Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Жамбаа Сонинбаяр

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА П.П. КУФАРЕВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНСТАНТ В ИНТЕГРАЛЕ ШВАРЦА–КРИСТОФФЕЛЯ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Бубенчиков Алексей Михайлович

Томск – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ 18
1.1 Историческая справка 18
1.2 Метод П.Ф. Фильчакова – метод последовательных конформных отображений. 21
1.3 Метод выпрямления наклонных разрезов 22
1.4 Вариационный метод М.А. Лаврентьева 26
1.5 Периодическое отображение на полосу 28
1.6 Метод тригонометрической интерполяции 30
1.7 Метод П.П. Куфарева 31
2 ТЕОРИЯ МЕТОДА П.П. КУФАРЕВА 33
2.1 Интеграл Шварца–Кристоффеля 33
2.2 Вывод уравнений движения прообразов вершин в интеграле Шварца–Кристоффеля 36
2.3 Порядок применения системы дифференциальных уравнений Куфарева и проблема начальных условий 39
2.4 Замечательное свойство метода П.П. Куфарева 43
2.5 Преобразование уравнений П.П. Куфарева 44
3 ВОПРОСЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ 48
3.1 Вычисление показателей степени в формуле Шварца–Кристоффеля. 48
3.2 Коррекция начальных условий. 50
3.3 Два основных блока и управляющая программа. 50
3.4 Пример модельного расчета 54
3.5 Сравнение с аналитическим решением 58
3.6 Примеры других вычислений 61
3.7 Задача о движении грунтовых вод под флютбетами плотин. 66

4 ОТОБРАЖЕНИЕ НА ОГРАНИЧЕННУЮ ОБЛАСТЬ 70
4.1 Альтернативная программа решения уравнений П.П. Куфарева 70
4.2 Пример отображения на ограниченную область 75
4.3 О вычислении интеграла Кристоффеля–Шварца 86
5 ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ 91
5.1 Задача о вынужденной конвекции 91
5.2 Деформация линий при течении несжимаемой жидкости 97
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 105
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 107

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Известно, что практическое применение формулы Кристоффеля–Шварца для конформного отображения многоугольников на верхнюю полуплоскость ограничивается трудностями нахождения точных, или достаточно хороших численных значений, прообразов вершин отображаемого многоугольника. В том случае, если это единственное затруднение удастся каким-либо способом преодолеть, то формула Кристоффеля–Шварца, сможет значительно расширить область применения теории функции комплексного переменного. Этот вопрос и рассматривается подробно в предлагаемой диссертационной работе.

Дело в том, что метод предложенный профессором Томского университета П.П. Куфаревым для определения прообразов вершин прямолинейного многоугольника известен уже достаточно давно, начиная с 1947 года. Но он до сих пор фактически не применяется должным образом. Причиной, возможно, является наступившее всеобщее охлаждение интереса к применению конформного отображения для решения задач математической физики. С другой стороны, метод П.П. Куфарева является слишком оригинальным и находится настолько далеко от сформировавшихся направлений по развитию численных конформных отображений, что возникает риск утери ценного наследия в теории функций комплексного переменного. В любом случае он явно нуждается в популяризации, т. е. в том, чтобы подробно рассмотреть все численные аспекты его применения. В действительности, этот метод имеет большие преимущества перед другими приближенными численными методами, он не требует громоздких вычислений, легко программируется и дает достаточно точные значения искомых параметров.

Сказанное выше подтверждает важность, а также практическую и теоретическую значимость исследований по разработке новых способов численной реализации конформных отображений канонической области на произвольный многоугольник.

Метод конформных отображений, основанный на применении интеграла Шварца–Кристоффеля, обладает большой универсальностью, в смысле богатства отображаемых с его помощью областей. Были разработаны различные численные методы построения конформных отображений, основанные на интеграле Кристоффеля–Шварца, а также методы обходящие интеграл Кристоффеля–Шварца, из-за сложности задачи определения параметров в этом интеграле. В теории приближенных вычислений появились методы вариации границы или методы последовательных конформных отображений. К этим методам относятся метод П.Ф. Фильчакова, метод выпрямления наклонных разрезов, вариационный метод М.А. Лаврентьева, метод тригонометрической интерполяции и другие. Один из эффективных методов был предложен П.П. Куфаревым. В его оригинальной работе [45] было показано, что проблема нахождения констант в интеграле Шварца–Кристоффеля разрешима, если ввести в рассмотрение перемещающийся разрез. В этом случае задача нахождения констант сводится к решению более простой задачи: к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако этот оригинальный способ не был воспринят современниками и до сих пор остается малоизвестным.

В то же время развитие вычислительных методов привело к созданию компактных матричных технологий расчетов. В рассматриваемой диссертационной работе эти технологии были применены для решения ряда прикладных задач гидродинамики, содержащих в схеме построения решения конформные отображения. Оказалось, что оригинальный метод П.П. Куфарева как никакой другой приспособлен к матричным вычислениям. Получившиеся программы расчетов по прикладным задачам занимают всего несколько строк. По современным представлениям рассматриваемый в диссертации метод является аналитическим, но из-за простоты программирования формул, определяющих конформные отображения, может быть рекомендован для инженерного использования.

Степень разработанности темы исследования. Вместе с формулой Шварца−Кристоффеля возникло и новое направление в теории функций – численные методы конформного отображения (конец XIX века).

Первыми стали развиваться численные методы, основанные на экстремальных свойствах отображающих функций. Эти свойства дали возможность применить для построения функций ортогональные полиномы. Первые применения этих методов приходятся на 20-е годы XX века (Карлеман, Сеге, Бохнер, Бергман, Смирнов). В России в 30-е годы Г.М. Голузин, Л.В. Контарович, В.И. Крылов, П.Ф. Фильчаков создали способы численных конформных отображений. Предпочтение отдавалось методу вариации границ и методу тригонометрической интерполяции.

С именем Л.А. Лаврентьева связано появление вариационных принципов конформных отображений. Ему же принадлежит идея последовательных конформных отображений. Существенный вклад в развитие приближенных отображений многосвязных и решетчатых областей внесли М.В. Келдыш, Л.И. Седов, Г.Ю. Степанов и др.

В конце 40-х годов XX века появился оригинальный метод П.П. Куфарева. Метод продолжил развитие в работах Ю.В. Чистякова и Б.Г. Байбарина – учеников П.П. Куфарева. В дальнейшем метод развивается для областей специального вида в работах С.Р. Насырова, Л.Ю. Низамиевой, В.Я. Гутлянского, О.Я. Зайдана, И.А. Колесникова. Проявленный интерес в этих работах к методу П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца, а также его значимость для приложений, подтверждает актуальность дальнейшего глубокого исследования метода.

Цель диссертационной работы состоит в оценке возможностей современных систем программирования для реализации метода П.П. Куфарева и решении на его основе некоторых прикладных задач гидродинамики.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Последовательно изложить основную идею метода П.П. Куфарева, и заострить внимание на вычислительных проблемах, возникающих при ее численной реализации.

2. Преобразовать систему обыкновенных дифференциальных уравнений Куфарева, описывающих движение прообразов вершин, к удобному для программирования виду.

3. Разработать небольшие сопровождающие программы (в системе MatLab), с помощью которых осуществляется практическая реализация метода П.П. Куфарева.

4. Подтвердить на примерах, с помощью счета, свойство метода П.П. Куфарева, заключающееся в сохранении расстояний между вершинами в процессе проведении разреза.

5. Разработать новый прием определения параметров отображения верхней полуплоскости на внутреннюю область многоугольника с помощью метода П.П. Куфарева.

6. Привести примеры решения конкретных задач, имеющих прикладное значение.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений, математического анализа и приближенных вычислений.

Научная новизна работы заключается в использовании матричной формы реализации численного метода П.П. Куфарева, приводящаяся в системе MatLab к предельно простым программам. Такая форма реализации позволяет раскрыть всю универсальность как метода П.П. Куфарева, так и формулы Шварца−Кристоффеля, и обеспечить их широкое применение для решения инженерных задач.

Положения, выносимые на защиту:

1. Прообраз подвижного конца разреза и прообразы близлежащих вершин как функции параметра t (связанного с длинной разреза) в первом приближении

имеют вид (используются для численного интегрирования дифференциальных уравнений на эти прообразы с сингулярностью в области начальных данных):

$$a_i(t) = \lambda_0 - \sqrt{\frac{1+\alpha_{i+1}}{1+\alpha_i}}\sqrt{2t}, \quad \lambda(t) = \lambda_0 + \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{\sqrt{(1+\alpha_i)(1+\alpha_{i+1})}}\sqrt{2t},$$

$$a_{i+1}(t) = \lambda_0 + \sqrt{\frac{1+\alpha_i}{1+\alpha_{i+1}}}\sqrt{2t}.$$

2. Дифференциальные уравнения для определения разностей расстояний между прообразами вершин многоугольника и прообразом конца ведущего разреза:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dL} = \mathrm{M}(\alpha) \cdot \frac{\left(.\mathbf{b}^{-1}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n} |b_k|^{\alpha_k}},$$

где **b** – вектор-столбец, составленный компонентами $b_k = a_k - \lambda$ ($k = 1, \dots n$), $(.\mathbf{b}^{-1})$ – вектор-столбец, полученный покомпонентным обращением исходного вектора **b**, L – длина выдвигаемого разреза, $\mathrm{M}(\alpha)$ – матрица показателей степени при вершинах углов многоугольника.

3. Комплекс программ, реализующих метод П.П. Куфарева в различных случаях, в частности при отображении верхней полуплоскости на внутренность многоугольника.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит, в основном, теоретический характер. Но в ней численные результаты и примеры расчетов играют не менее важную роль, так как именно они позволяют иллюстрировать плодотворность применения метода П.П. Куфарева. Результаты, приведенные в диссертации, можно использовать при чтении специальных курсов студентам, специализирующимся в теории функций комплексного переменного и решению задач математической физики.

Степень достоверности. Поскольку метод П.П. Куфарева опирается на надежную математическую основу, то о достоверности его применения можно судить непосредственно по результатам счета, или визуально, по виду получающихся при этом графиков изолиний.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на VIII международной конференции, посвященной 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», г. Новосибирск, 2015 г., а также на четвертой конференции по геометрии многообразий и ее приложениям с международным участием, (г. Улан-Удэ – оз. Щучье – оз. Байкал, 27–30 июня 2016 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в трудах вышеперечисленных конференций, а также в публикациях автора, перечисленных в списке использованной литературы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы, включающего 78 наименований. Диссертация изложена на 115 страницах, содержит 40 рисунков.

Содержание работы

В <u>первой главе</u> приводится обзор литературы, посвященной истории развития методов конформного отображения начиная с работ Шварца и Кристоффеля. Особое внимание обращается на процесс развития в 20 веке приближенных численных методов конформных отображений в работах П.Ф. Фильчакова, М.А. Лаврентьева, М.В. Келдыша и многих других авторов. Тем самым подчеркивается та важность, которая придавалась этой проблеме в связи с развитием в то время теоретической аэродинамики. Указывается место метода П.П. Куфарева в разрешении этого сложного вопроса о применении численных способов в конформных отображениях.

Во <u>второй главе</u> описывается суть теории метода П.П. Куфарева. Рассматривается семейство отображений $Z = Z(W,t)$ на семейство многоугольников $\Delta(t)$ с разрезом (разрезами) переменной длины $L = L(t)$, $t_0 \le t \le T$, показано, что параметры (прообразы вершин) такого многоугольника при отображении Z, как функций параметра t, отвечающего за длину разреза, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметры отображения на многоугольник со стертым разрезом дают начальные условия для системы ОДУ. Параметры отображения на многоугольник $\Delta(T)$ с разрезом длины $L(T)$ можно найти, проинтегрировав ОДУ при $t = T$. Можно усложнять многоугольник Δ, последовательно проводя разрезы, начиная с достаточно простого многоугольника $\Delta(t_0)$, отображение на который известно. Поэтому на практике приходится численно решать не одну систему дифференциальных уравнений Куфарева, а последовательность таких систем, возникающих при выпускании очередных разрезов, причем число дифференциальных уравнений в них увеличивается с каждым разом на две единицы. Таким образом, в данной главе система дифференциальных уравнений Куфарева приводится к удобному для программирования матричному виду и решается вопрос о необходимости коррекции в них начальных условий.

Здесь же обсуждается замечательное свойство метода П.П. Куфарева. Оно состоит в следующем. Если для отображения на многоугольник со стертым разрезом $\Delta(t_0)$ известны параметры в интеграле Кристоффеля–Шварца и сами вершины многоугольника Z_k, то при проведении очередного разреза его длина $L(t)$ и прообразы вершин $a_k(t)$ будут изменяться согласно уравнениям движения, в то время как вершины самого многоугольника Z_k – остаются на прежнем месте. Это свойство в дальнейшем отчетливо проявлялось в численных экспериментах с методом П.П. Куфарева.

Третья глава диссертации посвящена численной реализации конформного отображения верхней полуплоскости на такую же верхнюю полуплоскость, но с исключенной последовательностью прямолинейных разрезов. Это наиболее простой случай для применения метода П.П. Куфарева. На его примере можно прояснить общие свойства численной реализации по методу П.П. Куфарева и составить необходимые для этого программные блоки.

Сам процесс конформного отображения, естественным образом, сводится к решению двух совершенно независимых друг от друга задач. Первой такой задачей является численное определение прообразов вершин отображаемого многоугольника, а другая заключается в расчете самого интеграла Кристоффеля–Шварца, в предположении, что прообразы вершин уже известны. Решение второй задачи является не менее важным, чем первой, поскольку это дает возможность строить образы горизонтальных линий плоскости *W*, т.е. линий тока, что дает наглядное представление о геометрии отображения и физических процессах, которые отображение описывает.

Задачу о вычисление прообразов вершин по методу П.П. Куфарева можно организовать в различных вариантах. В данной главе вычислительная программа написана так, что на ее входе задается только последовательность сторон отображаемого составного разреза и каждая из этих сторон рассматривается как отдельный свободный вектор, записанный в комплексной форме.

Это удобно, т.к. по этому списку сторон можно легко найти их длины и показатели степени в интеграле Кристоффеля–Шварца. На выходе из программы получается последовательность матриц D, состоящих из двух строк. Первая строка этих матриц содержит показатели степени при вершинах многоугольника, а вторая строка содержит искомые прообразы вершин. Поскольку промежуточные результаты счета сохраняются в рабочем пространстве, то имеется возможность просматривать и анализировать все полученные результаты расчета после работы программы.

Поясним сказанное тем, что покажем (ниже) как выглядит программа вычисления прообразов вершин по методу П.П. Куфарева для разреза в виде ломаной линии из трех отрезков.

$$\begin{aligned}
&\mathit{function}\quad [L1, \mathrm{D}1, L2, \mathrm{D}2, L3, \mathrm{D}3] = \mathit{razrez} \\
&1)\;\; dz = [6+5i,\; 6+i,\; 10]; \\
&2)\;\; [L1, \mathrm{D}1] = rzr1(dz); \\
&3)\;\; [L2, \mathrm{D}2] = rzrn(2, dz, \mathrm{D}1); \\
&4)\;\; [L3, \mathrm{D}3] = rzrn(3, \mathrm{dz}, \mathrm{D}\,2);
\end{aligned} \tag{1}$$

В ней используется основной программный блок [*L*,DD]= *rzrn* (*n*, *dz*, D), который использует список сторон *dz*, предыдущую матрицу D и номер (*n*) проводимого разреза для получения новой матрицы DD. Он включает в себя три операции: вычисление показателей степеней множителей в интеграле Кристоффеля–Шварца по отрезкам сторон многоугольника, коррекцию начальных условий и собственно решение системы дифференциальных уравнений П.П. Куфарева. Причем последняя операция имеет наиболее короткий программный код, всего в одну строчку.

В этом блоке (*rzrn*) система дифференциальных уравнений П.П. Куфарева интегрируется простым методом Эйлера с мелким шагом по заданной длине выпускаемого разреза. Вряд ли здесь стоит применять другие способы решения этой системы уравнений, вроде метода Рунге–Кутты, потому что и без того скорость и точность счета оказываются достаточно высокими.

Матрица D3, рассчитанная в результате работы программы вида (1), приобретает, например, следующие численные значения:

$$\mathrm{D3} = \begin{pmatrix} -0.2211 & 0.1686 & 0.0526 & -0.0526 & -0.1686 & -0.7789 \\ -32.0199 & -24.8255 & -16.0272 & 2.0494 & 2.0536 & 2.0538 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Первая строка в ней содержит показатели степеней множителей в интеграле Кристоффеля–Шварца, которые не были заранее заданными, а вторая строка содержит прообразы вершин. По готовой матрице D3 графический программный блок может вычислять необходимые интегралы Кристоффеля–Шварца и выдавать на экран изображения линий тока.

Отметим, что в диссертации, начиная с третьей главы, приводятся тексты различных программных блоков необходимых для нормальной работы метода П.П. Куфарева. Это связано с тем, что они достаточно короткие и удобочитаемые. При этом из-за их компактности, нет необходимости приводить словесное описание алгоритмов.

Кроме модельного примера, подробно рассмотренного на основании программы вида (1), в третьей главе приводятся и другие расчеты, демонстрирующие различные возможности метода П.П. Куфарева.

Прежде всего, по приведенной выше матрице D3 видно, что прообразы вершин расположены в возрастающем порядке. Число прообразов больше чем число проведенных разрезов, т.к. каждая вершина (кроме вершины – конца разреза) ломаной линии имеет два прообраза.

Прообразы внешних и внутренних вершин имеют разные знаки, т.е. они разделяются еще одной вершиной – вершиной ведущего разреза λ, который в данном численном методе имеет прообраз $\lambda = 0$ и показатель степени $\alpha = 1$. Его можно вставить в таблицу матрицы D3, если это нужно.

Заметим, что если замкнуть подвижный конец разреза на границу многоугольника, то семейство $\Delta(t)$ имеет два ядра. Соответствующее семейство отображений $Z = Z(W,t)$ из полуплоскости на семейство $\Delta(t)$ при замыкании разреза сходится к отображению из верхней полуплоскости на одно из ядер (в зависимости от нормировки семейства $Z = Z(W,t)$) согласно теореме Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру [50, 78]. При этом, часть прообразов вершин будет стягиваться в одну точку – вершину, которой будет соответствовать суммарный показатель степени.

Таким образом, метод П.П. Куфарева можно применять к отображениям на произвольные многоугольники (не имеющие разрезы в том числе).

Отображение верхней полуплоскости на полуплоскость с исключенным прямоугольником имеет точное аналитическое решение, выражаемое через неполные эллиптические интегралы. Сравнение численного метода П.П. Куфарева с этим решением показало, что отношение длины прямоугольника к его высоте совпадает с точным значением с относительной ошибкой порядка 0.14%. Таким образом, еще раз убеждаемся, что метод П.П. Куфарева обладает достаточно высокой точностью расчета. Кроме того, оказывается, что с методом П.П. Куфарева намного проще работать, чем с аналитическим решением, и он также позволяет проверять правильность аналитических решений, которые часто бывают слишком громоздкими.

Деформация границы многоугольника оказывает пренебрежимо малое влияние на прообразы вершин, которые расположены на достаточном удалении от места деформации. Это наблюдение можно использовать для удобства численного интегрирования. Так, например, решая задачу об отображении верхней полуплоскости на полуплоскость с прямоугольной «ямкой» можно для удобства края ямки приподнять на должную высоту, что позволит выбрать в качестве начального многоугольника полуплоскость. В этом случае сравнение с точным решением также показывает прекрасное совпадение пропорций ямки с их точным значением.

В данной работе рассматривается метод П.П. Куфарева, основанный на интеграле Кристоффеля−Шварца для отображения на многоугольник, расположенный в открытой комплексной плоскости, и уравнение Левнера для отображения на произвольную область в открытой комплексной плоскости с неподвижной бесконечностью. Поэтому, в качестве начального многоугольника $\Delta(t_0)$, можно взять любой удобный многоугольник, лежащий в открытой комплексной плоскости. Таким образом, метод П.П. Куфарева, реализованный в виде программы (1) может применяться для построения отображения на верхнюю полуплоскость с несколькими разрезами, исходящими из одной точки. В программном блоке это отражается соответствующим составлением списка сторон в его начальном задании.

Третья глава заканчивается примером решения прикладной задачи о движении грунтовых вод под флютбетами плотин. При геометрической интерпретации отображения строятся линии движения частиц жидкости и линии постоянного напора, в то время как в других задачах данной главы – линии тока. В качестве области определения отображения из соображений прикладного характера выбирается вертикальная полуполоса.

Таким образом, третья глава занимает центральное место в диссертации, поскольку в ней составлены основные программные блоки и на их основе проведено изучение свойств и возможностей метода П.П. Куфарева для его практического применения к численным конформным отображениям. Среди положительных сторон метода П.П. Куфарева отметим, что решения системы дифференциальных уравнений на прообразы вершин могут реализовываться различными численными методами, метод хорошо сохраняет длины выпускаемых разрезов и легко программируется.

В четвертой главе диссертации исследуется возможность отображения верхней полуплоскости на внутренность прямолинейного ограниченного многоугольника с применением метода П.П. Куфарева. В данной работе система дифференциальных уравнений на параметры получена с помощью дифференциального уравнения Левнера для отображения с неподвижной бесконечностью. Поэтому согласно теореме Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру, при замыкании разреза на границу семейство отображений сходится к отображению полуплоскости на то из двух ядер, которое имеет бесконечность на границе. Однако, инвертировав бесконечность и начало координат, можно построить отображение на ограниченный многоугольник.

Типичная ситуация показана на рисунке 24, где обозначена нумерация вершин многоугольника, который составлен из трех разрезов.

При переходе через точку f (в области W) направление обхода изменяется на угол 2π, против часовой стрелки, поэтому точка f должна быть полюсом второго порядка в интеграле Кристоффеля–Шварца, а сам этот интеграл записывается в виде:

$$Z(W)=\int_f^w \left(w-a_1\right)^{-1/2}\left(w-a_2\right)^1(w-a_3)^{-1/2}(w-f)^{-2}(w-a_4)^{-1/2}\times$$
$$\times(w-a_5)^{1/2}\left(w-a_6\right)^1(w-a_7)^{-1/2}\left(w-a_8\right)^{-1/2}dw$$

Для определения прообразов вершин методом П.П. Куфарева в данном примере первым нужно проводить разрез (1, 2, 3), затем разрез (4, 5, 8), и последним – разрез (5, 6, 7). Если последний разрез замкнуть на сторону (1, 2, 3), (или на вершину 2), тогда в одну точку стягиваются следующие шесть из девяти прообразов: $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = f$, и интеграл, соответственно, примет вид:

$$Z(\mathrm{W})=\int_{f}^{w}\left(w-a_1\right)^{-1/2}\left(w-f\right)^{-1/2}\left(w-a_7\right)^{-1/2}\left(w-a_8\right)^{-1/2}dw$$

Но этот интеграл переводит точки верхней полуплоскости на внутренность прямоугольника, он выражается через специальные функции. Результат, полученный методом П.П. Куфарева можно сравнить с аналитическим решением в данном случае. Тем самым показывается, что метод П.П. Куфарева позволяет отображать верхнюю полуплоскость так же на внутренность ограниченного многоугольника.

Для численной реализации такого подхода в данной главе составлена и подробно проверена другая версия основного программного блока, решающего задачу численного интегрирования дифференциальных уравнений Куфарева. Она работает по тому же принципу, что и предыдущая, но с тем преимуществом, что в ней можно произвольно выбирать номер точки, из которой следует проводить очередной разрез.

Кроме рассмотренного во всех подробностях в данной главе модельного примера, в ней приводится также расчет конформного отображения верхней полуплоскости внутрь трапеции и параллелограмма, вместе с расчетом изображений линий тока, которые представляют собой овалы, начинающиеся вблизи начала координат и омывающие периметр.

В этой же главе описывается и тестируется программа, предназначенная для отдельного непосредственного вычисления интеграла Кристоффеля–Шварца с произвольными показателями степени при подынтегральных множителях. Она может быть полезной как для вычисления этого интеграла в отдельных точках плоскости *W*, так и для оценки длины ребер многоугольника, полученных в результате применения метода П.П. Куфарева.

Пятая глава диссертации посвящена решению прикладных задач. В ней рассмотрены две новые задачи, появившиеся в публикациях в последнее время и представляющие определенный интерес для экологии. Это задача о вынужденной конвекции в потенциальном потоке жидкости и задача об адвекции в таком же потоке. Обе эти задачи хороши тем, что они имеют простые решения, и их можно получать сразу же вслед за численной реализацией какого-либо конформного отображения.

В Заключении подытоживаются результаты диссертационной работы, а также обращается внимание на еще не решенные вопросы, после решения которых, можно было бы добиться определенных успехов для дальнейшего внедрения в практику замечательного метода П.П. Куфарева.

1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Историческая справка

Литература, посвященная теории аналитических функций и методам конформных отображений насчитывает сотни названий. Основными русскоязычными руководствами по этой теме являются: [1, 2, 3].

Сама конформная геометрия родилась в XIX веке. Появление такого раздела обязано Ж. Лиувилю и А.Ф. Мебиусу. В своей работе «Теория кругового сродства в чисто геометрическом изложении» Мебиус представил круговое преобразование на плоскости. Эти преобразования можно рассматривать как дробно-линейные преобразования плоскости комплексного переменного. Вскоре эту теорию Ж. Луивиль обобщил на пространство трех переменных. Соответствующая работа была дополнением к публикации «Приложение анализа к геометрии Монжа» (1850 г.). Уже в следующем году в своей докторской диссертации «Основания общей теории функций одного комплексного переменного» Б. Риман предоставил свою знаменитую теорему о существовании конформного отображения одной односвязной области на другую: «Две заданные односвязные плоские поверхности всегда можно соотнести между собой так, что каждой точке одной области будет соответствовать одна непрерывно вместе с ней перемещающаяся точка другой, и их соответствующие части подобны в малом. При этом соответствия для одной внутренней и одной граничной точки можно выбрать произвольно. Тогда преобразование будет определено и для всех точек».

Несмотря на то, что эта теорема гарантирует существование и единственность отображающей функции, она не дает никаких рекомендаций к построению отображений. В то далекое время, с одной стороны уже был накоплен определенный опыт по применению конкретных конформных отображений, а с другой — так участились применения этих отображений во многих задачах физики и механики, что назрела явная потребность в расширении круга отображаемых областей. Первым на этом пути был Г.А. Шварц, получивший формулу отображения полуплоскости на любой треугольник. Позже эта формула была обобщена Э.Б. Кристоффелем для отображения плоскости на произвольный многоугольник. Эта важная формула сразу же нашла широкое применение у инженеров для решения своих практических задач из области теории упругости, гидродинамики и электромагнетизма [4]. Понадобились также и справочники по отображениям стандартных многоугольников [5, 6].

Однако интеграл Шварца–Кристоффеля еще не полностью решает задачу об отображении полуплоскости на наперед заданный многоугольник. В этот интеграл входят параметры (прообразы вершин многоугольника), связь которых с длинами ребер многоугольника заранее не известна. В определении этих параметров и состоит основная трудность использования формулы Шварца–Кристоффеля. Если же это затруднение удается каким-либо эффективным способом преодолеть, то формула Шварца–Кристоффеля настолько расширяет круг конформно отображаемых областей, что ее вполне можно считать «универсальной» учитывая, что криволинейную границу отображаемой области можно аппроксимировать ломаной линией. Таким образом, вместе с формулой Шварца–Кристоффеля возникает и новое направление в теории функций – численные методы конформного отображения. Впрочем, эти приближенные численные методы развивались независимо от формулы Шварца–Кристоффеля.

Первыми по времени из приближенных способов конформного отображения стали систематически разрабатываться методы, основанные на экстремальных свойствах функций: таких как минимум длины контура или минимум площади преобразованной области. При этом использовались ортогональные на контуре или в области полиномы. Первые результаты были получены в 20-х годах [7].

В России тоже велись интенсивные поиски подходящих способов осуществления численных конформных отображений. Так, в 30-е годы при Институте математики и механики Ленинградского университета, В.И. Смирнов (автор многотомной серии учебников по высшей математике) организовал научный семинар, участники которого (Г.М. Голузин, Л.В. Канторович, В.И. Крылов, П.Ф. Фильчаков и др.) выпустили сборник трудов [7] и отдельные статьи [8, 9, 10, 11, 12, 13] по конформным отображениям односвязных и многосвязных областей. Позднее полученные результаты были подытожены в монографиях П.Ф. Фильчакова [14, 15]. Предпочтение в них отдавалось методу последовательной вариации границ области. Наряду с этим был изложен метод тригонометрической интерполяции, базирующийся на задании ряда опорных точек на отображаемом контуре. Стоит упомянуть также популярную в свое время монографию Л.В. Канторовича и В.И. Крылова [16], в которой также уделено много места вопросам численного конформного отображения.

С именем М.А. Лаврентьева связано возникновение еще одного перспективного направления в теории приближенных конформных отображений. Это направление можно определить, как применение вариационных принципов в теории конформных отображений [2]. В дальнейшем это направление развивали ученики и последователи М.А. Лаврентьева.

Существенный вклад в построение методов приближенных конформных отображение многосвязных и решетчатых областей внесли Л.И. Седов, М.В. Келдыш, Г.Ю. Степанов [18−20] и др.

Ясно, что приведенные выше ссылки не исчерпывают всей массы литературы посвященной численным способам конформного отображения и решениям с их помощью технических задач. Такими вопросами занимались многие ученые в течение нескольких последних десятилетий. И, тем не менее, все еще не удалось создать единого простого и одновременно эффективного метода отображения любой наперед заданной области. Такие работы проводились, например, в Кембридже, Принстоне, Вашингтоне и Лос-Анжелесе, и соответствующие ссылки на них имеются в обзорах [7, 12, 16].

И все же среди большого разнообразия предлагаемых алгоритмов численного конформного отображения видно, что их можно разделить на три группы: метод вариации границ; метод тригонометрической интерполяции; метод П.П. Куфарева.

1.2 Метод П.Ф. Фильчакова – метод последовательных конформных отображений

Метод П.Ф. Фильчакова относится к методам вариации границы области и использует в своей основе ряд последовательных и надлежащим образом выбранных элементарных отображений. Поэтому естественно, что этот метод можно назвать методом последовательных конформных отображений, или методом исчерпания. Этот метод изложен в работах [14, 15], где представлены так же приложения, относящиеся к теории фильтрации и течению грунтовых вод под плотинами. Рассмотрим следующий пример, в котором необходимо отобразить на верхнюю полуплоскость (W) бесконечную область (Z_0), также лежащую в верхней полуплоскости и ограниченную снизу заданным контуром. Для этого в той зоне, где контур области (Z_0) наиболее отклоняется от вещественной оси, размещаем дугу аппроксимирующего эллипса и ставим в соответствие его границе отрезок вещественной оси. На рисунке 1 показан результат, полученный по формулам отображения эллипса (1.2.1).

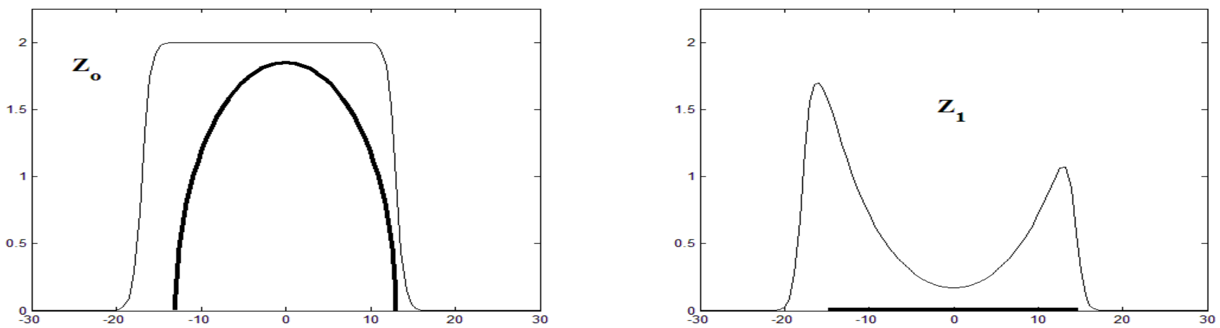

Рисунок 1 – Отображение эллипса на верхнюю полуплоскость

Как видно из рисунка 1 при отображении эллипса на верхнюю полуплоскость его граница ложится на вещественную ось, а контур области Z_0 ближе подходит к вещественной оси. Теперь этот контур находится в полуплоскости Z_1. Проводя для этой области первоначальные построения, находим новое приближение и т.д. Само отображение эллипса удобно реализовать в виде двух последовательных этапов по формулам:

$$t = \frac{z_0 + \sqrt{{z_0}^2 - a^2 + b^2}}{a+b}, \qquad \text{z}_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \cdot t + \frac{a_1 + b_1}{2t} \qquad (1.2.1)$$

Первое соотношение в (1.2.1) определяет отображение внешности эллипса с заданными полуплоскостями a и b на внешность круга единичного радиуса, второе переводит внешность круга единичного радиуса на внешность другого эллипса с полуплоскостями a_1, b_1. Причем последний эллипс может быть вырожденным, у которого одна из полуплоскостей будет равна нулю: $b_1 = 0$. При этом чтобы сохранить нормировку на ∞ ($z_0 \approx z_1$) необходимо для второй полуоси положить $a_1 = a + b$.

В дополнение к сказанному отметим следующие свойства эллиптических отображений.

Свойство 1. Точки плоскости Z_n, лежащие на полуэллипсе и на вещественной оси переходят в точки действительной оси плоскости Z_{n+1}.

Свойство 2. Для всех точек полуплоскостей Z_n и Z_{n+1} справедливы неравенства $|x_{n+1}| > |x_n|$ и $|y_{n+1}| < |y_n|$.

В силу отмеченных свойств последовательность эллиптических отображений обязательно должна переводить любую односвязную и однолистную область плоскости Z на верхнюю полуплоскость W с любой наперед заданной точностью.

1.3 Метод выпрямления наклонных разрезов

Метод Фильчакова можно видоизменить, учитывая, что границу контура можно постепенно приближать к вещественной оси не только с помощью отображения эллипсов, но и с помощью выпрямления наклонных прямолинейных разрезов из которых составлен контур отображаемой области. Такой способ отображения предложен К.А. Сычевым в статьях [21, 22]. Поясним его действие с помощью рисунка 2.

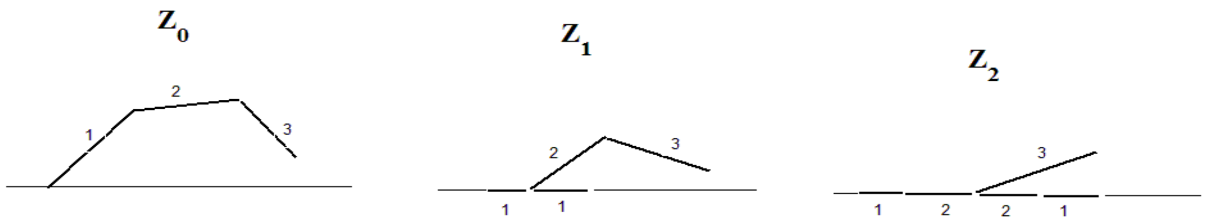

Рисунок 2 – Последовательность выпрямления наклонных разрезов

Пусть область Z_0 представляет собой верхнюю полуплоскость с исключенными из нее отрезками обозначенными цифрами 1, 2 и 3. Тогда после выпрямления первого отрезка получится область Z_1, на которой оба края первого отрезка расположены на вещественной оси, а отрезки 2 и 3 изменяют свое положение. Выпрямляя в области Z_1 второй отрезок, переходим к области Z_2, в которой только третий отрезок остается не выпрямленным. После выпрямления последнего отрезка получается уже область, полностью совпадающая с верхней полуплоскостью W без разрезов.

Этот способ представляет собой более систематический вычислительный процесс, чем метод Фильчакова. Но приведенные ниже формулы конформного отображения полуплоскости с наклонным разрезом выглядят сложнее формул отображения эллиптического выступа (1.2.1).

Пусть требуется отобразить точки верхней полуплоскости W на такую же верхнюю полуплоскость Z с исключенным наклоненным под углом $\alpha\pi$ прямолинейным отрезком (рисунок 3).

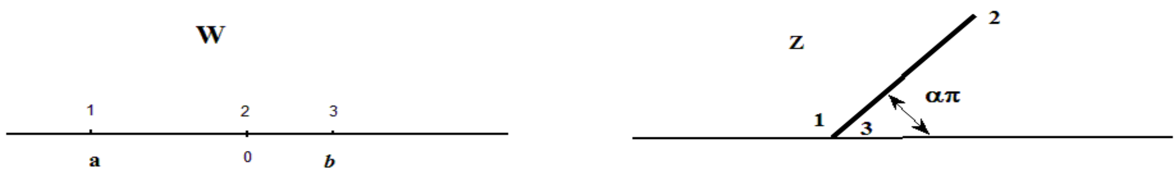

Рисунок 3 – Схема отображения наклонного разреза

Если вершины разреза помечены номерами 1, 2, 3, и их прообразы на вещественной оси области W занимают положения: a, 0 и b, то искомое конформное отображение областей W и Z определяется формулой Шварца–Кристоффеля [2]

$$\frac{dZ}{dW} = (W-a)^{-\alpha} W (W-b)^{\alpha-1} \qquad (1.3.1)$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от 0 до W, получим:

$$Z = \left(W - a\right)^{1-\alpha}\left(W - b\right)^{\alpha}. \qquad (1.3.2)$$

Последняя зависимость позволяет найти соотношения между величиной разреза L, углом его наклона $\alpha\pi$, а также прообразов a и b:

$$L = \left(b - a\right)\alpha^{\alpha}\left(1 - \alpha\right)^{1-\alpha}, \qquad b = \left(b - a\right)\alpha, \qquad a = -\left(b - a\right)\left(1 - \alpha\right). \qquad (1.3.3)$$

Формула (1.3.2) позволяет легко вычислить точку Z, когда известны значения W, a, b и α. Однако обратное отображение реализуется намного сложнее. Чтобы осуществить обратный переход нужно тем или иным способом найти корень W уравнения (1.3.2). Если точка Z не лежит на краю области, то имеется лишь один корень для W. Когда же точка Z лежит на разрезе нетрудно показать, что W будет иметь два действительных корня. $0 < W_1 < b$ и $a < W_2 < 0$. Простое решение получается только для случая, когда $\alpha = 1/2$, т.е. для вертикального разреза.

Вычисление корня W уравнения (1.3.2) несколько облегчается тем, что если из вершины разреза, показанного на рисунке 3 выпустить условный вертикальный разрез, то он разделит исходную область плоскости Z на две части. Пусть это будет левая и правая части. Операция отражения относительно условно выделенного разреза с одновременной заменой параметра α на 1-α переводит левую часть области в правую и наоборот. Это позволяет облегчить поиск второго корня, если первый уже найден.

Из-за того, что метод наклонных разрезов, предложенный в работах [21, 22], целиком основан на убирании разрезов, а не на их выпускании, то автор приводит несколько достаточно сложных подходов к решению не слишком простой задачи о нахождения корня W уравнения (1.3.2).

Практически, способ выпрямления разрезов оказался достаточно работоспособным. Рисунок 4 показывает, что с его помощью можно отображать на верхнюю полуплоскость даже экзотического вида контуры с многократно разветвленными разрезами

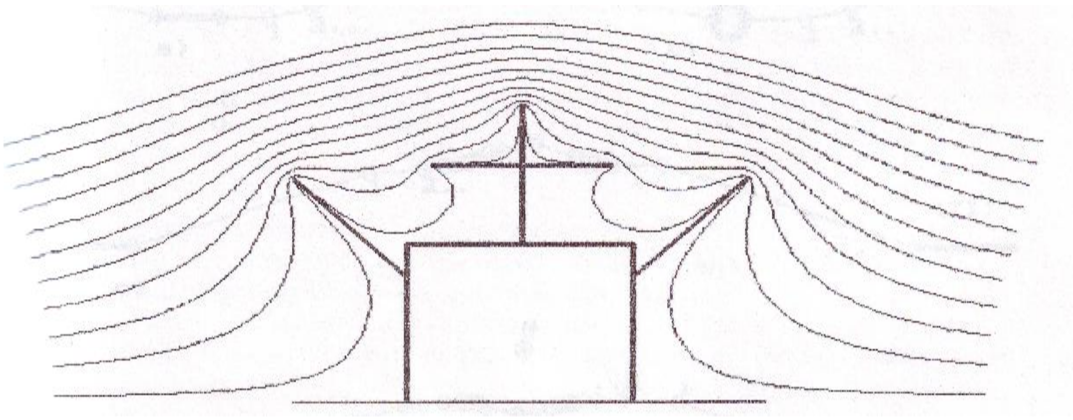

Рисунок 4 – Пример отображения сложного контура методом выпрямления разрезов

Сплошными линиями здесь показаны образы линий Im(W) = $const$. В комбинации с другими известными отображениями его можно применять к отображению как внешних, так и внутренних односвязных областей на круг или на прямоугольник. На рисунке 5 показано отображение на прямоугольник сложной области, у которой соответствие сторон обозначено толстой линией.

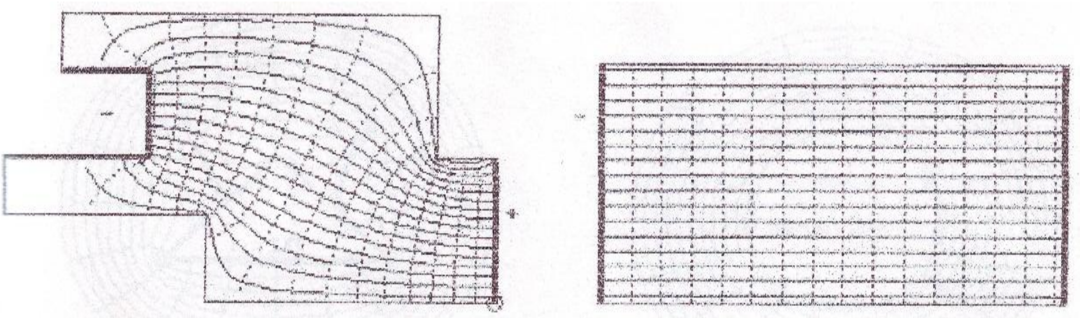

Рисунок 5 – Пример отображения многоугольной области

Отображение, представленное совокупностью ортогональных линий, определяет линии тока в стационарном течении идеальной жидкости. Она поступает и выходит через выделенные (жирным) границы, а также линии равных значений потенциала течения (перпендикулярные к ним линии). Это же отображение находит применение в задачах электростатики, в задачах стационарной фильтрации жидкости в пористых средах и задачах определения температурного состояния тел сложной формы.

Метод имеет, конечно, и свои недостатки. Одним из них является то, что после выпрямления очередного разреза, оставшиеся отрезки контура теряют прямолинейную форму и это требует представления начального контура отрезками малой длины. Другой недостаток заключается, на наш взгляд, в том, что требуются сложные манипуляции и большое искусство, чтобы подогнать имеющуюся границу области под действие формулы (1.3.2).

Иллюстрации (рисунки 4 и 5) взяты здесь из статей [23, 24, 25].

1.4 Вариационный метод М.А. Лаврентьева

Вариационный метод Лаврентьева, можно назвать инфинитезимальным вариантом метода П.Ф. Фильчакова, поскольку он также связан с вариацией границы исходной области. Эта вариация возникает при выпрямлении элементарных круговых лунок, с помощью которых заменяется непрерывная граница физической области $y = y(x)$. Тогда, переходя к пределу для отображающей функции, получим выражение в виде интеграла, понимаемого в смысле главного значения:

$$W \approx Z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)dt}{Z-t}. \qquad (1.4.1)$$

Обратное преобразование имеет следующий вид:

$$Z = W - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)dt}{W-t}. \qquad (1.4.2)$$

Формулы (1.4.1) и (1.4.2) являются, конечно, приближенными и дают приемлемый результат лишь при малых отклонениях $|y(x)| < \varepsilon$. Однако процедура, связанная с многократным применением этих формул определяет последовательное приближение к искомому отображению. Этот метод является, по существу итерационным.

Аналог формулы (1.4.1), выпрямляющей замкнутую линию на единичный круг имеет следующий вид:

$$W = Z\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \delta(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+Z}{e^{i\varphi}-Z}d\varphi\right). \qquad (1.4.3)$$

Полярное уравнение этой линии имеет вид:

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi), \qquad 0<\varphi<2\pi.$$

Тогда необходимо потребовать выполнения условий:

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \qquad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \qquad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon .$$

Эффективность метода Лаврентьева проверялась в работе немецкого автора [29], и также более подробно на ряде примеров в статьях Б. И. Рабиновича и Ю.В. Тюрина [30, 31, 32]. В интернете представлена также монография этих авторов на английском языке [33]. В ней отмечается, что алгоритм метода Лаврентьева используется для построения ортогональных сеток и для решения широкого спектра внешних и внутренних задач гидродинамики, а также смежных задач электродинамики и теории упругости. Показывается, что соответствующая мажорирующая последовательность отображаемых областей сходится и можно осуществлять как прямое, так обратное преобразование областей. Ценой некоторого усложнения отображающей формулы удается снять требование звездности области. Участки границы, имеющие вид разрезов заменяются остроугольными треугольниками. Приближенное отображение двусвязных областей достигается путем поочередного исправления двух односвязных областей, что вполне оправдано ввиду быстрой сходимости процесса.

Все же следует отметить, что в указанных работах ничего не говорится о способах вычисления интеграла в смысле его главного значения, хотя сама формула Лаврентьева (1.4.3) именно на этот факт и опирается.

Приведем еще формулы Лаврентьева для конформного отображения областей близких к полосе $0 < \mathrm{Im}Z < 1$, на полосу $0 < \mathrm{Im}W < 1$. Пусть $y = y_0(x)$ и $y = y_1(x)$, соответственно верхняя и нижняя границы исходной полосы, тогда отображающая функция этой полосы будет следующей:

$$W = Z + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(\mathrm{t})\,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi(Z-t)}{2}\right) dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - y_1(\mathrm{t})\right)\, th\left(\frac{\pi(Z-t)}{2}\right) dt \,. \quad (1.4.4)$$

Обратное отображение осуществляется по формуле:

$$Z = W - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(\mathrm{t})\,\mathrm{cth}\left(\frac{\pi(W-t)}{2}\right) dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - y_1(\mathrm{t})\right)\, th\left(\frac{\pi(W-t)}{2}\right) dt \,. \quad (1.4.5)$$

Здесь опять-таки мы имеем дело с интегралами в смысле их главного значения.

Через такие контурные интегралы выражаются решения многих задач теории функций комплексного переменного, такие как задача Римана и Гильберта [34, 35], в том числе и задача конформного отображения [36, 37]. Но эффективные способы численной реализации вычисления подобных интегралов в литературных источниках найти практически не удается. Таким образом, этот важный вопрос все еще требует своего дальнейшего развития.

1.5 Периодическое отображение на полосу

Интересно также отметить, что кроме формул Лаврентьева (1.4.4) и (1.4.5) существует и другая формула отображения области на горизонтальную полосу описанная в статьях [38, 39].

В них горизонтальная полоса: $W = \Phi + i\Psi$: $-\infty < \Phi < \infty$, $0 < \Psi < \Psi_0$, отображается на криволинейную полосу в области $Z = x + iy$ и само отображение записывается в символической форме, через оператор дифференцирования $\partial/\partial\Phi$ по переменной Φ:

$$Z = x + iy = \Phi + i\Psi + \left(\frac{e^{i\Psi\frac{\partial}{\Phi}}}{\sin\Psi_0 \frac{\partial}{\partial\Phi}} \right) y_1(\Phi) - \left(\frac{e^{-i(\Psi_0-\Psi)\frac{\partial}{\partial\Phi}}}{\sin\Psi_0 \frac{\partial}{\partial\Phi}} \right) y_0(\Phi). \qquad (1.5.1)$$

Такая форма записи иногда оказывается более полезной для теоретического анализа. Из нее, например, непосредственно вытекают равенства:

$$y(\Phi,0) = \Psi + y_0(\Phi) \quad \text{и} \quad y(\Phi,\Psi_0) = \Psi + y_1(\Phi).$$

Из них видно, что величины $y_0(\Phi)$ и $y_1(\Phi)$ представляют собой, как и в методе Лаврентьева, отклонения от нижнего и верхнего края горизонтальной полосы в области W. Если эти функции считать известными, то расчет по формуле (1.5.1) сводится к воздействию на $y_0(\Phi)$ и $y_1(\Phi)$ дифференциальных операторов, которые в формуле (1.5.1) заключены в круглые скобки. Проще всего результат действия этих операторов вычисляется, если функции $y_0(\Phi)$ и $y_1(\Phi)$ являются линейными комбинациями показательных или тригонометрических функций.

Пусть, например, $y_0(\Phi) = B\sin(\omega_0\Phi)$ и $y_1(\Phi) = A\cos(\omega_1\Phi)$, где A, B, ω_1, ω_0 – постоянные коэффициенты. Тогда формула (1.5.1) принимает следующий вид:

$$Z = W + \frac{A\sin(\omega_1 W)}{\operatorname{sh}(\omega_1\Psi_0)} + \frac{B\cos[\omega_0(W - i\Psi_0)]}{\operatorname{sh}(\omega_0\Psi_0)}. \qquad (1.5.2)$$

Изотермическая сетка, вычисленная нами по уравнению (1.5.2), для случая равных амплитуд $A = B$ и равных частот, показана на рисунке 6.

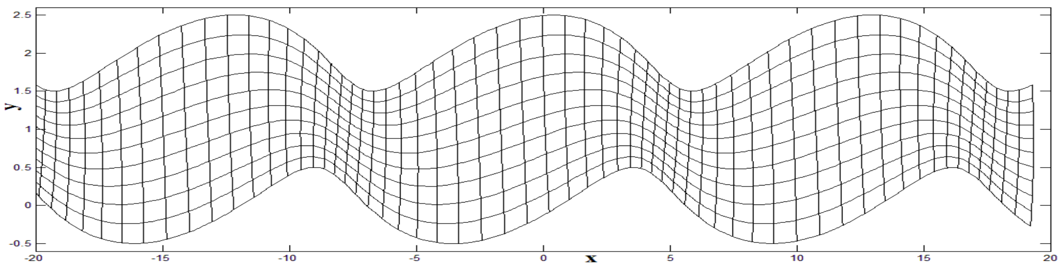

Рисунок 6 – Изотермические линии Re(W), Im(W) = *const* формулы (1.5.2). $A = B = 0.5$

Отделяя в формуле (1.5.2) вещественную и мнимую части и полагая $\Psi = \Psi_0$, найдем уравнение верхнего края полосы в области Z в параметрической форме, где координата Φ является параметром:

$$x = \Phi + A\cdot\operatorname{cth}(\omega_1\Psi_0)\cdot\sin(\omega_1\Phi) + \frac{B\cdot\cos(\omega_0\Phi)}{\operatorname{sh}(\omega_0\Psi_0)},\ \ y = \Psi_0 + A\cdot\cos(\omega_1\Phi). \qquad (1.5.3)$$

Как видим, верхняя граница отличается от синусоиды, и относится скорее к циклоидам. Это относится и к другим линиям соответствующим значениям Ψ = const (рисунок 6). В частности, параметрическое уравнение нижней границы полосы, для которой $\Psi = 0$, имеет вид:

$$x = \Phi + B\operatorname{cth}(\omega_0\Psi_0)\cos(\omega_0\Phi) + \frac{A\sin(\omega_1\Phi)}{\operatorname{sh}(\omega_1\Psi_0)}, \qquad y = B\sin(\omega_0\Phi). \qquad (1.5.4)$$

В рассматриваемом отображении переменные $x(\Phi, \Psi)$ и $y(\Phi, \Psi)$ не являются независимыми, так как они связаны между собой соотношениями Коши-Римана во всех точках области, включая и ее границы. Поэтому формула (1.5.1) не отображает полосу на наперед заданную область. Тем не менее, эту формулу можно применять в некоторых приложениях.

1.6 Метод тригонометрической интерполяции

Метод тригонометрической интерполяции описан в монографиях Фильчакова [14], Канторовича и Крылова [16] и в статье Угодчикова [40]. Он не налагает ограничений на способ задания контура, т.е. контур может быть задан аналитически или дискретным рядом своих точек. В нем рассматривается задача об отображении единичного круга $|\varsigma| < 1$ на внутренность заданной односвязной, ограниченной и однолистной области $z = x + iy$. Отображающая функция ищется в виде степенного ряда

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varsigma^n, \quad \mathrm{c}_n = a_n + ib_n. \tag{1.6.1}$$

Коэффициенты этого ряда являются комплексными числами, и перейдя к полярным координатам $\varsigma = re^{i\varphi}$, запишем формулу (1.6.1) в виде:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi\right), \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi\right). \tag{1.6.2}$$

По известным коэффициентам a_n и b_n формула (1.6.2) позволяет определить образы всех точек $z = x + iy$ единичного круга как внутренних, так и граничных.

Для определения коэффициентов a_n и b_n в данном методе применяется дискретное преобразование Фурье.

Для этого на единичном круге размещается достаточно большое число точек имеющих углы:

$$\varphi_k = \varphi_1 + \frac{2(k-1)\pi}{m}, \qquad k = 1, 2, \cdots, m.$$

Тогда уравнения (1.6.2) записываются для границы области в виде:

$$x_k = \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \cos n\varphi_k - b_n \sin n\varphi_k\right), \quad y_k = \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \sin n\varphi_k + b_n \cos n\varphi_k\right). \tag{1.6.3}$$

Формула обратного преобразования будет следующей:

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \left(x_n \cos k\varphi_n + y_n \sin k\varphi_n\right), \; b_k = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \left(x_n \sin k\varphi_n - b_n \cos k\varphi_n\right). \tag{1.6.4}$$

Строится итерационный процесс, в котором сначала задаются только точки контура x_n и y_n с четными номерами и по формуле (1.6.4) вычисляются их коэффициенты Фурье. Подставляя их в (1.6.3) получим координаты нечетных точек контура, которые нужно переместить на границу, например, по нормали, и принять в качестве известных значений. Так, уточняя попеременно значения четных и нечетных номеров точек контура, находим и коэффициенты a_n и b_n.

Благодаря простоте вычислений и своей достаточной точности метод тригонометрической интерполяции с успехом применялся во многих практических задачах, представленных в сборнике [41]. В.И. Лаврик [41, 42] применил этот метод к решению задачи по теории фильтрации со свободной поверхностью, в частности, определил кривую депрессии для земляной плотины с ленточным дренажем.

И в настоящее время ведется работа по усовершенствованию и применению метода тригонометрической интерполяции. Последняя публикация по этой теме представлена в статьях П.Н. Иваньшина и Е.А. Широковой [43, 44], где приведены примеры решения плоской и пространственной задачи теории упругости.

1.7 Метод П.П. Куфарева

Метод П.П. Куфарева был опубликован в 1947 году в статье [45]. В ней говорится о том, что сложная проблема определения констант в интеграле Шварца–Кристоффеля может быть сведена к более простой задаче – о численном интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши. Но важность этого способа для практических приложений не была сначала замечена вычислителями.

В работах П.Ф. Фильчакова [14], Л.В. Канторовича и В.И. Крылова [16], а также М.А. Лаврентьева [2], конечно, обращалось внимание на формулу Шварца–Кристоффеля, как на хороший инструмент для отображения широкого класса областей. Но в них проблему констант предполагалось решать методами, которые трудно назвать эффективными: способом обобщенных степенных рядов [14], или даже с применением электропроводящей бумаги [46].

С появлением компьютеров стали развиваться и численные методы конформного отображения с использованием формулы Шварца–Кристоффеля [55, 56, 57]. В работе [58] создано приложение для системы MatLab для численного определения параметров конформного отображения.

Ученик П.П. Куфарева – Ю.В. Чистяков первый протестировал метод с помощью теории рядов [47, 48], в [49] также было проведено тестирование метода. В дальнейшем Б.Г. Байбарин [76, см. также 52] распространил метод П.П. Куфарева на случай круговых многоугольников. В работах С.Р. Насырова, Л.Ю. Низамиевой [73, 74] идея П.П. Куфарева используется для решения задачи В.Н. Монахова об отображении на многоугольник с известной полигональной частью границы; в работе В.Я. Гутлянского, О.Я. Зайдана, метод распространяется для отображений с граничной нормировкой [75]; в работе Н.Н. Накипова, С.Р. Насырова [71, 77] метод обобщается для отображений на многолистные многоугольники; в работе И.А. Колесникова [51] метод распространяется для определения параметров конформного отображения полуплоскости на периодические области, нижняя граница которых состоит из прямолинейных отрезков.

Проанализировав различные численные способы конформных отображений, рассмотренные в данной главе, можно сделать вывод, что в методах, основанных на вариации границы области и в методе тригонометрической интерполяции, всегда возникают проблемы при работе с областями, имеющими разрезы. Между тем метод П.П. Куфарева свободен от этого недостатка.

Обзор работ, посвященных методу П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Кристоффеля−Шварца, говорит о его универсальности и конкурентоспособности. Метод опирается на надежную математическую основу, представляет интерес его дальнейшее развитие.

2 ТЕОРИЯ МЕТОДА П.П. КУФАРЕВА

2.1 Интеграл Шварца–Кристоффеля

Пусть W – верхняя полуплоскость. Ведем функцию $Z(W)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dZ}{dW} = C\prod_{k=1}^{N}\left(W - a_k\right)^{\alpha_k}. \tag{2.1.1}$$

В ней a_k и показатели $-1<\alpha_k \leq 1$ – вещественные числа.

Интегрируя (2.1.1), находим:

$$Z = C_1 + C\int_{-\infty}^{W}\prod_{k=1}^{N}\left(W - a_k\right)^{\alpha_k} dW. \tag{2.1.2}$$

Формулы (2.1.1) и (2.1.2) называются формулами Шварца–Кристоффеля. Они отображают верхнюю полуплоскость W на внутренность многоугольника. Точкам вещественной оси $\mathrm{Im}(W) = 0$, согласно этим формулам, соответствует ломаная линия в области Z с углами при ее вершинах равными:

$$\varphi_k = \pi(1 - \alpha_k). \tag{2.1.3}$$

Величины a_k, ($a_{k+1} > a_k$) называются прообразами вершин многоугольника и их нужно подобрать так, чтобы длины сторон многоугольника соответствовали заданным значениям. Это обстоятельство составляет главную трудность при практическом использовании формулы Шварца–Кристоффеля. Доказывается [1], что можно произвольно выбрать прообразы трех вершин (т.е. три числа из множества a_1, a_2, … a_N), а остальные числа определяются единственным образом. Постоянные C и C_1, входящие в формулу (2.1.2), не играют существенной роли, так как они только перемещают, поворачивают и масштабируют общую фигуру многоугольника в области Z. Длины сторон определяются несобственными интегралами:

$$L\left(k, k+1\right) = \left|C\right|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\prod_{s=1}^{N}\left|W - a_s\right|^{\alpha_s} dW. \tag{2.1.4}$$

Поэтому для определения постоянных a_k мы имеем систему нелинейных уравнений вида (2.1.4). Трудность ее решения быстро возрастает вместе с числом сторон.

Если даже в интеграле формулы (2.1.2) известны прообразы вершин и показатели степени, то вычисление таких интегралов представляет собой самостоятельную проблему, так как лишь в редких случаях они берутся явном виде. Поэтому для их расчета необходимо применять численные методы. Здесь задача облегчается тем, что такие интегралы являются контурными интегралами с переменным верхним пределом. Если, например, нам нужно получить образ линии параллельной вещественной оси, то эту линию можно принять за контур интегрирования. Вычисляя подынтегральную функцию в последовательности точек этого контура и применяя интегрирование методом трапеций с переменным верхним пределом, получаем значения интеграла сразу для всей последовательности точек этой линии. В системе MatLab [59] для этой цели применяется программная функция cumtrapz (x, F), с соответствующим ей синтаксисом. Поясним действие этого способа вычисления интеграла Шварца–Кристоффеля численным примером.

Пусть требуется построить несколько линий тока для интеграла

$$Z(W)=\int_{-\infty}^{W}(W-0)^{-1/2}(W-2)^{1/2}(W-16)^{1/2}(W-19)^{-1/2}\,dW\,. \qquad (2.1.5)$$

Результат расчета проиллюстрирован на рисунке 7.

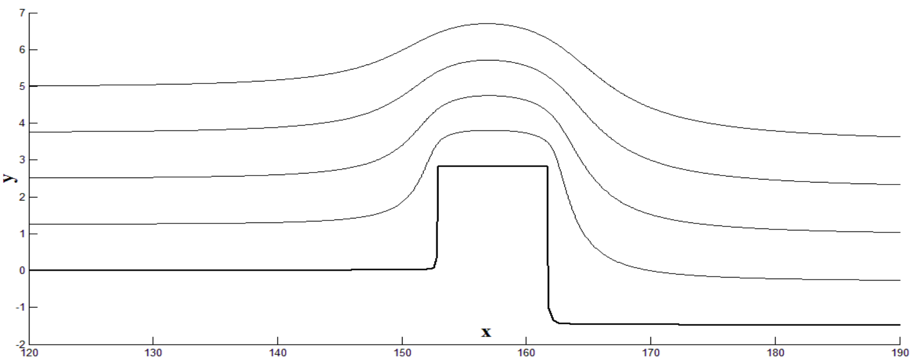

Рисунок 7 – Пример вычисления образов изолиний Im(W) = const в интеграле (2.1.5)

Из него видно, что образ первой линии, очень близкой к вещественной оси, соответствует ломаной линии с нужными углами при вершинах. Длины ее звеньев получились в соответствии с выбранными прообразами. Метод П.П. Куфарева как раз и позволяет подобрать прообразы вершин так, чтобы длины сторон принимали наперед заданные значения. Тем самым решается и весь вопрос о применении интеграла Шварца–Кристоффеля для нужд конформного отображения. Расчет, проиллюстрированный на рисунке 7, включая и графический вывод, осуществлен приведенной ниже программой. Численное интегрирование здесь, конечно, начинается не из бесконечности, а из достаточно удаленной точки, такой в которой возмущения от отображаемого профиля считаются достаточно малыми.

```
function Z = SCHWARZ
    a=[0, 2, 16, 19]; alf=[-1/2, 1/2, 1/2, -1/2];
    u=linspace(a(1)-150, a(end) + 100, 5000); v=linspace(0.01, 5, 5);
    hold on; for s=1:length(v) F=fff(u+1i*v(s), a, alf);
    Z=1i*v(s)+cumtrapz(u,F); drawnow; plot(Z); end; hold off;
    axis([120,190,-2,7]);
    function F=fff(W,a,alf)
    F=1; for k=1:length(a) F=F.*(W-a(k)).^alf(k); end;
    end
end
```

С нашей точки зрения, подобные программы имеют короткий программный код, и их удобная читаемость позволяет использовать такие тексты в качестве описания последовательности действий при решении различных математических задач. Такие тексты программ вполне заменяют словесное описание работы алгоритма и в то же время они представляют собой реально работающие программы.

Точность расчета зависит от двух факторов: 1) количества точек на контуре (шаг интегрирования), 2) выбора начальной точки, которую нужно взять левее первого прообраза на достаточно большом удалении от него.

Количество точек на контуре интегрирования можно не слишком ограничивать. Так, в примере, показанном на рисунке 7, было взято 5000 точек на контуре интегрирования, хотя похожая, не отличимая на глаз, картинка получалась и при вдвое меньшем количестве точек на контуре.

Скорость расчета интеграла по формуле (2.1.2) обычно бывает настолько высокой, что результат расчета появляется на экране сразу же после нажатия кнопки запуска программы. В таких случаях свойство быстроты счета можно использовать и для ручного подбора прообразов a_k путем их изменения и наблюдения картинки на экране. С увеличение числа вершин ручной способ вычисления прообразов теряет свою эффективность и должен быть заменен более подходящим для этой цели методом П.П. Куфарева.

2.2 Вывод уравнений движения прообразов вершин в интеграле Шварца–Кристоффеля

Систему дифференциальных уравнений на прообразы вершин с помощью метода П.П. Куфарева можно записать для семейства отображений на многоугольник $\Delta(t)$ с подвижным разрезом. Пример такого многоугольника схематически показан на рисунке 8.

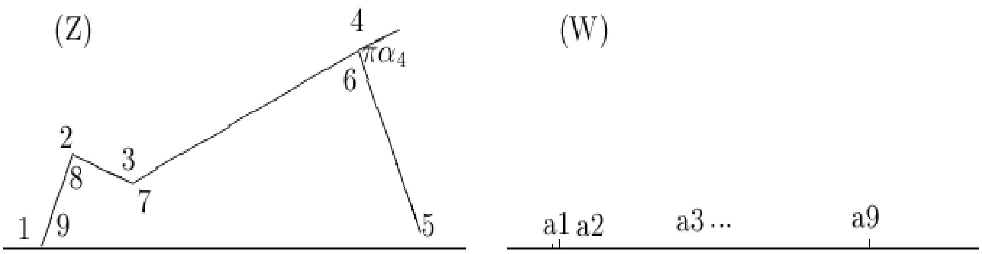

Рисунок 8 – Пример многоугольника Куфарева

На рисунке многоугольник имеет «внешние» (1–5) и «внутренние» (6–9) вершины, пронумерованные последовательно. Прообраз вершины подвижного конца разреза обозначим через λ. Слева от λ расположены прообразы внешних вершин многоугольника, а справа от λ находятся прообразы внутренних его вершин. Учитывая, что показатель степени α для вершины λ равен единице, в уравнении Шварца–Кристоффеля должен появиться множитель (W – λ). Заметим, что при непрерывном изменении длины разреза L = $L(t)$ непрерывно меняются местоположение прообразов a_k, т.е. $a_k = a_k(t)$. С учетом этого формула Шварца–Кристоффеля для n-угольника с подвижным разрезом записывается в виде:

$$\frac{dZ(W,t)}{dW} = \left(W-\lambda(t)\right)\prod_{k=1}^{n}\left(W-a_k(t)\right)^{\alpha_k}. \qquad (2.2.1)$$

Одновременно с формулой Шварца (2.2.1) Куфарев привлекает также дифференциальное уравнение Левнера для отображения из единичного круга с внутренней нормировкой. В данной работе используем уравнение Левнера для полуплоскости (как и в работе Б.Г. Байбарина [см. 50]):

$$\frac{\partial Z(W,t)}{\partial t} - \frac{1}{\lambda - W}\frac{\partial Z(W,t)}{\partial W} = 0 \qquad (2.2.2)$$

Решением этого уравнения является отображение из верхней полуплоскости на область с разрезом, длина которого зависит от параметра t, $t_0 \le t \le T$. Отображение удовлетворяет нормировке $Z(\infty) = \infty$, $Z(\beta(t)) = 0$, где $\beta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{1}{\beta(t)-\lambda(t)}$ с начальным условием $\beta(t_0) = \beta_0$.

Итак, семейство отображений $Z = Z(W,t)$ удовлетворяет уравнениям (2.2.1) и (2.2.2). С помощью этих уравнений получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на прообразы a_k, λ.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(W,t) = \ln\frac{\partial Z}{\partial W}. \qquad (2.2.3)$$

Учитывая формулу (2.2.1), получим:

$$\Phi(W,t) = \ln(W-\lambda) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \ln(W-a_k). \qquad (2.2.4)$$

Вычислим частные производные для этой функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= -\frac{\dot\lambda}{W-\lambda} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k \dot a_k}{W-a_k}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial W} &= \frac{1}{W-a_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{W-a_k} \end{aligned} \qquad (2.2.5)$$

С другой стороны, рассматривая функцию Φ(*W*, *t*) как сложную, найдем эти же частные производные в другом виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t \partial W}}{\dfrac{\partial Z}{\partial W}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial W} = \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial W^2}}{\dfrac{\partial Z}{\partial W}}. \tag{2.2.6}$$

Дифференцируя уравнение (2.2.2) по *W*, получим:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial W} - \frac{1}{(\lambda - W)^2}\frac{\partial Z}{\partial W} - \frac{1}{\lambda - W}\frac{\partial^2 Z}{\partial W^2} = 0. \tag{2.2.7}$$

Сравнивая уравнения (2.2.7) и (2.2.6), находим, что функция Φ(*W*, *t*) должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{(\lambda - W)^2} + \frac{1}{\lambda - W}\frac{\partial \Phi}{\partial W}. \tag{2.2.8}$$

Подстановка сюда частных производных из формул (2.2.5), дает:

$$-\frac{\dot{\lambda}}{W-\lambda} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k \dot{a}_k}{W - a_k} = \frac{1}{(\lambda - W)^2} + \frac{1}{\lambda - W}\left(\frac{1}{W-\lambda} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{W - a_k}\right).$$

Слагаемое, дающее полюс второго порядка, в этом выражении сокращается, и мы имеем:

$$\frac{\dot{\lambda}}{W-\lambda} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k \dot{a}_k}{W - a_k} + \frac{1}{\lambda - W}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{W - a_k} = 0. \tag{2.2.9}$$

Произведение полюсов первого порядка можно записать в виде суммы:

$$\frac{1}{(\lambda - W)(W - a_k)} = \frac{1}{\lambda - a_k}\left(\frac{1}{\lambda - W} + \frac{1}{W - a_k}\right).$$

Поэтому, группируя члены при одинаковых полюсах в области переменной *W*, запишем (2.2.9) в виде:

$$\frac{1}{W-\lambda}\left(\dot{\lambda} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\lambda - a_k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{W - a_k}\left(\dot{a}_k - \frac{1}{a_k - \lambda}\right) = 0. \tag{2.2.10}$$

Так как равенство (2.2.10) должно выполняться при произвольном значении *W*, то множители в скобках должны быть равными нулю:

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{1}{a_k - \lambda}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda - a_k}. \tag{2.2.11}$$

Эти уравнения [50], используются для нахождения прообразов вершин многоугольника, лежащих на вещественной оси и являющихся функциями некоторого вещественного параметра t. Уравнения (2.2.11) можно записать также в следующем виде:

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{1}{a_k - \lambda}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{da_k}{dt}. \tag{2.2.12}$$

Откуда следует первый интеграл этой системы уравнений:

$$\lambda = C - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k . \tag{2.2.13}$$

Его можно использовать, например, для контроля точности численного решения системы уравнений (2.2.11).

2.3 Порядок применения системы дифференциальных уравнений Куфарева и проблема начальных условий

Уравнения движения прообразов (2.2.11) составлены так, что движение всех прообразов управляются движением единственного разреза переменной длины. Поэтому алгоритм нахождения прообразов $a_k(t)$ по методу П.П. Куфарева состоит в последовательном выпускании разрезов, начиная с некоторого достаточно простого многоугольника, например полуплоскости. Это можно пояснить на примере рисунка 9, на котором показан многоугольник, имеющий семь вершин.

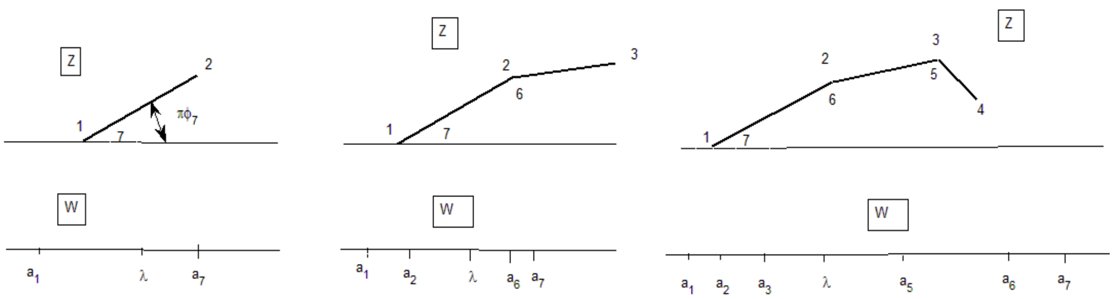

Рисунок 9 – Последовательность проведения разрезов

Сначала выпускается разрез (1–2), для чего нужно решать систему, состоящую из трех дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_1}{dt}=\frac{1}{a_1-\lambda},\qquad \frac{d\lambda}{dt}=\frac{\alpha_1}{\lambda-a_1}+\frac{\alpha_7}{\lambda-a_7},\qquad \frac{da_7}{dt}=\frac{1}{a_7-\lambda}. \tag{2.3.1}$$

При этом в качестве начальных значений должны выбираться величины:

$$a_1(0)=a_7(0)=\lambda(0)=\lambda_0.$$

Эту систему нужно проинтегрировать для значения параметра $t = t_1$, соответствующего заданной длине разреза. При добавлении второго разреза характеризуемого номерами вершин (2, 3, 5, 6) уже необходимо решать систему из пяти дифференциальных уравнений вида (2.2.11) с пятью неизвестными величинами: $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\lambda(t)$, $a_6(t)$, $a_7(t)$. После добавления к многоугольнику третьего разреза определяются все семь величин: $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, $\lambda(t)$, $a_5(t)$, $a_6(t)$, $a_7(t)$ как решения системы из семи дифференциальных уравнений. Таким образом, характерным свойством метода П.П. Куфарева является то, что с добавлением нового разреза приходится всякий раз численно решать новую систему дифференциальных уравнений вида (2.2.11), размерность которой на две единицы больше предыдущей, и старые значения прообразов являются для нее начальными условиями. При этом прообраз λ делит остальные прообразы так, что слева от него находятся прообразы внешних вершин многоугольника, а справа – прообразы его внутренних вершин.

Сам по себе иерархический порядок решения уравнений Куфарева не представляет принципиальных трудностей с точки зрения построения вычислительного алгоритма. Но особая структура дифференциальных уравнений Куфарева, состоит в том, что они содержат в правой части полярную особенность в окрестности точки: $a_k(t) = \lambda$.

Тем не менее, несмотря на наличие такой особенности, систему дифференциальных уравнений Куфарева (2.2.12) можно решать аналитическим способом, представляя решение в виде ряда по степеням $\sqrt{t}$, как это указывается в работах [50, 52, 71, 73, 74]. Однако при этом возникают определенные сложности. Поэтому мы, полагаясь на дальнейшее применение численного метода, будем использовать линейную часть разложения в ряд параметра $\lambda = \lambda(t)$ и близлежащих параметров $a_i = a_i(t)$, $a_{i+1} = a_{i+1}(t)$. На этом пути можно достаточно точно определить начальные значения λ, a_i и a_{i+1} близко от точки λ_0, что позволит избежать сингулярности и воспользоваться численным методом.

Запишем три дифференциальных уравнения для неизвестных прообразов находящихся с двух сторон от параметра λ и для параметра λ:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{1}{a_i - \lambda}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\alpha_i}{\lambda - a_i} + \frac{\alpha_{i+1}}{\lambda - a_{i+1}}, \qquad \frac{da_{i+1}}{dt} = \frac{1}{a_{i+1} - \lambda}. \qquad (2.3.2)$$

Их решение будем искать в следующем виде:

$$a_i = \lambda_0 + A\sqrt{2t}, \qquad a_{i+1} = \lambda_0 + B\sqrt{2t}, \qquad \lambda = \lambda_o + C\sqrt{2t}. \qquad (2.3.3)$$

Как видим, искомые величины λ, a_i и a_{i+1} совпадают при $t = 0$, и при малых значениях t уравнения (2.3.3) определяют три не совпадающих между собой прообраза, чего достаточно для привлечение численного метода, так как эти уравнения позволяют определить начальные условия для λ, a_i и a_{i+1} с приемлемой точностью близко от сингулярности. Остается найти коэффициенты A, B и C в равенствах (2.3.3).

После подстановки (2.3.3) в (2.3.2), параметр t сокращается, и получается система трех уравнения для нахождения коэффициентов A, B и C:

$$A^2 - AC = 1, \qquad B^2 - BC = 1, \qquad C = \frac{\alpha_i}{C - A} + \frac{\alpha_{i+1}}{C - B}. \qquad (2.3.4)$$

Отнимая второе равенство из первого, находим:

$$A^2 - B^2 = C(\mathrm{A} - B), \qquad \text{т.е.} \qquad C = A + B. \qquad (2.3.5)$$

Подставляя С из (2.3.5) во второе из уравнений (2.3.4), получим:

$$B = -\frac{1}{A}. \qquad (2.3.6)$$

После этого, третье уравнение системы (2.3.4) будет уже выглядеть как:

$$A - \frac{1}{A} = -\alpha_i A + \frac{\alpha_{i+1}}{A}, \quad \text{или:} \quad A^2(1 + \alpha_i) = 1 + \alpha_{i+1}. \qquad (2.3.7)$$

Отсюда следует, что коэффициент A равен:

$$A = -\sqrt{\frac{1+\alpha_{i+1}}{1+\alpha_i}}\,. \tag{2.3.8}$$

Здесь перед корнем взят отрицательный знак, так как по смыслу задачи левый прообраз должен перемещаться влево от начального положения. Для коэффициента С получается следующее выражение:

$$C = A + B = -\sqrt{\frac{1+\alpha_{i+1}}{1+\alpha_i}} + \sqrt{\frac{1+\alpha_i}{1+\alpha_{i+1}}} = \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{\sqrt{(1+\alpha_i)(1+\alpha_{i+1})}}\,. \tag{2.3.9}$$

Таким образом, решение системы трех дифференциальных уравнений (2.3.2) будет следующим:

$$\begin{aligned}
a_i(t) &= \lambda_0 - \sqrt{\frac{1+\alpha_{i+1}}{1+\alpha_i}}\sqrt{2t},\\
\lambda(t) &= \lambda_0 + \frac{\alpha_i - \alpha_{i+1}}{\sqrt{(1+\alpha_i)(1+\alpha_{i+1})}}\sqrt{2t},\\
a_{i+1}(t) &= \lambda_0 + \sqrt{\frac{1+\alpha_i}{1+\alpha_{i+1}}}\sqrt{2t.}
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Из него видно, что в начальный момент $t = 0$ все три точки совпадают, а затем они перемещаются по закону (2.3.10). Заметим, что это решение является точным, для случая, когда система состоит из трех уравнений. В случае, когда число уравнений в системе больше трех, прообразы λ, a_i и a_{i+1} в первом приближении (для малых t) имеют значения, даваемые формулой (2.3.10). Принимая их в качестве начальных условий, при достаточно малом значении t, можно провести дальнейшее численное интегрирование всей системы дифференциальных уравнений Куфарева (2.2.11) при помощи какого-нибудь из известных численных способов.

В диссертации уже отмечалось, что многими авторами предпринимались попытки решить проблему параметров интеграла Шварца–Кристоффеля, но при этом, следуя традиционным путем, часто попытки сводились к решению сложной системы нелинейных уравнений с несобственными интегралами. При этом вопрос ставился только о том, как такую систему решать?

При этом П.П. Куфарев решает проблему нахождения параметров совершенно необычным образом, сводя её к гораздо более простой задаче, – к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для данного метода характерно то, что он применим только для многоугольников, порождаемых последовательно выдвигаемыми разрезами. Простейшие примеры таких многоугольников показаны на рисунках 8 и 9. Тем не менее, метод П.П. Куфарева применим для отображения многоугольников более общего вида. При замыкании разреза на границу, семейство отображений из полуплоскости на рассматриваемый многоугольник с разрезом сходится к отображению из верхней полуплоскости на многоугольник, являющийся ядром семейства областей $\Delta(t)$, граница которого содержит точку бесконечность (согласно теореме Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру). Это обусловлено нормировкой отображения $Z(\infty) = \infty$. Пусть, например, вершина 5 (рисунок 8) достаточно близко подходит к вещественной оси, тогда прообразы вершин (5, 6, 7, 8, 9) будут стягиваться в одну точку плоскости W, тогда как предельное отображение Z переводит верхнюю полуплоскость на многоугольник (1, 2, 3, 4, ∞) без разрезов.

2.4 Замечательное свойство метода П.П. Куфарева

Вводя в рассмотрение параметр t, П.П. Куфарев как бы оживляет плоскости Z и W, а также само отображение. Для того чтобы выяснить, что происходит с вершинами сходного многоугольника при применении метода П.П. Куфарева, возьмем производную от Z по t, получим:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial W}\dot{W}. \qquad (2.4.1)$$

Запишем уравнение (2.2.2) в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{\lambda - W}\frac{\partial Z}{\partial W}. \qquad (2.4.2)$$

Подставляя (2.4.2) в (2.4.1), получим:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial W}\left(\dot{W} + \frac{1}{\lambda - W}\right). \qquad (2.4.3)$$

Пусть теперь $W = a_k$, тогда в силу (2.2.11) правая часть последнего соотношения будет равна нулю. Получается, что вершины многоугольника комплексной плоскости Z, соответствующие своим прообразам a_k, не зависят от t и остаются неподвижными, несмотря на то, что сами прообразы при этом движутся.

Далее, если подставить в (2.4.3) $W = \lambda$ и учесть, что dZ/dt содержит множитель $(W - \lambda)$, то получим [75]:

$$\left.\frac{dZ}{dt}\right|_{W=\lambda} = \frac{dZ}{dW}\cdot\frac{1}{\lambda - W} = -\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda - a_k\right)^{\alpha_k}. \qquad (2.4.4)$$

Если через L обозначим длину выпускаемого разреза, тогда:

$$\frac{dL}{dt} = \left|\frac{dZ}{dt}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\lambda - a_k\right|^{\alpha_k}. \qquad (2.4.5)$$

Таким образом, в плоскости Z, при выпускании очередного разреза изменяется только его длина по закону (2.4.5), а прежние длины сторон многоугольника, в том числе и его вершины, остаются неизменными. Если при $t = t_0$ известны константы Шварца–Кристоффеля (прообразы a_k), то дифференциальные уравнения Куфарева (2.2.11) описывают движение этих прообразов при добавлении к n-угольнику разреза длины $L(t)$.

2.5 Преобразование уравнений П.П. Куфарева

В методе П.П. Куфарева, при выпускании очередного разреза, движение прообразов описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{1}{a_k - \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s}{\lambda - a_s} = -\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\frac{da_s}{dt}, \text{ т.е. } \lambda = C - \sum_{s=1}^{n}\alpha_s a_s, \qquad (2.5.1)$$

где константа C определяется из начальных условий.

Из этой системы видно, что переменная λ выражается через прообразы вершин, и для нее нет необходимости выписывать отдельное уравнение движения. Поэтому, с вычислительной точки зрения систему уравнений (2.5.1) удобнее преобразовать к такой форме, когда неизвестными величинами являются разности:

$$b_k(\mathrm{t}) = a_k(\mathrm{t}) - \lambda(\mathrm{t})\,. \qquad (2.5.2)$$

С учетом этой замены уравнения движения прообразов (2.5.1) принимают следующий вид:

$$\frac{db_k}{dt} = \frac{1}{b_k} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s}{b_s}, \qquad \lambda\left(1 + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s\right) = C + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s b_s\,. \qquad (2.5.3)$$

Из них видно, что численно интегрировать нужно только систему дифференциальных уравнений, записанную для величин b_k, в то время как параметр λ находится непосредственно по величинам этих разностей.

На примере для четырех подвижных точек (когда выпускается второй разрез) видим, что система дифференциальных уравнений Куфарева для величин $b_k(t)$ будет иметь следующий векторно-матричный вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & 1+\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1+\alpha_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/b_1 \\ 1/b_2 \\ 1/b_3 \\ 1/b_4 \end{vmatrix}. \qquad (2.5.4)$$

Правая и левая части этих уравнений связаны посредством матрицы М(α), которая зависит только от показателей степени множителей в формуле Шварца–Кристоффеля, и ее структура ясна из формулы (2.5.4).

Такой же вид имеют уравнения Куфарева и при большем числе подвижных точек. В них только изменяется размер матрицы и векторов в формуле (2.5.4). Запишем эти уравнения компактно в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathrm{M}(\alpha)\left(.\mathbf{b}^{-1}\right). \qquad (2.5.5)$$

Добавим к этому уравнению уравнение, определяющее длину разреза:

$$\frac{dL}{dt} = \prod_{k=1}^{n} \left| b_k(\mathrm{t}) \right|^{\alpha_k}. \qquad (2.5.6)$$

Тогда, если в качестве переменной интегрирования использовать длину выпускаемого разреза L, то уравнение (2.5.4) запишется в виде:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dL} = \mathrm{M}(\alpha) \cdot \frac{\left(.\mathbf{b}^{-1} \right)}{\prod_{k=1}^{n} \left| b_k \right|^{\alpha_k}}. \qquad (2.5.7)$$

В такой записи считается, что прообразы $w = b_k$, $k = 1, \ldots, n$, пронумерованы в возрастающем порядке и разрез начинает выпускаться из образа точки $w = 0$. Таким образом, отрицательным значениям величин $w = b_k < 0$ соответствуют внешние вершины многоугольника, а положительным их значениям соответствуют внутренние вершины. Система дифференциальных уравнений движения прообразов, по сути, не изменилась, и она по-прежнему имеет решение с начальными данными, которые получаются из геометрии задачи. Для использования встроенного в пакет MatLab численного метода интегрирования дифференциальных уравнений необходимо с помощью формул (2.3.10) переопределить начальные условия для прообразов, уравнения для которых имеют сингулярность в начальной точке. После этого нужно задать матрицу М(α), т.е. определить значение показателей степеней множителей в интеграле Кристоффеля−Шварца в соответствии со значениями углов при вершинах рассматриваемого многоугольника. Эта важная для численного алгоритма операция названа в диссертации (условно) ‘коррекцией начальных условий’.

Предположим, что эта подготовительная операции уже выполнена, и нам известна длина разреза L_0, начальные условия $\mathbf{b}(0) \neq 0$ и вектор, составленный из показателей степеней $\boldsymbol{\alpha}$. В этом случае решение системы уравнений (2.5.7) можно довольно просто осуществить следующими операторами в системе MatLab:

```
b=b0'; N=2000*ceil (L0);
for k=1:N b=b+(L0/N)*M*(1./b)/prod(abs(b).^alf ')); end;
```

Интегрирование осуществляется по схеме Эйлера с достаточно маленьким шагом. Вряд ли здесь стоит применять более изощренные способы численного решения дифференциальных уравнений, так как и без того скорость вычисления и точность расчета оказываются достаточно высокими.

Заметим, что при выпускании самого первого разреза, можно обойтись и без численного интегрирования системы уравнений (2.5.1) или (2.5.7), так как в этом случае известно аналитическое решение:

$$\frac{dZ}{dW} = \left(W - a_1\right)^{-\alpha} W \left(W - a_2\right)^{\alpha - 1}, \qquad \text{Z} = \left(W - a_1\right)^{1-\alpha} \left(W - a_2\right)^{\alpha}. \quad (2.5.8)$$

Если $\alpha\pi$ – угол наклона первого разреза к вещественной оси и L – его длина, то определение прообразов a_1 и a_2 осуществляется по формулам:

$$H = \frac{L}{\alpha^{\alpha}\left(1-\alpha\right)^{1-\alpha}}, \qquad a_1 = -H \cdot (1-\alpha), \qquad a_2 = H \cdot \alpha . \qquad (2.5.9)$$

3 ВОПРОСЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

3.1 Вычисление показателей степени в формуле Шварца–Кристоффеля

Показатели степеней α_k множителей в интеграле Шварца–Кристоффеля зависят от взаимного расположения сторон отображаемого многоугольника. Будем исходить из того, что нам известна последовательность сторон многоугольника, каждая из которых рассматривается как отдельный свободный вектор. Пусть эти стороны многоугольника перечислены в виде списка:

$$dZ = \left[z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n \right]. \qquad (3.1.1)$$

Тогда можно получить список длин сторон многоугольника $\mathbf{L} = \mathrm{abs}(dZ)$ и список аргументов (углов наклона сторон с вещественной осью) $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{angle}(dZ)$. Накапливаемая сумма элементов списка dZ, т.е. операция $Z = \mathrm{cumsum}[0, dZ]$, очевидно дает список n вершин многоугольника. Из рассмотрения углов образуемых при пересечении двух соседних сторон многоугольника можно установить, что показатели степени $\boldsymbol{\alpha}$ в формуле Шварца–Кристоффеля связаны с углами наклона сторон $\boldsymbol{\varphi}$ зависимостью:

$$\boldsymbol{\alpha}' = \mathrm{T}\boldsymbol{\varphi}' / \pi. \qquad (3.1.2)$$

Операция «′» здесь означает транспонирование, т.е. превращение строк в столбцы. Структуру матрицы T поясним на примере четырех элементов в списке сторон dZ. Формула (3.1.2) в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\\ \alpha_7\\ \alpha_8\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix}\varphi_1/\pi\\ \varphi_2/\pi\\ \varphi_3/\pi\\ \varphi_4/\pi\end{vmatrix}, \qquad \mathrm{T}= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (3.1.3)$$

Отсюда видим, что матрица Т является прямоугольной и имеет $2n$ строк и n столбцов. Ее элементы принимают только три значения: –1, 0, 1. Она является объединением по вертикали двух простых квадратных матриц, верхняя из которых – двух-диагональная матрица Теплица, а нижняя – матрица Ханкеля. Такой же вид имеет матрица Т в формуле (3.1.2) и при большем числе элементов в списке сторон многоугольника. Изменяется только размер матрицы Т и размер векторов **φ** и **α**.

Приведем фрагмент программы, которая производит вычисления по формуле (3.1.2).

```
n=length (dZ); phi=angle(dZ)/pi;
c=zeros(n,1); c1=c’; c(1)=-1; c(2)=1; c1(1)=-1; T=toeplitz(c,c1);
c=zeros(n,1); c1=c’; c(end)=1; c(end-1)=-1; c1(1)=1; T1=hankel(c,c1);
T=[T;T1]; alf=T*phi’; alf(end)=alf(end)-1;
```

Матрица Т обладает тем свойством, что сумма элементов каждого ее столбца равна нулю. Следовательно, и сумма всех показателей степени (α_k) тоже будет равна нулю.

Но при отображении многоугольника на верхнюю полуплоскость нужно учитывать, что должно выполняться равенство:

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k + 1 = 0. \qquad (3.1.4)$$

Поэтому в конце вычислений показателей степени по формуле (3.1.2), или по приведенной выше программе, от последнего элемента α_{2n} отнимается единица.

Формула (3.1.2) имеет универсальных характер, и по ней можно вычислять показатели степени сразу для всех сторон отображаемого многоугольника, или же применять ее каждый раз при выпускании очередного разреза.

3.2 Коррекция начальных условий

Коррекция начальных условий $\mathbf{b}(0)$ в уравнениях (2.5.7) нужна только при выпускании очередного разреза. При этом считается, что прежние значения вектора **b** меньшей длины уже были вычислены, и нужно добавить в середину массива еще два малых по модулю числа, которые вычисляются по формулам (2.3.10). Такой результат достигается выполнением следующих операторов:

$$
\begin{aligned}
&t = 0.000001;\ \ al1 = alf\left(n/2\right);\ \ al2 = alf\left(n/2+1\right);\\
&\mathrm{k} = \left(1+al2\right)/\left(1+al1\right);\quad \mathrm{k{=}sqrt(k)};\\
&\mathrm{A{=}{-}k{*}sqrt}\left(2*t\right);\quad \mathrm{B{=}sqrt}\left(2*\mathrm{t}\right)/\mathrm{k};\qquad .\\
&\mathrm{b1} = \mathrm{b}\left(1:n/2\right);\quad \mathrm{b2{=}b}\left(n/2+1:\mathrm{end}\right);\ \ \mathrm{b{=}}\left[b1,0,0,b2\right];\\
&m = length\left(b\right);\quad \mathrm{b}\left(m/2\right) = A;\ \ \mathrm{b}\left(m/2+1\right) = B;\quad \mathrm{b{=}b{-}A{-}B};
\end{aligned}
$$

3.3 Два основных блока и управляющая программа

Целью расчета конформного отображения по методу П.П. Куфарева является получение констант интеграла Шварца–Кристоффеля и вывод на экран изображения некоторых линий, например, образов горизонтальных или вертикальных линий в плоскости *W*. Ясно, что для этого достаточно иметь в качестве входных данных только список векторов сторон отображаемого многоугольника. Для проведения самого первого разреза, который использует аналитические выражения (2.5.8) и (2.5.9) нужен только первый элемент из списка сторон. Таким образом, первым основным программным блоком является функция:

$$\left[L1,\mathrm{D1}\right]=rzr1\left(dz\right). \qquad (3.3.1)$$

У нее среди входных параметров указан только список сторон, а на выходе она возвращает длину разреза $L1$ и двух строчную матрицу D1, у которой первая строка содержит показатели степени α_k, а во второй строке находятся прообразы вершин b_k. Эта же функция (3.3.1) осуществляет и графический вывод линий тока.

Второй и следующие за ним разрезы должны проводиться с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений Куфарева. Поэтому необходим второй основной программный блок, реализованный в виде функции:

$$\left[L,\ \mathrm{DD}\right]=rzrn\left(n,\ dz,\ \mathrm{D}\right). \qquad (3.3.2)$$

Здесь входными параметрами являются: n – номер проводимого разреза, dz – список сторон многоугольника и D – предыдущая двух строчная матрица, содержащая показатели степеней и прообразы вершин. Выходными параметрами функции (3.3.2) являются длина L нового разреза и новая двух строчная матрица DD, имеющая на два столбца больше чем предыдущая, полученная с помощью метода П.П. Куфарева.

Имея две составленные нами программы вида (3.3.1) и (3.3.2), мы можем произвести весь расчет конформного отображения с помощью управляющей программы, например, следующего вида:

$$\begin{array}{l} function\quad \left[L1,\mathrm{D1},L2,\mathrm{D2},L3,\mathrm{D3},L4,\mathrm{D4}\right]=razrez \\ 1)\ \ dz=\left[6+5*i,\ 6+i,\ 10,\ -2*i\right]; \\ 2)\ \ \left[L1,\mathrm{D1}\right]=rzr1\left(dz\right); \\ 3)\ \ \left[L2,\mathrm{D2}\right]=rzrn\left(2,dz,\mathrm{D1}\right); \\ 4)\ \ \left[L3,\mathrm{D3}\right]=rzrn(3,\mathrm{dz},\mathrm{D}2); \\ 5)\ \ \left[L4,\mathrm{D4}\right]=rzrn\left(4,dz,\mathrm{D3}\right); \end{array} \qquad (3.3.3)$$

В этой программе первой операцией является задание (вручную) списка сторон отображаемого многоугольника, состоящего (в данном случае) из четырех комплексных чисел. Второй оператор, проводит первый разрез. Следующие операторы проводят последовательно второй, третий и четвертый разрезы и выдают матрицы D2, D3, D4, с каждым разом увеличивающегося на две единицы (по горизонтали) размера. Поскольку переменные $L1$, $L2$, $L3$, $L4$, а также матрицы

D1, D2, D3, D4 сохраняются в рабочем пространстве, то после работы программы (3.3.3), имеется возможность просмотреть и проанализировать результаты полученного расчета.

Так как функции $rzr1(dz)$ и $rzrn(n, dz, \mathrm{D})$ сами имеют внутри себя графические операторы, то после работы программы (3.3.3) получаются также и все промежуточные графики необходимых изолиний.

Весьма удобным свойством управляющей программы (3.3.3) является то, что при изменении формы отображаемого многоугольника в программе нужно только заменить первый оператор, т.е. список сторон многоугольника.
Для функции $rzr1(dz)$ текст программы имеет компактный вид:

```
function [L1,D1]=rzr1(dz)
L1 = abs(dz(1)); r=angle(dz(1))/ pi ;
H=r^r*(1-r)^(1-r); H=L1/H; a= - H*(1-r); b=H*r; D1=[-r, r-1, a, b];
figure; hold on;
for psi=linspace(0.3, 3, 5)   a=D1(2,1); b=D1(2,2); ap=D1(1,1);          (3.3.4)
w=linspace(a-50, b+5, 1500)+1i* psi; z=(w-a).^(1+ap).*(w-b).^(-ap);
plot(real(z),imag(z)); grid on; end;
plot([0,dz],'k','Linewidth',2); hold off; axis([-20,10,-1,7]);
end
```

Без графических операторов текст этой программы занимает всего две строчки, т.к. матрица D1 вычисляется по простым формулам (2.5.9).

Более длинным получается программный код для второго модуля *rzrn*:

```
function   [L,D]=rzrn(n,dz,D)
dz1=dz(1:n); sig=angle(dz1)/pi; L=abs(dz(n));
c=zeros(n,1); c1=c'; c(1)=-1; c(2)=1; c1(1)=-1; T=toeplitz(c,c1);
c= zeros(n,1); c1=c'; c(end)=1; c(end-1)=-1; c1(1)=1; T1=hankel(c,c1);
T=[T;T1]; alf=T*sig'; alf(end)=alf(end)-1; alf=alf'; m=length(alf);
M=repmat(alf, m, 1)+eye(m); B0=D(2,:); m=length[B0];
C1=B0(1:m /2); C2=B0(m/2+1:end); B2=[C1,0,0,C2]; m=length(B2);
t=0.000001;
al1=alf(m/2); al2=alf(m/2+1); k=(1+al2)/(1+al1); k=sqrt(k);
AA=-k*sqrt(2*t); BB=sqrt(2*t)/k;
Bn=B2; Bn(m/2)=AA; Bn(m/2+1)=BB; Bn=Bn-AA-BB;
 C=Bn'+t*M*(1./Bn)';    N=2000*ceil(L);
for  s=1:N   C=C+(L/N)*M*(1./C)/prod(abs(C)).^(alf')); end;
DD=[alf;C'];          risline(DD);
```

(3.3.5)

Как видим, этот второй программный блок выглядит не настолько компактным как первый, т.к. в нем необходимо формировать матрицу M входящую в уравнения Куфарева, и корректировать начальные условия, прежде чем начинать численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В нем графические операции выполняет дополнительная функция: risline(D). Она рисует на экране образы линий $\mathrm{Im}(W) = const$ и использует для этого показатели степеней и прообразы вершин многоугольника, которые содержатся в двухстрочной матрице D. Одним из вариантов этой функции может быть следующий ее текст:

```
function  risline (D)
b=D(2,:);   alf=D(1,:);   N=20000;  m=length(b);
figure;  hold on; psi=linspace(0.01, 5, 10);
for  k=1:length(psi)  w=linspace(b(1)-100, b(end)+40, N)+1i*psi (k);
W=repmat(w, m, 1); B=repmat(b', 1, N); f=alf*log(W-B); f=exp(f);
f=f.*w; f=cumtrapz(w, f)-100+1i*psi(k);
if k= =1 plot(real(f), imag(f), ' k', ' Linewidth', 3); end;
plot(real(f), imag(f)); grid on; end; hold off; axis([-20, 80, 0, 7]);
```

. (3.3.6)

Эта программа может настраиваться на размеры графического окна и выделять более толстой линией образ линии тока близкой к вещественной оси.

3.4 Пример модельного расчета

Для примера тестового расчета по методу П.П. Куфарева мы рассмотрим подробнее отображение многоугольника, четыре стороны которого заданы такими же, как в управляющей программе (3.3.3). Выпуская первый разрез по этой программе, получаем несколько линий тока вокруг него, рисунок 10.

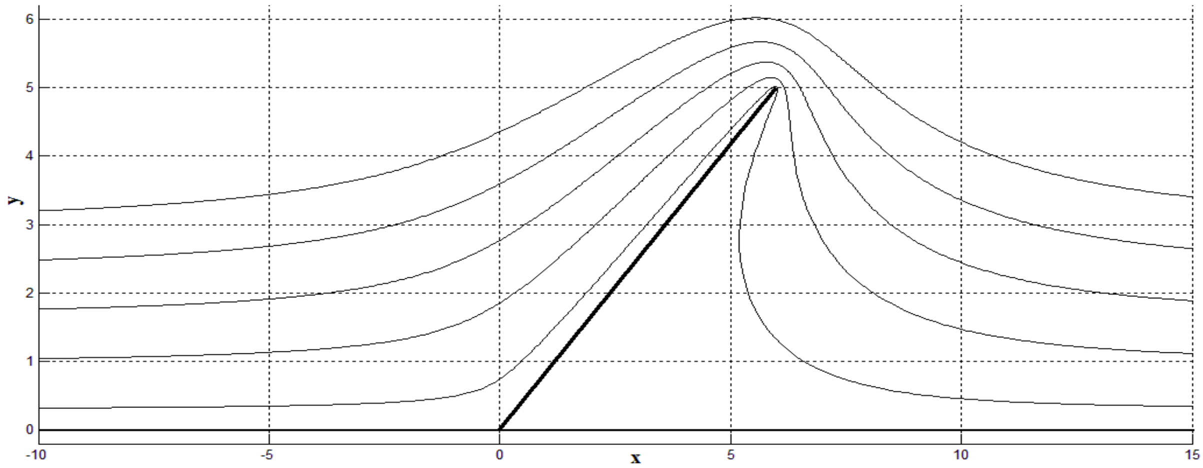

Рисунок 10 – Линии тока вокруг первого разреза

Матрица D1 в этом случае получается в виде:

$$\mathrm{D1} = \begin{pmatrix} -0.2211 & -0.7789 \\ -10.3177 & 2.9295 \end{pmatrix}. \tag{3.4.1}$$

В ней первая строка представляет собой показатели степеней вершин прилегающих к вещественной оси, а вторая строка – прообразы этих вершин: b_1 и b_2. Сумма элементов первой строки матрицы D1, как и должно быть, равна –1. Выпускание первого разреза проводилось по точным формулам (2.5.9), поэтому и результат расчета (3.4.1) получился верным.

При выпускании второго, третьего и четвертого разреза уже требуется применение метода П.П. Куфарева. На рисунках 11, 12 и 13 показано изменение характера линий тока при последовательном выпускании этих разрезов.

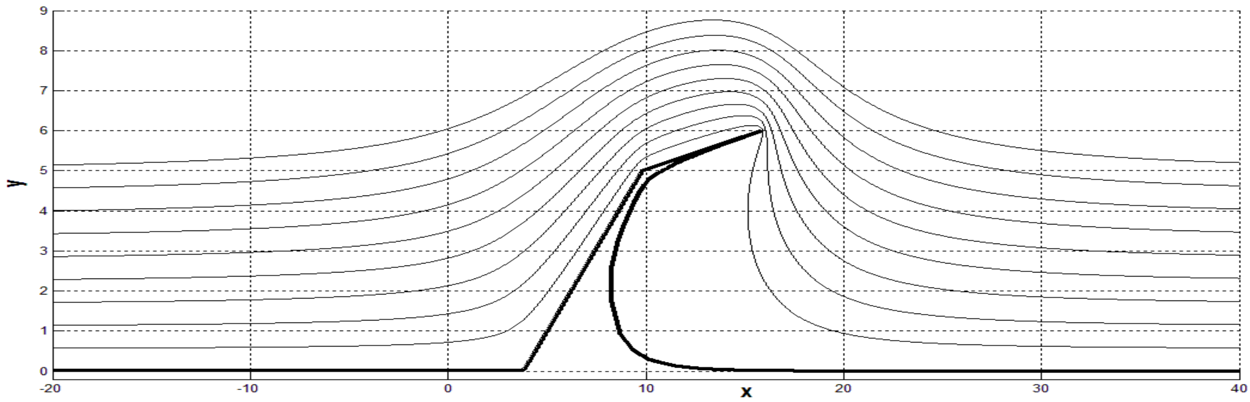

Рисунок 11 – Поведение линий тока после выпуска второго разреза

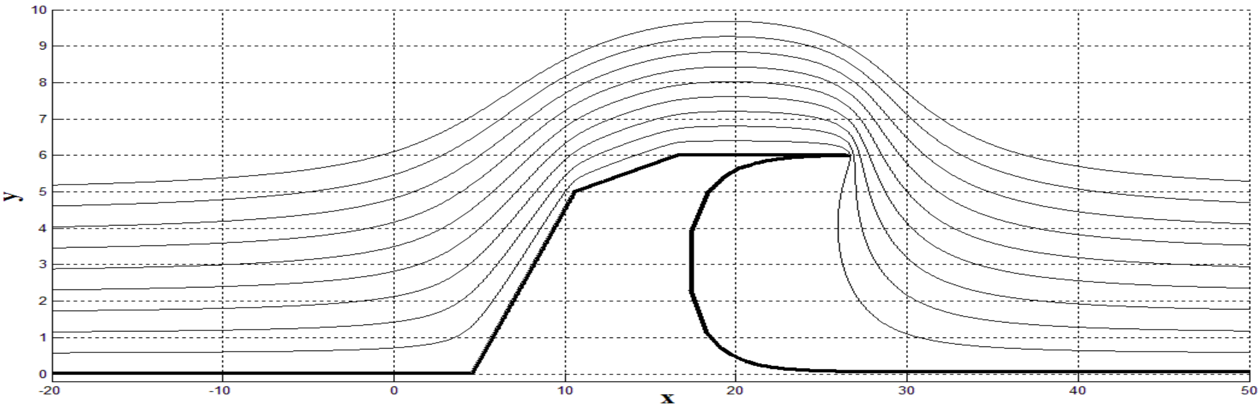

Рисунок 12 – Обтекание многоугольника из трех разрезов

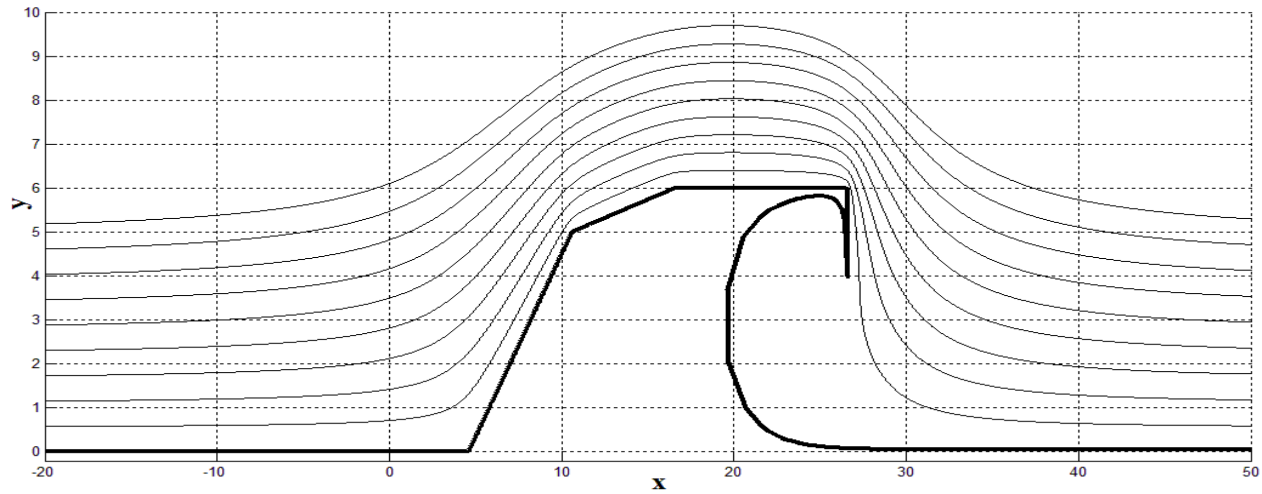

Рисунок 13 – Обтекание многоугольника с четырьмя разрезами: $L4 = 2$

Более толстой линией на этих рисунках вычерчен прообраз линии близкой к вещественной оси: $\mathrm{Im}(W) = 0.005$. Видно, что эта линия не обтекает полностью составной разрез с его внутренней стороны, отделяя от основного течения область застоя, в которую практически не проникают линии тока. Это нормальное явление, т.к. оно проявляется и в точных решениях для интеграла Шварца–Кристоффеля.

Кроме рисунков изолиний 11, 12 и 13, приведем также вид матриц D2, D3, и D4, которые получаются при интегрировании системы дифференциальных уравнений П.П. Куфарева (2.5.7) после проведения соответствующих разрезов.

Матрица D2 после проведения второго разреза выглядит следующим образом:

$$\mathrm{D2} = \begin{pmatrix} -0.2211 & 0.1686 & -0.1686 & -0.7789 \\ -19.4997 & -11.8990 & 2.4015 & 2.4414 \end{pmatrix}. \qquad (3.4.2)$$

По сравнению с матрицей D1 (3.4.1) здесь в середину массива добавились два новых показателя степени α_2, α_3 и два новых прообраза b_2 и b_3. Сумма показателей степени равна –1. Прообразы внешних вершин b_1 и b_2 хорошо разделены, а прообразы внутренних вершин b_3 и b_4 начали сближаться к одной точке. Длины сторон многоугольника соответствуют заданным значениям.

Матрица D3, после проведения третьего разреза, теперь уже состоит из шести элементов в каждой строке:

$$\mathrm{D3} = \begin{pmatrix} -0.2211 & 0.1686 & 0.0526 & -0.0526 & -0.1686 & -0.7789 \\ -32.0199 & -24.8255 & -16.0272 & 2.0494 & 2.0536 & 2.0538 \end{pmatrix}. \quad (3.4.3)$$

В ней также добавились новые показатели степени α_3, α_4, и положительные прообразы вершин $b_4 < b_5 < b_6$ еще теснее сблизились к одной точке. Сближение этих прообразов внутренних вершин многоугольника визуально сопровождается увеличением размера застойной зоны, в которую не проникают линии тока. Это видно из сравнения рисунков 11 и 12.

Матрица D4, соответствующая четвертому разрезу, содержит восемь столбцов и ее трудно вместить в ширину страницы. Поэтому она показана ниже в транспонированном виде и в ней увеличено число значащих цифр:

$$D4' = \begin{pmatrix} -0.221142061623696 & -34.574452255045081 \\ 0.168573604912442 & -27.385896624565685 \\ 0.052568456711253 & -18.601370435835754 \\ 0.500000000000000 & -3.136695183541310 \\ -0.500000000000000 & 0.251160126999675 \\ -0.052568456711253 & 0.356303658674863 \\ -0.168573604912442 & 0.357571432527162 \\ -0.778857938376304 & 0.357633772546823 \end{pmatrix}, \quad L4=2 \qquad (3.4.4)$$

В ней первый столбец содержит показатели степени α_k, а второй столбец содержит прообразы вершин b_k, которые получены в процессе выпускания четвертого разреза по методу П.П. Куфарева.

Проведенный расчет наглядно подтверждает замечательное свойство метода П.П. Куфарева описанное в параграфе 2.4: в процессе выпускания разреза все прообразы вершин движутся, а сами вершины остаются на месте.

Посмотрим еще, что происходит, если мы будем приближать конец четвертого разреза к вещественной оси. Результат такого расчета показан на рисунке 14.

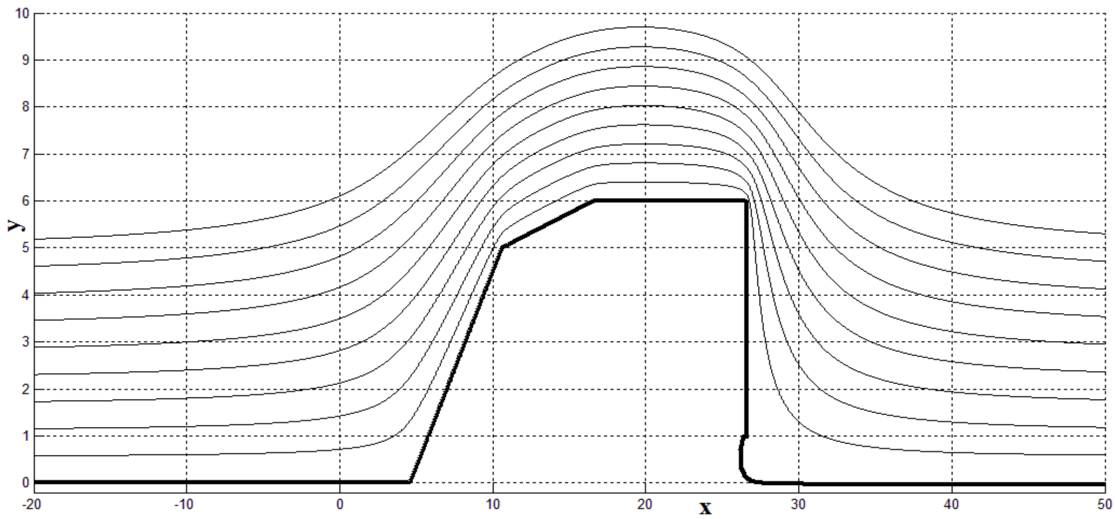

Рисунок 14 – Влияние удлинения четвертого разреза: $L4 = 5$

Транспонированная матрица $D4$ для этого случая имеет вид:

$$\text{D4}'=\begin{pmatrix} -0.221142061623696 & -35.463252854378702 \\ 0.168573604912442 & -28.275411630359120 \\ 0.052568456711253 & -19.492495729015147 \\ 0.500000000000000 & -4.050584783792711 \\ -0.500000000000000 & 0.017101642300799 \\ -0.052568456711253 & 0.017388997532042 \\ -0.168573604912442 & 0.017395235184860 \\ -0.778857938376304 & 0.017395544527653 \end{pmatrix} \quad L4=5. \quad (3.4.5)$$

Из этого расчета можно видеть, что последние четыре прообраза вершин данного многоугольника b_5, b_6, b_7, b_8, включая конец и самого разреза, сливаются в одну точку с крайним значением: $b_5 \approx b_6 \approx b_7 \approx b_8$. Суммируя показатели степеней множителей при этом прообразе, получим:

$$\tilde{\alpha}_5 = 1 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = -0.50000. \quad (3.4.6)$$

Отсюда мы видим, что если конец последнего разреза приближается к вещественной оси, то застойная область занимает всю внутреннюю полость многоугольника и само семейство отображений сходится к отображению из полуплоскости на многоугольник с пятью вершинами без разрезов.

Таким образом, метод П.П. Куфарева позволяет, и в этом его большое достоинство, отображать многоугольники не только в виде разрезов, но и многоугольники, вообще не имеющие прямолинейных разрезов.

Представление о точности таких вычислений по методу П.П. Куфарева можно получить путем сравнения с известными аналитическими решениями.

3.5 Сравнение с аналитическим решением

При отображении верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость с вырезанным прямоугольником, формула Шварца–Кристоффеля имеет вид:

$$\frac{dZ}{dW} = (W+a)^{-1/2}(W+b)^{1/2}(W-b)^{1/2}(W-a)^{-1/2} = \sqrt{\frac{W^2-b^2}{W^2-a^2}}. \quad (3.5.1)$$

Здесь $\pm a$ и $\pm b$ – прообразы вершин прямоугольника.

Интегрирование уравнения (3.5.1) дает точное решение, выражающееся через эллиптические интегралы [5, 61]:

$$Z(W) = iH + a\left[E\left(\arcsin\frac{W}{b},\frac{b}{a}\right) - \left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)F\left(\arcsin\frac{W}{b},\frac{b}{a}\right)\right]. \qquad (3.5.2)$$

Отношение высоты H прямоугольника к его ширине L выражается формулой:

$$\frac{2H}{L} = \frac{E(k') - k^2 K(k')}{E(k) - k'^2 K(k)}, \quad k = \frac{b}{a}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}\,. \qquad (3.5.3)$$

По формуле (3.5.3) можно вычислить модуль эллиптических интегралов *k*.

Если решать подобную задачу методом П.П. Куфарева, по программе (3.3.3), то прообразы вершин находятся легко, и вместе с ними находится отображение, иллюстрируемое линиями тока на рисунке 15.

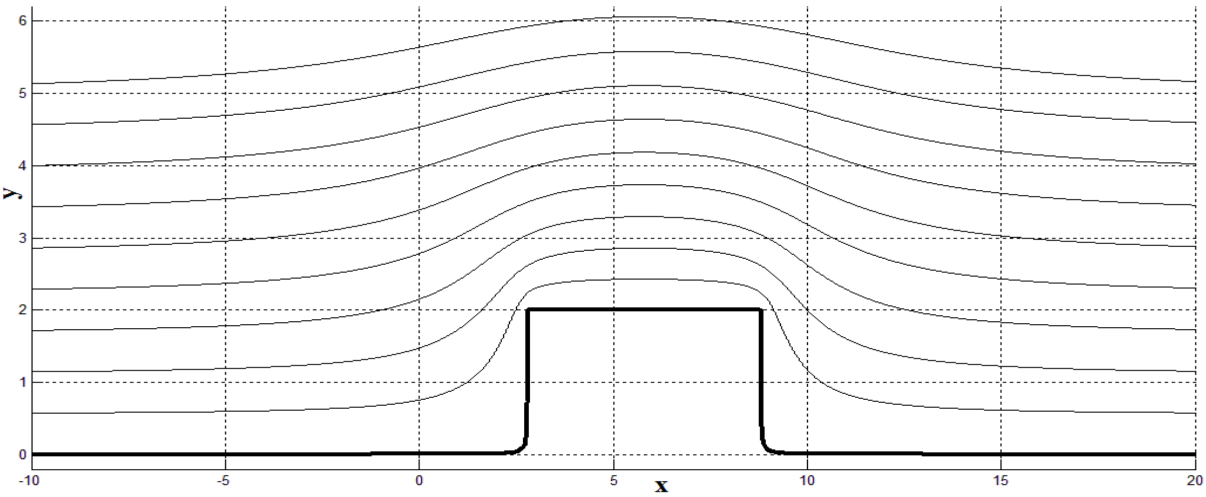

Рисунок 15 – Отображение линий вокруг прямоугольника: $L1 = 2$, $L2 = 6$, $L3 = 1.99$

Матрица D3 в данном случае приобрела следующий вид:

$$\mathrm{D3} = \begin{pmatrix} -0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ -11.7518 & -10.3969 & -1.3549 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}. \qquad (3.5.4)$$

Видим, что совпали с нулем все прообразы внутренних вершин, включая и прообраз конца третьего разреза. Поэтому матрицу (3.5.4) можно уменьшить:

$$\mathrm{D3} = \begin{pmatrix} -0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -11.7518 & -10.3969 & -1.3549 & 0.0000 \end{pmatrix}. \qquad (3.5.5)$$

Во второй строке матрицы (3.5.5) содержатся прообразы b_k четырех внешних вершин прямоугольника, вычисленные методом П.П. Куфарева. Если мы вычтем из второй строки матрицы D3 ее среднее арифметическое значение то, получим:

$$\mathrm{D3} = \begin{pmatrix} -0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -5.8759 & -4.5210 & 4.5210 & 5.8759 \end{pmatrix}. \qquad (3.5.6)$$

Из приведенного примера следует, что метод П.П. Куфарева дал вполне симметричное расположение прообразов, такое же, как и в формуле Шварца–Кристоффеля (3.5.1), причем a = 5.8759 и b = 4.5210. Для модулей эллиптических интегралов, входящих в формулу (3.5.3), находим:

$$k = \frac{b}{a} = 0.7694, \qquad k' = \sqrt{1-k^2} = 0.6388. \qquad (3.5.7)$$

Вычисление эллиптических интегралов в формуле (3.5.3) дает следующее отношение ширины прямоугольника L к его высоте H:

$$\frac{L}{H} = 3.0043. \qquad (3.5.8)$$

Это отношение хорошо совпадает с заданным значением L/H = 3, ошибка расчета по методу П.П. Куфарева равна ≈ 0.14%. Таким образом, из сравнения с точным решением, еще раз убеждаемся, что метод П.П. Куфарева обладает достаточно высокой точностью. Кроме того, с методом П.П. Куфарева гораздо проще, и быстрее, работать, чем с точными аналитическими решениями, и он может быть альтернативой для аналитических решений, которые часто бывают слишком громоздкими.

Замечание. Интеграл Шварца–Кристоффеля определяется с точностью до произвольного слагаемого С, которое вычисляется по формуле:

$$C = \int_{-\infty}^{a_1} \prod_{k-1}^{n} \left|W - a_k\right|^{\alpha_k} dW. \qquad (3.5.9)$$

В блоке рисования этот несобственный интеграл рассчитывается методом трапеций, чего явно недостаточно для получения хорошей точности. Поэтому, например, на рисунке 15 можно заметить несовпадение начала координат с первой вершиной прямоугольника. Такой графический недостаток можно игнорировать, т.к. постоянная C не влияет на работу метода Куфарева, и только сдвигает картинку линий тока по горизонтали.

Это замечание относится и к рисункам 11−14.

3.6 Примеры других вычислений

Пример 1.

Расчет линий тока методом П.П. Куфарева для многоугольника, составленного из восьми разрезов, представлен на рисунке 16.

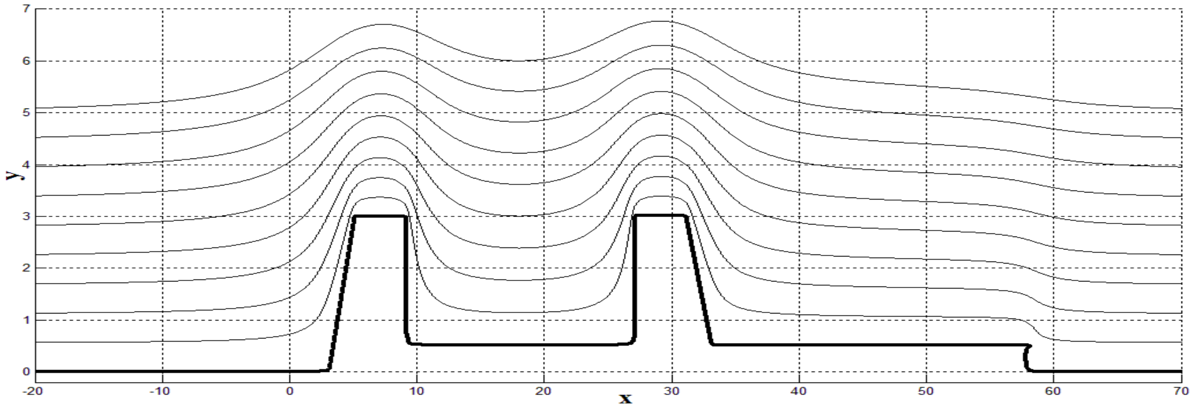

Рисунок 16 – Отображение многоугольника с 8 ребрами

Здесь видно, что застойная область, не содержащая линий, тока занимает почти всю внутреннюю часть многоугольника. Поэтому, при дальнейшем удлинении правого горизонтального разреза будет аппроксимироваться отображение более простого многоугольника, состоящего из первых восьми вершин и бесконечной горизонтальной линии. Найденные методом Куфарева параметры такого 8-угольника содержатся в матрице $D8$:

$$\mathrm{D8} = \begin{pmatrix} -0.312 & 0.312 & 0.500 & -0.500 & -0.500 & 0.500 & 0.285 & -0.285 \\ -18.143 & -14.840 & -7.871 & -6.150 & 6.287 & 8.006 & 14.82 & 17.88 \end{pmatrix}. \quad (3.6.1)$$

Первая ее строка содержит показатели степени, а вторая – прообразы вершин формулы Шварца–Кристоффеля, которые сдвинуты так, что их средняя арифметическая величина равна нулю.

Пример 2.

Метод П.П. Куфарева, реализованный в программе (3.3.3), способен отображать на верхнюю полуплоскость и разветвленные многоугольники с несколькими разрезами, исходящими из одной точки. На рисунке 17 показан один из таких случаев, когда многоугольник имеет не единственную вершину с соответствующим показателем степени равным единице.

Стрелками на этом рисунке обозначен порядок проведения последовательных разрезов. Чтобы получить картину, показанную на рисунке 17, а также все прообразы b_k, достаточно задать в программе (3.3.3) следующий список из 9 отрезков сторон многоугольника dz:

$$dz = [2i,\ -5,\ 5+0.01i,\ 4i-0.01,\ -2i+0.01,\ 5,\ -5-0.01i,\ -3i+0.01,\ 15] \quad (3.6.2)$$

Если такие отрезки последовательно приставлять друг к другу, то получится контур отображаемого полигона.

Из последовательности (3.6.2) видно, что отдельные стороны (или их участки) приходится проходить дважды вдоль их внутренней или внешней стороны.

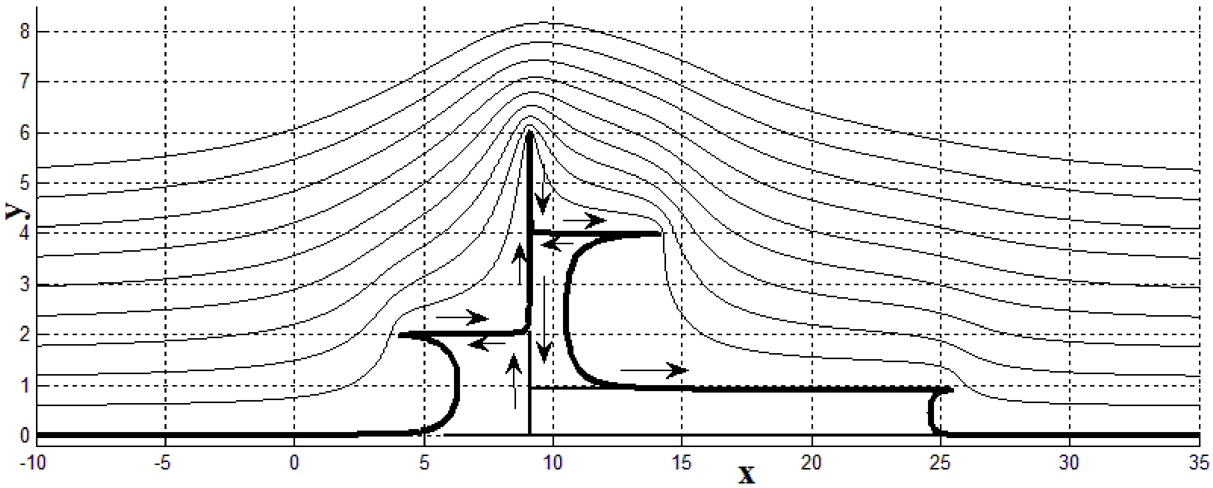

Рисунок 17 – Линии тока вокруг разветвленного разреза

Утолщенной линией, как и на других графиках, обозначен образ линии $\mathrm{Im}(w) = 0.005$, близкой к вещественной оси W, и видно, что весь первый отрезок из списка (3.6.2) и часть последнего отрезка попадают в застойную область. Прообразы вершин, содержащиеся после работы программы в вычисленной матрице D9, представлены на рисунке 18 в виде диаграммы:

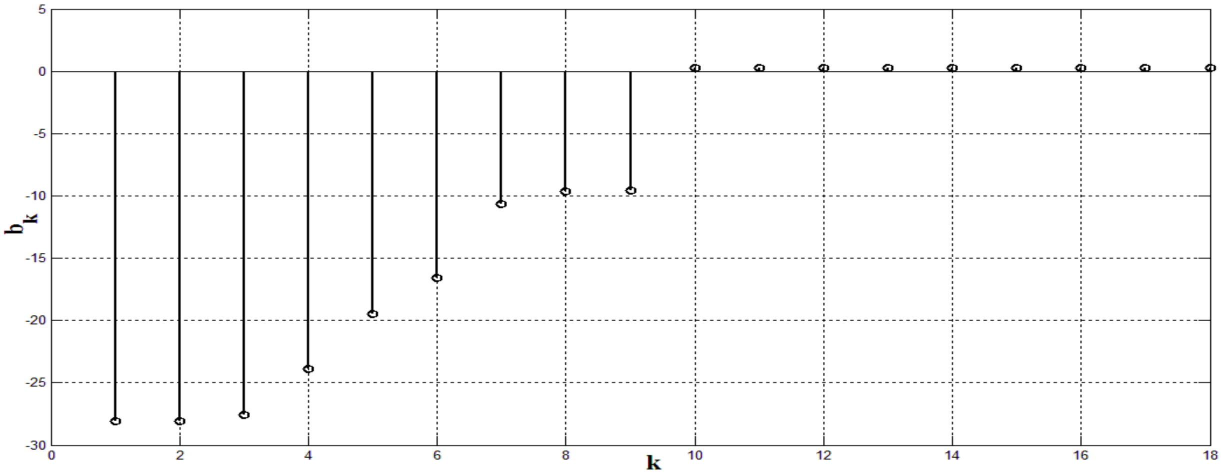

Рисунок 18 – Прообразы вершин, представленные вертикальными отрезками

Если число вершин в многоугольнике довольно велико, то диаграммное представление их прообразов становится, по-видимому, более наглядным.

Так из рисунка 18 можно заметить, что имеются практически совпадающие прообразы, которые можно объединить и тем самым уменьшить общее их число. В рассматриваемом случае сразу видно, что независимых вершин равно 6 вместо 18.

Таким образом, представленная программа не только правильно вычисляет параметры конформного отображения, но и удобна в ситуации с замыканием разреза, позволяет устранить лишние вершины.

Пример 3.

С помощью программы (3.3.3) можно построить отображение из полуплоскости на многоугольник, представляющий собой полуплоскость с некоторой исключенной посредством разрезов фигурой. Эта программа не предназначена для построения отображения на связный многоугольник, представляющий собой полуплоскость в объединении с некоторым ограниченным многоугольником. Тем не менее, с помощью этой программы можно построить отображение на многоугольник с «локальными впадинами» (ямками), которые представлены на рисунках 16 или 19. Решение такой задачи можно использовать для определения прообразов отображения на полуплоскость с «ямкой», так как для выделенного фиксированного участка границы прообразы вершин пренебрежимо мало зависят от деформации достаточно удаленной от них части границы.

Проверим, насколько точно программа (3.3.3) определила прообразы четырех вершин, относящихся к впадинам. Расчет, показанный на рисунке 19, выполнялся для разреза со следующим списком семи его сторон:

$$dz = \left[4i,\ 5,\ -3i,\ 6,\ 3i,\ 5,\ -3.995i\right]. \qquad (3.6.3)$$

Отсюда видим, что отношение L/h ширины ямки к ее высоте равно 2.

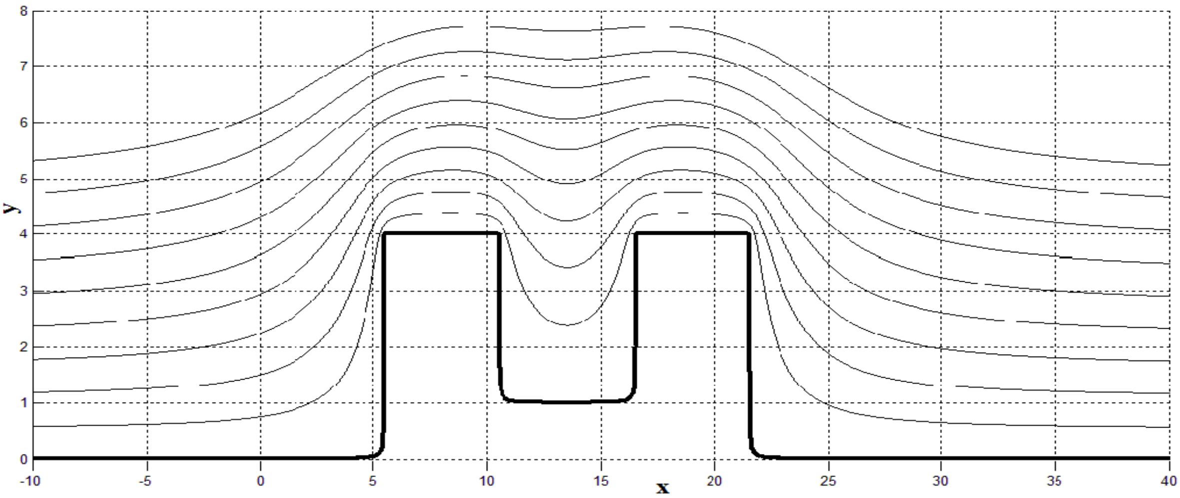

Рисунок 19 – Область с локальной впадиной

После работы программы вычисленные прообразы всех вершин многоугольника показанного на рисунке 19 находятся во второй строке матрицы D7. Если из них выбрать только прообразы четырех вершин ямки, то они имеют следующие, вычисленные методом П.П. Куфарева значения:

$$a_1 = -2.4396\ , \qquad a_2 = -0.7292, \qquad a_3 = 0.7295, \quad a_4 = 2.4393. \qquad (3.6.4)$$

Сравним полученный результат с точным аналитическим решением для отображения ямки находящейся ниже верхней полуплоскости.

Формула Шварца–Кристоффеля в этом случае имеет вид:

$$\frac{dZ}{dW} = \left(W+a\right)^{1/2}\left(W+b\right)^{-1/2}\left(W-b\right)^{-1/2}\left(W-a\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{a^2-W^2}{b^2-W^2}}\,. \qquad (3.6.5)$$

Интегрируя (3.6.5), находим:

$$Z(W) = C\int_0^{W/b}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt, \qquad k = \frac{b}{a}.$$

В правой части здесь стоит неполный эллиптический интеграл второго рода, записанный в форме Лежандра [42, 62]. Таким образом, отображающая функция записывается в виде:

$$Z(W) = \frac{L}{2E(k)} E\left(\frac{W}{b},\ k \right). \qquad (3.6.6)$$

Здесь мы взяли следующее соответствие вершин:

$$Z(0) = 0, \quad Z(\pm b) = \pm\frac{L}{2}, \qquad Z(\pm a) = \frac{L}{2E} \cdot E\left(\frac{\pm 1}{k},\ k \right). \qquad (3.6.7)$$

Из теории эллиптических интегралов [61, 62] известно, что эллиптический интеграл, входящий в формулу (3.6.7), равняется комплексной величине:

$$E\left(\frac{\pm 1}{k},\ k \right) = \pm E + i\left(K' - E' \right). \qquad (3.6.8)$$

Поэтому из (3.6.7) и (3.6.8), получаем:

$$Z(a) = \frac{L}{2} + i\left(\frac{L}{2} \cdot \frac{K' - E'}{E} \right).$$

То есть высота h отображаемой ямки зависит от модуля k эллиптического интеграла и выражается через полные эллиптические интегралы зависимостью:

$$\frac{2h}{L} = \frac{K\left(\sqrt{1-k^2} \right) - E\left(\sqrt{1-k^2} \right)}{E(k)}. \qquad (3.6.9)$$

При расчете данного примера по методу П.П. Куфарева мы получили следующие значения для величин a и b (3.6.4): a = 2.4393, b = 0.7295. Следовательно, модуль эллиптического интеграла $k = b/a = 0.2990$.

Если подставить это значение k в формулу (3.6.9) и произвести вычисление эллиптических интегралов, то получим: $2h/L = 0.9999$, что с большой точностью соответствует пропорциям отображаемой локальной впадины показанной на рисунке 19.

На рисунке 20 показан распространенный на всю плоскость W аналог расчета рисунка 19, в котором при расчете был несколько укорочен последний вертикальный разрез.

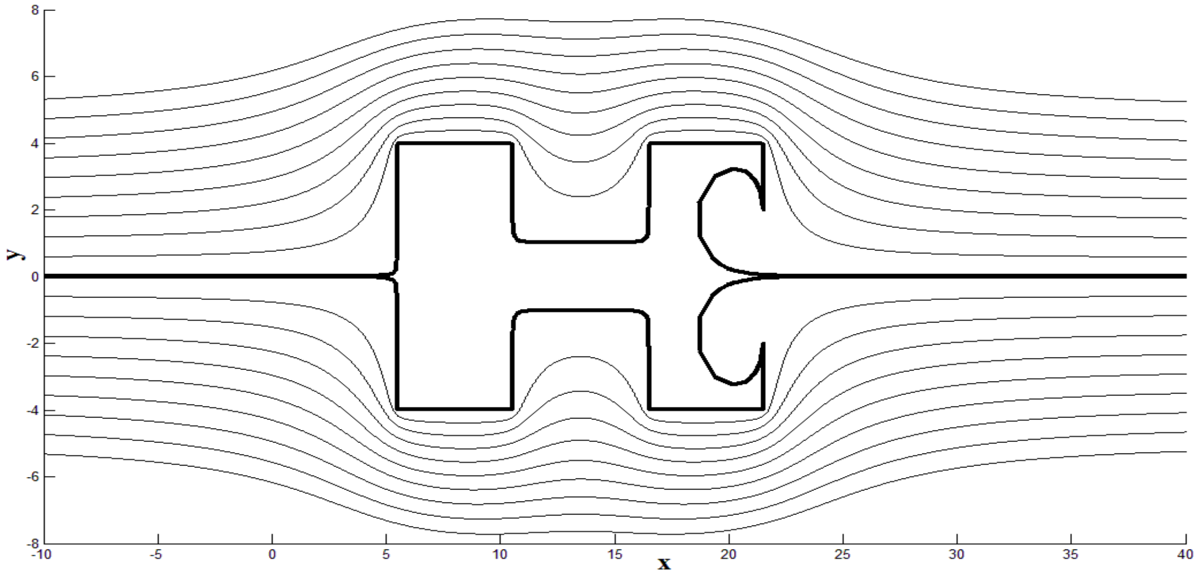

Рисунок 20 – Аналитическое продолжение отображения разреза на нижнюю полуплоскость

Рассмотренные в данном разделе примеры приводят к выводу о несомненных достоинствах метода П.П. Куфарева. Он решает очень широкий круг задач и в нем, в конечном счете, прообразы вершин находятся даже проще, чем в случае аналитических решений.

Заметим, что интеграл Шварца–Кристоффеля вида (2.1.2) представляет отображение, одна из ветвей которого переводит верхнюю полуплоскость на многоугольник Δ, и одна из ветвей – нижнюю полуплоскость на многоугольник Δ^*, симметричный многоугольнику Δ относительно одной из его сторон, в рассматриваемых примерах, например, относительно вещественной оси. Тогда, согласно с принципом симметрии [1, 2], общая картина линий тока должна быть симметричной относительно вещественной оси.

3.7 Задача о движении грунтовых вод под флютбетами плотин

Опыт показывает, что движение грунтовой воды в однородном грунте достаточно точно следует законам движения идеальной жидкости. Поэтому для решения двумерных задач всегда выгодно применять метод конформных отображений. Подобные теории описаны, например, в книге [15] и более подробно и полно в книгах [63, 64]. В них считается, что выполняется условие не сжимаемости жидкости и имеет место закон движения (Дарси) – скорость частиц жидкости пропорциональна градиенту давления P:

$$\mathbf{V} = -\chi \cdot \operatorname{grad} P, \qquad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \tag{3.7.1}$$

Коэффициент пропорциональности к зависит только от характера грунта и называется коэффициентом фильтрации. Из уравнений (3.7.1) следует, что давление в грунте удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \tag{3.7.2}$$

Граничными условиями для определения давления *P* служат:

1. На участках, где грунт соприкасается с водой, давление должно быть равно гидростатическому давлению слоя воды над ним.

2. На участках контакта грунта с водонепроницаемой границей нормальная производная давления равна нулю. Таким образом, должна решаться смешанная задача для нахождения поля давления $P(x, y)$ в грунте.

В интересующей нас задаче можно найти простое решение для давления $P(u, v)$ внутри области t, которая представляет собой вертикальную полуполосу:

$$t = u + iv, \qquad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < \infty. \tag{3.7.3}$$

Такое решение, очевидно, является линейной функцией переменной u:

$$P(u,v) = \frac{P_2 + P_1}{2} - \frac{P_2 - P_1}{2} \cdot \frac{2u}{\pi}. \tag{3.7.4}$$

Действительно, оно удовлетворяет уравнению Лапласа по переменным u и v, и принимает заданные значения P_2 и P_1 на вертикальных стенках полосы t. Таким образом, линиям постоянного давления соответствуют в полосе t вертикальные линии $u = const$, а линиям тока частиц жидкости соответствуют горизонтальные линии $v = const$.

Отображение вертикальной полуполосы (3.7.3) на верхнюю (и нижнюю) полуплоскость W осуществляется формулой:

$$W = R\sin\left(u + iv\right) = R\sin u \operatorname{ch} v + iR\cos u \operatorname{sh} v. \tag{3.7.5}$$

Из нее видно, что линиям тока и линиям постоянного давления соответствуют софокусные эллипсы и гиперболы в плоскости W с фокусами в точках $W = \pm R$. Если на участке $-R < w < R$ расположены прообразы вершин a_k некоторого многоугольника, вычисленные предварительно методом П.П. Куфарева, то интеграл Шварца–Кристоффеля запишется в виде:

$$Z(u,v) = R \int_{-\pi/2}^{u} \prod_{k=1}^{n} \left(W - a_k\right)^{\alpha_k} \cos\left(u + iv\right) du \,. \qquad (3.7.6)$$

Из сказанного вытекает, что при решении задачи о течении грунтовой воды в качестве области определения отображения удобно выбрать полуполосу. Необходимо модифицировать программу построения линий постоянного давления и линий тока. Текст этой программы рисования имеет следующий вид:

```
function Risline2 (DD)
alf=DD(1, :); b=DD(2, :); R=(b(end)-b(1))/2; v=linspace(0.001, 1, 20);
u=linspace(-pi/2,pi/2,3200); [V,U]=ndgrid (v, u);  t=U+1i*V; W=b(1)+R+R*sin(t);
F=1;  for k=1: length(b)  F=F.*(W-b(k)).^alf (k); end; F=F.*W; F=R*F.*cos(t);        (3.7.7)
vv=-R*cosh(v)'; vv=repmat(vv, 1, length(u)); Z=vv+cumtrapz (u, F, 2); plot(Z',' k');
hold on; M=1: length(u); pp= M(rem(M,100)==0); pp=[M(2), pp ,M(end)];
Q=Z(:,pp); plot (conj(Q),'k');  hold off ; axis([-42, 30, -15, 12]); end
```

Примеры расчета течения грунтовых вод под плотиной с помощью метода П.П. Куфарева показаны на рисунках 21 и 22.

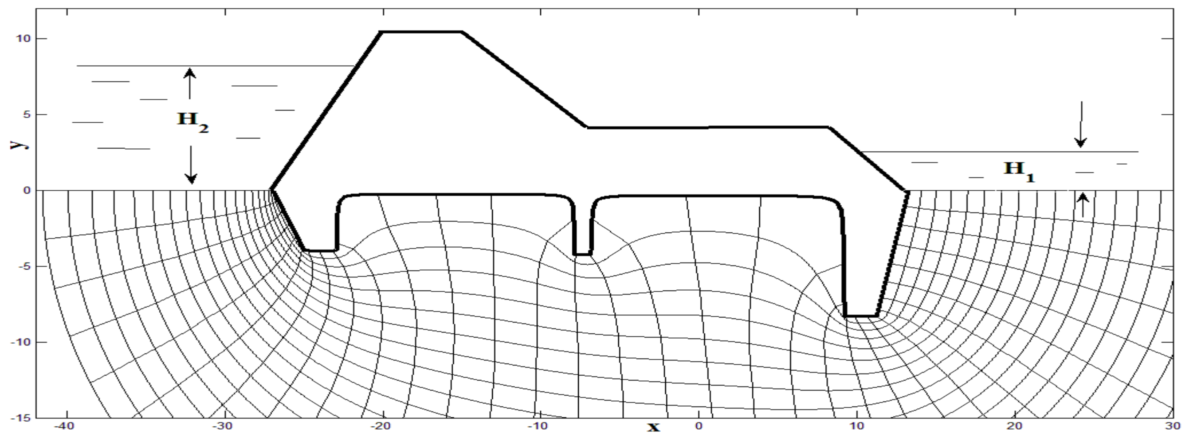

Рисунок 21 – Линии движения грунтовых вод

и линии постоянного давления под плотиной

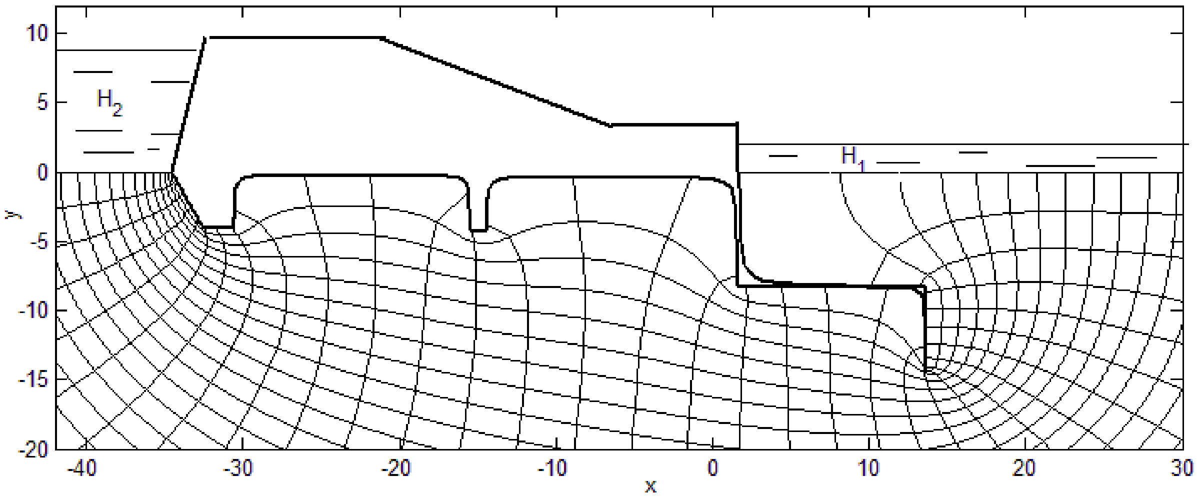

Рисунок 22 – Линии движения грунтовых вод и линии постоянного давления при другом расположении водоупорных границ

Предпринятые в данной главе расчеты имели целью изучение свойств и возможностей метода П.П. Куфарева для его практического применения к численному построению конформного отображения. Можно сказать, что этот метод с успехом выдержал все испытания и представляет конкуренцию другим способам численного построения конформных отображений. Даже в том случае, когда имеется модельное аналитическое решение, метод П.П. Куфарева быстрее и проще приводит к решению задачи.

Теория метода П.П. Куфарева, в том виде как она изложена во второй главе диссертации, и результаты ее проверочных расчетов опубликованы в статьях [65, 66].

4 ОТОБРАЖЕНИЕ НА ОГРАНИЧЕННУЮ ОБЛАСТЬ

4.1 Альтернативная программа решения уравнений П.П. Куфарева

Необходимость в написании новой программы, решающей дифференциальные уравнения Куфарева возникла из-за того, что прежняя программа (3.3.3) фактически настроена на проведение строго последовательных разрезов, прилегающих друг к другу, а этого недостаточно для программирования в более общих случаях. К тому же, всегда полезно иметь несколько программ решающих одну и ту же задачу. В частности, с помощью новой программы гораздо проще решается задача об отображении верхней полуплоскости на ограниченный многоугольник.

Ниже приводится текст такой работающей программы, написанный в системе MatLab и скопированный из программного редактора.

```
 function DD=rzrz(N, p, D, AL1, AL2, L)
a=D(2, :);  alf=D(1, :);
if p==1 a=[a(p),a(p),a(p),a(p+1:end)];  alf=[AL1,1,AL2,alf(p+1:end)]; pL=p+1;
elseif p==N a=[a(1:p-1),a(p),a(p),a(p)]; alf=[alf(1:p-1),AL1,1,AL2]; pL=p+1;
else a=[a(1:p-1), a(p), a(p), a(p), a(p+1:end)];
 alf=[alf(1:p-1), AL1, 1, AL2, alf(p+1:end)]; pL=p+1; end;
%-----------------------------------------------------
t=0.00001; lamb0=a(pL);
a(pL-1)=lamb0-sqrt(2*t)*sqrt((1+AL2)/(1+AL1));
a(pL)=lamb0+sqrt(2*t)*(AL1-AL2)/sqrt((1+AL1)*(1+AL2));
a(pL+1)=lamb0+sqrt(2*t)*sqrt((1+AL1)/(1+AL2));
%------------------------------------------
 b=a-a(pL); q=find(b==0); b(q)=[]; alf(q)=[];
M=repmat(alf,N+1, 1)+eye(N+1); C= b';  lamb=lamb0;
NN = 200*ceil(L);
for s = 1:NN   C = C + (L/NN)*M*(1./C)/prod(abs(C).^(alf  '));  end;
%---------------------------------------------
a=C';  alf = [alf (1: pL-1),  1, alf (pL: end)];                    (4.1.1)
 a=[a(1: pL-1), 0,  a(pL: end)];  a=a-a(1);
DD=[alf; a];  Risline (DD);
   end
```

Обращение к новой программе имеет следующий вид:

$$\mathrm{DD} = rzrz(N,\ p,\ \mathrm{D},\ AL1,\ AL2,\ L) \tag{4.1.2}$$

В качестве входных параметров задаются следующие величины:

$N \Rightarrow$ Текущее число вершин

$p \Rightarrow$ Номер вершины, через которую проводится разрез

$\mathrm{D} \Rightarrow$ Матрица, содержащая прообразы a_k и показатели степени α_k

$L \Rightarrow$ Длина выпускаемого разреза (4.1.3)

$AL1$ *и* $AL2 \Rightarrow$ Показатели разреза. Они равны показателям степени вершин, примыкающим к выпускаемому разрезу

Входная матрица D и выходная матрица DD должны быть двух строчными. В них первая строка содержит показатели степени при вершинах многоугольника, а во второй строке находятся прообразы этих вершин. Входная матрица D имеет N столбцов, а выходная DD имеет $N + 2$ столбца.

Из текста программы (4.1.1) видно, что сначала настраивается точка p, из которой следует начинать текущий разрез, затем производится ее расщепление, с целью создания начальных условий для численного интегрирования дифференциальных уравнений Куфарева. В результате решения системы уравнений по методу Эйлера с мелким шагом находятся все прообразы и отдельно параметр λ.

Таким образом, новая программа работает по тому же принципу, что и предыдущая (3.3.3), с тем преимуществом, что можно произвольно выбирать номер точки p, из которой следует проводить очередной разрез.

В результате работы этой программы вычисляется матрица DD полученная добавлением разреза длины L, причем она имеет число столбцов равное $N + 2$, и прообразы в ней располагаются в порядке возрастания.

Нормировка в данной программе выбрана так, чтобы значение первого прообраза было равным нулю: т.е. $a(1) = 0$.

Начальная матрица D0 в новой программе и последующие матрицы могут содержать фиктивные прообразы вершин (отличные от нуля) с нулевым показателем степени, что удобно для проведения дальнейших разрезов из заранее заданных точек, отличных от вершин отображаемого многоугольника. Эти фиктивные точки также движутся вместе с основными прообразами вершин при проведении очередного разреза, но расстояния между ними сохраняются в области *Z*, согласно замечательному свойству метода П.П. Куфарева (2.4.3). Этот эффект всегда наблюдался при проведении вычислений.

Рассмотрим с помощью новой программы пример проведения четырех вертикальных разрезов заданной длины в верхней полуплоскости через заданные точки с абсциссами *x* = [0, 4, 8, 12], которые служат фиктивными прообразами. Начальная матрица D0 с нулевыми показателями степени имеет вид:

$$\mathrm{D0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Дальнейший расчет происходит с помощью операторов:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D0} = [0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0;\ \ \ 0,\ \ 4,\ \ 8,\ \ 12];\\
&\mathrm{D1} = rzrz(4,\ \ 1,\ \ \mathrm{D0},\ -0.5,\ -0.5,\ 2);\\
&\mathrm{D2} = rzrz(6,\ \ 4,\ \ \mathrm{D1},\ -0.5,\ -0.5,\ 1);\\
&\mathrm{D3} = rzrz(8,\ \ 7,\ \ \mathrm{D2},\ -0.5,\ -0.5,\ 1);\\
&\mathrm{D4} = rzrz(10,\ 10,\ \mathrm{D3},\ -0.5,\ -0.5,\ 1);
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

В результате работы программы (4.1.4) появляется визуализация нескольких линий тока (рисунок 23), полученная графической функцией Risline, которая устроена по тому же принципу, что и предыдущие программы того же типа, отмеченные в диссертации формулами (3.3.6), или (3.7.7).

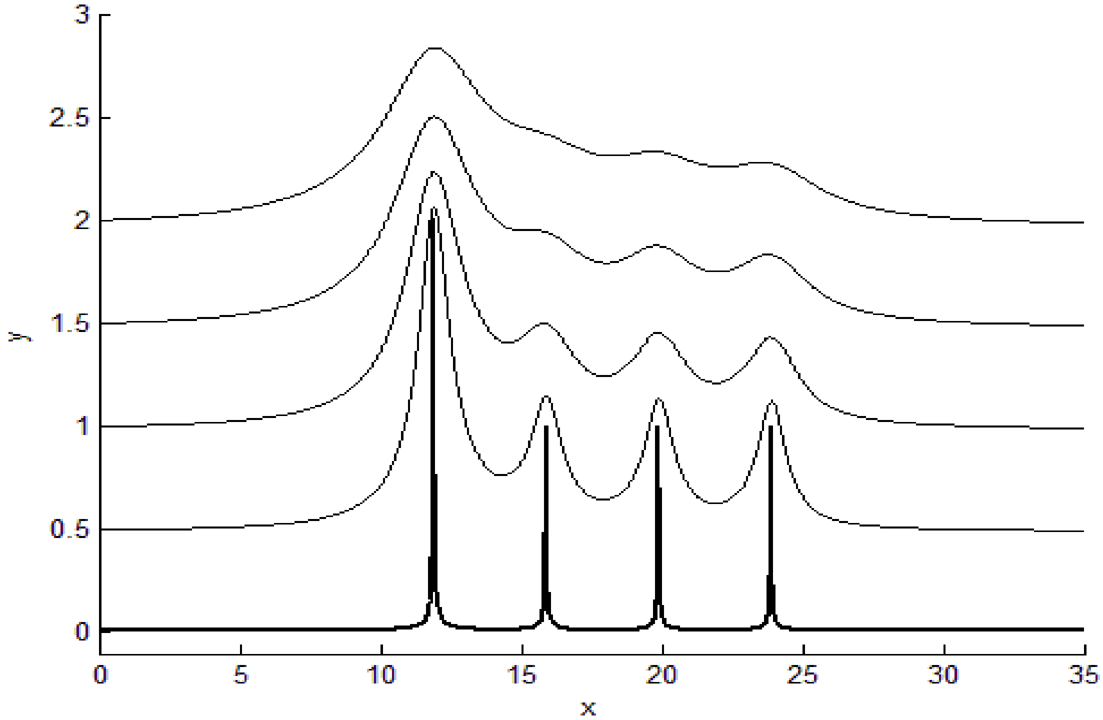

Рисунок 23 – Линии тока вокруг четырех вертикальных разрезов

В данном случае использовался следующий вариант программы Risline:

```
 function Risline (DD)
a=DD(2, :);   alf=DD(1,:);  N=2000; m=length(a);
figure;  hold on;
psi=[0.01, 0.5, 1, 1.5, 2];
for k=1: length(psi)   w=linspace(a(1)-10, a(end)+10, N)+1i*psi (k);
W=repmat(w,m,1);  A=repmat(a', 1, N);  f=alf*log(W-A);  f=exp(f);
f=cumtrapz(w, f)+1i*psi (k);
if  k==1  plot( real (f),  imag (f), 'k' , 'Linewidth' ,2);  end;
plot (real (f), imag (f), 'k');  end;  hold off ;  axis([0, 35, -0.1, 3]);
 end
```

(4.1.5)

Программа (4.1.5) вычисляет по данным матрицы DD интеграл Кристоффеля–Шварца вдоль линий ψ = const, параллельных вещественной оси w, и выдает на экран образы этих линий.

Из рисунка 23 видно, что программа (4.1.1) хорошо соблюдает длины разрезов и расстояния межу ними, и при этом подтверждается полезность применения фиктивных (запасных) прообразов.

Конечно, программа (4.1.4) не так хорошо автоматизирована, как прежняя, поскольку приходится всякий раз считать, через какую точку p и в какой последовательности нужно проводить следующий разрез. Эта операция облегчается тем, что мы имеем перед глазами всю последовательность матриц D, полученных при расчете, вместе с показателями степеней и значениями прообразов вершин. В произведенном расчете были получены следующие значения для матриц D0, D1, D2, D3 и D4.

$$D0'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\\ 0 & 8\\ 0 & 12\end{pmatrix},\ D1'=\begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 1 & 2.0045\\ -0.5 & 4.0089\\ 0 & 6.4776\\ 0 & 10.2512\\ 0 & 14.1703\end{pmatrix},\ D2'=\begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 1 & 1.976\\ -0.5 & 3.911\\ -0.5 & 5.626\\ 1 & 6.507\\ -0.5 & 7.432\\ 0 & 10.419\\ 0 & 14.285\end{pmatrix} \qquad (4.1.6)$$

$$D3'=\begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 1 & 1.9668\\ -0.5 & 3.8856\\ -0.5 & 5.5762\\ 1 & 6.4376\\ -0.5 & 7.3282\\ -0.5 & 9.5075\\ 1 & 10.4480\\ -0.5 & 11.4074\\ 0 & 14.4425\end{pmatrix}.\quad D4'=\begin{pmatrix}-0.5 & 0\\ 1. & 1.9619\\ -0.5 & 3.8740\\ -0.5 & 5.5565\\ 1 & 6.4123\\ -0.5 & 7.2958\\ -0.5 & 9.4473\\ 1 & 10.3667\\ -0.5 & 11.2919\\ -0.5 & 13.5122\\ 1 & 14.4617\\ -0.5 & 15.4275\end{pmatrix} \qquad (4.1.7)$$

По этим данным можно наблюдать движение прообразов при выпускании разрезов. Рисунок 23 строился по данным матрицы D4, хотя такие же рисунки выполнялись и на промежуточных этапах выполнения программы (4.1.4).

4.2 Пример отображения на ограниченную область

В предыдущих главах диссертации приведенные в них расчеты показывали отображение верхней полуплоскости на неограниченные многоугольники. Бесконечно удаленная точка, при этом, оставалась неподвижной. Разрез в предельном случае разделял полуплоскость на два многоугольника. Выбранная нормировка обуславливала сходимость предельного отображения к отображению из полуплоскости на неограниченный многоугольник. Инверсия бесконечно удаленной точки в начало координат, которая влечет смену нормировки (ноль теперь отображается в бесконечность), обуславливает сходимость предельного отображения к отображению из верхней полуплоскости на многоугольник, граница которого содержит точку ноль. Это позволяет построить отображение на ограниченный многоугольник. Поясним это на следующем примере.

Пусть требуется отобразить верхнюю полуплоскость *Z*, с тремя разрезами, на верхнюю полуплоскость *w* (рисунок 24) так, чтобы бесконечно удаленная точка плоскости *w* переходила в начало координат в области *Z*.

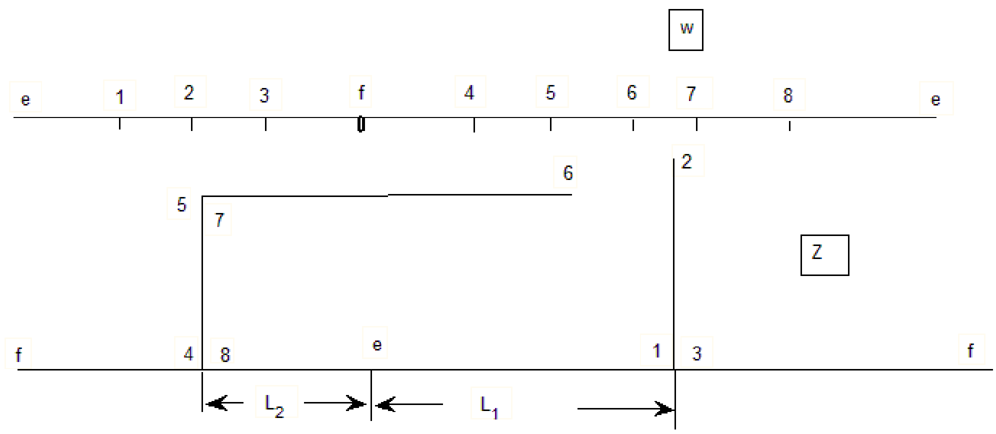

Рисунок 24 – Соответствие характерных точек в областях *Z* и *w*

Соответствие точек показано на рисунке 24. Точка *f* в плоскости *w* является прообразом бесконечно удаленной точки, которая перенесена в начало координат области *w*. При переходе через точку *f* направление обхода изменится на угол 2π против часовой стрелки, поэтому точка *f*, в интеграле Кристоффеля–Шварца, должна быть полюсом второго порядка (угол при вершине, прообраз которой находится в бесконечно удаленной точке, равен −π). Сам интеграл Кристоффеля–Шварца записывается в виде:

$$Z = \int_f^w (w - a_1)^{-1/2} (w - a_2)^1 (\mathrm{w} - \mathrm{a}_3)^{-1/2} (\mathrm{w} - \mathrm{f})^{-2} (\mathrm{w} - \mathrm{a}_4)^{-1/2} \cdot \\ \cdot (\mathrm{w} - \mathrm{a}_5)^{1/2} (w - a_6)^1 (\mathrm{w} - \mathrm{a}_7)^{-1/2} (w - a_8)^{-1/2} dw \qquad (4.2.1)$$

Предположим, что в начальный момент движения прообразов (t = 0), разрезы (1, 2, 3), (4, 5, 8) и (5, 6, 7), отсутствуют (имеют нулевую длину). Тогда одна часть прообразов совпадает с заданной величиной A, а другая – с величиной B, т. е.

$$a_1 = a_2 = a_3 = A; \qquad a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = B. \qquad (4.2.2)$$

Эти прообразы в начальный момент имеют нулевой показатель степени.

Предположим также, что точка f в начальный момент равна нулю, и имеет показатель степени равный –2. Интеграл Кристоффеля–Шварца в этом случае вычисляется аналитически:

$$Z = -\frac{1}{w}; \qquad w = -\frac{1}{Z}. \qquad (4.2.3)$$

Если расстояния $L1$ и $L2$ в плоскости Z заданы (рисунок 24), то легко можно получить значения прообразов величин A и B в плоскости w в начальный момент времени:

$$A = -\frac{1}{L_1}\ , \qquad B = \frac{1}{L_2} \qquad (4.2.4)$$

Если в нашем примере положить $L_1 = L_2 = 1$, то получим: $A = -1$, $B = 1$.

Точки A и B являются точками оснований для проведения будущих разрезов.

Таким образом, в начальный момент движения разрезов, имеем три вершины с показателями степени (α_k) и прообразами вершин (a_k) вида:

$$\mathrm{D0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = -2 & \alpha_3 = 0 \\ a_1 = -1 & a_2 = 0 & a_3 = 1 \end{pmatrix} \qquad (4.2.5)$$

Для удобства программирования эти начальные данные объединены в одну двух строчную матрицу D0. Далее, для получения прообразов всех вершин по методу П.П. Куфарева, нужно проводить соответствующие разрезы с нужной длиной L.

В нашем примере первым проводится разрез (1, 2, 3) с длиной равной, например, 5; затем разрез (4, 5, 8) с длиной 2; и последним – разрез (5, 6, 7) с длиной равной единице (рисунок 24). Весь этот расчет можно осуществить проведением трех разрезов с помощью следующей программы:

$$\begin{aligned} &\mathrm{D1} = rzrz\ (3,\ 1,\ \mathrm{D0},\ -0.5,\ -0.5,\ 5); \\ &\mathrm{D2} = rzrz\ (5,\ 5,\ \mathrm{D1},\ -0.5,\ -0.5,\ 2); \\ &\mathrm{D3} = rzrz\ (7,\ 6,\ \mathrm{D2},\ \ 0.5,\ \ -0.5,\ 1); \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Как видим, здесь используется новый программный блок под именем *rzrz*, описанный в предыдущем параграфе, который решает дифференциальные уравнения Куфарева (2.2.11) и выдает следующую матрицу D_{i+1} на основе предыдущей матрицы D_i, причем выходная матрица имеет на два столбца больше, чем входная. Таким образом, после работы программы (4.2.6) матрица D3 будет содержать все девять искомых прообразов вершин, с первой по восьмую, включая вершину f.

Будем показывать результат счета постепенно, по мере выпускания очередных разрезов.

Если не проводить никакого разреза, то нужно просто выполнить следующую команду:

$$\mathrm{D1} = rzrz(3,\ 1,\ \mathrm{D0},\ -0.5,\ -0.5,\ 0). \tag{4.2.7}$$

В результате получатся линии тока, показанные на рисунке 25.

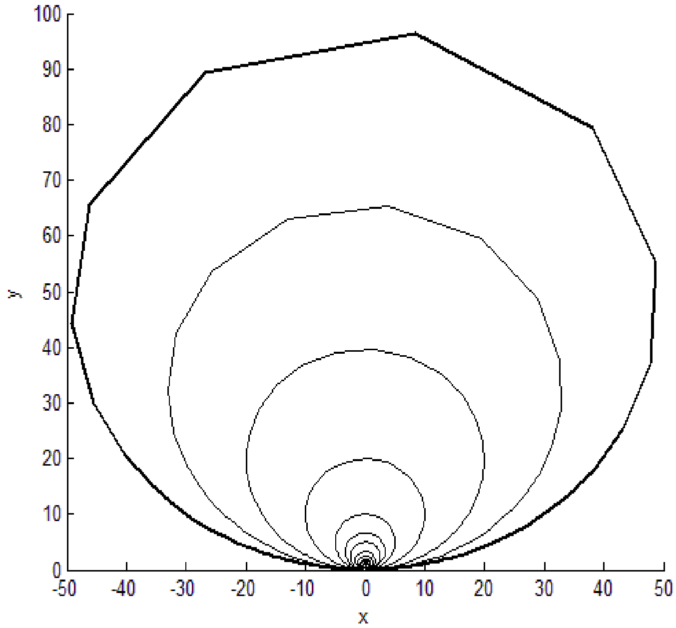

Рисунок 25 – Образы горизонтальных линий (*w*) в плоскости *Z*, при отсутствии разрезов

Очевидно, эти линии являются кругами, касающимися вещественной оси в точке *f*, в начале координат.

Если той же командой (4.2.7) провести разрез длины 5, то линии тока примут вид, показанный на рисунке 26.

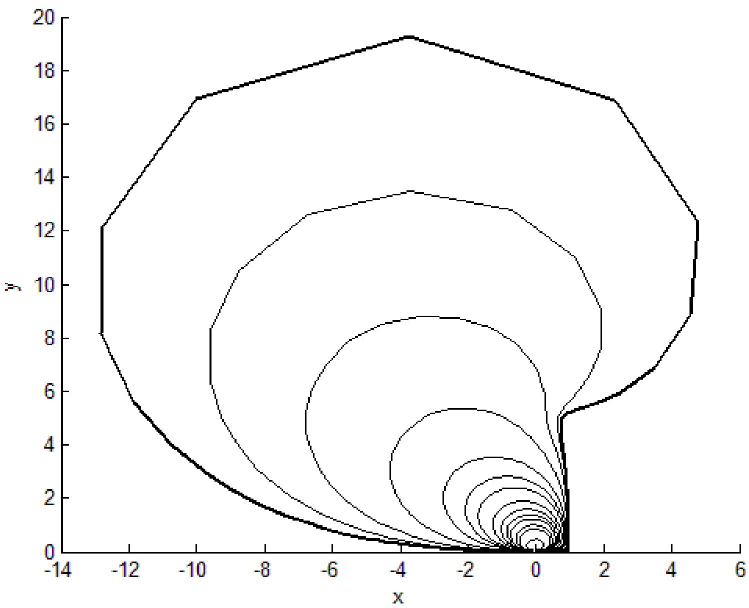

Рисунок 26 – Искажение линий тока одним вертикальным разрезом

Из последнего рисунка видно, что линии тока обтекают проведенный барьер, а его высота и расстояние до точки *f* соответствуют заданным значениям.

Проведем второй разрез, длины 2, исполняя команду:

$$\mathrm{D2} = rzrz\left(5,\ 5,\ \mathrm{D1},\ -0.5,\ -0.5,\ 2\right); \qquad (4.2.8)$$

Тогда линии тока станут такими, как показано на рисунке 27.

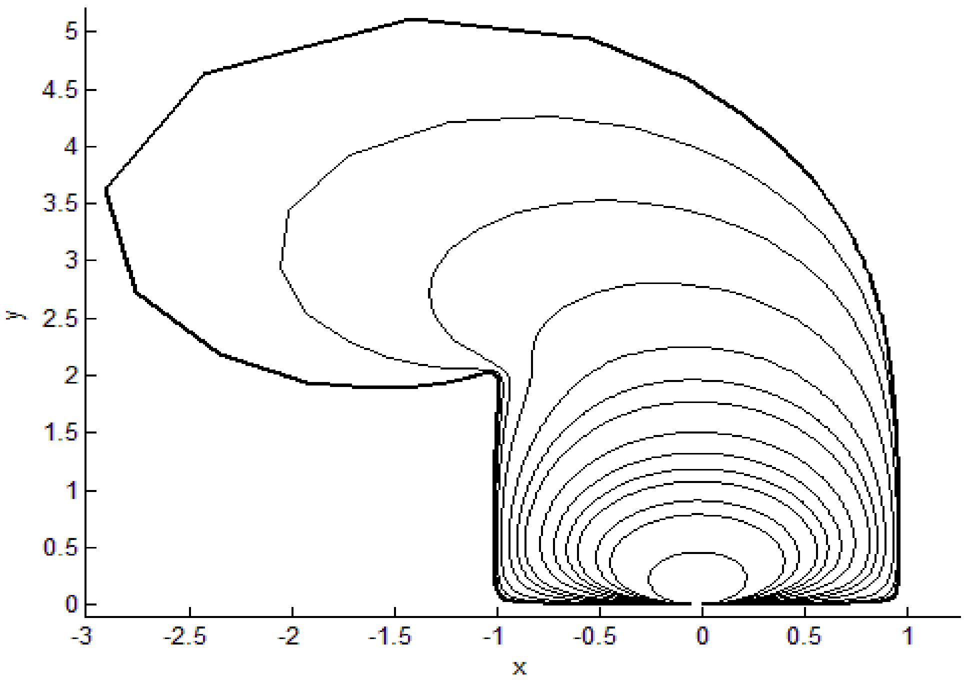

Рисунок 27 – Вид линий тока после проведения двух вертикальных разрезов

Здесь, как и на других рисунках, утолщенной линией показан образ горизонтальной прямой, отстоящей от вещественной оси на расстоянии 0.01. Более высокие линии сгущаются в виде овалов к точке f, находящейся в начале координат.

Проведем третий, горизонтальной разрез единичной длины, через точку с номером 6, командой:

$$D3 = rzrz\left(7,\ 6,\ D2,\ 0.5,\ -0.5,\ 1\right); \qquad (4.2.9)$$

Полученные линии тока в этом случае имеют вид, показанный на рисунке 28.

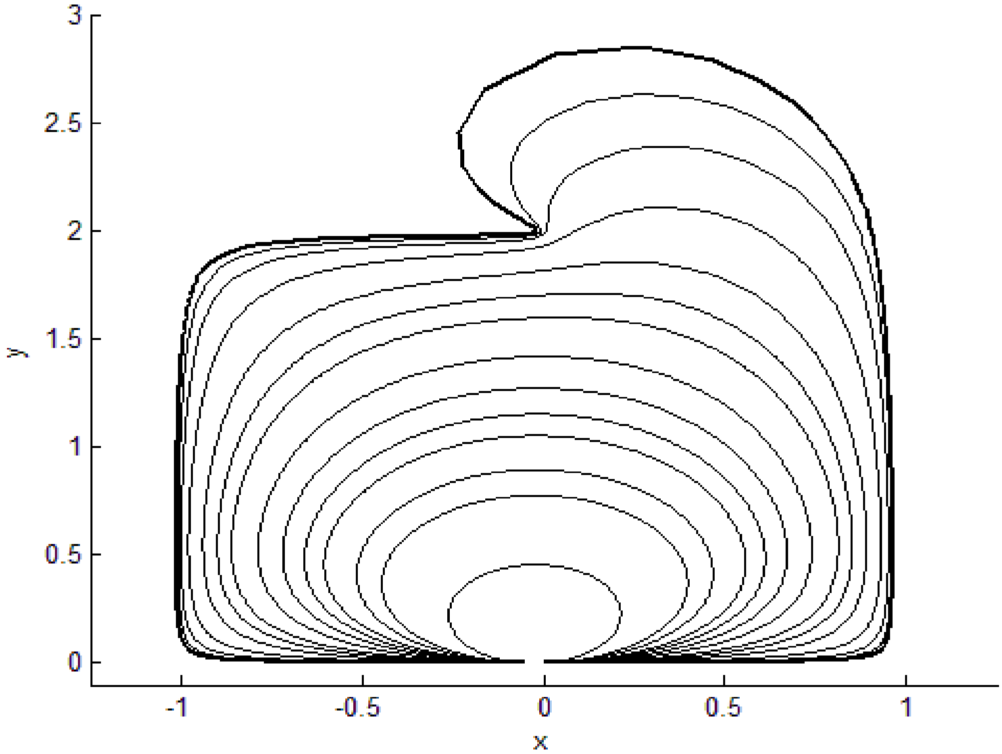

Рисунок 28 – Линии тока после третьего (горизонтального) разреза

Видно, что все стенки разреза хорошо обтекаются и линии тока начинают собираться внутри прямоугольника.

Результаты работы программы (4.2.6) находятся в матрицах D0, D1, D2 и D3. Их содержимое приводится ниже.

$$D0' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D1' = -\begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 1.9504 \\ -0.5 & 1.9693 \\ -2 & 1.9886 \\ 0 & 2.6729 \end{pmatrix}, \quad D2' = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 1.6103 \\ -0.5 & 1.6142 \\ -2. & 1.6176 \\ -0.5 & 1.6366 \\ 1 & 1.6741 \\ -0.5 & 3.1524 \end{pmatrix}. \qquad (4.2.10)$$

$$D3' = \begin{pmatrix} -0.5000 & 0 \\ 1.0000 & 1.4513 \\ -0.5000 & 1.4518 \\ -2.0000 & 1.4523 \\ -0.5000 & 1.4542 \\ 0.5000 & 1.4560 \\ 1.0000 & 1.5155 \\ -0.5000 & 1.8449 \\ -0.5000 & 3.1715 \end{pmatrix}. \qquad (4.2.11)$$

Из матрицы D3 видно, что прообразы a_2, a_3, f, a_4, a_5 – практически совпадают. Если разрез последний (5, 6, 7) еще удлинить так, чтобы он дошел до стороны (1, 2), то прообраз a_6 также сольется с f. Если, например, для третьего разреза взять длину равную 1.95, то для матрицы D3 получится следующее ее значение:

$$D3' = \begin{pmatrix} -0.500000000000000 & 0 \\ 1.000000000000000 & 1.317989464577956 \\ -0.500000000000000 & 1.317989464960218 \\ -2.000000000000000 & 1.317989465265736 \\ -0.500000000000000 & 1.317989466499457 \\ 0.500000000000000 & 1.317989467498197 \\ 1.000000000000000 & 1.318076615482269 \\ -0.500000000000000 & 1.859385522676407 \\ -0.500000000000000 & 3.177225833247155 \end{pmatrix} \qquad (4.2.12)$$

Интеграл Кристоффеля–Шварца перейдет после этого в интеграл:

$$Z = \int_f^w (w-a_1)^{-1/2} (w-f)^{-1/2} (w-a_7)^{-1/2} (w-a_8)^{-1/2}\, dw. \qquad (4.2.13)$$

Но этот интеграл переводит точки верхней полуплоскости внутрь прямоугольника. Следовательно, метод П.П. Куфарева позволяет легко находить прообразы и для внутреннего отображения многоугольников.

На рисунке 29 показаны образы линий, которые в плоскости w являлись прямыми, проходящими через точку f.

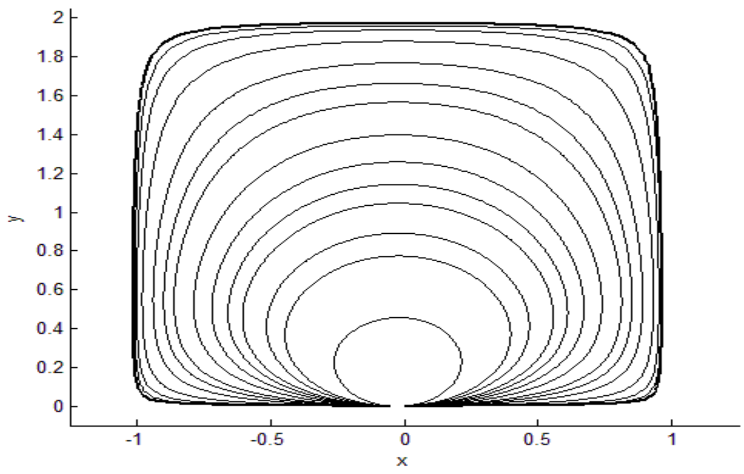

Рисунок 29 – Линии тока внутри прямоугольника

Их можно рассматривать как линии тока от диполя с центром в точке e.

Из рисунка 29 видно, что все эти линии войдут внутрь прямоугольника при уменьшении ‘отверстия’ между третьим разрезом и вертикальной стенкой.

В рассмотренных примерах углы, под которыми проводились разрезы, для удобства, выбирались прямыми. Однако их можно выбирать произвольными. Так, на рисунке 30 показано отображение верхней полуплоскости внутрь трапеции.

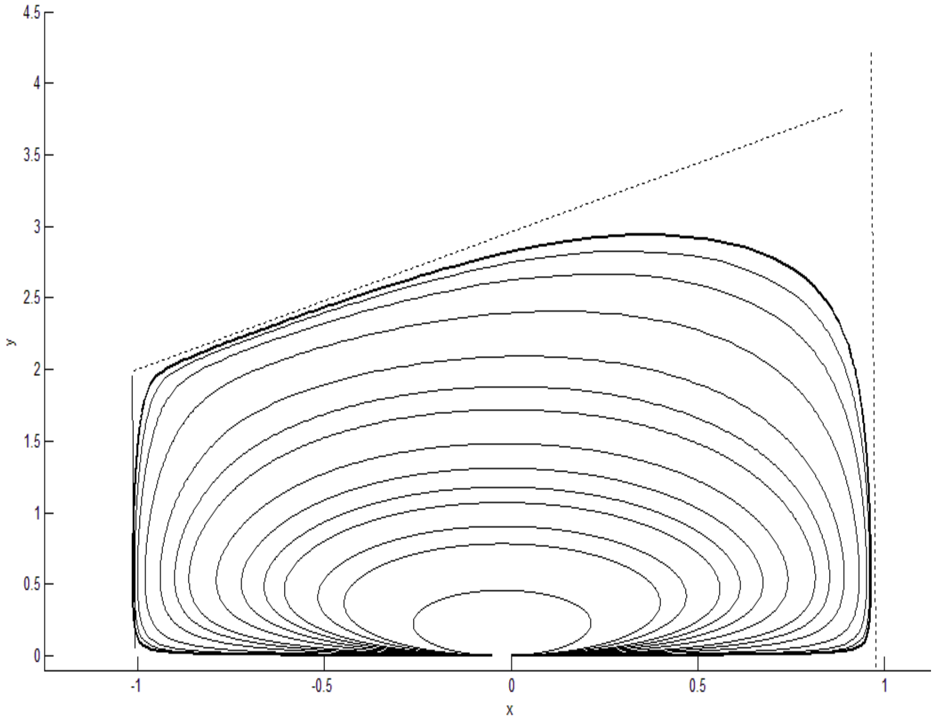

Рисунок 30 – Линии диполя внутри трапеции

Последний рисунок был получен командой:

$$D3 = rzrz(7,\ \ 6,\ \ D2,\ \ 0.25,\ \ -0.25,\ \ 2.8); \qquad (4.2.14)$$

Матрица D3 после проведения третьего разреза выглядит следующим образом:

$$
\mathrm{D3'} = \begin{pmatrix} -0.500000000000000 & 0 \\ 1.000000000000000 & 1.522328463636162 \\ -0.500000000000000 & 1.522328463636065 \\ -2.000000000000000 & 1.522328463636016 \\ -0.500000000000000 & 1.522328463635922 \\ 0.250000000000000 & 1.522328463635898 \\ 1.000000000000000 & 1.522328463648986 \\ -0.250000000000000 & 1.746441989760956 \\ -0.500000000000000 & 3.156928346744452 \end{pmatrix} \qquad (4.2.15)
$$

Здесь так же буквально слились в одну точку прообразы со второго по седьмой, с общим показателем степени равным –3/4, и интеграл Кристоффеля–Шварца имеет вид:

$$
Z = \int_f^w \left(w - a_1\right)^{-1/2} \left(w - f\right)^{-3/4} \left(w - a_7\right)^{-1/4} \left(w - a_8\right)^{-1/2} dw. \qquad (4.2.16)
$$

Последний интеграл не вычисляется в аналитическом виде, в отличие от интеграла (4.2.13), однако методом П.П. Куфарева такие отображения исследуются достаточно легко.

Для параллелограмма с острым углом равным βπ расчет прообразов вершин осуществляется проведением трех разрезов со следующими входными данными:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D1} = rzrz\ (3,\ 1,\ \mathrm{D0},\ \ -\beta,\ \ \beta - 1,\ \ 5); \\
&\mathrm{D2} = rzrz\ (5,\ 5,\ \mathrm{D1},\ \ -\beta,\ \ \beta - 1,\ \ 2); \qquad (4.2.17) \\
&\mathrm{D3} = rzrz\ (7,\ 6,\ \mathrm{D2},\ \ \beta,\ \ -\beta,\ \ 1);
\end{aligned}
$$

Для случая, когда β = 1/4, матрицы D1 и D2, после проведения первых двух разрезов, приняли следующие значения:

$$D1' = \begin{pmatrix} -0.2500 & 0 \\ 1.0000 & 1.2245 \\ -0.7500 & 1.2454 \\ -2.0000 & 1.3126 \\ 0 & 2.2105 \end{pmatrix}, \qquad D2' = \begin{pmatrix} -0.2500 & 0 \\ 1.0000 & 0.4512 \\ -0.7500 & 0.4526 \\ -2.0000 & 0.4561 \\ -0.2500 & 0.4680 \\ 1.0000 & 0.5220 \\ -0.7500 & 4.3580 \end{pmatrix} \qquad (4.2.18)$$

Линии поля диполя, построенные по данным матрицы D2, показаны на рисунке 31.

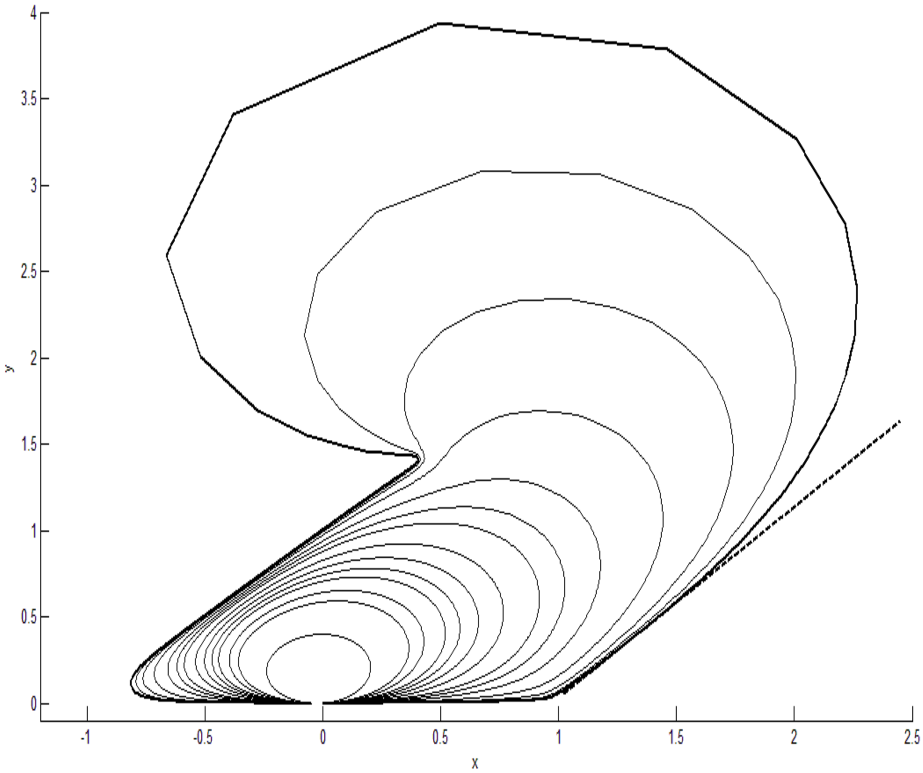

Рисунок 31 – Линии тока при отображении внутрь параллелограмма после первых двух разрезов

После проведения третьего разреза достаточной длины все линии тока вошли внутрь параллелограмма (рисунок 32).

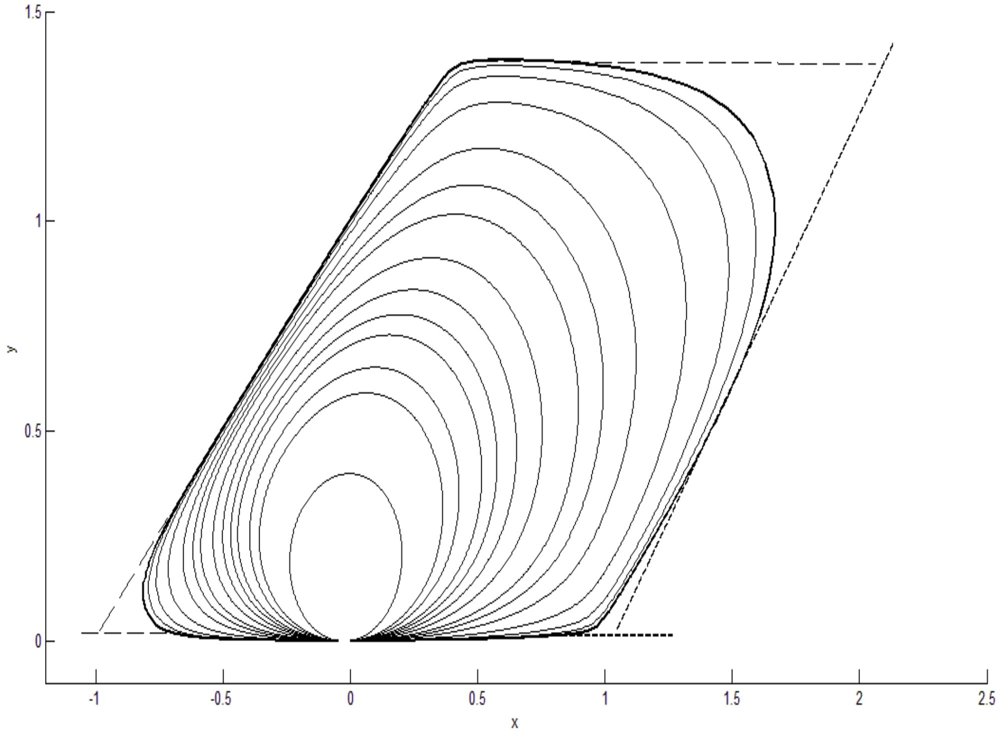

Рисунок 32 – Линии тока после третьего разреза при отображении на параллелограмм

Матрица D3 в данном расчете имеет приведенные ниже значения.

$$D3' = \begin{pmatrix} -0.250000000000000 & 0 \\ 1.000000000000000 & 0.338029822428683 \\ -0.750000000000000 & 0.338029822428700 \\ -2.000000000000000 & 0.338029822428739 \\ -0.250000000000000 & 0.338029822428812 \\ 0.250000000000000 & 0.338029822428875 \\ 1.000000000000000 & 0.338029822375503 \\ -0.250000000000000 & 0.625510547042540 \\ -0.750000000000000 & 4.371864638386696 \end{pmatrix} \qquad (4.2.19)$$

Здесь мы снова видим, что прообразы со второго по седьмой в ней практически совпали, с суммарным показателем степени равным –0.75, и мы имеем интеграл Кристоффеля–Шварца в виде:

$$Z = \int_f^w (w-a_1)^{-1/4} (w-f)^{-3/4} (w-a_7)^{-1/4} (w-a_8)^{-3/4}\, dw. \qquad (4.2.20)$$

Из сравнения матриц (4.2.12), (4.2.15) и (4.2.19) можно заметить, что участок вещественной оси w, на котором расположены прообразы, для параллелограмма является более длинным, чем для трапеции и для прямоугольника, при тех же длинах проводимых разрезов.

4.3 О вычислении интеграла Кристоффеля-Шварца

До сих пор в диссертации не затрагивался вопрос о непосредственном вычислении интеграла Кристоффеля−Шварца в его общем виде, когда в нем известны прообразы a_k, и показатели степени α_k при вершинах многоугольника, поскольку в этой задаче не было большой необходимости.

Простой способ, который мы использовали для расчета этого интеграла, состоял в том, что выбиралась некоторая горизонтальная линия в плоскости W, на которой задавалось достаточно большое число точек. В них вычислялись значения подынтегральной функции, и проводилось численное интегрирование, начиная с не очень хорошо определенного, но достаточно удаленного от прообразов левого конца. Точнее, нам не было известно на этом конце истинное значение $Z(w)$ интеграла Кристоффеля−Шварца и полагалось, что приближено выполняется равенство $Z(w_\infty) \approx w$. Но, так как интеграл вычисляется с точностью до аддитивной постоянной, то этот недостаток не сказывается на поведении линий тока, и лишь приводит к соответствующей оцифровке вещественной оси в графиках изображающих линии тока.

Этот способ не позволяет проверять правильность значения прообразов вершин, полученных методом П.П. Куфарева, так как в этом случае мы имеем только чисто визуальную информацию о длинах ребер. Для более точного тестирования длин ребер нам нужно иметь отдельную программу вычисляющую интеграл Кристоффеля–Шварца.

Пусть нормировка выбрана так, что первому прообразу a_1 соответствует точка $Z(a_1) = 0$. Тогда нам нужно научиться надежно вычислять интеграл в некоторой опорной точке w_0 (рисунок 33), которая не лежит на вещественной оси, т.е. интеграл вида:

$$Z(w_0) = \int_{a_1}^{w_0} \prod_{k=0}^{N} \left(w - a_k\right)^{\alpha_k} dw. \qquad (4.3.1)$$

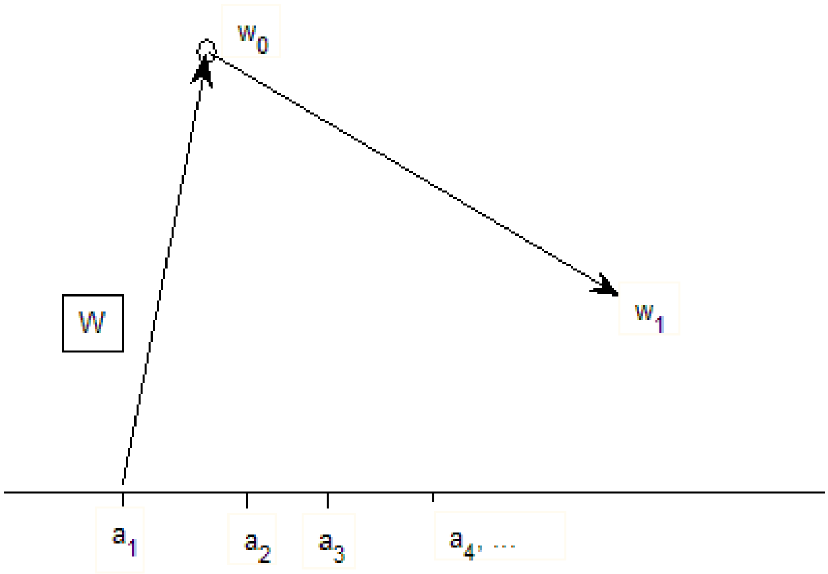

Рисунок 33 – Схема пути интегрирования в интеграле Кристоффеля–Шварца

Если мы знаем значение $Z(w_0)$, то очевидно, для $Z(w_1)$, получим:

$$Z\left(w_1\right) = Z(w_0) + \int_{w_0}^{w_1} \prod_{k=1}^{N} \left(w - a_k\right)^{\alpha_k} dw. \qquad (4.3.2)$$

Формула (4.3.2) показывает, что, зная опорное значение интеграла (4.3.1), можно вычислить и интеграл (4.3.2) для произвольной точки w_1 в верхней полуплоскости.

Если точка w_1 не совпадает каким-либо из прообразов a_k, то интеграл в формуле (4.3.2) будет регулярным, и его можно вычислять различными вычислительными способами с требуемой точностью. В противном случае оба интеграла в формулах (4.3.1) и (4.3.2) будут несобственными, и для их вычисления требуется выделять окрестность особой точки на одном из концов прямолинейного пути интегрирования (рисунок 33).

В интеграле (4.3.1) сделаем замену переменной:

$$w = \left(w_0 - a_1\right)\lambda + a_1, \qquad dw = \left(w_0 - a_1\right)d\lambda. \qquad (4.3.3)$$

Тогда интеграл (4.3.1) примет вид:

$$Z\left(w_0\right) = \left(w_0 - a_1\right)\int_0^1 \prod_{k=1}^{N} \left[\left(w_0 - a_1\right)\lambda + a_1 - a_k\right]^{\alpha_k} d\lambda.$$

Или:

$$Z\left(w_0\right)=\left(w_0-a_1\right)^{1+\alpha_1}\int\limits_0^1 \lambda^{\alpha_1}\prod_{k=2}^{N}\left[\left(w_0-a_1\right)\lambda+a_1-a_k\right]^{\alpha_k} d\lambda . \qquad (4.3.4)$$

Введем обозначение:

$$F(\lambda)=\prod_{k=2}^{N}\left[\left(w_0-a_1\right)\lambda+a_1-a_k\right]^{\alpha_k} . \qquad (4.3.5)$$

Тогда интеграл (4.3.4) можно записать в следующей форме;

$$Z(w_0)=\left(w_0-a_1\right)^{1+\alpha_1}\left\{\int\limits_0^1 \lambda^{\alpha_1}\left[F(\lambda)-F(0)\right]d\lambda+F(0)\int\limits_0^1 \lambda^{\alpha_1}d\lambda\right\}. \qquad (4.3.6)$$

Подынтегральная функция первого интеграла имеет конечные значения на всем промежутке интегрирования и его можно вычислять численно, а второй интеграл в формуле (4.3.6) вычисляется аналитически. В результате, приходим к следующему выражению:

$$Z(w_0)=\left(w_0-a_1\right)^{1+\alpha_1}\left\{\int\limits_0^1 \lambda^{\alpha_1}\left[F(\lambda)-F(0)\right]d\lambda+\frac{F(0)}{1+\alpha_1}\right\}. \qquad (4.3.7)$$

Расчет по формуле (4.3.7) реализуется, например, при помощи следующей программы с именем J0:

```
function Z=J0(D,w0)
a=D(2,:);  alf=D(1,:);  M=300; N=length(a); eps=0.000001;
t=linspace(eps,1,M);
F =1; for k = 2 : N  F = F.*(t*(w0-a (1))+a (1)-a(k)).^alf (k);  end;
F0=1; for  k = 2 : N  F0 = F0.*(a (1)-a (k)).^alf(k);  end;
F = (F - F0).*t.^alf (1);  Z = trapz (t,F)+F0/(1+alf(1));
Z = Z*(w0-a (1) )^(1+alf  (1) ) );
end
```

(4.3.8)

Программа для расчета интеграла в формуле (4.3.2) выглядит проще, поскольку в ней не нужно выделять особую точку в интеграле:

```
function Z=J1(D, w0, w1)
a=D(2, :);  alf=D(1, : );  M=200;  N=length (a);   t=linspace (0, 1, M);
F = 1;  for  k = 1: N    F = F.*(t*(w1 − w0) + w0 − a (k)).^alf (k);  end;
Z=trapz (t, F);   Z=Z* (w1-w0);
end
```

(4.3.9)

Аналогичным образом (с выделением крайней точки) можно составить программу для случая, когда точка w_1 находится вблизи или даже совпадает с одним из прообразов вершин a_k.

Для тестирования точности счета по программам (4.3.8) и (4.3.9) возьмем пример имеющий аналитическое решение:

$$Z = \sqrt{w^2 - 4}\,. \tag{4.3.10}$$

В данном случае прообразы вершин и показатели степени равны:

$$a_1 = -2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2; \qquad\qquad \alpha_1 = -0.5, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -0.5.$$

Опорную точку w_0 возьмем равной $w_0 = i$, и составим следующую вычислительную программу с именем SHW:

```
function [D, w0, Z0,  w1,  Z1]=SHW
D=[-0.5, 1, -0.5; -2, 0, 2];     w0=1i;  w1=a(3)-1;
Z0=J0 (D, w0);  Z1=Z0+J1(D,  w0,  w1);
end
```

(4.3.11)

В ней внутри тела программы задается матрица D и величины w_0 и w_1. На выходе из программы, кроме них, выдаются значения Z_0 и Z_1.

После обращения к программе (4.3.11) получены величины:

$$\begin{aligned} Z_0 &= -0.000000964025317 + 2.236069143374836i \\ Z_1 &= -0.000002698112346 + 1.732051973436651i \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Если эти же величины считать по точной формуле (4.3.10), то должны получиться значения:

$$\begin{aligned} Z_0 &= i\sqrt{5} = 2.236067977499790i \\ Z_1 &= i\sqrt{3} = 1.732050807568877i \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Как видно из сравнения данных (4.3.12) и (4.3.13), счет дает совпадение шести верных цифр с точным значением, что говорит о хорошей точности численного метода вычисления несобственного интеграла. Но такая точность получатся только точек w_1 не слишком близких к прообразам. Так, если, например, взять $w_1 = 2.01$, то получим:

$$Z = 0.1879 - 0.005i \quad \text{вместо точного значения} \quad Z = 0.20025. \quad (4.3.14)$$

Ошибка здесь оказывается более существенной, и поэтому следует констатировать, что остается все же проблема с вычислением несобственного интеграла в самой его особой точке.

Можно, однако, надеяться что после доработки программы (4.3.9), численный метод расчета интеграла Кристоффеля–Шварца сможет применяться как для его непосредственного вычисления в отдельных точках плоскости w, так и для оценки длин ребер многоугольника.

5 ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

5.1 Задача о вынужденной конвекции

Конформные отображения обычно применяются при решении различных краевых задач из теории комплексного потенциала [4, 26, 27], которые возникают в электронике, гидродинамике и в теории упругости. Но в данной главе мы рассмотрим две новые задачи, появившиеся в последнее время [67, 68] и представляющие интерес для экологии. Они имеют простые решения, которые можно получать сразу же вслед за численной реализацией какого-либо конформного отображения.

Задача вынужденной конвекции состоит в следующем.

В покоящейся жидкости, так же как и в твердом теле, процесс передачи тепла происходит только за счет теплопроводности. В движущейся жидкости добавляется еще другой поток тепла, возникающий из-за того, что движущая жидкость также переносит тепло. Дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению теплопроводности с вынужденной конвекцией, имеет вид:

$$T_t + (\boldsymbol{V}, \Delta T) = a^2 \Delta T. \qquad (5.1.1)$$

Здесь $\boldsymbol{V}$ – заданный вектор скорости потока, который является функцией координат и времени. Формально, уравнение (5.1.1) описывает так же и явление диффузии, под действием течения с произвольной векторной скоростью $\boldsymbol{V}$. Конечно, для произвольно заданного вектора скорости решать уравнение (5.1.1) можно только численным способом. Однако, если течение без вихревое и обладает потенциалом скорости, а такие течения только и получаются при конформных отображениях, то решение уравнения (5.1.1) можно найти в аналитической форме. Действительно, течение в таком случае имеет функцию тока ψ и потенциал скорости φ. Уравнение (5.1.1), если оно не зависит от времени t, записывается через якобиан, в виде:

$$\frac{\partial(T,\psi)}{\partial(x,y)} = a^2 \Delta T . \qquad (5.1.2)$$

Введем вместо x и y переменные φ и ψ. Тогда уравнение (5.1.2) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial(T,\psi)}{\partial(\varphi,\psi)} \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = a^2 \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)\left(T_{\varphi\varphi} + T_{\psi\psi}\right). \qquad (5.1.3)$$

С учетом условий Коши−Римана: $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$, вычисление якобианов в левой части формулы (5.1.3) дает:

$$\frac{\partial(T,\psi)}{\partial(\varphi,\psi)} = T_\varphi, \qquad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 . \qquad (5.1.4)$$

Из последних двух формул следует, что температура в плоскости комплексного потенциала, т.е. в плоскости переменных φ и ψ, удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$T_\varphi = a^2 \left(T_{\varphi\varphi} + T_{\psi\psi}\right). \qquad (5.1.5)$$

Коэффициент температурной проводимости (иди диффузии) a^2 имеет размерность см^2/с, т.е. она совпадает с размерностью потенциала скорости или функции тока. Если L – масштаб длины, и U_∞ – скорость потока на бесконечности, то можно ввести безразмерную величину λ:

$$\lambda = \frac{LU_\infty}{2a^2} . \qquad (5.1.6)$$

Она характеризует скорость течения жидкости на большом удалении от обтекаемого тела. Поэтому основным уравнением, определяющим температуру T в области комплексного потенциала, будем считать нормализованное уравнение:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} = 2\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} . \qquad (5.1.7)$$

Будем искать решение уравнения (5.1.7) в виде:

$$T(\varphi,\psi) = e^{\lambda\varphi} G(\varphi,\psi) . \qquad (5.1.8)$$

Тогда для функции Грина G, обладающей особенностью в начале координат, получим уравнение:

$$G_{\varphi\varphi}+G_{\psi\psi}-\lambda^2 G=-\delta(\varphi)\delta(\psi). \tag{5.1.9}$$

Входящие в правую часть дельта-функции Дирака определяются, как обычно, интегралами:

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega$$

Подставляя их в (5.1.9), найдем, что решение этого уравнения имеет вид:

$$G=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\alpha\varphi+i\beta\psi)d\alpha d\beta}{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2} \tag{5.1.10}$$

Двойной интеграл вычисляется здесь в явном виде по формулам, приведенным в справочнике И.С. Градштейна и И.М. Рыжика [61, стр. 420, 512]. Действительно, вычисляя интеграл (5.1.11), получим:

$$\begin{aligned} G&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha\varphi}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta\psi}d\beta}{\lambda^2+\alpha^2+\beta^2}= \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha\psi}e^{-\psi\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}d\alpha}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}=K_0\left(\lambda\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\right) \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

То есть функция Грина для уравнения (5.1.9) с сингулярной правой частью выражается через функцию Макдональда K_0.

При этом, температурной поле, по формуле (5.1.8), будет равно:

$$T(\varphi,\psi)=e^{\lambda\varphi}\ K_0\left(\lambda\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\right). \tag{5.1.12}$$

Если же источник тепла находится не в начале координат, а в какой-нибудь другой точке с координатами φ′ и Ψ′, то тогда температурное поле, очевидно, будет записываться в виде:

$$T(\varphi,\psi)=e^{\lambda(\varphi-\varphi')}\ K_0\left(\lambda\sqrt{(\varphi-\varphi')^2+(\psi-\psi')^2}\right). \tag{5.1.13}$$

Функция Макдональда $K_0(z)$ – это функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента, и она входит как стандартная в математические пакеты.

На рисунке 34 показаны линии постоянной температуры, вычисленные по формуле (5.1.12) при значении параметра λ = 1.

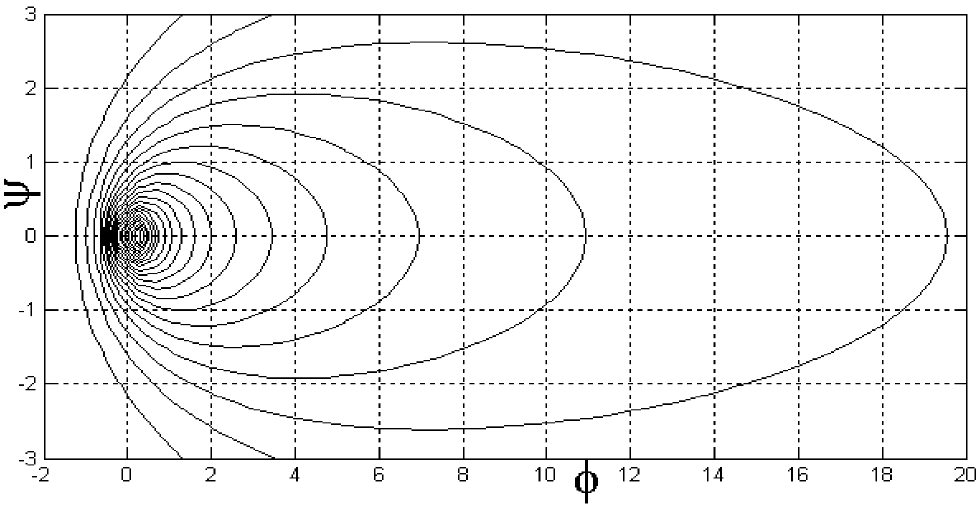

Рисунок 34 – Изотермы функции (5.1.12): $\lambda = 1$

Функция $K_0(x)$ имеет логарифмическую особенность при $x \to 0$: $K_0(x) \approx -\ln x$, и убывает при больших значениях аргумента быстрее показательной функции. Поэтому, из формулы (5.1.12) и рисунка 34 следует, что при малых значениях параметра λ, когда скорость течения жидкости мала, изотермы представляются концентрическими кругами вокруг логарифмического источника поля. С увеличением скорости потока эти круги превращаются в вытянутые вдоль оси φ овалы. При этом характерно, что температура (или концентрация веществ) почти совсем не распространяется против потока жидкости.

Если источники не являются точечными, а заполняют собой некоторую линию в плоскости φ, ψ, с плотностью $\rho(\varphi', \psi')$, то решение в остальном пространстве можно найти интегрируя по всем источникам. Пусть, например, в плоскости φ, ψ, участок нагретого тела располагается на отрезке: $\psi = 0$, $a < \varphi < b$, и имеет заданную температуру $T(\varphi, 0)$. Тогда во всем пространстве температура будет равна:

$$T(\varphi,\psi) = \int_a^b T(\varphi',0)\, e^{\lambda\varphi} K_0\left(\lambda\sqrt{(\varphi-\varphi')^2+\psi^2}\right) d\varphi'. \qquad (5.1.14)$$

Построение изотерм по формуле (5.1.14) можно осуществить, например, по следующей простой программе:

```
function [T, X, Y]= diffuz
x=linspace (-10, 20, 50); y=linspace (0, 10, 50); xi=linspace (-8, 0, 100);
[X, Y, XI]=ndgrid (x, y, xi); lamb=0.5;
T=exp (lamb*(X-XI)).*beselk(0, lamb*sqrt((X-XI).^2+Y.^2)); .   (5.1.15)
T=trapz (xi, T, 3); [X,Y]=ndgrid (x, y);
contour (X, Y, T, 20); colormap([0, 0, 0]); grid on;
end
```

В результате появляется изображение изотерм, показанное на рисунке 35.

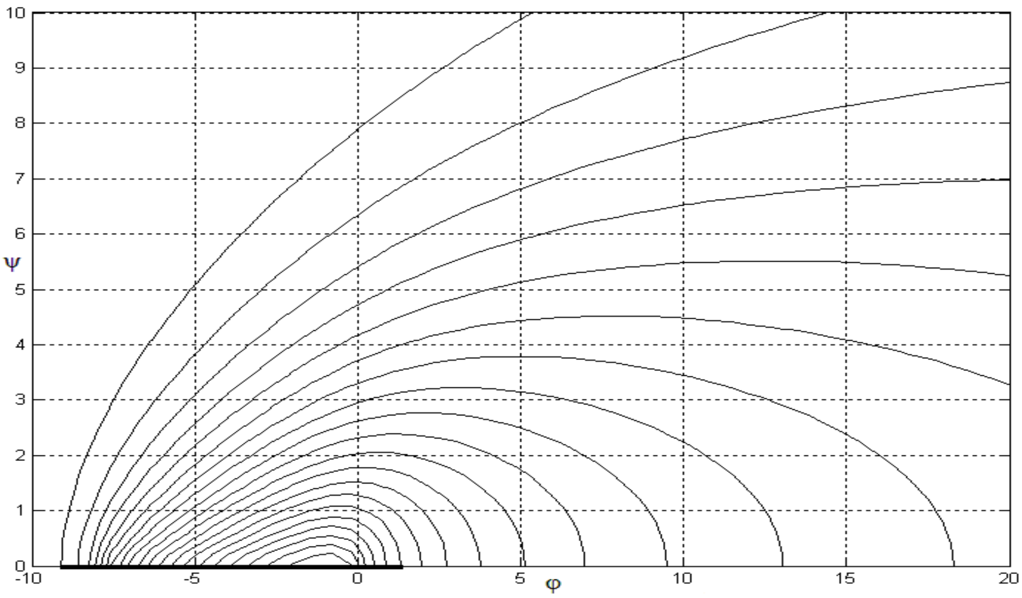

Рисунок 35 – Изотермы в плоскости $w = \varphi + i\psi$ от равномерно нагретого участка $-8 < \varphi < 0$, $\psi = 0$, для параметра $\lambda = 0.5$.

Видно, что форма изотерм зависит от скорости течения жидкости. Изотермы, как и на рисунке 34, представляют собой овалы, вытянутые вдоль оси φ. Если скорость потока (параметр λ) возрастает, то изотермы все больше прижимаются к оси φ. В отличие от этого, форма линий тока при потенциальном течении жидкости совсем не зависит от скорости потока V_∞. Таким образом, в постановке задачи о вынужденной конвекции не учитывается обратное влияние теплового поля на характер течения жидкости.

По формулам (5.1.12) или (5.1.13) довольно просто находятся изотермы в верхней полуплоскости $T(w)$. Но их нетрудно пересчитать и в область $Z(w)$, т.е. получить зависимость $T(Z)$.

Для этого нужно учесть, что переменные (x, y) и (φ, ψ) связаны между собой конформным преобразованием. Участок области w, заданный в виде прямоугольной сетки, является общим, как для построения изотерм, так и для конформного преобразования в физическую область $Z(w)$, выполняемого, например, с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца. Поэтому для получения изотерм функции $T(Z)$ достаточно просто пересчитать изотермы в новую область. Практически построение линий уровня осуществляется с помощью графической программы contour (φ, ψ, T) или contour (X, Y, T). В первом случае получим изотермы $T(w)$, а во втором – те же изотермы, но вычисленные над полем точек (x, y).

Рисунок 36 иллюстрирует применение описанной технологии.

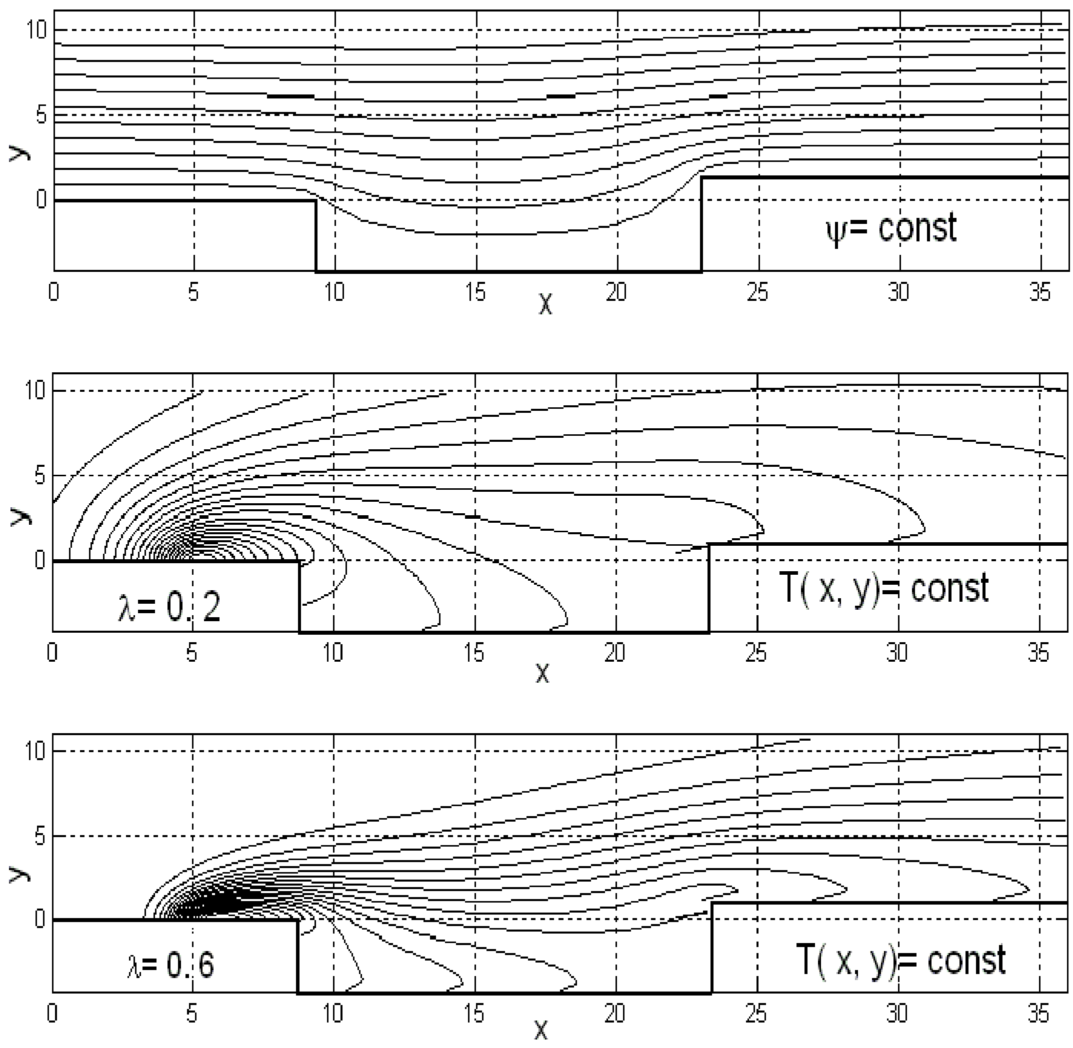

Рисунок 36 – Линии тока ψ = *const* и изотермы T = *const* при обтекании впадины

В верхней части этого рисунка показаны линии тока при обтекании впадины, а на двух других рисунках показаны изотермы от источника тепла расположенного недалеко от края ямки при двух различных скоростях движения потока жидкости. Подобные задачи, легко решаемые лишь с помощью одного только конформного отображения, могут находить применение в теории пожаров или для нахождения распределения примесей в установившемся потоке идеальной жидкости.

5.2 Деформация линий при течении несжимаемой жидкости

Другая задача, которая может быть эффективно решена с помощью конформного отображения, заключается в том, чтобы следить за движением отдельных частиц жидкости и деформаций линий состоящих из этих частиц.

В задачах гидродинамики обычно находят траектории частиц (линии тока). Вдоль этих линий частицы жидкости перемещаются с неодинаковой скоростью, и вычисление их движения составляет задачу адвекции – термин, который в метеорологии обозначает перенос свойств воздуха. Говорят о переносе течением туманов гроз, заморозков и т.п. С движением некоторой области частиц связаны практические вопросы о переносе пассивных примесей. Начало изучения адвекции было положено в работе Арефа [69].

Математическая постановка задачи о плоской адвекции сводится к тому, чтобы найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = u(x,\ y,\ t),\ \dot{y} = v\ (x,\ y,\ t),\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \qquad (5.2.1)$$

Этими уравнениями описывается движение частицы с начальными координатами (x_0, y_0) в произвольно заданном поле скорости.

В работе [70], в которой считается, что в потоке жидкости присутствуют точечные вихри, вращающиеся в разные стороны, отмечается, что проблема адвекции является достаточно сложной. Там решение достигается применением численного метода (Рунге–Кутты) сразу ко многим начальным частицам жидкости. Ниже (рисунок 37) воспроизводится рисунок, взятый из книги [70], который поясняет сущность явления адвекции.

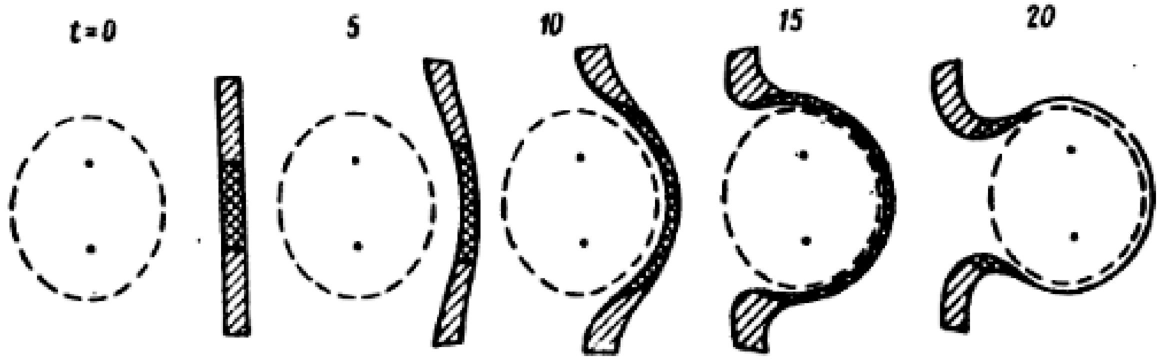

Рисунок 37 – Стадии деформации жидкой полоски в течении, обтекающем круг

На этом рисунке показаны положения жидкой полоски при различных значениях времени *t*. Здесь жидкость обтекающая круг течет в левую сторону.

В статье [68], однако, авторы показывают, что задача адвекции значительно упрощается, если поле течения описывается комплексным потенциалом скорости $w = \varphi + i\psi$, т.е. если течение получено с помощью конформного отображения $z = x + iy = f(w)$. Тогда для пары связанных между собой точек z и w можно записать следующие равенства:

$$\dot{w} = \left(\frac{dw}{dz}\right)\dot{z}, \ \ \dot{z} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{*}, \ \text{т.е.} \ \dot{w} = \left|\frac{dw}{dz}\right|^{2}. \qquad (5.2.2)$$

Из них следует, что в области комплексного потенциала точки перемещаются горизонтально со скоростью равной:

$$\dot{\varphi} = |\dot{z}|^{2} = \left|\frac{dw}{dz}\right|^{2}. \qquad (5.2.3)$$

То есть горизонтальная скорость точки в плоскости w равна квадрату ее скорости в физической плоскости.

Отсюда получается формула для времени перемещения точек, расположенных в плоскости (φ, ψ):

$$t(\varphi,\psi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left| f'(\varphi,\psi) \right|^2 d\varphi. \qquad (5.2.4)$$

Линии уровня функции $t(\varphi, \psi) = const$, в прядке возрастания их значений, будут соответствовать последовательным положениям во времени начального вертикального отрезка. Таким образом, все что нам нужно для решения задачи об адвекции в стационарном течении – это нарисовать линии уровня для функции $t(\varphi, \psi)$. Для этого нужно еще, конечно, иметь аналитическое выражение (или числовое представление) для функции отображающей верхнюю полуплоскость w на обтекаемую область $Z(w)$.

Наглядным примером может служить классическое течение из «трубы» с высотой H, для которого конформное отображение имеет вид:

$$Z(\mathrm{w}) = H\left(w + e^{w}\right)/\pi. \qquad (5.2.5)$$

На рисунке 38 показан характер деформации вертикального отрезка в течении, которое описывается отображением (5.2.5).

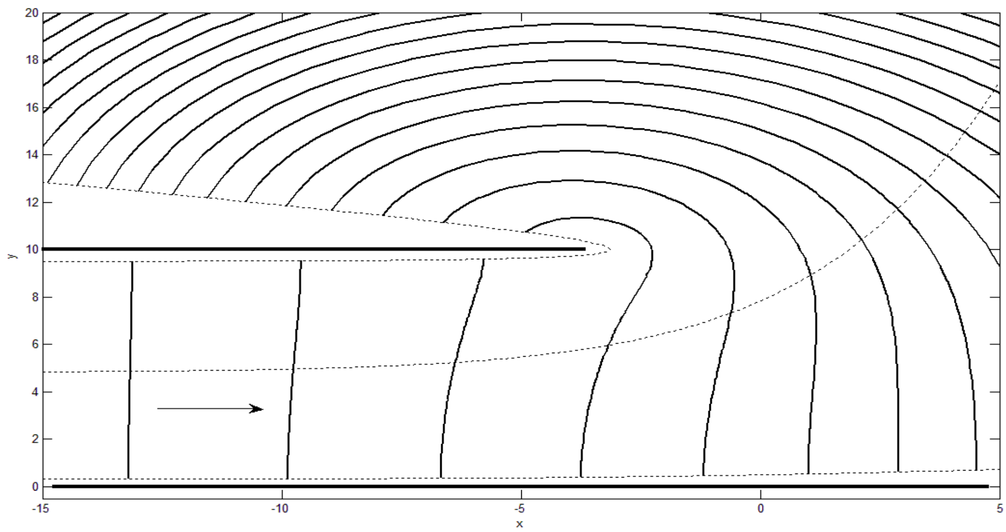

Рисунок 38 – Изменение формы начального вертикального отрезка с течением времени

Из рисунка 38 видно, что в сложных течениях отрезок, состоящий из точек жидкости, не движется параллельно самому себе, а сильно изменяет свою форму, а также и свою длину. Его концы движутся вдоль линий тока, которые его ограничивают. Они изображены на рисунке 38 пунктиром.

Другой простой пример адвекции получается при обтекании дуги эллипса, в верхней полуплоскости, с полуосями a и b. Конформное отображение для этого случая имеет следующий вид:

$$Z(w) = \frac{aw + b\sqrt{w^2 - (a+b)^2}}{a+b}. \qquad (5.2.6)$$

Приведем программу, которая вычисляет линии уровня функции $t(\varphi, \psi)$, по формуле (5.2.4), для случая обтекания эллипса:

```
function [W, Z, ZW, t]=advect2
a=1;   b=5;
phi=linspace (-2*(a+b),  5*(a+b), 500);  psi=linspace(1,3,50);
[Psi, Phi]=ndgrid (psi, phi);  W=Phi+1i*Psi;
              [Z,  ZW]=ellips (a, b, W);     t = cumtrapz (phi, abs (ZW).^2);
contour (real (Z), imag(Z), t, 20,  'Linewidth', 1);  colormap([0,0,0]);
 hold on;  fi=linspace (0, pi, 50);   plot(a*cos(fi),  b*sin(fi),  'k',  'Linewidth', 2);
plot (Z(1, :), ': k');  plot (Z(end, :),  ': k');  axis([-19, 60, -0.5, 10.5]);  hold off ;    . (5.2.7)

function [Z,ZW]=ellips (a, b, W)
W1 = sign (real (W)).* sqrt (W.^2 - (a + b)^2);
 Z=(a*W+b*W1)/(a+b);   ZW=(a+b*W. / W1) / (a+b);
end
end
```

Результат расчета по программе (5.2.7) показан на рисунке 39.

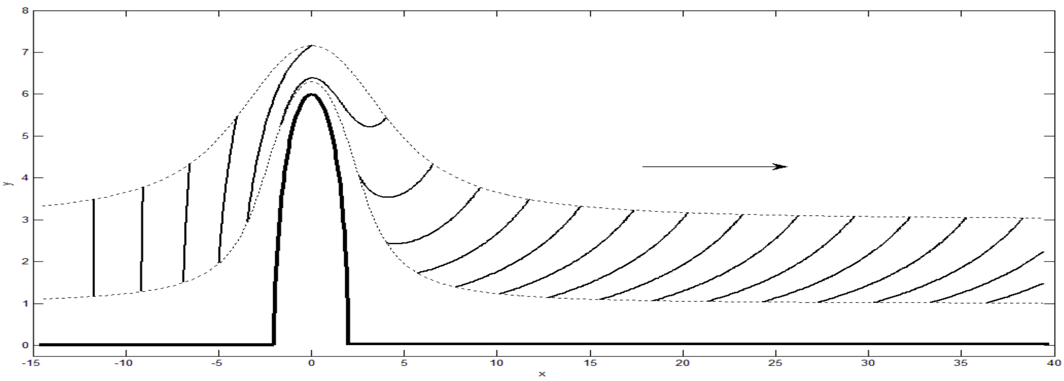

Рисунок 39 – Последовательность положений вертикального отрезка в жидкости при обтекании эллипса с полуосями: a = 2, b = 6

Отрезок теряет прямолинейную форму, и его длина уменьшается при переходе через макушку эллипса, где повышена скорость течения. Он помещен между линиями тока, отмеченными на рисунке 39 пунктиром.

Собственно говоря, в программе (5.2.7) время движения частицы жидкости $t(W)$ определяется только одним оператором, следующим сразу же за обращением к оператору с именем ellips. Задача этой подфункции заключается в вычислении координат $Z(W)$ и производной dZ/dw в отдельных точках верхней полуплоскости W. Остальные операторы в этой программе являются графическими надстройками. Если заменить подпрограмму ellips другой, соответствующей иному конформному отображению, то вся программа, в принципе, не изменится. Предыдущий рисунок (рисунок 38) был вычислен по аналогичной программе.

Мы, таким образом, проверили идею о возможности решения задачи адвекции с помощью интегральной формулы (5.2.4), предложенную авторами статьи [68]. Она действительно хорошо работает для установившегося потока жидкости, так как не требует решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений и работает очень быстро. Но для неустановившихся (вихревых) течений она не подходит, и придется пока пользоваться дифференциальными уравнениями вида (5.2.1).

Если не известно точное аналитическое решение для конформного отображения в виде формул подобных формулам (5.2.5) или (5.2.6), то тогда нужно применять приближенные численные методы, в том числе и метод П.П. Куфарева для нахождения прообразов вершин многоугольника.

Когда жидкость обтекает прямолинейные многоугольники, состоящие из разрезов, то для решения задачи об адвекции целесообразно составить отдельную подпрограмму, которая вычисляет одновременно три поля: W – прямоугольную область в верхней полуплоскости, производную dZ/dW, и сами координаты $Z(W)$ в физической области. Такая программа, аналогична программе (5.2.7) для отображения эллипса, может быть написана, например, в следующем виде:

```
function [W, Zw, Z]=ff (DD)
b=DD(2,: );  alf=DD (1, :);  m=length (b);  N=2000;
 phi=l inspace(b (1)-100, b (end) +100, N);  psi=linspace(0.01, 8, 50);
[PSI, PHI]=ndgrid (psi, phi);  W=PHI+1i*PSI;                          .          (5.2.8)
Zw = W;  fork = 1 : m    Zw = Zw.* (W – b (k)).^ alf (k);  end;
Z=cumtrapz (phi, Zw, 2)+repmat ( W(:, 1), 1, N);
end
```

Программа (5.2.8) использует в качестве входного параметра матрицу DD, которая должна содержать уже вычисленные методом П.П. Куфарева показатели степени и прообразы вершин интеграла Кристоффеля–Шварца.

После работы такой программы ее выходные величины могут использоваться как для решения задачи об адвекции, так и для рисования изотерм в первой задаче данной главы об источнике тепла.

Пример одновременного решения трех задач: об обтекании разреза, задачи об адвекции и задачи об изотермах от источника тепла в движущейся жидкости показан на рисунке 40.

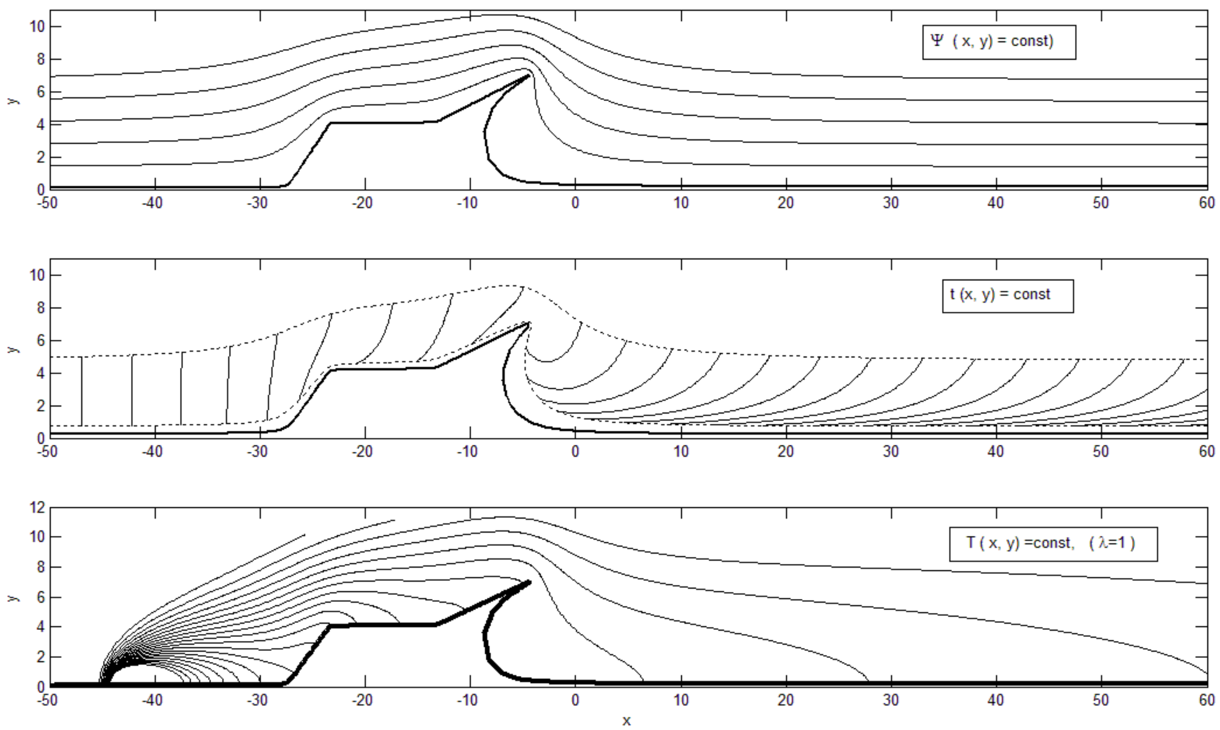

Рисунок 40 – Пример расчета обтекания разреза, состоящего из трех отрезков, и одновременного построения линий $t(x, y) = const$ в задаче об адвекции. На нижнем рисунке показаны изотермы от источника тепла в потоке жидкости

В данном примере верхняя полуплоскость W отображалась на верхнюю полуплоскость $Z(W)$ с тремя разрезами, и затем последовательно строились линии тока, линии равного времени (для задачи адвекции), и линии одинаковой температуры (для задачи о вынужденной конвекции).

Поскольку применялся метод П.П. Куфарева расчета прообразов вершин, то приведем их численные значения, полученные программой для частного случая списка разрезов $dz = [4 + 4*i, 10, 9 + 3*i]$:

$$\mathrm{D3}' = \begin{pmatrix} -0.250000000000000 & -31.633578553583821 \\ 0.250000000000000 & -26.443262784379879 \\ -0.102416382349567 & -14.547542034034196 \\ 0.102416382349567 & 3.100765359989939 \\ -0.250000000000000 & 3.105052993463927 \\ -0.750000000000000 & 3.105055322432168 \end{pmatrix}. \qquad (5.2.9)$$

В первом столбце здесь стоят показатели степени интеграла Шварца–Кристоффеля, а во втором – прообразы вершин. Четвертую вершину a_4 данная программа не показывает, т.к. для нее известно, что: $a_4 = 0$ и $\alpha_4 = 1$.

Из таблицы (5.2.9) видно, что положительные (внутренние) прообразы практически слились в одну точку, что очень характерно для отображения разрезов.

Полный текст программы, по которой вычислялся рисунок 40 приведен ниже на следующей странице. Если в этой программе заменить список разрезов dz другим аналогичным списком, то соответственно должны поменяются и все остальные результаты расчета.

Программа для одновременного расчета поля течения жидкости, задачи о тепловом поле на течении, и задачи об адвекции:

```
function [ L1, D1, L2, D2, L3, D3, W, Zw, Z, T] = razrezTC
dz=[4+4*1i,  10,  9+3*1i];
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
[L1, D1]=rzr1 (dz (1)) ;  [L2, D2]=rzrn (2, dz, D1);  [L3, D3]=rzrn (3, dz, D2);
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
[W, Zw, Z]= ff (D3);  X=real(Z);  Y=imag (Z);   phi=real ( W(3, :));
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
subplot(3, 1, 1);
contour (X, Y,  imag (W),  5);  colormap([0,0,0]);
hold on;  plot (Z (1, :), 'k', 'Linewidth', 2);  hold off;  axis( [-50, 60, 0, 11] );
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
subplot(3, 1, 2);
t = abs ( Zw (5:30,: )).^2;  t = cumtrapz (phi, t, 2);
contour (X (5:30, :), Y(5:30, :), t, 50);  colormap([0,0,0]);
hold on;  plot (Z (2, :), 'k', 'Linewidth', 2);
plot (Z (5,  :), 'k:');  plot (Z(30, : ), 'k:');   hold off ;   axis ([-50, 60, 0, 11]);
% - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
subplot(3, 1, 3);
Phi = real(W); Psi = imag (W);  Phi0 =-45;  lam=1.0;
T = exp (lam*(Phi - Phi 0));                                                   (5.2.10)
T = T.*besselk (0, lam*sqrt ((Phi - Phi0).^2 + Psi.^2));
p=linspace (0.5, 0.05,  20);  contour (X, Y, T, p);  colormap ([0,0,0]);
hold on;  plot(Z(1, :), 'k', 'Linewidth', 3);   hold off;   axis ([-50, 60, 0, 12]);
end
```

В программе, конечно, используются ранее составленные в диссертации программные блоки, такие как *rzr*1 (3.3.4), *rzrn* (3.3.5) и блок *ff* (5.2.8).

Блок Risline (3.3.6) в этой программе (5.2.10) не используется. Без него можно вполне обойтись, т.к. рисование линий можно производить непосредственно по значениям полей W, $Z(W)$ и $Z'(W)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При работе над диссертацией предполагалось исследовать возможности метода П.П. Куфарева для осуществления численных конформных отображений. Этот метод полностью оправдал наши ожидания. Задача построения отображения разбивается на две совершенно не зависимые друг от друга части: 1) – определение констант в интеграле Шварца–Кристоффеля (прообразов вершин многоугольника), и 2) – вычисление самого этого интеграла Кристоффеля–Шварца, который рассматривается как функция точек верхней полуплоскости.

Вторая часть задачи конформного отображения (о вычислении интеграла) не представляет особых затруднений и может быть реализована различными способами, но теоретическую основу метода П.П. Куфарева, конечно, составляет первая часть – нахождение прообразов вершин многоугольников.

Изучение эффективности этого метода проводилось на ряде примеров отображения многоугольников. Рассмотрены отображения на ограниченные и неограниченные многоугольники, которые выбирались в виде различных прямолинейных разрезов. Там, где это было возможно, сравнивались точные решения с численными решениями, полученными с использованием метода П.П. Куфарева, при этом решения совпадали с большой точностью. Метод отличается большой гибкостью. Все возникающие в ходе решения задач трудности легко преодолеваются.

При рассмотрении прикладных задач, таких как о течении грунтовых вод под флютбетами плотин, о вынужденной конвекции и об адвекции в стационарном потоке жидкости, можно убедиться, что метод позволяет легко решать и эти сложные краевые задачи. Причем решение получается быстро и с большой точностью и представляет реальную картину решения. Следует заметить, что аналитическое решение подобных задач практически невозможно даже в простейших случаях. Поэтому как численный метод, рассматриваемый в диссертации метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца и построение на его основе конформных отображений прямолинейных многоугольников, оказывается очень эффективным для решения различных научных задач, имеющих большое прикладное значение.

В диссертации изучены далеко не все возможности изученного метода. Так, не исследованными остаются вопросы численной реализации для многоугольников с несколькими вершинами в бесконечности, круговых и двусвязных многоугольников. Все эти задачи еще предстоит решать.

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.М. Бубенчикову, а также доценту Т.В. Касаткиной. Особую признательность хочу выразить И.А. Колесникову, взявшему на себя труд по прочтению полного текста работы и сделавшего много ценных замечаний. Также благодарю всех сотрудников кафедры математического анализа за помощь и внимание при выполнении данной диссертационной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М.–Л. : Гостехиздат, 1950. – 704 с.
2. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М. : Наука, Физматлит, 1966. – 628 с.
4. Buchholz H. Electrishe und magnetische Potentialfelder / H. Buchholz. – Berlin–Gottingen–Heidelberg : Springer Verlag, 1957. – 712 S.
5. Koppenfels W. Praxis der konformenAbbildung / W. Koppenfels, F. Stallmann. – Berlin–Gottingen–Heidelberg : Springer Verlag, 1959. – 407 S.
6. Лаврик В.И. Справочник по конформным отображениям / В.И. Лаврик, В.Н. Савенков. – Киев : Наукова думка, 1970. – 252 с.
7. Смирнов В.И. О конформном преобразовании односвязных областей в себя / В.И. Смирнов // Записки математического кабинета Крымского (б. Таврического) университета им. тов. М.В. Фрунзе : приложение к Известиям Университета. – 1921. – Т. 3. – С. 145–152.
8. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформных отображениях / Г.М. Голузин // Математический сборник. – 1946. – Т. 19 (61), № 2. – С. 203–236.
9. Канторович Л.В. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение / Л.В. Канторович // Известия АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1933. – № 2. – С. 229–235.
10. Канторович Л.В. О конформном отображении многосвязных областей / Л.В. Канторович // Доклады АН СССР. – 1934. – Т. 2, № 8. – С. 441–444.
11. Благовещенский Ю.В. О некоторых приближенных методах конформного преобразования / Ю.В. Благовещенский // Сб. трудов Института строительной механики АН УССР. – Киев, 1950. – С. 145–152.
12. Фильчаков П.Ф. Численный метод конформного отображения односвязных однолистных областей / П.Ф. Фильчаков // Украинский математический журнал. – 1958. – Т. 10, № 4. – С. 434–449.

13. Фильчаков П.Ф. Конформное отображение заданных областей при помощи метода тригонометрической интерполяции / П.Ф. Фильчаков // Украинский математический журнал. – 1963. – Т. 15, № 2. – С. 158–172.

14. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений / П.Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1964. – 530 с.

15. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики / П.Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1970. – 745 с.

16. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Л.–М. : Гостехиздат, 1949. – 695 с.

17. Иванилов Ю.П. Об асимптотическом характере формул М.А. Лаврентьева / Ю.П. Иванилов, Н.Н. Моисеев, А.М. Тер-Крикоров // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 2. – С. 231–234.

18. Келдыш М.В. Конформное отображение многосвязных областей на канонические области / М.В. Келдыш // Успехи математических наук. – 1939. – № 6. – С. 90–119.

19. Келдыш М.В. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике / М.В. Келдыш, Л.И. Седов. – М. : Наука, 1964. – 45 с.

20. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин / Г.Ю. Степанов. – М. : Физматлит, 1962. – 512 с.

21. Сычев К.А. О численных методах конформных отображений / К.А. Сычев // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики : сб. статей. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1997. – Вып. 1. – С. 7–13.

22. Сычев К.А. Примеры численной реализации конформных отображений / К.А. Сычев // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики : сб. статей. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1998. – Вып. 2. – С. 8–12.

23. Сычев К.А. Конформное отображение произвольной односвязанной области на прямоугольник / К.А. Сычев, Э.Е. Либин // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики : сб. статей. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 1998. – Вып. 2. – С. 8–12.

24. Сычев К.А. Численный метод конформного отображения произвольной двусвязной области на круговое кольцо / К.А. Сычев, Э.Е. Либин // Исследования

по баллистике и смежным вопросам механики : сб. статей. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2000. – Вып. 4. – С. 23–25.

25. Сычев К.А. Численный метод конформного отображения произвольной односвязной области на прямоугольник / К.А. Сычев, Э.А. Либин // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики : материалы II Всерос. науч. конф. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2000. – С. 209–211.

26. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 416 с.

27. Лаврентьев М.А. Конформные отображения с приложением к некоторым вопросам механики / М.А. Лаврентьев. – М.–Л. : ОГИЗ, Гостехиздат, 1946. – 159 с.

28. Келдыш М.В. К Теории конформных отображений / М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев // Доклады АН СССР. – 1935. – Т. 1, № 2-8. – С. 85–87.

29. Betz A. Konforme Abbildung / A. Betz. – Berlin–Gottingen–Heidelberg : Zw. Aufl., 1959.

30. Рабинович Б.И. Об одном рекуррентном численном методе конформного отображения / Б.И. Рабинович, Ю.В. Тюрин // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 272, № 3. – С. 532–535.

31. Рабинович Б.И. Рекуррентный численной метод конформного отображения двусвязных областей на круговое кольцо / Б.И. Рабинович, Ю.В. Тюрин // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 272, № 4. – С. 795–798.

32. Рабинович Б.И. Вариационный принцип М.А. Лаврентьева и RT-алгоритм конформного отображения в гидродинамике и динамике твердого тела с жидкостью / Б.И. Рабинович, Ю.В. Тюрин // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства : сб. статей / под ред. Г.А. Тюлина. – М. : Машиностроение, 1986. – С. 148–158.

33. Rabinovich B.I. Numerical Conformal Mapping in Two-Dimensional Hydrodynamics and Related Problems of Electrodynamics and Elasticity Theory / B.I. Rabinovich, Yu.V. Turin. – M. : Space Research Institute Academy of Sciense, 2000. – 312 p.

34. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М. : Физматгиз, 1963. – 543 с.

35. Риман Б. Сочинения / Б. Риман. – М. : Гостехиздат, 1948. – 649 с.

36. Келдыш М.В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области / М.В. Келдыш // Успехи математических наук. – 1939. – № 4. – С. 90– 19.

37. Келдыш М.В. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций / М.В. Келдыш, Л.И. Седов // Доклады АН СССР. – 1937. – Т. 16, № 1. – С. 7–10.

38. Терновых Е.Ю. Конформное отображение прямолинейной полосы на криволинейную полосу с заданными границами / Е.Ю. Терновых // Труды / Томский государственный университет. Сер. физико-математическая. – Томск, 2012. – Т. 282 : Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики : материалы II Всерос. молодежной науч. конф., посвященной 50-летию физ.-техн. факультета Том. гос. ун-та. – С. 138–140.

39. Либин Э.Е. Граничная задача для уравнения Лапласа в полосе / Э.Е. Либин, Ю.Е. Терновых // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики : сб. материалов Всерос. науч. конф., посвященной 50-летию полета Ю.А. Гагарина и 90-летию со дня рождения основателя и первого директора НИИ ПММ ТГУ А.Д. Колмакова. Томск, 12–14 апр. 2011 г. – Томск, 2011. – С. 188–190.

40. Угодчиков А.Г. О тригонометрической интерполяции конформно отображающих функций / А.Г. Угодчиков // Украинский математический журнал. – 1961. – Т. 11, № 1 – С. 111–115.

41. Труды семинара по прикладной математике. – Киев : Изд-во АН УССР, 1963. – Т. 1, вып. 1. – 336 с.

42. Лаврик В.И. О решении задачи свободной фильтрации методом последовательных приближений / В.И. Лаврик // Украинский математический журнал. – 1963. – Т.15, № 4. – С. 427–431.

43. Иваньшин П.Н. Приближенные конформные отображения и теория упругости / П.Н. Иваньшин, Е.А. Широкова // Геометрия многообразий и ее приложения : сб. статей: материалы четвертой науч. конф. – Улан-Удэ : Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2016. – С. 141–150.

44. Shirokova E.A. On approximate conformal mapping of the unit disk on a simple connected domain / E.A. Shirokova // Russian Mathematics (Iz. VUZ.). – 2014. – Vol. 58, № 3. – P. 47–56.

45. Куфарев П.П. Об одном способе численного определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля / П.П. Куфарев // Доклады АН СССР. – 1947. – Т. 57, № 6. – С. 536–537.

46. Положий Г.Н. Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двусвязных областей и определение постоянных Шварца–Кристоффеля при помощи электродинамических аналогий / Г.Н. Положий // Украинский математический журнал. – 1955. – Т. 7, № 4. – С. 423–432.

47. Чистяков Ю.В. Об одном способе приближенного определения функции, конформно отображающей круг на области, ограниченные дугами окружностей и отрезками прямых / Ю.В. Чистяков // Ученые записки Томского университета. – 1950. – Т. 4. – С. 143–151.

48. Чистяков Ю.В. Численный метод определения функции, конформно отображающей круг на многоугольники : дис. / Ю.В. Чистяков. – Томск, 1952.

49. Hopkins T.R. Kufarev's method for determining the Schwartz-Christoffel parameters / T.R. Hopkins, D.E. Roberts // Numerische Mathematic. – 1979. – Vol. 33. – P. 353–365.

50. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций / И.А. Александров. – М. : Наука, 1976. – 344 с.

51. Колесникова И.А. Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – № 2(28). – С. 18–28

52. Kolesnikov I.A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation // Problemy Analiza – Issues of Analysis. – 2018. – Vol. 7 (25), Special Issue.

53. Tsarin Y.A. Conformal mapping technique in the theory of periodic structures / Y.A. Tsarin // Microwave and Optical Technology. – 2000. – Vol. 26, № 1. – P. 57–61.

54. Garnier J. Optimal Bousssinesq model for shallow-water waves interacting with a microstructure / J. Garnier, R.A. Kraenkel, A. Nachbin // Physical review. E. – 2007. – Vol. 76. – P. 1–11.

55. Trefethen L.N. Numerical computation of Schwarz-Christoffel transformation / L.N. Trefethen // SIAM Journal on Scientiffic and Statistical computing. – 1980. – Vol. 1, № 1. – P. 82–102.

56. Banjai L. A multipole method for Schwarz-Christoffel mapping of polygons with thousands of sides / L. Banjai, L.N. Trefethen // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2003. –Vol. 25, № 3. – P. 1042–1065.

57. Соболева Н.В. Комплексный алгоритм численного построения конформного отображения ограниченной жордановой области на круг и обратного отображения / Н.В. Соболева, В.В. Соболев // Научн. труды РИАТМа. – Ростов н/Д, 1995. – Вып. 2. – С. 21–34.

58. Driscoll T.A. Algorithm 756: A MatLab toolbox for Schwarz–Christoffel mapping / T.A. Driscoll. – Cambridge : Cambridge University Press, 2002. – 132 p. (Cambridge Monographs and Applied Comput. Math.Vol. 8)

59. Потемкин В.Г. MatLab 6: среда проектирования инженерных приложений / В.Г. Потемкин. – М. : Диалог-МИФИ, 2003. – 448 с.

60. Lowner K. Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildung des Einheitskreises / K. Lowner // J. Math. Ann. – 1923. – Bd. 89. – S. 103–121.

61. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

62. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям / А.М. Журавский. – М.–Л. : Изд-во АН СССР, 1941. – 235 с.

63. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1997. – 663 с.

64. Павловский Н.Н. Собрание сочинений / Н.Н. Павловский. – М.–Л. : Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2 : Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. – 771 с.

65. Жамбаа С. Определение констант Шварца–Кристоффеля методом П.П. Куфарева / С. Жамбаа, А.М. Бубенчиков // Сб. докладов VIII междунар.

конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». – Новосибирск, 2015. – С. 33–34.

66. Жамбаа С. Об определении констант в интеграле Шварца–Кристоффеля по методу П.П. Куфарева / С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 5 (43). – С. 21–27.

67. Тритинникова В.С. Вынужденная конвекция примесей в потенциальном потоке / В.С. Тритинникова, Э.Е. Либин, Ю.П. Худобина // Электротехника, электротехнология, энергетика : сб. науч. трудов VII междунар. науч. конф. молодых ученых / Новосиб. гос. техн. ун-т, Межвуз. центр содействия науч. и инновац. деятельности студентов и молодых ученых. – Новосибирск, 2015. – С. 415–417.

68. Мищарина Е.Ю. О движении частиц жидкости в плоскопараллельном потоке / Е.Ю. Мищарина, Ю.П. Худобина // Сб. докладов VIII междунар. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». – Новосибирск, 2015. – С. 45.

69. Aref H. Stirring by chaotic advetction / H. Aref // J. Fluid mech. – 1984. – Vol. 143. – P. 1–21.

70. Мелешко В.В. Динамика вихревых структур / В.В. Мелешко, М.Ю. Константинов. – Киев : Наукова думка, 1993. – 283 с.

71. Накипов Н.Н. Асимптотика акцессорных параметров в обобщенном интеграле Кристоффеля–Шварца и решение одного операторного уравнения / Н.Н. Накипов С.Р. Насыров // Сб. науч. статей Казанского федерального университета. – Казань, 2012. – С. 43–46.

72. Куфарев П.П. Труды П.П. Куфарева : к 100-летию со дня рождения / П.П. Куфарев ; под общ. ред. И.А. Александрова. – Томск : Изд-во НТЛ, 2009. – 372 с.

73. Насыров С.Р. Определение акцессорных параметров в смешанной обратной краевой задаче с полигональной известной частью границы / С.Р. Насыров, Л.Ю. Низамиева // Известия Саратовского университета. Новая серия. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 34–40.

74. Низамиева Л.Ю. О нахождении акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца / Л.Ю. Низамиева // Потребительская кооперация: теория, методология, практика : материалы междунар. науч.-практ. конф. – М., 2010. – С. 313–319.

75. Gutlyanskii V.Y. On conformal mapping of polygonal regions / V.Y. Gutlyanskii, A.O. Zaidan // Ukrainian Mathematical Journal. – 1993. – Vol. 45, № 11. – P. 1669–1680.

76. Байбарин Б.Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области : дис. канд. физ.-мат. наук. / Б.Г. Байбарин. – Томск: Томский гос. ун-т им. В.В. Куйбышева, 1966.

77. Накипов Н.Н., Насыров С.Р. Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Физико-математические науки, Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 2. – С. 202–220.

78. Насыров С.Р. Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. – Казань : Магариф, 2008. – 276 с.

Публикации соискателя

[1] Шерстобитов А.А. Взаимодействие молекул с системой наночастиц / А. А. Шерстобитов, С. Жамбаа, О. В. Усенко, В. Б. Цыренова, Д. К. Фирсов // Известия вузов. Физика. – 2014. – Т. 57, № 8/2. – С. 210–214.

[2] Бубенчиков А. М. Влияние формы графена на его способность сепарации газов / А. М. Бубенчиков, М. А. Бубенчиков, А. И. Потекаев, О. В. Усенко, С. Жамбаа, В. В. Кулагина // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58, №12. – С. 39–45.

В переводе:

Bubenchikov A.M. The Effect of Graphene Shape on its Ability to Separate Gases / A.M. Bubenchikov, M.A. Bubenchikov, A.I. Potekaev, O.V. Usenko, S. Zhambaa // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 58, is. 12. – P. 1711–1719. – DOI: 10.1007/s11182-016-0706-y.

[3] Жамбаа С. Определение констант Шварца–Кристоффеля методом П.П. Куфарева / С. Жамбаа, А.М. Бубенчиков // Сб. докладов VIII междунар. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». – Новосибирск, 2015. – С. 33–34.

[4] Жамбаа С. Об определении констант в интеграле Шварца–Кристоффеля по методу П.П. Куфарева / С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2016. – № 5 (43). – С. 21–27.

[5] Бубенчиков А.М. Об определении констант в интеграле Кристоффеля–Шварца по методу П.П. Куфарева / А.М. Бубенчиков, С. Жамбаа, Т.В. Касаткина // Материалы четвертой научной конференции по геометрии многообразий и ее приложениям с международным участием (г. Улан-Удэ – оз. Щучье – оз. Байкал, 27–30 июня 2016 г.). – Улан-Удэ : Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2016. – С. 95–101.

[6] Жамбаа С. Применение метода П.П. Куфарева к решению задачи о движении грунтовых вод под гидротехническими сооружениями // С. Жамбаа, Т.В. Касаткина, А.М. Бубенчиков // Вестник Томского государственного университета. – Математика и механика. – 2017. – № 47. – С. 15–19.

[7] Жамбаа С. Некоторые простые классические свойства и примеры эргодической теории динамических систем / С. Жамбаа // Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. – 2017. – № 2. – С. 3–7.

[8] Bubenchikov M.A. Separation of gases using ultra-thin porous layers of monodisperse nanoparticles / A.M. Bubenchikov, O.V. Usenko, V.A. Poteryaeva, S. Jambaa // EPJ Web of Conferences. – 2016. – Vol. 110. – Article number 01014. – DOI: 10.1051/epjcconf/201611001014.

[9] Soninbayar J. Some basic properties and simples in theoryof dynamical systems // The 10th international conference on optimization: techniques and applications / Ulaanbaatar, 2016. – C. 124.

[10] Bubenchikov M.A. On the selective properties of nanoscale bifurcation / M.A. Bubenchikov, A.V. Ukolov, R.Yu. Ukolov, S. Jambaa // Jornal of mathematics and mechanics. – 2018. – № 51. – P. 104–116.