frac{z^j dz^q}{w^k}) = \frac{(\frac{Q_3 Q_4}{Q_1 Q_2})^j (\frac{P_1 ... P_{2g+2}}{Q_1^2 Q_2^2})^q}{\frac{P_1^k ... P_{2g+2}^k}{Q_1^{(g+1)k} Q_2^{(g+1)k}}} = Q_3^j Q_4^j P_1^{q-k} ... P_{2g+2}^{q-k} Q_1^{(g+1)k-j-2q} Q_2^{(g+1)k-j-2q}.$$

Эти дивизоры будут целыми, если и только если $(g+1)k \geq j + 2q$. При следующих условиях соответствующие q-дифференциалы будут голоморфны:

$$k = 1; (g+1) - 2q \geq j \geq 0, \tag{8_1}$$

$$k = 2; (g+1)2 - 2q \geq j \geq 0, \tag{8_2}$$

$$...$$

$$k = s; (g+1)s - 2q \geq j \geq 0, \tag{8_s}$$

$$...$$

$$k = q-1; (g+1)(q-1) - 2q \geq j \geq 0. \tag{8_{q-1}}$$

Рассмотрим первый случай, когда $(g+1) \geq 2q$. Число голоморфных q-дифференциалов на F_e этого вида будет равно

$$(g+1)[1 + 2 + ... + (q-1)] - 2q(q-1) + (q-1) = \frac{q-1}{2}[q(g-3)+2].$$

Рассмотрим случай, когда $(g+1)s - 2q < 0$, но $(g+1)(s+1) - 2q \geq 0$. Число голоморфных q-дифференциалов этого вида будет равно

$$(g+1)[(s+1) + ... + (q-1)] - 2q(q-1-s) + (q-1-s) =$$

$$(g+1)[\frac{q(q-1)}{2}-\frac{(s+1)s}{2}]+(q-1-s)(1-2q).$$

Для случая, когда $(g+1)(q-2)-2q<0$, но $(g+1)(q-1)-2q\geq 0$, число голоморфных q-дифференциалов будет равно $(g+1)(q-1)-2q+1$. При этом $(g+1)(q-1)-2q+1=(g-1)(q-1)-1$, т. е. в точности равно числу голоморфных q-дифференциалов, которые нужно добавить к списку (7) для получения полного базиса в $\Omega^q(1;F_e)$.

Поэтому, если верно неравенство (8_{q-1}), то алгоритм будет следующий. Нужно к списку (7) добавить список из последней строки в (8):

$$\frac{z^j dz^q}{w^{q-1}}, j=0,1,...,(g+1)(q-1)-2q.$$

Найдем теперь условия на g и q такие, чтобы было верно неравенство (8_{q-1}). При $q=2$ получаем, что неравенство $(g+1)(q-1)\geq 2q$ превращается в неравенство $g+1\geq 4$ или $g\geq 3$. Таким образом, (8_{q-1}) верно при $q=2, g\geq 3$. Случай $g=2, q=2$ уже рассмотрен в предыдущем предложении и к (7) не надо ничего добавлять, так как набор (7) уже является базисом в $\Omega^2(1;F_e)$.

В оставшемся случае при $q\geq 3, g\geq 2$ имеем неравенства:

$$(g+1)(q-1)\geq \min_{g>1}(g+1)(q-1)=3q-3\geq 2q,$$

а значит, неравенство (8_{q-1}) тоже верно. Теорема доказана.

Заметим, что если верно неравенство (8_s), то верны и все последующие неравенства $(8_{s+1}),...,(8_{q-1})$.

Замечание 2.3.1. В доказательстве предыдущей теоремы указан простейший конструктивный выбор базиса в $\Omega^q(1;F_e)$. Однако метод доказательства дает много других способов конструктивного выбора базиса в $\Omega^q(1;F_e)$. Часто во многих задачах геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях, в геометрических методах интегрирования уравнений математической физики, в квантовой теории поля нужны голоморфные q-дифференциалы вида $\frac{z^j dz^q}{w^k}$ с разными $k = 1, ..., q-1$.

Приведем общий алгоритм конструктивного выбора базиса в $\Omega^q(1; F_e)$. Если s наименьшее число от 1 до $q-1$ для которого верно неравенство (8_s), то нужно последовательно выбирать возможные

$$(g+1)[\frac{q(q-1)}{2} - \frac{(s+1)s}{2}] + (q-1-s)(1-2q)$$

голоморфные q-дифференциалы из s-ой строки в (8), а затем, из любых последующих строк от $s+1$ до $q-1$ (в зависимости от того какие $\frac{z^j dz^q}{w^k}$ нужны в данной задаче), чтобы их общее число было $(g-1)(q-1)-1$. Потом добавить их к набору (7).

Если неравенства $(8_1), ..., (8_{q-2})$ не выполняются, то такие q-дифференциалы из (8) будут уже мероморфные абелевы q-дифференциалы с полюсами в Q_1, Q_2 и нулями в $Q_3, Q_4, P_1, ..., P_{2g+2}$. Их можно также использовать для построения базиса в пространствах мероморфных абелевых q-дифференциалов, кратных заданному дивизору, на переменной гиперэллиптической римановой поверхности F_e рода $g \geq 2$ при $q \geq 2$.

В связи с представлением F_e в виде (II) имеем равенства:

$$(z) = \frac{P_1^2}{P_{2g+2}^2}, (w) = \frac{P_1 P_2 ... P_{2g+1} P_{2g+2}}{P_{2g+2}^{2g+2}},$$

$$(dz) = \frac{P_1 ... P_{2g+2}}{P_{2g+2}^4}, (\frac{z^j dz}{w}) = P_1^{2j} P_{2g+2}^{2(g-1-j)} \geq 1,$$

если $g-1-j \geq 0$.

Для любых $k, 1 \leq k \leq q-1$, дивизоры

$$(\frac{z^j dz^q}{w^k}) = P_1^{2j} P_1^{q-k} ... P_{2g+2}^{q-k} P_{2g+2}^{2((g+1)k-j-2q)} \geq 1,$$

при условии, что $(g+1)k-j-2q \geq 0$. Поэтому также, как в теореме 2.3.2, можно конструктивно выбрать базис для любого $q \geq 2$ на переменной гиперэллиптической римановой поверхности F_e рода $g \geq 2$.

Для любых различных точек P, Q на F_e, где $P = (a, w(a)), Q = (b, w(b))$, $w = \sqrt{z(z-1)\prod_{j=1}^{2g-1}(z-e_j)}$: при $a \neq \infty, b \neq \infty$

$$\widehat{\tau}_{PQ} = (\frac{w+w(a)}{z-a} - \frac{w+w(b)}{z-b})\frac{dz}{2w},$$

и при $a \neq \infty, b = \infty$

$$\widehat{\tau}_{PQ} = (\frac{w+w(a)}{z-a})\frac{dz}{2w}$$

являются абелевыми дифференциалами третьего рода с простыми полюсами в P и Q на F_e с вычетами +1 и -1 соответственно [9, с. 64], а дифференциал

$$\tau_{PQ} = \widehat{\tau}_{PQ} - \sum_{j=1}^{g}(\int_{a_j^e}\widehat{\tau}_{PQ})\zeta_j$$

будет нормированным абелевым дифференциалом третьего рода на F_e.

Учитывая конкретные реализации (I) и (II) для гиперэллиптических римановых поверхностей, можно взять явный базис $\omega_1, ..., \omega_d$ абелевых голоморфных $q-$дифференциалов из теоремы 2.3.2. Этот базис будет голоморфно зависеть от точек ветвления в реализации таких поверхностей. Кроме того, нужные, для построения базиса голоморфных и мероморфных $(\rho, q)-$дифференциалов Прима, мультипликативные единицы f_0 и мультипликативные функции f для любых характеров ρ можно выразить через явный канонический базис голоморфных абелевых 1-дифференциалов $\zeta_1, ..., \zeta_g$ и через явные нормированные абелевы дифференциалы τ_{PQ} третьего рода с простыми полюсами в P и Q на F с вычетами +1 и -1 соответственно. Причем такие мультипликативные функции будут голоморфно зависеть от характеров и от точек ветвления гиперэллиптических римановых поверхностей.

В статье Тулиной М.И. [3] для компактных римановых поверхностей доказаны, в виде теорем существования, аналоги всех теорем из первой и второй глав, но в §2.3 все объекты построены явным образом на переменной гиперэллиптической римановой поверхности F_e.

Таким образом, для случая гиперэллиптической поверхности в §2.3 построены явно: все виды элементарных $(\rho, q)-$дифференциалов и базисы локально голоморфных сечений для всех основных типов векторных расслоений, со слоями из мероморфных дифференциалов Прима, над произведением пространства $\mathbb{H}_g$ и группы характеров для любого рода $g \geq 2$.

Глава 3.

Дифференциалы Прима с матричными характерами на компактной римановой поверхности

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [2-4; 6; 7; 11-13; 15-18; 22; 24; 26-31].

В [12-13; 15; 22; 30] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для общих (одномерных) характеров. В работах [23-25; 27; 30; 32] начато изучение векторных мультипликативных функций для матричных характеров на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ и на торе $g = 1$.

В третьей главе двумя методами доказано существование матричных мультипликативных функций и k-дифференциалов Прима для любых матричных характеров, без условия регулярности функции, определяющей матричный тэта-ряд Пуанкаре, на границе круга.

§3.1. Предварительные сведения

Теорема (Б. Риман). *Универсальное накрытие $\widetilde{F}$ для компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$, снабженное комплексно-аналитической структурой поднятой с F так, чтобы естественная проекция $\widetilde{\pi} : \widetilde{F} \to F$ была голоморфна, будет конформно эквивалентно кругу $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Теорема (Ф. Клейн, А. Пуанкаре). *Любую компактную риманову поверхность F рода $g \geq 2$ можно представить как фактор пространство U/Γ, где Γ – фуксова группа первого рода инвариантно действующая в круге U, т. е. F конформно эквивалентна $(U/\Gamma, \Sigma)$, причем Σ индуцирована комплексно-аналитической структурой на U, которая задается атласом, состоящим из одной карты $(U, \varphi(z) = z)$.*

На U вводим метрику Пуанкаре $ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$, где $\lambda(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$, $\lambda(z)$ называется плотностью метрики Пуанкаре. Если $A : z = x + iy \longrightarrow \zeta = u + iv$ – дробно-линейное отображение на Δ, то $\lambda(Az)|A'(z)| = \lambda(z), z \in U$, $\lambda^2(z)dxdy = \lambda^2(\zeta)dudv$, т. е. не евклидовы площади инвариантны при дробно-линейных отображениях круга U на себя [20].

Напомним, что характером ρ на фундаментальной группе $\pi_1(F)$ для компактной римановой поверхности F называется гомоморфизм из $\pi_1(F)$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Так как $\mathbb{C}^*$ коммутативная группа, то характер ρ в действительности есть гомоморфизм $\rho : H_1(F, \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^*$. Характер ρ называется нормированным, если он все свои значения принимает на единичной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Если F имеет род $g > 0$, и положим $\{N_1, ..., N_{2g}\} = \{a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g\}$ (как равенство упорядоченных наборов), то ρ единственно определяется по своим значениям $\rho(N_1), ..., \rho(N_{2g})$ на образующих. Поэтому абелева группа $Hom(\pi_1(F), \mathbb{C}^*)$ изоморфна группе $[\mathbb{C}^*]^{2g}$, где изоморфизм задается отображением $\rho \to (\rho(N_1), ..., \rho(N_{2g}))$; в последней группе строки умножаются покоординатно, а произведение двух характеров ρ_1, ρ_2 в $Hom(\pi_1(F), \mathbb{C}^*)$ определено по правилу:

$$(\rho_1 \cdot \rho_2)(a) = \rho_1(a) \cdot \rho_2(a), a \in \pi_1(F).$$

Мультипликативной функцией на компактной римановой поверхности F для характера ρ назовем мероморфную функцию f на U такую, что $f(Tz)\rho(T) = f(z), \quad z \in U, \quad T \in \Gamma$, где Γ – фуксова группа первого рода на U.

Для доказательства следующей леммы нам потребуются некоторые известные факты из функционального анализа: величина

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L_p(D)} = (\iint\limits_D |f(z)|^p dxdy)^{1/p}$$

будет нормой в $L_p(D)$, где $p \geq 1$ и D – область на плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема (Б. Леви)[5, с. 285]. *Пусть на множестве D верны неравенства*

$$f_1(z) \leq f_2(z) \leq ... \leq f_n(z) \leq ...,$$

причем функции f_n интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности $\int\limits_D f_n(z)dxdy \leq K$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда почти всюду на D существует (конечный) предел $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ и функция f интегрируема на D, а $\int\limits_D f_n(z)dxdy \to \int\limits_D f(z)dxdy$ при $n \to \infty$.

Следствие 3.1.1. *Если $f_n(z)$ – интегрируемая функция, $f_n(z) \geq 0$ на D для любого n, и выполняется неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_D f_n(z)dxdy < \infty$, то почти всюду на D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится и*

$$\int\limits_D (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z))dxdy = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_D f_n(z)dxdy.$$

Теорема (Фату) [5]. *Если последовательность измеримых неотрицательных функций f_n сходится почти всюду на D к f и $\int\limits_D f_n(z)dxdy \leq K$ для любого n, то f интегрируема на D и $\int\limits_D f(z)dxdy \leq K$.*

Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$. После представления F в виде $F = U/\Gamma$, где Γ – соответствующая фуксова группа первого рода, получим, что каждый дифференциал $\varphi(z)dz^q$ на F можно записать в виде $\varphi = \varphi_1(z)dz^q$ и $\varphi_1(z)$ – измеримая в круге U функция, удовлетворяющая соотношению

$$\varphi_1(Az)A'^q(z) = \varphi_1(z), \quad A \in \Gamma, \tag{1}$$

т. е. автоморфная форма веса $(-2q)$ на U, относительно группы Γ. При этом голоморфным (мероморфным) дифференциалам на F соответствуют голоморфные (мероморфные) формы на U [7].

Рассмотрим голоморфную в U функцию $\Phi(z)$ такую, что

$$\iint\limits_U |\Phi(z)|dxdy < \infty, \quad z = x + iy, \tag{2}$$

и составим тэта-ряд Пуанкаре

$$(\Theta_q\Phi)(z) = \sum_{A\in\Gamma} \Phi(Az)A'^q(z), \quad q \geq 2. \tag{3}$$

Лемма 3.1.1 [7]. *Для любой голоморфной функции $\Phi(z)$ с условием, что $\iint\limits_U |\Phi(z)|dxdy < \infty$, тэта-ряд Пуанкаре $(\Theta_q\Phi)(z)$ будет голоморфным q-дифференциалом на $F = U/\Gamma$ рода $g \geq 2$ при любом $q \geq 2$.*

Замечание 3.1.1. Если $\Phi(z)$ имеет в U конечное число полюсов, то, после удаления их из круга U вместе с достаточно малыми окрестностями, функция $\Phi(z)$ абсолютно интегрируема по оставшейся области. Тогда аналогично доказательству предыдущей леммы получим, что $(\Theta_q\Phi)(z)$ будет мероморфной формой веса $(-2q)$ на U, относительно Γ. Как видно из доказательства предыдущей леммы, для фиксированного $q > 2$ вместо условия (2) достаточно выполнения более слабого условия

$$\iint\limits_U (1 - |z|^2)^{q-2}|\Phi(z)|dxdy < \infty[7] \qquad (4).$$

§ 3.2. Матричные характеры на фуксовой группе

Определение 3.2.1. *Матричным характером ρ называется любой гомоморфизм ρ из Γ в $GL(n,\mathbb{C})$, где $GL(n,\mathbb{C})$ – группа всех невырожденных квадратных матриц порядка n с комплексными коэффициентами.*

Для матрицы $M = (\alpha_{i,j}), \alpha_{i,j} \in \mathbb{C}, i,j = 1,...,n,$ с комплексными коэффициентами, величина

$$\|M\| = (\sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|^2)^{1/2}$$

будет нормой и она имеет следующие свойства:

1) $|\alpha_{ij}| \le \|M\|$,

2) $\|M_1 + M_2\| \le \|M_1\| + \|M_2\|$,

3) $\|M_1 \cdot M_2\| \le \|M_1\| \cdot \|M_2\|$,

4) $\|aM\| = |a| \cdot \|M\|, a \in \mathbb{C}$.

Определение 3.2.2. *Матричным m-дифференциалом Прима относительно фуксовой группы Γ для ρ называется матричнозначный дифференциал $\omega(z)dz^m$ такой, что*

$$\omega(Tz)\rho(T)(dTz)^m = \omega(z)dz^m, z \in U, T \in \Gamma, \rho : \Gamma \to GL(n,\mathbb{C}).$$

В частности, при $m = 0$, это мультипликативная матричнозначная функция относительно Γ для ρ.

Напомним, что дробно-линейное (мебиусово) отображение единичного круга на себя имеет вид $T(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, где $|z_0| < 1$, α – вещественное число. Такие отображения являются изометриями в круге относительно метрики Пуанкаре $ds = \frac{|dz|}{1-|z_0|^2}$.

Фуксова группа Γ первого рода в U, которая униформизирует компактную риманову поверхность F рода $g \ge 2$ в U, т. е. F конформно эквивалентна фактор пространству U/Γ, изоморфна $\pi_1(F,O)$, и имеет следующее алгебраическое представление:

$$\Gamma = \langle A_1, B_1, ..., A_g, B_g : \prod_{j=1}^{g} [A_j, B_j] = 1 \rangle.$$

Для дальнейшего удобно ввести другое обозначение для образующих этой группы с помощью равенства: $\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g\} = \{T_1, T_2, ..., T_{2g}\}$, которое означает равенство упорядоченных наборов. Элементами этой группы являются слова в образующих следующего вида:

$$W(T_1, T_2, ..., T_{2g}) = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot ... \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$$

и минимальное натуральное число r назовем длиной этого слова после всех возможных сокращений в этой группе, учитывая определяющее соотношение. Обозначим через $d(z_1, z_2)$ не евклидово расстояние между точками z_1 и z_2 из круга U.

Лемма (Пуанкаре А.) [25]. *Для фуксовой группы Γ первого рода с образующими $T_1, T_2, ..., T_{2g}$ в круге U, которая униформизирует компактную риманову поверхность $F = U/\Gamma$ рода $g \geq 2$, для любого*

$$W = W(T_1, T_2, ..., T_{2g}) = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot ... \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$$

из Γ верно неравенство $r \leq \lambda d(z, W(z)) + \mu$ для любого z из U, где λ и μ – вещественные числа независящие от W и z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем нормальный $4g$-сторонний не евклидов выпуклый многоугольник $\overline{D}$, как фундаментальный многоугольник группы Γ в U. Его стороны можно разбить на пары γ_i, δ_i, такие, что $\delta_i = T_i(\gamma_i), i = 1, ..., 2g$ [9].

Заметим сначала, что число многоугольников которые имеют некоторую общую вершину в сети $\aleph$, состоящую из нормальных многоугольников образующих покрытие для круга U, будет ограничено. Это следует из того, что сеть $\aleph$ будет инвариантна относительно группы Γ и произвольный многоугольник из сети $\aleph$ будет конгруэнтен многоугольнику $\overline{D}$ по некоторому элементу из группы Γ. Если $\widetilde{\lambda_1}$ – максимальное число нормальных многоугольников примыкающих к любой вершине из $\overline{D}$, то число многоугольников примыкающих к любой вершине из сети $\aleph$ не может превысить $\widetilde{\lambda_1}$. Известно, что можно выбрать правильный многоугольник $\overline{D}$ так, что $\widetilde{\lambda_1} = 4g$ [9].

Расстояние между любыми сторонами в $\aleph$ (достаточно рассмотреть пары сторон в $\overline{D}$), которые не имеют общих точек будет иметь некоторое известное минимальное значение $d_1 > 0$. Известно, например, что $d_1 \geq \frac{\pi}{21}$. Последнее число есть диаметр максимально вписанного круга в фундаментальном многоугольнике и достигается для треугольной группы. При этом d_1 тоже является диаметром максимального круга вписанного в нормальный многоугольник $\overline{D}$.

Будем обозначать через γ отрезок лежащий на не евклидовой прямой, от некоторой произвольной точки z до $T(z), T \in \Gamma$, и через $d(\gamma)$ его не евклидову длину. Тогда можем выбрать некоторый аналитический путь γ' от z', достаточно близкой к z, до $T(z')$ со следующими условиями:

1) γ' не проходит через вершины сети $\aleph$,

2) γ' не имеет общих сегментов не с одной из сторон сети $\aleph$,

3) верно неравенство $d(\gamma') \leq d(\gamma) + 1 = d(z, T(z)) + 1$.

Пусть $\overline{D}_1, ..., \overline{D}_{s+1}$, где $\overline{D}_j = S_j(\overline{D}), j = 1, ..., s+1$, будут нормальные многоугольники, которые проходит точка z_1 при ее движении от z' до $T(z')$ вдоль γ'. Так как $T(\overline{D}),\ \ T \in \Gamma$, будет выпуклый многоугольник, то прямая γ не проходит один и тот же $T(\overline{D})$ дважды. Следовательно можем предположить, что все многоугольники $\overline{D}_1, ..., \overline{D}_{s+1}$, которые пересекают γ', будут попарно различны. Пусть $\widetilde{\gamma_i}$ будет общая сторона многоугольников $\overline{D}_i$ и $\overline{D}_{i+1}$. Если $\widetilde{\gamma}_{i-1}$ и $\widetilde{\gamma}_{i+1}$ имеют некоторую общую точку, то общая точка должна быть на пересечении $\overline{D}_i \bigcap \overline{D}_{i+1} = \widetilde{\gamma}_i$. Следовательно $\widetilde{\gamma}_{i-1}, \widetilde{\gamma}_i$ и $\widetilde{\gamma}_{i+1}$ имеют некоторую общую вершину. Поэтому, если $\widetilde{\gamma}_{j-1}$ и $\widetilde{\gamma}_{j+1}, \widetilde{\gamma}_j$ и $\widetilde{\gamma}_{j+2}, \widetilde{\gamma}_{j+1}$ и $\widetilde{\gamma}_{j+3}, ..., \widetilde{\gamma}_{j+l-2}$ и $\widetilde{\gamma}_{j+l}, \widetilde{\gamma}_{j+l-1}$ и $\widetilde{\gamma}_{j+l+1}$ имеют некоторую общую точку, то $\widetilde{\gamma}_{j-1}, \widetilde{\gamma}_j, \widetilde{\gamma}_{j+1}, ..., \widetilde{\gamma}_{j+l}, \widetilde{\gamma}_{j+l+1}$ имеют общую вершину такую, что $\overline{D}_j, \overline{D}_{j+1}, ..., \overline{D}_{j+l}$ встречаются вблизи этой вершины. Следовательно, $l \leq \widetilde{\lambda}_1$. Поэтому среди пар $\widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_3$, $\widetilde{\gamma}_2$ и $\widetilde{\gamma}_4$,..., $\widetilde{\gamma}_{s-2}$ и $\widetilde{\gamma}_s$ существуют по крайней мере $[\frac{s}{\widetilde{\lambda_1+1}}]$ (целая часть) пар, которые не имеют общих вершин.

Пусть $\widetilde{\gamma}_{i-1}$ и $\widetilde{\gamma}_{i+1}$ будет некоторая пара без общих точек. Пусть z'_{i-1} будет точка пересечения γ' и $\widetilde{\gamma}_{i-1}$, а z'_{i+1} – точка пересечения γ' и $\widetilde{\gamma}_{i+1}$. По определению d_1 получаем $d_1 \leq d(z'_{i-1}, z'_{i+1})$. Отсюда $d_1[\frac{s}{\widetilde{\lambda_1+1}}] \leq d(\gamma')$ и $d_1(\frac{s}{\widetilde{\lambda_1+1}} - 1) \leq d(\gamma') \leq d(z, T(z)) + 1$. Если обозначим через $\lambda = \frac{\widetilde{\lambda_1+1}}{d_1}$ и $\mu = \frac{(\widetilde{\lambda_1}+1)(d_1+1)}{d_1}$, то

$$s \leq \lambda d(z, T(z)) + \mu. \tag{5}$$

Действительно,

$$d_1(\frac{s}{\widetilde{\lambda}_1 + 1} - 1) \leq d(\gamma') \leq d(z, T(z)) + 1, \quad \frac{s}{\widetilde{\lambda}_1 + 1} - 1 \leq \frac{d(z, T(z)) + 1}{d_1}.$$

Поэтому

$$s \leq \frac{d(z, T(z)) \cdot (\widetilde{\lambda}_1 + 1)}{d_1} + \frac{(\widetilde{\lambda}_1 + 1) + d_1 \cdot (\widetilde{\lambda}_1 + 1)}{d_1},$$

$$s \leq \lambda d(z, T(z)) + \mu.$$

Так как $\widetilde{\gamma}_i = \overline{D}_i \bigcap \overline{D}_{i+1} = S_i(\overline{D}) \bigcap S_{i+1}(\overline{D})$, то $S_i^{-1}(\widetilde{\gamma}_i) = \overline{D} \bigcap S_i^{-1} S_{i+1}(\overline{D})$ будет стороной $\overline{D}$. Поэтому $S_i^{-1}(\widetilde{\gamma}_i)$ должна совпадать либо с γ_j, либо с $\delta_j, (j = 1, ..., 2g)$. Предположим, что $S_i^{-1}(\widetilde{\gamma}_i) = \gamma_j$. Тогда $S_i^{-1} S_{i+1}(\overline{D}) = T_j(\overline{D})$ и $S_i^{-1} S_{i+1} = T_j$. Если $S_i^{-1}(\widetilde{\gamma}_i) = \delta_i$, то подобным образом получаем $S_i^{-1} S_{i+1} = T_j^{-1}$. В обоих случаях $S_{i+1} = T_{j_i}^{\pm 1} S_i$, $i = 1, ..., s$. Отсюда следует

$$S_{s+1} = T_{j_1}^{\pm 1} \cdot ... \cdot T_{j_s}^{\pm 1} S_1. \tag{6}$$

Кроме того, так как $T(z')$ и $S_{s+1}(S_1^{-1}(z'))$ лежат внутри $S_{s+1}(\overline{D})$, то они равны (если два преобразования наложения накрытия $U \to F$ совпадают в одной точке, то они совпадают тождественно) и $T = S_{s+1}S_1^{-1}$. Следовательно, из (6) получаем, что

$$T = T_{j_s}^{\pm 1} \cdot ... \cdot T_{j_1}^{\pm 1}. \tag{7}$$

Таким образом, показано, что для данного z, элемент T из Γ можно выразить через s образующих $T_i^{\pm 1}$ группы Γ и s удовлетворяют неравенству (5). Заметим, что для различных z, получаются различные произведения (7) требуемые для записи T, но s число образующих $T_i^{\pm 1}$ в записи элемента T, всегда удовлетворяет оценке (5). Кроме того, числа λ и μ в этой оценке (5) не зависят от T и z. Если r длина слова T, выраженного через образующие $T_i^{\pm 1}$, то $r \leq s$ и верна оценка в утверждении леммы, где z – произвольная точка. Лемма доказана.

Замечание 3.2.1. Для числа λ верна следующая оценка сверху

$$\lambda = \frac{\widetilde{\lambda}_1 + 1}{d_1} \leq \frac{4g+1}{\frac{2\pi}{21}} \leq (4g+1)(3,3) \approx 13,2 \cdot g + 3,3$$

в случае треугольной группы, и число λ можно выбрать зависящим только от рода.

Обозначим через $\overline{U}(z_1, \varepsilon) = \{z \in U : d(z_1, z) \leq \varepsilon\}$.

Лемма 3.2.1 [25]. *Пусть $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ – произвольный матричный характер для фуксовой группы Γ, которая униформизирует в круге U компактную риманову поверхность F рода $g \geq 2$. Тогда для любой точки z_1 на U и для любого положительного числа ε существуют число $\lambda_1 < 0$, не зависящее от z_1 и ε, и число $c_1 > 0$, зависящее от z_1 и ε,* *такие, что для любых $z \in \overline{U}(z_1, \varepsilon)$ и $T \in \Gamma$ верно неравенство*

$$\|\rho(T)\| \leq c_1 |\frac{dT(z)}{dz}|^{\lambda_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_1, ..., T_{2g}$ – множество образующих для фуксовой группы Γ первого рода, как в предыдущей лемме. Положим $\max\limits_{i=1,...,2g}(\|\rho(T_i)^{\pm 1}\|) = e^{\lambda_2}, \quad \lambda_2 \geq 0.$

По лемме, для любых $T \in \Gamma, T = T_{i_1}^{\pm 1} \cdot ... \cdot T_{i_r}^{\pm 1}$, $z \in U$, верно неравенство $r \leq \lambda d(z, T(z)) + \mu$. Поэтому $\rho(T) = \rho(T_{i_1})^{\pm 1} \cdot ... \cdot \rho(T_{i_r})^{\pm 1}$ и

$$\|\rho(T)\| \leq \|\rho(T_{i_1})^{\pm 1}\| \cdot ... \cdot \|\rho(T_{i_r})^{\pm 1}\| \leq e^{\lambda_2 r} \leq e^{\lambda_2(\lambda d(z,T(z))+\mu)}.$$

Для любого $z \in \overline{U}(z_1, \varepsilon)$ верно неравенство

$$d(z, T(z)) \leq d(z, z_1) + d(z_1, 0) + d(0, T(z)) \leq \varepsilon + d(0, z_1) + d(0, T(z)).$$

Следовательно, для некоторого $c_2(z_1, \varepsilon) > 0$ верно

$$\|\rho(T)\| \leq e^{\lambda_2(\lambda(\varepsilon + d(0,z_1))+\mu)} e^{\lambda_2 \lambda d(0,T(z))} = c_2 e^{\lambda_2 \lambda d(0,T(z))}.$$

С другой стороны, имеем равенства

$$|\tfrac{dT(z)}{dz}| = \tfrac{1-|T(z)|^2}{1-|z|^2} \text{ и } d(0, z) = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1+|z|}{1-|z|},\ |z| = \tfrac{e^{2d(0,z)}-1}{e^{2d(0,z)}+1}.$$

Таким образом получаем неравенства

$$|\tfrac{dT(z)}{dz}| = \tfrac{e^{2d(0,z)}+2+e^{-2d(0,z)}}{e^{2d(0,T(z))}+2+e^{-2d(0,T(z))}} \leq c_3(z_1, \varepsilon)\tfrac{1}{K^2+2+K^{-2}} =$$

$$= c_3 \tfrac{1}{K^2} \tfrac{1}{1+\frac{2}{K^2}+\frac{1}{K^4}} \leq \tfrac{c_3}{K^2}$$

где $K = e^{d(0,T(z))} > 0$, с учетом $\frac{2}{K^2} + \frac{1}{K^4} \geq 0$.

Так как $d(0, z)$ ограничено сверху и снизу при $d(z, z_1) < \varepsilon$, то верно неравенство

$$|\frac{dT(z)}{dz}| \leq c_3 e^{-2d(0,T(z))}, \quad c_3 = c_3(z_1, \varepsilon) > 2.$$

Отсюда следует неравенство $e^{2d(0,T(z))} \leq c_3|\frac{dT(z)}{dz}|^{-1}$. Затем

$$\|\rho(T)\| \leq c_2 e^{\lambda_2 \lambda d(0,T(z))} \leq c_2 c_3^{\frac{\lambda_2\lambda}{2}} |\frac{dT(z)}{dz}|^{-\frac{\lambda_2\lambda}{2}} \leq c_1 |\frac{dT(z)}{dz}|^{\lambda_1}.$$

Здесь $\lambda_1 = -\frac{\lambda_2\lambda}{2} < 0$ и $c_1 = c_2 c_3^{\frac{\lambda_2\lambda}{2}} > 0$. Отметим, что λ и λ_2 не зависят от z_1 и ε, а значит λ_1 тоже не зависит от z_1 и ε. Лемма доказана.

Лемма 3.2.2 [25]. *Пусть μ_1 – любое вещественное число, удовлетворяющее $\mu_1 \geq 2$. Для любой точки $z_1 \in U$ существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что ряды $\sum\limits_{T\in\Gamma} |\frac{dT(z)}{dz}|^{\mu_1}$ сходятся равномерно на круге $\overline{U}(z_1, \varepsilon)$.*

Обозначим через $M(z) = (\alpha_{ij}(z))$ функцию на U с матричными значениями порядка n.

Теорема 3.2.1. *Пусть $\alpha_{ij}(z), \quad i,j = 1,...,n$, будут любые функции аналитические на круге $\overline{U} = \{|z| \leq 1\}$, кроме конечного числа полюсов в U. Тогда для любого матричного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ фуксовой группы Γ первого рода, которая униформизирует компактную риманову поверхность F рода $g \geq 2$ в круге U, и для любого натурального $k \geq 0$ существует, отличный от тождественного нуля, матричный мероморфный k-дифференциал $f(z)dz^k$ на U, относительно группы Γ для ρ, который задается формулой*

$$f(z) = \sum_{T\in\Gamma} M(T(z))T'(z)^k \rho(T), \quad z \in U,$$

при $k + \lambda_1 \geq 2$.

В частности, при $k = 0$ каждая строка матрицы $f(z)$ дает векторнозначную мультипликативную функцию $(u_1, ..., u_n)$ для характера ρ :

$$(u_1(Tz), ..., u_n(Tz)) = (u_1(z), ..., u_n(z))\rho(T),$$

где $z \in U$ и $T \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для такой функции $M(z)$ и заданного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ определим матричный аналог тэта-ряда Пуанкаре в виде

$$\varphi(z) = \sum_{T\in\Gamma} M(T(z))(\frac{dT(z)}{dz})^{k+m}\rho(T),$$

где m – произвольное натуральное число с условием $m+\lambda_1 \geq 2$ и λ_1 определено в лемме 3.2.1.

Так как $\alpha_{ij}(z)$ аналитичны на $|z|=1$, то модули $|\alpha_{ij}(z)|$, а значит $\|M(z)\|$ ограничены для z удовлетворяющих неравенству $d(0,z) \geq d_1$, где d_1 – положительное достаточно большое число. При этом область, заданная условием $d(0,z) < d_1$, содержит всё конечное множество полюсов функции $M(z)$ в U.

Для любой фиксированной точки $z_1 \in U$ и ε достаточно малого положительного числа, как в лемме 3.2.2, существует лишь конечное число элементов орбиты $T(z_1), T\in\Gamma$, которые содержатся в области, заданной условием $d(0,z) \leq d_1+\varepsilon$. Следовательно существует только конечное множество образов $T(\overline{U}(z_1,\varepsilon))$ для $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ по группе Γ. которое содержит точки z удовлетворяющие условию $d(0,z) \leq d_1$. Исключая это конечное множество элементов $T\in\Gamma$, для некоторого $c_4>0$, получим оценку

$$\|M(T(z))\| \leq c_4, \quad z\in\overline{U}(z_1,\varepsilon), \quad T\in\Gamma. \tag{8}$$

Докажем, что ряд

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' M(T(z))(\tfrac{dT(z)}{dz})^{k+m}\rho(T),$$

который получен из исходного ряда исключением отмеченного выше конечного множества элементов $T\in\Gamma$, сходится абсолютно и равномерно на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$. Учитывая свойства нормы матрицы, достаточно доказать, что на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$ сокращенный ряд

$$\sum_{T\in\Gamma}{}' \|\rho(T)\|\|M(T(z))\||\tfrac{dT(z)}{dz}|^{k+m}$$

сходится равномерно. Из леммы 3.2.1 и неравенства (8) получаем оценку:

$$\sum_T{}' \|M(T(z))\| \|\rho(T)\| |\tfrac{dT(z)}{dz}|^{k+m} \leq \sum_T{}' c_4 c_1 |\tfrac{dT(z)}{dz}|^{k+m+\lambda_1} \leq$$
$$\leq c_4 c_1 \sum_T{}' |\tfrac{dT(z)}{dz}|^{k+m+\lambda_1}.$$

По лемме 3.2.2, с учетом условия $m+\lambda_1 \geq 2$, последний ряд сходится равномерно на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$. Следовательно сокращенный ряд сходится абсолютно и равномерно на $\overline{U}(z_1,\varepsilon)$, причем каждый член этого ряда аналитическая функция по z на $U(z_1,\varepsilon)$.

По теореме Вейерштрасса сумма $\varphi^*(z)$ сокращенного ряда аналитична на $U(z_1,\varepsilon)$. Сумма $\varphi(z)$, отличается от $\varphi^*(z)$ на конечное число матричных слагаемых, которые имеют лишь конечное число полюсов на $U(z_1,\varepsilon)$. Таким образом, получаем, что $\varphi(z)$ есть матрица с мероморфными членами, каждый из которых имеет лишь конечное число полюсов на $U(z_1,\varepsilon)$. Так как z_1 взято произвольно на круге U, то получаем, что $\varphi(z)$ – мероморфная матричная функция на круге U.

Пусть S – любой элемент из Γ. Учитывая $\rho(T)=\rho(TS)\rho(S)^{-1}$, получаем соотношение для нашего ряда $\varphi(z)$:

$$\varphi(S(z)) = \sum_{T\in\Gamma} M(TS(z))(\tfrac{dTS(z)}{dS}(z))^{k+m}\rho(T) =$$
$$= \sum_{TS\in\Gamma} M(TS(z))(\tfrac{dTS(z)}{dz})^{k+m}(\tfrac{dS(z)}{dz})^{-k-m}\rho(TS)\rho(S^{-1}).$$

Когда T пробегает группу Γ, то TS так же пробегает группу Γ в некотором другом порядке. Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке в силу теоремы Римана.

Умножение матриц не коммутативно поэтому в последнем ряде величины не зависящие от T, входящие в каждый член ряда, можно вынести из под суммы ряда только вправо. Сделав в оставшемся ряде замену TS на T_1 получим

$$(\sum_{T_1\in\Gamma} M(T_1(z))\rho(T_1)(\tfrac{dT_1(z)}{dz})^{k+m})(\tfrac{dS^{-1}(z)}{dz})^{k+m}\rho(S^{-1}) =$$
$$\varphi(z)(\tfrac{dS^{-1}(z)}{dz})^{k+m}\rho(S^{-1}).$$

Таким образом, для любого $S \in \Gamma$ получим, что

$$\varphi(S(z)) = \varphi(z)(\tfrac{dS(z)}{dz})^{-k-m}\rho(S^{-1}).$$

Последнее означает, что $\varphi(z)dz^{k+m}$ – мероморфный матричнозначный $(m+k)$-дифференциал Прима на U/Γ для характера ρ.

Рассмотрим случай $n = 1$, и $\rho(T) = 1$ для всех $T \in \Gamma$, т. е. ρ – тривиальный характер ($\rho \equiv 1$). В этом случае можем взять $\widetilde{\lambda}_1 = 0$ в лемме 3.2.1. Для произвольной аналитической (скалярной) функции $\widetilde{M}(z)$, которая имеет только конечное число полюсов в круге U и аналитична на границе круга, определим тэта-ряд Пуанкаре

$$\Theta(z) = \sum_{T \in \Gamma} \widetilde{M}(T(z))(\tfrac{dT(z)}{dz})^m.$$

По лемме 3.2.2 для $m \geq 2$ ряд $\Theta(z)$ – мероморфный m-дифференциал на U, удовлетворяющий

$$\Theta(S(z)) = \Theta(z)(\tfrac{dS(z)}{dz})^{-m},\ S \in \Gamma, z \in U.$$

В классической литературе эта функция называется дзета-фуксов ряд или тэта-фуксов ряд Пуанкаре.

По лемме 3.2.2 для m удовлетворяющих $m + \lambda_1 \geq 2$ и $m \geq 2$ отношение $\varphi(z)$ и $\Theta(z)$, $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Theta(z)}$ есть матричный k-дифференциал с мероморфными членами для характера ρ на $F = U/\Gamma$. Это означает, что

$$f(T(z))\rho(T)(\tfrac{dT(z)}{dz})^k = f(z),\ T \in \Gamma,\ z \in U.$$

При этом детерминант $|f(z)| = \Theta(z)^{-n} \cdot |\varphi(z)|$ не будет тождественным нулем, если выбрать полюсы у функции $\widetilde{M}(z)$ отличными от полюсов функции $M(z)$. Теорема доказана.

Отметим, что схема доказательства теоремы 3.2.1 для случая $k = 0$ была приведена в книге [25]. В нашей работе дано полное доказательство этой теоремы для любого $k \geq 0$. В следующей теореме будет убрано условие регулярности функции $M(z)$ на границе круга U.

Теорема 3.2.2. *Пусть $M(z) = (\alpha_{ij}(z))$ – матричнозначная мероморфная функция на U с конечным числом полюсов, удовлетворяющая условию*

$$v.p. \iint\limits_{U} \|M(z)\| dxdy < \infty, \tag{9}$$

тогда для любого матричного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ фуксовой группы Γ первого рода, которая униформизирует компактную риманову поверхность F рода $g \geq 2$ в круге U, и для любого натурального числа $k \geq 0$ существует, отличный от тождественного нуля, матричный мероморфный k-дифференциал $f(z)dz^k$ на U, относительно группы Γ для ρ, который задается формулой

$$f(z) = \sum_{T \in \Gamma} M(T(z))T'(z)^k \rho(T), \quad z \in U,$$

при $k + \lambda_1 \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $M(z)$ и заданного характера $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ определим матричный аналог тэта-ряда Пуанкаре в виде

$$\varphi(z) = \sum_{T \in \Gamma} M(T(z))(\frac{dT(z)}{dz})^{k+m} \rho(T), \tag{10}$$

где m – натуральное число с условием $m + \lambda_1 \geq 2$ и число λ_1 определено в лемме 3.2.1.

Сначала предположим, что $M(z)$ не имеет полюсов в U. Нам нужно доказать, что ряд (10) сходится абсолютно и равномерно в любом круге $|z| \leq R < 1$ и верно равенство $\varphi(A(z))\rho(A) = \varphi(z)A'^{-k-m}(z)$, $z \in U$, $A \in \Gamma$. Этим будет доказано, что $\varphi(z)dz^{k+m}$ – голоморфный матричный $(k+m)$-дифференциал Прима (матричная автоморфная форма веса $(-2(k+m))$ на U, относительно группы Γ) для характера ρ.

Пусть $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_p, ...\}$ (т. е. занумеруем в последовательность элементы фуксовой группы Γ) и Δ – компактный связный фундаментальный многоугольник группы Γ в U.

При любом натуральном N, в силу свойств гиперболической метрики $\lambda(z)|dz|$, компактности Δ и по лемме 3.2.1 имеем неравенства

$$\iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z)\| \sum_{p=1}^{N} M(A_p z) A_p'^{k+m}(z)\rho(A_p)\| dxdy \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{N} \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z)\|\rho(A_p)\|\|M(A_p z)\| \cdot |A_p'(z)|^{k+m} dxdy \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{p=1}^{N} \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z)\|M(A_p z)\||A_p'(z)|^{k+m} \cdot |A_p'(z)|^{\lambda_1} dxdy \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{p=1}^{\infty} \iint\limits_{A_p(\Delta)} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z)\|M(z)\| dxdy =$$

$$c_1 \iint\limits_{U} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z)\|M(z)\| dxdy \leq$$

$$\leq c_1 \iint\limits_{U} \|M(z)\| dxdy < \infty.$$

При $N \to \infty$ по теореме Леви [5] и следствию из нее получаем неравенства

$$\|\lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z) \cdot \varphi(z)\|_{L_1(\Delta)} \leq$$

$$\leq \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z) \sum_{p=1}^{\infty} \|\rho(A_p)\|\|M(A_p(z))\||A_p'(z)|^{k+m} dxdy \leq$$

$$\leq c_1 \iint\limits_{\Delta} \lambda^{2-(k+m+\lambda_1)}(z) \sum_{p=1}^{\infty} \|M(A_p(z))\||A_p'(z)|^{k+m+\lambda_1} dxdy \leq$$

$$\leq c_1 \iint\limits_{U} \|M(z)\| dxdy = c_1\|M\|_{L_1(U)} < \infty.$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда (10) в U и справедливость на множестве $\Delta_{\delta_0} = \Delta \bigcap \{|z| < 1 - \delta_0\}$, $0 < \delta_0 < 1$, для матричных функций

$$\varphi_N(z) = \sum_{p=1}^{N} M(A_p(z))(A_p'(z))^{k+m}\rho(A_p)$$

следующей оценки

$$\|\varphi_N(z)\|_{L_1(\Delta_{\delta_0})} \leq c(\delta_0) = c_1 \cdot \int\int\limits_{U} \|M(z)\| dxdy \cdot (1 - R^2)^{2-(k+m+\lambda_1)} < \infty,$$

где $N = 1, 2, ...,\ \ R = 1 - \delta_0$. Применим теперь к $\varphi_N(z)$ формулу среднего значения для голоморфных функций

$$h(z) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{|\zeta - z| \leq \delta} h(\zeta) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, (0 < \delta < \delta_0),$$

на $|z| \leq 1 - 2\delta_0$. Пусть Δ_{δ_0} покрывается конечным числом кругов $\overline{U}(z_j, \delta_j)$, $j = 1, ..., s$. Отсюда получим следующую оценку

$$||\varphi_N(z)|| \leq c_1(\delta_0) = \tfrac{s}{\pi} c(\delta_0)[\max_{j=1,...,s} \tfrac{1}{\delta_j^2}] < \infty,\ N = 1, 2, ...$$

на $|z| \leq 1 - 2\delta_0$. По принципу компактности для голоморфных функций [7; 20] существует подпоследовательность $\varphi_{N_j}(z)$ сходящаяся к $\varphi(z)$ равномерно при $|z| \leq 1 - 2\delta_0$, а значит $\varphi(z)$ – голоморфная функция на $|z| \leq 1 - 2\delta_0$. Применяя формулу среднего значения для остатка $r_N(z) = \varphi(z) - \varphi_N(z)$, получим, что $r_N(z) \to 0$ равномерно в любом таком круге при $N \to \infty$. По теореме Вейерштрасса $\varphi(z)$ будет голоморфна в U.

Если $M(z)$ имеет в U конечное число полюсов, то после удаления их из круга U вместе с достаточно малыми окрестностями, функция $M(z)$ абсолютно интегрируема по оставшейся области. Следовательно аналогично предыдущему получим, что $\varphi(z)$ будет мероморфной матричной функцией на U/Γ для характера ρ.

Пусть S – любой элемент из Γ. Учитывая равенство $\rho(T) = \rho(TS)\rho(S^{-1})$, как в доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что

$$\varphi(S(z)) = \varphi(z)(\tfrac{dS(z)}{dz})^{-k-m}\rho(S^{-1}).$$

Последнее означает, что $\varphi(z)dz^{k+m}$ – мероморфный матричнозначный $(m+k)$-дифференциал Прима на U/Γ для характера ρ.

Рассмотрим случай $n = 1$, и $\rho(T) \equiv 1$ для всех $T \in \Gamma$. Для произвольной мероморфной (скалярной) функции $\widetilde{M}(z)$, которая имеет только конечное число полюсов в круге U и аналитична на границе круга, определим тэта-ряд Пуанкаре

$$\Theta(z) = \sum_{T \in \Gamma} \widetilde{M}(T(z))(\tfrac{dT(z)}{dz})^m.$$

Для $m \geq 2$, $\Theta(z)$ – мероморфный m-дифференциал на U/Γ удовлетворяющий

$$\Theta(S(z)) = \Theta(z)(\tfrac{dS(z)}{dz})^{-m},\ S \in \Gamma, z \in U.$$

Для m, удовлетворяющих условиям $m + \lambda_1 \geq 2$ и $m \geq 2$, отношение $\varphi(z)$ и $\Theta(z)$,

$$f(z) = \tfrac{\varphi(z)}{\Theta(z)}$$

есть мероморфный матричный $k-$дифференциал Прима для характера ρ на $F = U/\Gamma$, так как верны равенства

$$f(T(z))\rho(T)(T'(z))^k = f(z),\ T \in \Gamma,\ z \in U.$$

При этом детерминант $|f(z)| = \Theta(z)^{-n} \cdot |\varphi(z)|$ не будет тождественным нулем, если выбрать полюсы у функции $\widetilde{M}(z)$ отличными от полюсов функции $M(z)$. Теорема доказана.

Замечание 3.2.2. Как видно, из предыдущих оценок, для фиксированного $q > 2$ вместо (9) достаточно выполнения более слабого условия

$$\iint\limits_U (1 - |z|^2)^{q-2} ||M(z)|| dxdy < \infty.$$

Замечание 3.2.3. Если характер – матрично нормирован, т. е. $\|\rho(T)\| = 1$ для любого $T \in \Gamma$, то в оценке ряда для $\varphi(z)$ можно сразу избавиться от характера. Таким образом, сходимость мультипликативного матричного ряда будет следовать из сходимости матричного тэта-ряда для тривиального характера $\rho(T) \equiv 1$. Отметим, что если характер не является матрично-нормированным, то он не может быть равномерно ограниченным, т. е. $\|\rho(T)\| \leq c_5$ для любых $T \in \Gamma$. Сравни [25, с. 212]. Действительно, достаточно это доказать для скалярных характеров. Если $|\rho(T)| < 1$, то $|\rho(T^{-1})| > 1 + \varepsilon > 1$. Отсюда

$$|\rho(T^{-1})^n| = |\rho(T^{-n})| > (1+\varepsilon)^n > K > 0$$

для любого фиксированного K при $n \geq n_0(K)$.

Пример. Для $M(z) = \frac{1}{z}E_n$, где E_n – единичная матрица порядка n, каждый член матрицы $\varphi(z) - M(z)$ есть аналитическая функция на окрестности точки $z = 0$, тогда детерминант $|\varphi(z)|$ для $\varphi(z)$ имеет полюс порядка n в точке $z = 0$. Аналогично при $\widetilde{M}(z) = \frac{1}{z}$ ряд $\Theta(z)$ имеет полюс порядка один в точке $z = 0$. Поэтому ни $|\varphi(z)|$, ни $|\Theta(z)|$ не могут быть тождественно равны нулю.

Замечание 3.2.4 [25]. Теорема 3.2.1, в частности, дает связь между абелевыми интегралами и мультипликативными матричными функциями на F, и доказывает существование абелевых интегралов с любыми периодами на F.

Группа $\pi_1(F) = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g : \prod\limits_{j=1}^{g}[a_j, b_j] = 1\rangle$ и фуксова группа $\Gamma = \langle A_1, B_1, ..., A_g, B_g : \prod\limits_{j=1}^{g}[A_j, B_j] = 1\rangle$ будут изоморфны. Этот изоморфизм задается отображением $a_i \to A_i, b_i \to B_i, i = 1, ..., g$. Возьмем произвольные комплексные числа $\zeta_1, ..., \zeta_{2g}$. Отображения

$$\rho(A_i) = \rho(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(B_i) = \rho(b_i) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{g+i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задают матричный характер в размерности два, так как

$$\rho[A_i, B_i] = \begin{pmatrix} 1 & \zeta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \zeta_{g+i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_{g+i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

где $i = 1, ..., g$.

По теореме 3.2.1, существует мультипликативная матричная функция

$$f(z) = \begin{pmatrix} z_{11}(z) & z_{12}(z) \\ z_{21}(z) & z_{22}(z) \end{pmatrix}$$

для заданного характера ρ. Один из элементов $z_{11}(z)$ и $z_{21}(z)$ не будет тождественно равным нулю, так как детерминант $|f(z)| \neq 0$ на U. Предположим $z_{11}(z) \neq 0$ и положим $u_1(z) = 1$ и $u_2(z) = u(z) = \frac{z_{12}(z)}{z_{11}(z)}$. Тогда для любого $T \in \Gamma$ имеем равенство $(u_1(T(z)), u_2(T(z))) = (u_1(z), u_2(z)) \cdot \rho(T)$ для любого $z \in U, T \in \Gamma$, где $\rho(T)$ – верхнетреугольная матрица у которой на диагоналях стоят 1. Полагая $T = A_i$ и $T = B_i$ получим равенства

$$u(A_i(z)) = u(z) + \zeta_i, \quad u(B_i(z)) = u(z) + \zeta_{g+i}, \quad i = 1, ..., g.$$

Поэтому u есть абелев интеграл с периодами $\zeta_1, \ldots, \zeta_g, \ldots, \zeta_{2g}$. Отсюда $du = \omega(z)dz$ – абелев (однозначный) дифференциал на F рода $g \geq 2$ с любыми заданными a-периодами и b-периодами $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2g}$. Отметим, что если этот дифференциал голоморфный, то достаточно задать только все a-периоды. Кроме того, полученный дифференциал для общих периодов должен быть абелевым дифференциалом второго рода на F.

Литература.

1. Альфорс Л.В., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М. : ИЛ, 1961.

2. Бейкер Г.Ф. Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций. М. : МЦНМО, 2008.

3. Головина М.И., Чуешев В.В. Дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Математические заметки, Москва, 2014, Т. 95, № 3, С. 459–476.

4. Дубровин Б. А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1, МГУ, М., 1986.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1972.

6. Кричевер И.М., Новиков С.П. Алгебра типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях. Функцион. анализ и его приложения. 1989. Т. 23, В.1, С. 24–40.

7. Крушкаль С.Л. Квазиконформные отображения и римановы поверхности. Новосибирск: Наука, 1975.

8. Пушкарева Т.А., Чуешев В.В. Пространства гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности. Сибирский математический журнал, 2014, Т. 55, № 2, С. 379–395.

9. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М. : ИЛ, 1960.

10. Стинрод Н. Топология косых произведений. М. : ИЛ, 1953.

11. Тайманов И.А. Секущие абелевых многообразий, тэта функции и солитонные уравнения. Успехи матем. наук. 1997, Т. 52, В. 1, С. 150–224.

12. Чуешев В.В. Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности. Математические за-

метки, 2003, Т. 74, № 4, С. 629–636.

13. Чуешев В. В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. КемГУ, Кемерово. 2003, 248 с.

14. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.2, М. : Наука, 1985.

15. Appell P., Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques. Acta Math., 13 : 3/4 (1890), P. 1–174.

16. Behnke H. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veranderlichen. Springer-Verlag, Berlin, 1955.

17. Dick R. Krichever - Novikov - like bases o punctured Riemann surface. Deutsches Elektronen - Synchrotron (DESY) 89-059. May, 1989. 11 s.

18. Dick R. Holomorphic differentials on punctured Riemann surface. Differ. Geom. Math. Theor. Phys.: Phys. and Geom.; Proc. NATO Adv. Res. Workshop and 18 Int. Conf. Davis. Calif. 2-8 June. N.-Y., London. 1990. P. 475–483.

19. Earle C.J. Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties. Annals of Math. 1978, V.107, P. 255–286.

20. Farkas H.M., Kra I. Riemann surfaces. Grad. Text's Math. 1992. V. 71. New-York : Springer.

21. Grauert H. Analytische Faserungen ueber holomorphvollstaendigen Raeumen. Math. Ann. 1958. V. 135. S. 266–273.

22. Gunning R.C. On the period classes of Prym differentials. J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.

23. Gunning R.C. Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton : Princeton Univ. Press., 1967.

24. Haupt O. Zur theorie der Prymschen Funktionen 1 und N Ordnung.

Math. Ann. 1916. V. 77. N 1. P. 24–64.

25. Iwasawa K. Algebraic functions. Trans. of Math. Monographs. v. 188. New-York : Providence, Rhode Island, 1993.

26. Klimek S., Lesniewski A. Global Laurent expansions on Riemann surfaces. Commun. Math. Phys., 1989, V. 125, N 4, P. 597–611.

27. Knopp M., Mason G. Vector-valued modular forms and Poincare series. Illinous J. of Math., 2004, V. 48,N 4, P. 1345–1366.

28. Koenig R. Die Reduktions und Reziprozitaets theorem bei den Riemannschen Transzendenten. Math. Ann., 1918, V. 79, P. 76–135.

29. Liljestrom A. Sur les fonctions fuchziennes a multiplicateurs constants. Arkiv foer Math., Astronomi och Fysik. 1910, Bd. 6, N 20, P. 1–18.

30. Prym F., Rost G. Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann‘s. Leipzig : Teubner, 1911.

31. Stein K. Primfunktionen und multiplikative automorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemann Flaechen und Zylindergebieten. Acta Math. 1950, V. 83, P. 165–196.

Список работ автора по теме диссертации.

32. Беспоместных А.А., Чуешев В.В. Мультипликативные функции с матричными характерами на компактной римановой поверхности. Журнал Сибирского федерального университета, сер. Математика и физика 2009. Т. 2, № 1, С. 31–40.

33. Казанцева А.А., Чуешев В.В. Пространство мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 1, С. 89–106.

34. Казанцева А.А. Однозначные q-дифференциалы на переменной конечной римановой поверхности. Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2014.

Т. 14, № 3, С. 57–67

35. Беспоместных А.А., Чуешев В.В. Дифференциалы Прима и функции с матричными характерами на римановой поверхности. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, ИМ, 2008, 1 с.

36. Пушкарева А.А. Периоды мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. Материалы 48 международной научной студенческой конференции, Новосибирск, 2010, С. 104.

37. Пушкарева А.А. Пространство мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. Материалы школы-конференции по геометрическому анализу, Горно-Алтайск, РИО Г-АГУ, 2010, С. 57-58.

38. Пушкарева А.А. Периоды мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. VI всесибирский конгресс женщин-математиков, Красноярск, РИЦ СибГТУ, 2010, С. 360-362.

39. Пушкарева А.А. Периоды мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. Сборник научных трудов кафедры математического анализа № 2, Горно-Алтайск, РИО Г-АГУ, 2010, С. 54-65.

40. Пушкарева А.А. Пространства дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности. Сборник научных трудов кафедры математического анализа № 3, Горно-Алтайск, РИО Г-АГУ, 2010, С. 16-31.

41. Казанцева А.А., Чуешев В.В. Элементарные мероморфные дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности. Международная школа-конференция по геометрии и анализу. Кемерово, КемГУ, 2011, 4 с.

42. Казанцева А.А. Однозначные q-дифференциалы на переменной конечной римановой поверхности. Материалы 52 международной научной

студенческой конференции, Новосибирск, 2014, С. 27.

43. Казанцева А.А. Векторные расслоения абелевых дифференциалов над пространством Тейхмюллера. Материалы конференции Дни геометрии в Новосибирске, Новосибирск, 2014, С. 33.