Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный педагогический университет
им. Козьмы Минина»

На правах рукописи

Вильданов Вадим Кадирович

Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор
Себельдин Анатолий Михайлович

Нижний Новгород – 2014

Содержание

Введение

Актуальность работы.

Кольца эндоморфизмов и группы их обратимых элементов всё чаще становятся объектом исследования в теории абелевых групп. Большое значение в развитии теории колец эндоморфизмов абелевых групп имеют работы Р. Бэра [10], И. Капланского [2], Л. Фукса [29, 30] и многих других авторов. В теории колец эндоморфизмов занимает особое место теорема Бэра-Капланского. В ней говорится, что любые две периодические абелевы группы с изоморфными кольцами эндоморфизмов изоморфны. Более того, в ней утверждается, что всякий изоморфизм колец эндоморфизмов групп индуцируется некоторым групповым изоморфизмом. Эта теорема положила начало тенденции изучения абелевых групп совместно с их кольцами и группами эндоморфизмов. По мнению П.А. Крылова, А.В. Михалева и А.А. Туганбаева, авторов книги „Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов“[17], изучение колец эндоморфизмов абелевых групп позволяет получить дополнительные сведения о самих группах, ввести в рассмотрение новые методы и понятия, выделить интересные классы групп. Кроме того, изучение колец эндоморфизмов стимулирует дальнейшие исследования по теории модулей и их колец эндоморфизмов.

Теоремы типа Бэра-Капланского авторы книги [17] называют теоремами изоморфизма. В таких теоремах утверждается, что две группы из данного класса изоморфны, если их кольца эндоморфизмов изоморфны. Существует и более общая формулировка теоремы изоморфизма, когда изоморфизм групп не требуется. Наконец, вместо колец эндоморфизмов в указанном типе теорем могут фигурировать группы эндоморфизмов, автоморфизмов, гомоморфизмов и другие алгебраические структуры.

Кольца эндоморфизмов рассматриваются в работах Р. Бэра [10], И.

Капланского [2], Л. Фукса[29, 30], А.Г. Куроша[19]. Исследованию взаимосвязей абелевых групп и их колец (групп) эндоморфизмов посвящены работы А. М. Себельдина, С.Я. Гриншпона, С. Баззони, Ц. Метелли и многих других авторов [1, 12–15, 21–27]. Взаимосвязи абелевых групп и их групп гомоморфизмов посвящены работы [6, 8].

Группы автоморфизмов абелевых групп являются группами обратимых элементов колец эндоморфизмов и представляют самостоятельный интерес. В. Либерт и Х. Лептин [3, 4] доказали, что для $p > 2$ из изоморфизма групп автоморфизмов двух p-групп следует изоморфизм самих групп. Другими словами, p-группа определяется своей группой автоморфизмов в классе всех p-групп для $p > 2$. В книге [19] А.Г. Курош ставит задачу изучения групп автоморфизмов абелевых групп без кручения. И. Х. Беккер и С. Ф. Кожухов в своей книге [7] изучают строение групп автоморфизмов групп без кручения в предположении, что группы автоморфизмов конечны. Изоморфизмы и автоморфизмы линейных групп исследовали в своих работах Ван-дер-Варден, Шрайер, Дьедонне, Хуа, Райнер. Автоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами рассматривали О'Мира, Макдональд, Уотерхаус, В.М. Петечук, в более общем случае ассоциативных колец глубокие результаты получены А.В. Михалёвым, И.З. Голубчиком, Е.И. Зельмановым.

Несмотря на то, что задача определяемости абелевой группы без кручения своей группой автоморфизмов имеет отрицательное решение уже в классе групп без кручения ранга 1, остается актуальным вопрос об изучении тех подклассов групп, которые определяются своей группой автоморфизмов в более или менее широких классах абелевых групп.

Задача определяемости абелевой группы своей группой автоморфизмов связана с определяемостью группы кольцом эндоморфизмов. Очевидно, что если группа не определяется своим кольцом эндоморфизмов в некотором классе групп, то она не определяется и своей группой автоморфизмов в этом классе групп. Изучению классов групп, в которых выполняется теорема типа Бэра-Капланского, посвящены работы А.М. Себельдина [22–24, 27], С. Баззони и Ц. Метелли [1].

В статье А.М. Себельдина и Д.С. Чистякова [28] исследуется вопрос определяемости абелевой группы центром своего кольца эндоморфизмов. В этой работе получены необходимые условия определяемости, а также описаны некоторые классы групп, определяющихся центром своего кольца эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга. Было установлено, что делимые группы и жесткие группы определяются центром кольца эндоморфизмов в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга. Остается открытым следующий вопрос: исчерпывается ли класс групп, определяющихся центром кольца эндоморфизмов, указанными классами.

Одной из фундаментальных работ по теории абелевых групп является монография Л. Фукса в двух томах ([29], [30]). В ней ставится вопрос об изучении взаимосвязей абелевой группы и её группы эндоморфизмов (автоморфизмов). Вместе с тем Л. Фукс отмечает, что изучение групп автоморфизмов абелевых групп без кручения очень сложно, так как именно этот класс групп так богат различными аномалиями. Строение групп автоморфизмов удовлетворительно изучено лишь для групп ранга 1 и их прямых сумм и произведений. Но даже в этом хорошо известном классе групп остаются открытыми вопросы, связанные с влиянием группы автоморфизмов некоторой абелевой группы на её строение.

Цель диссертационной работы. Целью работы является исследование вопросов об изоморфизме групп автоморфизмов двух абелевых групп, об изоморфизме абелевых групп с изоморфными группами автоморфизмов для некоторых известных классов абелевых групп и изоморфизме абелевых групп с изоморфными центрами колец эндоморфизмов.

Научная новизна. Все основные сформулированные в работе результаты являются новыми и состоят в следующем:

- Получены необходимые и достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов абелевых групп некоторых известных классов. В частности, для класса вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 2 получены условия необходимые и достаточные для изоморфизма двух групп автоморфизмов.

- Исследован вопрос определяемости абелевой группы конечного ранга своей группой автоморфизмов в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения.

- Получен критерий определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения и в подклассе групп идемпотентного типа.

- Получены необходимые и достаточные условия определяемости вполне разложимых групп центрами их колец эндоморфизмов.

- Описаны классы групп, определяющихся центрами колец эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Результаты данной работы могут быть использованы при изучении групп автоморфизмов, групп эндоморфизмов абелевых групп и модулей, могут применяться при решении аналогичных задач в теории групп, колец, модулей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на XIII, XIV, XV Нижегородских сессиях молодых ученых (2008г, 2009г, 2010г); на алгебраических семинарах НГПУ, МПГУ, МГУ; на всероссийской конференции по математике и механике (г. Томск, 2008г, 2013г); на второй и четвертой всероссийской молодежной научно-инновационной школе «Математика и математическое моделирование» (г. Саров, 2008г, 2009г); на международной алгебраической конференции посвященной 70-летию А.В. Яковлева (2010г); на всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ (г. Москва 2011г); на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.В. Морозова, и молодежной школе-конференции Современные проблемы алгебры и математической логики (2011г); и содержатся в работах [31–47].

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 17 печатных работах. В том числе из них 5 статей в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций (см. [40, 43, 44, 46, 47]).

Личный вклад автора. В публикациях, выполненных совместно с научным руководителем А.М. Себельдиным, соискателю принадлежат доказательства всех утверждений, А.М. Себельдину принадлежат постановка задач, формулировки некоторых утверждений, участие в обсуждении результатов и общее руководство работой. В работах, выполненных совместно с А.Л. Силла и Т.С. Барри, автору принадлежат доказательства некоторых теорем и формулировка некоторых утверждений, включенных в диссертацию.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации 73 страницы. Диссертация содержит 47 наименований литературы.

Краткое содержание диссертации. Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе рассматривается вопрос о изоморфизме групп автоморфизмов двух вполне разложимых абелевых групп без кручения. В п. 1.1 представлены необходимые сведения о вполне разложимых абелевых группах без кручения, их группах гомоморфизмов, кольцах эндоморфизмов и группах автоморфизмов. Рассматриваются связи групп автоморфизмов однородных вполне разложимых абелевых групп без кручения с линейными группами над целостными кольцами. Приводятся используемые в последующем тексте результаты о изоморфизмах линейных групп над целостными кольцами. В п. 1.2 доказываются необходимые и достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов двух вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 2. В п. 1.3. условия изоморфизма групп автоморфизмов получены для групп из класса всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга. Получены достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов жестких групп.

Вторая глава посвящена изучению вопроса определяемости абелевой группы своей группой автоморфизмов в некоторых классах аблевых групп. В п. 2.1 полностью решается вопрос определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения конечного ранга своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. В п. 2.2 найдены достаточные условия определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения идемпотентного типа конечного ранга в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения идемпотентного типа. Кроме того, получены примеры, показывающие, что данные условия определяемости группы своей группой автоморфизмов не являются необходимыми.

В третьей главе рассматривается вопрос определяемости абелевой группы центром кольца эндоморфизмов. В п. 3.1 приведены известные результаты и необходимые обозначения. В п. 3.2 получены необходимые условия определяемости абелевой группы из класса вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга центром своего кольца эндоморфизмов. В п. 3.3 приводятся некоторые классы абелевых групп определяющихся центром своего кольца эндоморфизмов в упомянутом выше классе групп. Получен критерий определяемости группы центром своего кольца эндоморфизмов для ранга 4.

В Заключении формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1

Условия изоморфизма групп автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения

В первой главе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения, изучается строение группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы без кручения, исследуются необходимые и достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов двух вполне разложимых абелевых групп без кручения.

1.1. Обозначения и некоторые необходимые результаты

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия и результаты, связанные с группами без кручения. Подробно группы без кручения рассматриваются в [29, 30].

В этом параграфе A — абелева группа без кручения.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ — упорядоченная по возрастанию последовательность простых чисел. Тогда p-высотой $h_p(a)$ элемента $a \in A$ называется наибольшее целое число t, для которого в группе A разрешимо уравнение $p^t x = a$. Если для любого числа t уравнение $p^t x = a$ разрешимо в группе A, то будем полагать $h_p(a) = \infty$.

Характеристикой $\chi(a)$ элемента $a \in A$ назовем последовательность его p-высот:

$$\chi(a) = (h_{p_1}(a), \ldots, h_{p_k}(a), \ldots).$$

Две характеристики будем считать эквивалентными, если они отличаются конечным числом элементов, и эти элементы конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик будем называть типом. Группа без кручения, в которой все ненулевые элементы имеют тип τ, называется однородной группой типа τ. Будем записывать просто $\tau = (h_1, \dots, h_k, \dots)$, имея ввиду тип, содержащий указанную характеристику. Тип, содержащий характеристику из нулей и символов ∞, будем называть идемпотентным.

Если однородная группа A имеет тип τ, то множество тех простых чисел p_i, для которых $h_i = \infty$, обозначим $P_\infty(A)$. Группа A называется почти делимой, если $P(A) = \{p : pA \neq A\}$ — конечное (возможно пустое) множество простых чисел.

Всякая группа без кручения ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbb{Q}$ [30, с. 131]. Другими словами, группа без кручения ранга 1 является рациональной группой. Причем если группа A имеет тип $\tau(A) = (k_1, \dots, k_n, \dots)$, то A изоморфна подгруппе группы $(\mathbb{Q}, +)$, порожденной всеми элементами вида $p_n^{-l(n)}$, где p_n есть n-е простое число и $l(n) \leq k_n$ при всех n. Известно, что группы ранга 1 изоморфны тогда и только тогда, когда их типы равны [29].

Группа без кручения называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1. Пусть I — некоторое множество индексов и $A = \oplus_{i \in I} A_i (r(A_i) = 1)$ — вполне разложимая абелева группа без кручения. Множество различных типов прямых слагаемых ранга 1 группы A обозначим Ω_A. Тогда можем записать

$$A = \oplus_{\tau \in \Omega_A} A^\tau,$$

где A^τ — прямая сумма всех слагаемых ранга 1 группы A, которые имеют тип τ (обозначим их A_τ).

Пусть группа A имеет конечный ранг. Рассмотрим на множестве Ω_A

следующее отношение эквивалентности. Два типа $s, t \in \Omega_A$ будем считать эквивалентными, если существуют такие типы $r_1, \ldots, r_n \in \Omega_A$, что r_i и r_{i+1} сравнимы для всех $i = 1, \ldots, n-1$, где мы полагаем $r_1 = s$, $r_n = t$. Запишем разбиение множества Ω_A:

$$\Omega_A = \Omega_1(A) \cup, \ldots, \cup \Omega_k(A), \tag{1.1}$$

где классами эквивалентности $\Omega_j(A)$ для всех $j = 1, \ldots, k$ являются связные множества, а типы из различных классов эквивалентности несравнимы. Класс эквивалентности будем называть тривиальным, если это односвязное множество.

Обозначим класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения через $\mathbf{F}_{cd}$. Группу $A \in \mathbf{F}_{cd}$ будем называть блочно-жесткой, если типы из Ω_A попарно несравнимы, и жесткой, если кроме предыдущего условия выполняется равенство $|\Omega_A| = r(A)$.

Будем говорить, что группа из $\mathbf{F}_{cd}$ имеет идемпотентный тип, если каждое её прямое слагаемое ранга 1 имеет идемпотентный тип. Класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения идемпотентного типа обозначим $\mathbf{F}_{cdi}$.

Лемма 1.1 ([17, стр.123]) *Пусть $A = \oplus_{i \in I} A_i$ — прямое разложение группы A. Тогда кольцо $E(A)$ изоморфно кольцу всех сходящихся по столбцам $I \times I$ матриц*

$$[\alpha_{ji}]_{j,i \in I},$$

где $\alpha_{ji} \in Hom(A_i, A_j)$.

Лемма 1.2 (см., например, [17, стр.35]) *Пусть A и B — группы без кручения ранга 1. Группа гомоморфизмов $Hom(A, B)$ отлична от нуля тогда и только тогда, когда $\tau(A) \leq \tau(B)$. В этом случае группа $Hom(A, B)$ — группа без кручения ранга 1 типа $\tau(B) - \tau(A)$.*

Лемма 1.3 ([29, стр.213]) *Пусть A_i $(i \in I)$ и B — группы. Тогда*

$$\mathrm{Hom}(\oplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i, B).$$

Лемма 1.4 ([29, стр.214]) *Пусть B_i $(i \in I)$ и A — группы. Тогда*

$$\mathrm{Hom}(A, \prod_{i\in I} B_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Если A — рациональная группа и $\tau(A) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$, то группа $\mathrm{Aut}\, A$ изоморфна мультипликативной группе $\Gamma(A)$ рациональных чисел, числители и знаменатели которых делятся только на те простые числа p_n, для которых $k_n = \infty$. Таким образом, группа $\mathrm{Aut}\, A$ изоморфна дискретному прямому произведению группы $Z(2)$ и $|P_\infty(A)|$ бесконечных циклических групп [29, с. 294]:

$$\mathrm{Aut}\, A \cong Z(2) \times \prod_{|P_\infty(A)|} \mathbb{Z}.$$

Пусть $A = \oplus_n A_\tau (r(A_\tau) = 1)$ — однородная группа типа τ конечного ранга n. Тогда по лемме 1.1 получим, что $E(A) \cong M(n, E(A_\tau))$, где $M(n, E(A_\tau))$ — кольцо матриц над кольцом $E(A_\tau)$. Следовательно, группа $\mathrm{Aut}\, A$ изоморфна группе всех обратимых элементов кольца $M(n, E(A_\tau))$, т.е.

$$\mathrm{Aut}\, A \cong GL(n, E(A_\tau)). \tag{1.2}$$

Изоморфизмы линейных групп исследуются в работах [5, 11, 20]. В работах [5, 11] изоморфизмы линейных групп над коммутативными и ассоциативными кольцами изучаются в предположении, что 2 обратимый элемент кольца. В работе [20] О. О'Мира рассматривает линейные группы над произвольными областями целостности.

Лемма 1.5 ([20]) *Пусть n, m — натуральные числа ≥ 3, а R, S — произвольные области целостности. Следующие утверждения равносильны:*

1. $n = m, R \cong S$*;*

2. $GL(n, R) \cong GL(m, S)$*;*

3. $PGL(n, R) \cong PGL(m, S)$*.*

Лемма 1.6 ([9, стр.129]) *Пусть M, M' — свободные модули бесконечных рангов над кольцами R и S соответственно, и кольца R, S с $1/2$ не содержат центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1. Тогда группы $\mathrm{Aut}_R M$ и $\mathrm{Aut}_S M'$ изоморфны тогда и только тогда, когда $E_R(M) \cong E_S(M')$.*

Элемент e некоторой группы G называется инволюцией, если $e^2 = 1_G$.

Лемма 1.7 ([20, с. 72]) *Пусть характеристика поля F отлична от 2, V — векторное пространство над полем F. Если K — множество попарно перестановочных инволюций из $GL(n, F)$, то существует такая база пространства V, в которой*

$$\sigma \sim diag(\pm 1, \dots, \pm 1)$$

для всех $\sigma \in K$.

В частности $|K| \leq 2^n$.

Следствие 1. *Пусть $A \in \mathbf{F_{cd}}$ и K—множество попарно перестановочных инволюций из $\mathrm{Aut}\, A$. Тогда $|K| \leq 2^{r(A)}$.*

Доказательство: Так как A группа без кручения, то каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ продолжается единственным образом до автоморфизма делимой оболочки $D(A)$ группы A [29, с. 298], причем $r(A) = r(D(A))$. Таким образом, $\mathrm{Aut}\, A < \mathrm{Aut}\, D(A) \cong GL(r(A), \mathbb{Q})$. Предположим, что найдется множество $K < \mathrm{Aut}\, A$ попарно перестановочных инволюций, причем $|K| > 2^{r(A)}$. Тогда $K < GL(r(A), \mathbb{Q})$, что невозможно в силу леммы.

□

Рассмотрим группу $A \in \mathbf{F}_{cd}$ конечного ранга. Можем записать $A = \oplus_{i=1}^{n} A_i$. Тогда по лемме 1.1 кольцо $E(A)$ изоморфно кольцу матриц $M(A)$ с рациональными коэффициентами, причем при подходящей перестановке слагаемых группы A матрицы имеют блочно-верхне-треугольный вид. Несложно показать (см., например, [18]), что матрица $[b_{ji}] \in M(A)$ обратима тогда и только тогда, когда для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ определитель $det B_k$ обратим в кольце $E(A_k)$, где B_k — подматрица матрицы $[b_{ji}]$, образованная пересечением всех строк и столбцов j и i, для которых $A_j \cong A_i \cong A_k$.

Далее в работе мы будем отождествлять группу $\mathrm{Aut}\, A$ и группу соответствующих матриц везде, где это удобно.

Пусть $A \in \mathbf{F}_{cd}$, Ω_A — множество различных типов прямых слагаемых ранга 1 этой группы и задано разбиение (1.1). Так как типы из множеств $\Omega_i(A)$ и $\Omega_j(A)$ несравнимы для $i \neq j$, то

$$\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut} \oplus_{\tau \in \Omega_1(A)} A^{\tau} \times \mathrm{Aut} \oplus_{\tau \in \Omega_2(A)} A^{\tau} \times \cdots \times \mathrm{Aut} \oplus_{\tau \in \Omega_k(A)} A^{\tau}.$$

Будем говорить, что абелева группа A определяется её группой автоморфизмов в классе групп $\mathbf{X}$, если из $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$, где $B \in \mathbf{X}$, всегда следует, что $A \cong B$.

Аналогичное определение можно сформулировать для определяемости абелевой группы своим кольцом эндоморфизмов. Нам понадобится следующий результат об определяемости абелевых групп их кольцами эндоморфизмов.

Лемма 1.8 (теоремы 1 и 2, [21]) *Вполне разложимая группа без кручения A определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе $\mathbf{F}_{cd}$ тогда и только тогда, когда каждое её прямое слагаемое ранга 1 почти делимое.*

1.2. Условия изоморфизма групп автоморфизмов групп ранга 2

Изучение изоморфизмов групп автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения естественно начинать со случая однородных групп. Если $r(A) \geq 3$ и $r(B) \geq 3$, то условия изоморфизма групп автоморфизмов сразу следуют из леммы 1.5 и изоморфизма (1.2). Ограничение на n в лемме 1.5 не позволяет ответить на вопрос об изоморфизме групп автоморфизмов однородных вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 2. Этот случай необходимо рассмотреть отдельно. Изоморфизмы линейных групп $GL_2(R)$ исследуются в работах большого числа авторов и рассматриваются для различных классов колец R. В этих работах накладываются дополнительные условия на кольцо или линейную группу, что затрудняет непосредственное использование результатов об изоморфизмах в рамках нашего исследования. Ниже доказываются необходимые и достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов двух вполне разложимых абелевых групп без кручения, одна из которых имеет ранг 2. Если не оговорено обратное, то в этом и последующих параграфах все вполне разложимые абелевы группы без кручения будем считать 2-делимыми.

Будем называть вполне разложимую абелеву группу неоднородной, если она не является жесткой или однородной группой.

Лемма 1.9. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F_{cd}}, r(A) = 2$ *и* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. *Тогда группы* A *и* B *одновременно являются однородными, неоднородными или жесткими.*

Доказательство: Если $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, то $r(B) = 2$ (воспользуемся здесь леммой 1.11, которая будет доказана позднее). Пусть одна из групп, например группа A, однородная. Тогда $\operatorname{Aut} A$ и $\operatorname{Aut} B$ — некоммутативные группы. Следовательно, типы прямых слагаемых группы B сравнимы. Предположим, что типы прямых слагаемых не равны. Тогда $\operatorname{Aut} B$ — разрешимая группа ступени 2, что невозможно, так как второй коммутант группы $\operatorname{Aut} A$ не равен единице. Получили, что типы прямых слагаемых группы B равны, т.е. B — однородная.

Пусть теперь типы слагаемых ранга 1 группы A сравнимы, но не равны. Тогда $\operatorname{Aut} A$ — разрешимая группа ступени 2. Значит, такова и $\operatorname{Aut} B$. Это возможно только когда типы прямых слагаемых ранга 1 группы B сравнимы, но не равны.

Осталось рассмотреть случай, когда группа A жесткая. Так как $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ и $\operatorname{Aut} A$ — коммутативная группа, то $\operatorname{Aut} B$ тоже коммутативная. Следовательно, B — жесткая группа. $\square$

Если группа $A \in \mathbf{F_{cd}}$ — однородная ранга 2, $A = A_1 \oplus A_1$, то $\operatorname{Aut} A \cong GL(2, E(A_1))$. Непосредственными вычислениями проверяется, что все инволюции в $GL(2, E(A_1))$ можно условно разделить на три вида:

1. это диагональные инволюции,
2. инволюции вида $S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & -x \end{pmatrix}$ или $S = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$, где $x \in \{-1, 1\}, y \in E(A_1) \setminus \{0\}$,
3. инволюции вида $$S = \begin{pmatrix} x & y \\ (1-x^2)y^{-1} & -x \end{pmatrix} \text{ или } S = \begin{pmatrix} x & (1-x^2)y^{-1} \\ y & -x \end{pmatrix},$$ где y обратимый элемент в $E(A_1), x \in E(A_1) \setminus \{-1, 1\}$.

Лемма 1.10. *Пусть группы $A, B \in \mathbf{F_{cd}}$ однородные, r(A)=2 и* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. *Тогда существует такой изоморфизм ϕ групп* $\operatorname{Aut} A$ *и* $\operatorname{Aut} B$, *который сохраняет диагональный вид инволюций.*

Доказательство: Так как $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, то B — однородная и $r(B) = 2$ (леммы 1.9, 1.11). Пусть ϕ' — изоморфизм групп $\operatorname{Aut} A$ и $\operatorname{Aut} B$. $M_0 = [1, -1]$, $N_0 = [1, -1]$ — диагональные инволюции в этих группах. Покажем, что инволюция $X = \phi'^{-1}(N_0)$ сопряжена с M_0 в группе $\operatorname{Aut} A$. Действительно, пусть $X = Y_i (1 \leq i \leq 6)$, где Y_i одна из следующих матриц:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & -1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y_5 = \begin{pmatrix} -x & y \\ (1-x^2)y^{-1} & x \end{pmatrix}, Y_6 = \begin{pmatrix} -x & (1-x^2)y^{-1} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Тогда найдется такое $i (1 \leq i \leq 6)$, что $L_i^{-1} X L_i = M_0$, где L_i одна из следующих матриц:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & y \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, L_4 = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ (1+x)y^{-1} & (1-x)y^{-1} \end{pmatrix}, L_6 = \begin{pmatrix} (1-x)y^{-1} & (1+x)y^{-1} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $C_G(M)$ централизатор множества M в группе G. Положим $\phi = \phi'\psi$, где ψ — внутренний автоморфизм группы $\operatorname{Aut} A$, порожденный подходящим L_i, и $\psi(M_0) = X$. Тогда $\phi(M_0) = N_0$ и

$$\phi(C_{\operatorname{Aut} A}(M_0)) = C_{\operatorname{Aut} B}(N_0).$$

Так как рассматриваемые централизаторы состоят из матриц диагонального вида, то это доказывает утверждение леммы.

$\square$

Заметим, что в доказательстве леммы не использовалась 2-делимость группы B.

Теорема 1.1. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$, $r(A) = 2$ *и группа* A *— однородная. Группы* $\operatorname{Aut} A$ *и* $\operatorname{Aut} B$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $E(A) \cong E(B)$.

Доказательство: Пусть $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Если группа A однородная, то группа B тоже однородная по лемме 1.9. Покажем, что в этом случае $E(A) \cong E(B)$. Имеем $B = B_1 \oplus B_1$ и $\operatorname{Aut} B \cong GL(2, E(B_1))$. Заметим, что $E(B_1)$ — область целостности. Это позволяет нам воспользоваться техникой работы [16] для доказательства данной теоремы. В соответствии с леммой 1.10 можем считать, что $\phi(M_0) = N_0$. Значит, изоморфизм ϕ сохраняет диагональный вид матриц. Пусть

$$T(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы такого вида будем называть трансвекциями [20]. Покажем, что существует изоморфизм ϕ_1, при котором $\phi_1(T(h)) = \pm T(h^*)$. Заметим, что для $T = T(h)$ и диагональной матрицы D имеют место следующие равенства:

$$(TM_0)^2 = I_2; \tag{1.3}$$

$$TDTD^{-1} = DTD^{-1}T. \tag{1.4}$$

Так как $\phi(M_0) = N_0$, то для $U = \phi(T)$:

$$(UN_0)^2 = I_2.$$

Пусть

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x_1x_2 = x_2x_4,$$

$$x_3x_1 = x_4x_3,$$

$$x_1^2 - x_2x_3 = x_4^2 - x_3x_2 = 1.$$

Так как $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, то

$$Z_2 \times \prod_{n_A} \mathbb{Z} \cong Z(\operatorname{Aut} A) \cong Z(\operatorname{Aut} B) \cong Z_2 \times \prod_{n_B} \mathbb{Z}.$$

Поскольку $n_B = n_A > 1$, то $pB = B$ для некоторого простого p. Следовательно, найдется $z \in \operatorname{Aut} B_1$ такое, что $z^2 \neq 1$. Тогда из уравнения (1.4) для $D = [1, z]$ получаем, что $x_2x_3 = 0$. Если $x_2 \neq 0, x_3 = 0$, то $x_1 = x_4 = \pm 1$ и

$$U = \pm T(h^*).$$

Аналогично, если $x_3 \neq 0, x_2 = 0$, то

$$U = \pm P(h^*).$$

Если $x_3 = x_2 = 0$, то U — диагональная матрица, что невозможно.

Пусть $\phi(T(h)) = T(h^*)$ для некоторого $0 \neq h \in E(A_1)$. Тогда $\phi(T(s)) = \pm T(s^*)$ для любого $0 \neq s \in E(A_1)$. Предположим противное: $\phi(T(s)) = \pm P(s^*)$. Подействуем отображением ϕ на обе части равенства

$$T(h)T(s) = T(s)T(h).$$

Получим, что

$$T(h^*)P(s^*) = P(s^*)T(h^*).$$

Следовательно, $h^*s^* = 0$, а значит, одна из матриц $\phi(T(h))$, $\phi(T(s))$ — диагональная. Тогда $h = 0$ или $s = 0$, что невозможно.

Таким образом,

$$\phi(T(h)) = \pm T(h^*)$$

и

$$\phi_1 = \phi.$$

Если же $\phi(T(h)) = \pm P(h^*)$, то в качестве ϕ_1 возьмем композицию ϕ с внутренним автоморфизмом группы $\mathrm{Aut}\, B$, порожденным элементом $L \in \mathrm{Aut}\, B$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\phi_1(T(h)) = \pm T(h^*)$. Таким образом, задано некоторое отображение

$$\zeta : h \to h^*.$$

Итак, можно считать $\phi(T(x)) = \chi(x)T(\zeta(x))$, где $\zeta(x)$ — отображение $E(A_1)$ в $E(B_1)$, $\chi(x)$ — отображение $E(A_1)$ в $\{\pm 1\}$. Так как

$$T(x)T(y) = T(x+y),$$

то

$$\chi(x+y)T(\zeta(x+y)) = \chi(x)\chi(y)T(\zeta(x))T(\zeta(y)) = \chi(x)\chi(y)T(\zeta(x)+\zeta(y)).$$

Отсюда следует, что

$$\chi(x)\chi(y) = \chi(x+y),$$

$$T(\zeta(x+y)) = T(\zeta(x)+\zeta(y)),$$

а значит,

$$\zeta(x+y) = \zeta(x)+\zeta(y).$$

Так как $\zeta(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то $\zeta(x)$ — инъективное отображение. Поскольку $\zeta(x)$ — мономорфизм из группы $\mathrm{End}\, A_1$ в группу $\mathrm{End}\, B_1$, то $\tau(\mathrm{End}\, A_1) \leq \tau(\mathrm{End}\, B_1)$. Тогда из 2-делимости группы A_1 следует, что группа B_1 тоже 2-делимая.

Повторяя те же рассуждения для ϕ_1^{-1}, получим, что ζ — изоморфизм групп $\operatorname{End} A_1, \operatorname{End} B_1$. Так как A_1, B_1 — группы без кручения ранга 1, то $E(A_1) \cong E(B_1)$ и

$$E(A) \cong E(B).$$

Достаточность очевидна. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$, $r(A) = 2$, $A = A_1 \oplus A_2$ *и* $\tau(A_1) > \tau(A_2)$. *Группы* $\operatorname{Aut} A$ *и* $\operatorname{Aut} B$ *изоморфны тогда и только тогда, когда:*

1. $r(B) = 2, B = B_1 \oplus B_2$, *где* $\tau(B_2) < \tau(B_1)$;
2. $\operatorname{Aut} A_2 \cong \operatorname{Aut} B_2$;
3. $\operatorname{Hom}(A_2, A_1) \cong \operatorname{Hom}(B_2, B_1)$.

Доказательство: По условию теоремы группа A — неоднородная. Значит, типы прямых слагаемых группы B сравнимы (лемма 1.9). Для определенности будем считать, что $\tau(B_1) > \tau(B_2)$.

Покажем, что изоморфизм ϕ групп $\operatorname{Aut} A$ и $\operatorname{Aut} B$ сохраняет трансвекции с точностью до знака. Данное утверждение справедливо, если образ M_0 является диагональной инволюцией. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

Пусть теперь

$$\phi(M_0) = M_1 = \begin{pmatrix} -x & y \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

где $x \in \{-1, 1\}$;

$$\phi(T) = U = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (1.3) получим:

$$(UM_1)^2 = I_2,$$

$$a^2 = d^2 = 1.$$

Тогда $(ay - b)(a - d) = 0$ или $(ay + b)(d - a) = 0$. Если $a = -d$, то U — инволюция, что невозможно, так как T не инволюция. Следовательно, $a = d$ и либо U, либо $-U$ — трансвекция. Поскольку ϕ сохраняет трансвекции с точностью до знака, то аналогично доказательству теоремы 1.1 получаем, что

$$\mathrm{Hom}(A_2, A_1) \cong \mathrm{Hom}(B_2, B_1).$$

Осталось показать, что $\mathrm{Aut}\, A_2 \cong \mathrm{Aut}\, B_2$. Изоморфизм следует из того, что $\mathrm{Aut}\, A_2 \cong Z(\mathrm{Aut}\, A)$ и $Z(\mathrm{Aut}\, A) \cong Z(\mathrm{Aut}\, B)$.

Достаточность. Покажем, что группы, удовлетворяющие условиям теоремы, имеют изоморфные группы автоморфизмов. Пусть $X \in \mathrm{Aut}\, A$ и

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $\phi : \mathrm{Aut}\, A \to \mathrm{Aut}\, B$, которое задается следующим правилом:

$$\phi(X) = \psi(d)d^{-1}X,$$

где ψ — изоморфизм $\Gamma(A_2)$ и $\Gamma(B_2)$. Из условия 3 теоремы следует, что

$$P_\infty(B_1) = P_\infty(A_1).$$

Из $\tau(B_2) < \tau(B_1)$ получаем, что $P_\infty(B_2) \subset P_\infty(A_1)$. Следовательно,

$$\Gamma(B_2) < \Gamma(A_1).$$

Тогда $\psi(d)d^{-1} \in \Gamma(A_1)$. Очевидно, что ϕ биекция и $\phi(NM) = \phi(N)\phi(M)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$. $\square$

Заметим, что в доказательстве предыдущей теоремы не использовалась 2-делимость вполне разложимых групп.

Теорема 1.3. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$, $r(A) = 2$, $A = A_1 \oplus A_2$ *— жесткая группа. Группы* $\operatorname{Aut} A$ *и* $\operatorname{Aut} B$ *изоморфны тогда и только тогда, когда:*

1. $r(B) = 2, B = B_1 \oplus B_2$;

2. B *— жесткая группа;*

3. $|P_\infty(A_1)| + |P_\infty(A_2)| = |P_\infty(B_1)| + |P_\infty(B_2)|$.

Доказательство: Из лемм 1.11 и 1.9 получаем, что B — жесткая и $r(B) = 2$. Из изоморфизма $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ следует:

$$\operatorname{Aut} A_1 \times \operatorname{Aut} A_2 \cong \operatorname{Aut} B_1 \times \operatorname{Aut} B_2,$$

$$\Gamma(A_1) \times \Gamma(A_2) \cong \Gamma(B_1) \times \Gamma(B_2),$$

$$Z(2) \times \prod_{|P_\infty(A_1)|} \mathbb{Z} \times Z(2) \times \prod_{|P_\infty(A_2)|} \mathbb{Z} \cong Z(2) \times \prod_{|P_\infty(B_1)|} \mathbb{Z} \times Z(2) \times \prod_{|P_\infty(B_2)|} \mathbb{Z},$$

$$\prod_{|P_\infty(A_1)|+|P_\infty(A_2)|} \mathbb{Z} \cong \prod_{|P_\infty(B_1)|+|P_\infty(B_2)|} \mathbb{Z},$$

$$|P_\infty(A_1)| + |P_\infty(A_2)| = |P_\infty(B_1)| + |P_\infty(B_2)|.$$

Достаточность. Так как A, B — жесткие группы и $r(A) = r(B) = 2$, то

$$\operatorname{Aut} A \cong Z(2) \times \prod_{|P_\infty(A_1)|} \mathbb{Z} \times Z(2) \times \prod_{|P_\infty(A_2)|} \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Aut} B \cong Z(2) \times \prod_{|P_\infty(B_1)|} \mathbb{Z} \times Z(2) \times \prod_{|P_\infty(B_2)|} \mathbb{Z}.$$

Из приведенных изоморфизмов и условия 3 теоремы следует, что $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$.

$\square$

1.3. Изоморфизм групп автоморфизмов

Лемма 1.11. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$ *и* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$*. Тогда* $r(A) = r(B)$.

Доказательство: Пусть сначала группа $A \in \mathbf{F}_{cd}$ имеет конечный ранг и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. По следствию из леммы 1.7 известно, что всякое множество коммутирующих инволюций из $\operatorname{Aut} A$ содержит не более $2^{r(A)}$ инволюций. Рассмотрим множество диагональных инволюций $K < \operatorname{Aut} A, |K| = 2^{r(A)}$. Так как образ инволюции при изоморфизме есть инволюция, то $\operatorname{Aut} B$ содержит множество из $2^{r(A)}$ коммутирующих инволюций, а значит, $r(A) \leq r(B)$. Рассматривая множество диагональных инволюций в группе $\operatorname{Aut} B$, получим, что $r(A) \geq r(B)$. Следовательно, $r(A) = r(B)$.

Пусть теперь группы A и B имеют бесконечный ранг. Поскольку группа $\operatorname{Aut} A$ содержит множество диагональных инволюций K, то

$$|\operatorname{Aut} A| \geq |K| = 2^{r(A)}.$$

Известно, что $|E(A)| = 2^{r(A)}$, где ранг $r(A)$ бесконечен [21]. Тогда

$$2^{r(A)} = |E(A)| \geq |\operatorname{Aut} A| \geq 2^{r(A)}.$$

Таким образом, $|\operatorname{Aut} A| = 2^{r(A)}$ и $2^{r(A)} = |\operatorname{Aut} A| = |\operatorname{Aut} B| = 2^{r(B)}$. Принимая обобщенную континуум-гипотезу, получим, что $r(A) = r(B)$. □

Далее будем рассматривать только группы конечного ранга из $\mathbf{F}_{cd}$.

Лемма 1.12. *Пусть* $A \in \mathbf{F}_{cd}$ *и* $A = A_1 \oplus A_2$ *— такое разложение группы* A*, что* $\operatorname{Hom}(A_1, A_2) = 0$*. Тогда для любого множества* $K \subseteq \operatorname{Aut} A$ *из* $2^{r(A)}$ *коммутирующих инволюций найдется подходящий автоморфизм* $\gamma \in \operatorname{Aut} A$ *такой, что*

$$\gamma K \gamma^{-1} \subset \operatorname{Aut} A_1 \times \operatorname{Aut} A_2.$$

Доказательство: Если $\mathrm{Hom}(A_2, A_1) = 0$, то утверждение леммы очевидно. Далее будем считать, что $\mathrm{Hom}(A_2, A_1) \neq 0$. Обозначим $n = r(A)$, $n_1 = r(A_1)$ и $n_2 = r(A_2)$. Пусть K — множество коммутирующих инволюций и $|K| = 2^n$. Так как $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) = 0$, то группа $\mathrm{Aut}\, A$ изоморфна группе блочно-верхне-треугольных матриц. Тогда всякая инволюция $\alpha \in K$ имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} C & H \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где $C \in \mathrm{Aut}\, A_1, D \in \mathrm{Aut}\, A_2, C^2 = I_{n_1}, D^2 = I_{n_2}$ и $CH + HD = 0$. Всякой инволюции $\alpha \in K$ можно сопоставить инволюцию

$$\alpha' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Покажем, что всякой инволюции α соответствует единственная инволюция вида α'. Предположим, что найдутся такие инволюции $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq \beta$, для которых $\alpha' = \beta'$. Пусть

$$\beta = \begin{pmatrix} C & H_1 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Так как $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha^2 = \beta^2 = I_n$, то

$$CH_1 + HD = CH + H_1D,$$

$$CH_1 + H_1D = CH + HD = 0.$$

Из этих уравнений получаем, что $H = H_1$ и $\alpha = \beta$. Противоречие. Таким образом, множеству K соответствует множество K' коммутирующих инволюций и $|K'| = 2^n$.

Рассмотрим инволюцию $\delta = [-I_{n_1}, I_{n_2}]$. Имеем $\delta\alpha' = \alpha'\delta$ для любой инволюции $\alpha' \in K'$. Получаем, что $K' \cup \{\delta\}$ — множество коммутирующих инволюций. Так как для любого множества коммутирующих инволюций $J \subset \operatorname{Aut} A$, $|J| \leq 2^n$, то $\delta \in K'$. Отсюда следует, что множество K содержит инволюцию вида

$$\lambda = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & H \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим

$$\gamma = \begin{pmatrix} I_{n_1} & -\frac{1}{2}H \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Так как $2A = A$, то $-\frac{1}{2}H \in \operatorname{Hom}(A_2, A_1)$. Следовательно, $\gamma \in \operatorname{Aut} A$. Получаем, что $\gamma\lambda\gamma^{-1} = \delta$. Тогда $\gamma K \gamma^{-1} \subset C_{\operatorname{Aut} A}(\delta)$. Поскольку $C_{\operatorname{Aut} A}(\delta) = \operatorname{Aut} A_1 \times \operatorname{Aut} A_2$, то $\gamma K \gamma^{-1} \subset \operatorname{Aut} A_1 \times \operatorname{Aut} A_2$. □

Теорема 1.4. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$ *и* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. *Тогда*

$$\prod_{\tau \in \Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \overset{\phi}{\cong} \prod_{\tau \in \Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

Доказательство: Если группы A и B однородные или блочно-жесткие, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть одна из групп, например B, имеет сравнимые и не равные типы. Тогда $\operatorname{Hom}(B_1, B_2) = 0$ для некоторого разложения $B = B_1 \oplus B_2$. Так как $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, то по лемме 1.11 получим, что $r(A) = r(B) = n$. Обозначим $n_1 = r(B_1)$, $n_2 = r(B_2)$. Рассмотрим в группе $\operatorname{Aut} A$ множество диагональных инволюций K, $|K| = 2^n$. Обозначим $K^* = \phi(K)$. Поскольку изоморфизм ϕ сохраняет коммутирующие инволюции, то K^* — множество из 2^n коммутирующих инволюций в группе $\operatorname{Aut} B$.

Покажем, что существует изоморфизм ϕ' такой, что

$$\phi'(K) \subset \prod_{\tau \in \Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau, \tag{1.5}$$

где $\phi'(x) = \gamma\phi(x)\gamma^{-1}$ для подходящего автоморфизма $\gamma \in \mathrm{Aut}\, B$. Если $|\Omega_B| = 2$, то существование такого изоморфизма следует из леммы 1.12. Предположим, что для всех Ω_B таких, что $|\Omega_B| < t$, указанный изоморфизм существует. Пусть теперь $|\Omega_B| = t$. Если $\mathrm{Hom}(B_2, B_1) = 0$, то $\mathrm{Aut}\, B = \mathrm{Aut}\, B_1 \times \mathrm{Aut}\, B_2$ и $K^* \subset \mathrm{Aut}\, B_1 \times \mathrm{Aut}\, B_2$. Можем записать $K^* = K_1 \times K_2$, где K_1, K_2 — множества коммутирующих инволюций в группах $\mathrm{Aut}\, B_1$ и $\mathrm{Aut}\, B_2$ соответственно. Понятно, что $|K_1| = 2^{n_1}$, $|K_2| = 2^{n_2}$. Так как $|\Omega_{B_1}| < t$ и $|\Omega_{B_2}| < t$, то по предположению получим, что существуют автоморфизмы $\gamma_1 \in \mathrm{Aut}\, B_1, \gamma_2 \in \mathrm{Aut}\, B_2$ такие, что

$$\phi : K \to \gamma_1 K_1 \gamma_1^{-1} \times \gamma_2 K_2 \gamma_2^{-1} \subset \prod_{\tau \in \Omega_{B_1}} \mathrm{Aut}\, B^\tau \times \prod_{\tau \in \Omega_{B_2}} \mathrm{Aut}\, B^\tau.$$

Отождествим автоморфизмы γ_1 и γ_2 с соответствующими автоморфизмами группы $\mathrm{Aut}\, B$. Положив $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, получим существование изоморфизма (1.5).

Пусть теперь $\mathrm{Hom}(B_2, B_1) \neq 0$. Тогда $\mathrm{Aut}\, B$ изоморфна группе матриц указанной в лемме 1.12. Следовательно, существует $\gamma_3 \in \mathrm{Aut}\, B$ такой, что $\gamma_3 K^* \gamma_3^{-1} \subset \mathrm{Aut}\, B_1 \times \mathrm{Aut}\, B_2$. Опять можем записать $\gamma_3 K^* \gamma_1^{-1} = K_1 \times K_2$ и, по доказанному выше, получим существование изоморфизма (1.5).

Итак, заменяя изоморфизм ϕ на изоморфизм ϕ', можем считать, что

$$\phi : K \to K^* \subset \prod_{\tau \in \Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^\tau. \tag{1.6}$$

Рассмотрим множества инволюций $L \subset K, L^* \subset K^*$ таких, что

$$L \subset Z(\prod_{\tau \in \Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau),$$

$$L^* \subset Z(\prod_{\tau \in \Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^\tau).$$

Покажем, что $\phi(L) = L^*$. Очевидно, что любая инволюция из L не сопряжена ни с одной отличной от нее инволюцией из K, и всякая инволюция из

$K \setminus L$ сопряжена с некоторой инволюцией из K. С другой стороны, всякое сопряжение инволюции α из L^* либо сохраняет инволюцию $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$, либо $\beta\alpha\beta^{-1} \not\subset \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau$. Значит, $L^* \subset \phi(L)$. Отсюда следует, что $|L^*| \leq |L|$. Поменяв в рассуждениях группы A и B, получим $|L^*| \geq |L|$. Следовательно, $|L^*| = |L|$ и

$$\phi(L) = L^*.$$

Рассматривая централизаторы этих множеств инволюций, получим

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \cong C_{\operatorname{Aut} A}(L) \cong C_{\operatorname{Aut} B}(L^*) \cong \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

□

Теорема 1.5. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$ *и* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. *Тогда*

1. $|\Omega_A| = |\Omega_B|$;
2. *Числа компонент связности множеств* Ω_A *и* Ω_B *равны;*
3. *Для любых* $\tau, \tau' \in \Omega_A (\tau < \tau')$ *найдутся* $\sigma, \sigma' \in \Omega_B (\sigma < \sigma')$ *такие, что* $\operatorname{Hom}(A^\tau, A^{\tau'}) \cong \operatorname{Hom}(B^\sigma, B^{\sigma'})$;
4. *Если* $r(A^\tau) > 1$ *для некоторого* $\tau \in \Omega_A$, *то существует тип* $\sigma \in \Omega_B$ *такой, что*
$$E(A^\tau) \cong E(B^\sigma).$$

Доказательство:

1. Поскольку из изоморфизма $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ следует изоморфизм

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \cong \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau, \tag{1.7}$$

то центры этих подгрупп также изоморфны. Следовательно, число центральных инволюций должно совпадать. Так как в группе $\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau$

ровно $2^{|\Omega_A|}$ центральных инволюций и (1.7), то

$$2^{|\Omega_A|} = 2^{|\Omega_B|}.$$

Таким образом, $|\Omega_A| = |\Omega_B|$.

2. Рассмотрим центральные инволюции групп $\mathrm{Aut}\, A$ и $\mathrm{Aut}\, B$. Проводя доказательство аналогично пункту 1 теоремы, получим, что число компонент связности множества Ω_A совпадает с числом компонент связности множества Ω_B.

3. Из пункта 1 теоремы следует, что $|\Omega_A| = |\Omega_B| = t$. Пусть $\tau, \tau' \in \Omega_A$, и $\tau < \tau'$. Тогда $\mathrm{Hom}(A^{\tau}, A^{\tau'}) \neq 0$. Отождествляя группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, A$ с группой соответствующих матриц, рассмотрим в $\mathrm{Aut}\, A$ подгруппу R_1, которая при подходящей перестановке слагаемых группы A состоит из матриц следующего вида:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{tt} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} \in \mathrm{Aut}\, A^{\tau'}$,$a_{22} \in \mathrm{Aut}\, A^{\tau}$, $a_{12} \in \mathrm{Hom}(A^{\tau}, A^{\tau'})$.

В теореме 1.4 показано, что из изоморфизма $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$ следует существование изоморфизма $\phi : L \to L^*$, где L и L^* — центральные инволюции групп $\prod_{\tau \in \Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^{\tau}$ и $\prod_{\tau \in \Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^{\tau}$ соответственно. Очевидно, что множество инволюций $\bar{L}$ из $Z(R_1)$ является подгруппой L. Рассмотрим $\phi(\bar{L}) \subset L^*$. Так как $R_1 = C_{\mathrm{Aut}\, A}(\bar{L})$, то $\phi(R_1) = \phi(C_{\mathrm{Aut}\, A}(\bar{L})) = C_{\mathrm{Aut}\, A}(\phi(\bar{L}))$. Центр группы R_1 содержит 2^{t-1} инволюций. Значит, это верно и для $R_2 = C_{\mathrm{Aut}\, B}(\phi(\bar{L}))$. Централизатор любой подгруппы из L^* содержит в качестве подгруппы группу $\prod_{\tau \in \Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^{\tau}$. Более того, так как $Z(R_2)$ содержит 2^{t-1}

инволюций, то для некоторых $\sigma, \sigma' \in \Omega_B (\sigma < \sigma')$ матрица $\beta \in R_2$ при подходящей перестановке слагаемых группы B имеет вид:

$$\beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{tt} \end{pmatrix},$$

где $b_{11} \in \operatorname{Aut} B^{\sigma'}$,$b_{22} \in \operatorname{Aut} B^{\sigma}$, $b_{12} \in \operatorname{Hom}(B^{\sigma}, B^{\sigma'})$ и для любых $i \neq 1, j \neq 2, i \neq j, b_{ij} = 0$.

Рассмотрим $\lambda \in L$,

$$\lambda = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{n_t} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\lambda \notin Z(R_1)$. Тогда

$$\phi(\lambda) = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm I_{n_t} \end{pmatrix},$$

или

$$\phi(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm I_{n_t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим группы $T_1 = \{\gamma\lambda\gamma^{-1}\lambda : \gamma \in R_1\}, T_2 = \{\phi(\gamma)\phi(\lambda)\phi(\gamma^{-1})\phi(\lambda) : \phi(\gamma) \in R_2\}$. Очевидно, что $T_1 \cong T_2$. Покажем, что $T_1 \cong \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Обозначим $H(x)$ матрицу следующего вида:

$$H(x) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{n_t} \end{pmatrix},$$

где $x \in \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Все такие матрицы соберем в группу H. Очевидно, что $H \cong \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$ и $T_1 < H$. Покажем, что $H \subset T_1$. Пусть $x \in \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Тогда $H(x) = H(x/2)\lambda H(-x/2)\lambda$. Следовательно, $H(x) \in T_1$ и $H \subset T_1$. Получили, что $T_1 \cong \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Аналогично получаем, что $T_2 \cong \mathrm{Hom}(B^\sigma, B^{\sigma'})$.

4. Обозначим $K_{\tau,A}$ — множество $2^{r(A)-r(A^\tau)+1}$ коммутирующих инволюций, каждая из которых имеет центральную компоненту, соответствующую типу τ, т. е.

$$K_{\tau,A} = \{\beta : \beta = [\beta_1, \dots, \beta_{i(\tau)}, \dots, \beta_k], \beta_{i(\tau)} \in Z(\mathrm{Aut}\, A^\tau)\}.$$

Определим

$$\overline{K}_{\tau,A} = \{\beta : \beta \in \mathrm{Aut}\, A^\tau, \beta^2 = 1\}$$

— множество коммутирующих инволюций. Тогда можем записать

$$K_{\tau,A} = \pm I_{n(\tau)} \times \prod_{\sigma\in\Omega_A, \sigma\neq\tau} \overline{K}_{\sigma,A}.$$

По условию теоремы $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$. Следовательно,

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau \overset{\phi}{\cong} \prod_{\tau\in\Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^\tau.$$

Рассмотрим множество K диагональных инволюций в группе $\operatorname{Aut} A$. Очевидно, $|K| = 2^{r(A)}$ и

$$K = \prod_{\tau \in \Omega_A} \overline{K}_{\tau,A}.$$

Поскольку ранги групп A и B равны и $|\Omega_A| = |\Omega_B|$, то

$$\phi(K) = \prod_{\tau \in \Omega_B} \overline{K}_{\tau,B}.$$

Легко видеть, что для любого типа $\tau \in \Omega_B$, $|\overline{K}_{\tau,B}| = 2^{r(B^\tau)}$. Так как $\operatorname{Aut} B^\tau < GL(r(B^\tau), \mathbb{Q})$, то существует матрица $g_\tau \in GL(r(B^\tau), \mathbb{Q})$ такая, что $g_\tau \overline{K}_{\tau,B} g_\tau^{-1}$ — множество диагональных инволюций. Получим следующий изоморфизм:

$$\prod_{\tau \in \Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \overset{\psi}{\cong} \prod_{\tau \in \Omega_B} g_\tau \operatorname{Aut} B^\tau g_\tau^{-1},$$

причем ψ сохраняет диагональный вид инволюции.

На множестве K действует группа перестановок $S = \prod_{\tau \in \Omega_A} S_{n(\tau)}$, где $S_{n(\tau)}$ — симметрическая группа степени $n(\tau)$, действующая на множестве диагональных инволюций из $\operatorname{Aut} A^\tau$.

Пусть теперь $\tau' \in \Omega_A$, $r(A^{\tau'}) > 1$ и $K_{\tau',A} \subset K$ покажем, что

$$\phi : K_{\tau',A} \to K_{\sigma,B}.$$

На множестве $K_{\tau',A}$ действует группа перестановок S, причем $S^* < S (S^* \cong S_{n(\tau')})$ действует на $K_{\tau',A}$ тождественно, т.е. для любого $\alpha \in K_{\tau',A}$ и любого $s \in S^*, s\alpha s^{-1} = \alpha$. На $\psi(K_{\tau',A})$ тождественно действует S^*, значит, для некоторого множества $Y_{\tau'} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и каждой диагональной инволюции $[a_{ij}] \in \psi(K_{\tau',A})$ имеем $a_{xx} = a_{yy} = \pm 1$, $\forall x \neq y$, где $x, y \in Y_{\tau'}, |Y_{\tau'}| = n(\tau')$. Так как на элементах $a_{yy} (y \in Y)$ действует группа S^*, то они находятся в одном блоке. Пусть эти элементы находятся в блоке соответствующем типу $\sigma \in \Omega_B$. Тогда на $\psi(K_{\tau',A})$ действует группа перестановок изоморфная

$$S_1 = \prod_{\tau \in \Omega_B \setminus \{\sigma\}} S_{n(\tau)} \times S_{n(\tau')} \times S_{n(\sigma)-n(\tau')}.$$

Так как $S_1 \cong S$ и ранги групп равны, то $n(\sigma) = n(\tau')$. Получили, что

$$\psi(K_{\tau',A}) = \pm I_{n(\sigma)} \times \prod_{\tau \in \Omega_B, \tau \neq \sigma} g_\tau \overline{K}_{\tau,A} g_\tau^{-1}.$$

Отсюда

$$\phi : K_{\tau',A} \to K_{\sigma,B}$$

и $r(A^{\tau'}) = r(B^\sigma)$.

Пусть сначала $\tau' \in \Omega_A$, $r(A^{\tau'}) > 2$. Если $K_{\tau',A} \subset K$, то $\phi : K_{\tau',A} \to K_{\sigma,B}$. Следовательно,

$$\phi : C_{\mathrm{Aut}\, A}(K_{\tau',A}) \to C_{\mathrm{Aut}\, B}(K_{\sigma,B}).$$

Далее вместо $C_{\mathrm{Aut}\, A}(K_{\tau',A})$ будем записывать $C(K_{\tau',A})$. Имеем

$$C(K_{\tau',A}) \cong AutA^{\tau'} \times \prod_{\tau \in \Omega_A \setminus \{\tau'\}} P_\tau,$$

$$C(K_{\sigma,B}) \cong AutB^{\sigma} \times \prod_{\tau \in \Omega_B \setminus \{\sigma\}} R_\tau,$$

где P_τ — подгруппа диагональных матриц из $AutA^\tau$, а R_τ — некоторая коммутативная подгруппа $AutB^\tau$ ($g_\tau R_\tau g_\tau^{-1}$ — подгруппа диагональных матриц в $g_\tau AutB^\tau g_\tau^{-1}$). Таким образом,

$$C(K_{\tau',A}) \cong C(K_{\sigma,B}),$$

$$C(K_{\tau',A})/Z(C(K_{\tau',A})) \cong C(K_{\sigma,B})/Z(C(K_{\sigma,B})),$$

$$AutA^{\tau'}/Z(AutA^{\tau'}) \cong AutB^{\sigma}/Z(AutB^{\sigma}),$$

$$PGL(n(\tau'), E(A_{\tau'})) \cong PGL(n(\sigma), E(B_\sigma)).$$

Если $r(A^{\tau'}) > 2$, то $E(A_{\tau'}) \cong E(B_\sigma)$ и $n(\tau') = n(\sigma)$ (лемма 1.5). Следовательно,

$$E(A^\tau) \cong E(B^\sigma).$$

Пусть теперь $r(A^{\tau'}) = 2$ и $C(K_{\tau',A}) \cong C(K_{\sigma,B})$. Рассмотрим

$$\gamma(h) \in C(K_{\tau',A}), \gamma(h) = [\gamma_1, \ldots, \gamma_{j(\tau')}, \ldots, \gamma_k],$$

$\forall i \neq j, \gamma_i = I_{n(i)}, \gamma_{j(\tau')} = T(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\delta \in C(K_{\tau',A}), \delta = [\delta_1, \ldots, \delta_{j(\tau')}, \ldots, \delta_k],$$

$\forall i \neq j, \delta_i = I_{n(i)}, \delta_{j(\tau')} = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Изоморфизм сохраняет инволюции, значит, $\phi(\delta) = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j(\sigma)}, \ldots, \varepsilon_k]$, где $\varepsilon_i^2 = I_{n(i)}$. Так как $\gamma(h)\delta \neq \delta\gamma(h)$, то $\varepsilon_{j(\sigma)} \notin Z(\operatorname{Aut} B^\sigma)$. В лемме 1.10 показано, что всякую нецентральную инволюцию в группе $\operatorname{Aut} B^\sigma$ можно привести подходящим внутренним автоморфизмом к инволюции вида M_0. Таким образом, можем считать, что

$$\phi(\delta) = [\varepsilon_1, \ldots, M_0, \ldots, \varepsilon_k].$$

При таком изоморфизме диагональные матрицы из $\operatorname{Aut} A^{\tau'}$ переходят в диагональные $\operatorname{Aut} B^\sigma$.

Имеют место следующие уравнения:

$$(\gamma(h)\delta)^2 = I,$$

$$\gamma(h)\mu\gamma(h)\mu^{-1} = \mu\gamma(h)\mu^{-1}\gamma(h),$$

где μ некоторая диагональная матрица. Так $2A = A$, то для любого $h \in E^+(A_{\tau'})$, $h/2 \in E^+(A_{\tau'})$ и $\gamma(h) = \gamma(h/2)^2$. Пусть

$$\phi(\gamma(h/2)) = \nu = [\nu_1, \ldots, \nu_{j(\sigma)}, \ldots, \nu_k].$$

Тогда из $(\nu\phi(\delta))^2 = I$ получим, что $\forall i \neq j, \nu_i^2 = I_{n(i)}$. Следовательно,

$$\phi(\gamma(h)) = \phi(\gamma(h/2))\phi(\gamma(h/2)) = \nu^2 = [I_{n(1)}, \ldots, U, \ldots, I_{n(k)}], U \in AutB^{\sigma}$$

Далее можем ограничиться вычислениями только с матрицами из $\mathrm{Aut}\, A^{\tau'}$ и $\mathrm{Aut}\, B^{\sigma}$. Имеем $(UM_0)^2 = I$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1.1. Опять получаем, что

$$E(A^{\tau}) \cong E(B^{\sigma}).$$

$\square$

Рассмотрим теперь некоторые достаточные условия изоморфизма групп автоморфизмов.

Для жестких групп условия изоморфизма групп автоморфизмов формулируются просто, справедлива

Теорема 1.6. *Пусть $A, B \in \mathbf{F}_{cd}$, группа A — жесткая. Группы $\mathrm{Aut}\, A$ и $\mathrm{Aut}\, B$ изоморфны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *$r(A) = r(B)$;*

2. *B — жесткая группа;*

3. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\tau \in \Omega_A} |P_\infty(A^{\tau})| = \sum_{\tau \in \Omega_B} |P_\infty(B^{\tau})|.$$

Доказательство: Пусть $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$, тогда по лемме 1.11

$$r(A) = r(B).$$

Так как группа A — жесткая, то $\operatorname{Aut} A$ — коммутативная группа. Следовательно, $\operatorname{Aut} B$ — коммутативная группа. Значит, для любых $\tau, \tau' \in \Omega_B$ выполняется равенство

$$\operatorname{Hom}(B^\tau, B^{\tau'}) = \operatorname{Hom}(B^{\tau'}, B^\tau) = 0.$$

Таким образом, группа B — жесткая.

Заметим, что

$$\operatorname{Aut} A \cong \prod_{\tau \in \Omega_A} A^\tau \cong \prod_{\tau \in \Omega_A} \Gamma(A^\tau).$$

Так как группа $\Gamma(A^\tau)$ изоморфна дискретному прямому произведению группы $Z(2)$ и $|P_\infty(A^\tau)|$ копий группы $\mathbb{Z}$, то

$$\operatorname{Aut} A \cong \prod_{\tau \in \Omega_A} \left(Z(2) \times \prod_{|P_\infty(A^\tau)|} \mathbb{Z} \right).$$

Совершая необходимые преобразования получим

$$\operatorname{Aut} A \cong \prod_{\tau \in \Omega_A} Z(2) \times \prod_{\sum_{\tau \in \Omega_A} |P_\infty(A^\tau)|} \mathbb{Z}.$$

Из изоморфизма $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ следует, что

$$\prod_{\tau \in \Omega_A} Z(2) \times \prod_{\sum_{\tau \in \Omega_A} |P_\infty(A^\tau)|} \mathbb{Z} \cong \prod_{\tau \in \Omega_B} Z(2) \times \prod_{\sum_{\tau \in \Omega_B} |P_\infty(B^\tau)|} \mathbb{Z}.$$

Значит,

$$\sum_{\tau \in \Omega_A} |P_\infty(A^\tau)| = \sum_{\tau \in \Omega_B} |P_\infty(B^\tau)|.$$

Покажем теперь достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда

$$\operatorname{Aut} A \cong \prod_{\tau \in \Omega_A} Z(2) \times \prod_{\sum_{\tau \in \Omega_A} |P_\infty(A^\tau)|} \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{Aut} B \cong \prod_{\tau \in \Omega_B} Z(2) \times \prod_{\sum_{\tau \in \Omega_B} |P_\infty(B^\tau)|} \mathbb{Z}.$$

Поскольку $r(A) = r(B)$ и $\sum_{\tau \in \Omega_A} |P_\infty(A^\tau)| = \sum_{\tau \in \Omega_B} |P_\infty(B^\tau)|$, то $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$.

$\square$

Глава 2

Определяемость абелевых групп их группами автоморфизмов

Глава посвящена исследованию вопроса определяемости абелевой группы своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения и в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения идемпотентного типа.

2.1. Определяемость вполне разложимых абелевых групп без кручения их группами автоморфизмов

Вопросы определяемости абелевой группы своей группой автоморфизмов и кольцом эндоморфизмов связаны между собой. Поскольку из изоморфизма колец эндоморфизмов следует изоморфизм групп автоморфизмов абелевых групп, то определяемость группы своей группой автоморфизмов влечет определяемость кольцом эндоморфизмов. Действительно, пусть группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$ и B — некоторая группа из этого класса. Тогда из $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ следует, что $A \cong B$. Если кольца изоморфны, то изоморфны и группы их обратимых элементов. Тогда из $E(A) \cong E(B)$ получаем, что $A \cong B$. Таким образом, группа A определяется своим кольцом эндоморфизмов.

Из теоремы 1.4 и леммы 1.11 предыдущей главы сразу следует

Лемма 2.1. *Пусть $A \in \mathbf{F}_{cd}$. Тогда:*

1. *Если группа A конечного ранга определяется своей группой автоморфизмов в классе групп конечного ранга из $\mathbf{F}_{cd}$, то она определяется*

группой автоморфизмов и в классе $\mathbf{F}_{cd}$*;*

2. *Если блочно-жесткая группа A конечного ранга определяется своей группой автоморфизмов в классе блочно-жестких групп из* $\mathbf{F}_{cd}$*, то она определяется группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{F}_{cd}$*.*

Лемма 2.2. *Пусть* $A \in \mathbf{F_{cd}}$*. Если группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{F_{cd}}$*, то A — почти делимая группа и* $r(A) > 1$*.*

Доказательство: Пусть $A \in \mathbf{F_{cd}}$ и A — определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cd}}$. Предположим, что A не почти делимая группа.Тогда A не определяется своим кольцом эндоморфизмов (лемма 1.8), а значит, не определяется и группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cd}}$.

Пусть теперь группа A почти делимая и $r(A) = 1$. Если группа A почти делимая, то

$$\operatorname{Aut} A \cong Z(2) \times \prod_{\aleph} \mathbb{Z} \cong \operatorname{Aut} B,$$

где B — любая почти делимая группа не изоморфная A.

Опять получаем, что группа A не определяется своей группой автоморфизмов в классе абелевых групп без кручения ранга 1. Противоречие.
□

Лемма 2.3. *Пусть* $A \in \mathbf{F}_{cd}$ *— однородная группа не обязательно конечного ранга. Группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе однородных групп из* $\mathbf{F}_{cd}$ *тогда и только тогда, когда A — почти делимая и* $r(A) > 1$*.*

Доказательство: Необходимость следует из леммы 2.2.

Покажем достаточность. Пусть $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Тогда $r(A) = r(B) = n$. Пусть группы A и B конечного ранга, $A \cong \bigoplus_n A_\tau$ и $B \cong \bigoplus_n B_\sigma$. Тогда

$\operatorname{Aut} A \cong GL(r(A), E(A_\tau))$, где A_τ — группа ранга 1. По лемме 1.5 получаем, что $E(A_\tau) \cong E(B_\sigma)$. Так как A — почти делимая группа, то $A_\tau \cong B_\sigma$ (лемма 1.8) и $A \cong B$.

Пусть теперь группы A и B бесконечного ранга и $\tau = \tau(A)$. Тогда группа A есть свободный модуль M бесконечного ранга над кольцом $R = E(A_\tau)$ и группа $\operatorname{Aut} A$ изоморфна группе $\operatorname{Aut}_R M$. Применяя лемму 1.6 получим, что $E(A) \cong E(B)$. Поскольку почти делимая группа определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения, то $A \cong B$.

$\square$

Замечание. Если группа A, удовлетворяющая условиям теоремы, имеет конечный ранг, то она определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F}_{cd}$. Действительно, если ранг группы A конечный, то из изоморфизма $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ и теоремы 1.4 получаем, что группа B тоже однородная.

Теорема 2.1. *Пусть группа $A \in \mathbf{F_{cd}}$ имеет конечный ранг. Группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cd}}$ тогда и только тогда, когда A почти делимая группа и для каждого минимального типа $\tau \in \Omega_A$ выполняется неравенство $r(A^\tau) > 1$.*

Доказательство:

Необходимость. Пусть группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cd}}$. Тогда A — почти делимая группа (лемма 2.2). Предположим, что найдется такой минимальный тип $\tau' = (k_1, k_2, \dots, k_i, \dots)$, для которого $r(A^{\tau'}) = 1$. Поскольку A — почти делимая группа конечного ранга, то найдется такой номер j, что для любого $\tau \in \Omega_A$, $p_j A^\tau = A^\tau$. Пусть $\tau'' = (h_1, h_2, \dots, h_i, \dots)$, где $k_i = h_i$ для любых $i \neq j$ и $h_j = 0$. Построим группу B следующим образом: $B = \bigoplus_{\Omega_A \setminus \{\tau'\}} A^\tau \oplus B_{\tau''}$.

Покажем изоморфизм групп $\operatorname{Aut} A$ и $\operatorname{Aut} B$. Рассмотрим $\Omega' \subset \Omega_A$ — связное подмножество, содержащее τ'. Тогда

$$\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega'} A^\tau \times \operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega_A\setminus\Omega'} A^\tau,$$

$$\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega''} B^\tau \times \operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega_B\setminus\Omega''} B^\tau,$$

где $\Omega'' = \Omega' \setminus \{\tau'\} \cup \{\tau''\}$. По построению группы B получаем, что

$$\bigoplus_{\tau\in\Omega_A\setminus\Omega'} A^\tau \cong \bigoplus_{\tau\in\Omega_B\setminus\Omega''} B^\tau.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega_A\setminus\Omega'} A^\tau \cong \operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega_B\setminus\Omega''} B^\tau.$$

Осталось показать, что

$$\operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega'} A^\tau \cong \operatorname{Aut} \bigoplus_{\tau\in\Omega''} B^\tau,$$

где Ω' и Ω'' — связные множества. Таким образом, без потери общности можем считать, что Ω_A — связное множество.

Рассмотрим $\alpha \in \operatorname{Aut} A$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} U & H \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

где $a \in \operatorname{Aut} A_{\tau'}$.

Так как Ω_A — связное множество, то $Z(E(A)) \cong A_\sigma$, где A_σ — некоторая рациональная группа типа σ. Пусть $\lambda(\alpha) = a'$ — гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} A$ в $Z(\operatorname{Aut} A)$, сохраняющий центральные элементы ($\alpha \in Z(\operatorname{Aut} A)$, $\lambda(\alpha) = \alpha$). Покажем существование такого гомоморфизма. Так как $a \in \Gamma(A_{\tau'})$, то $a = \pm\prod_{p\in P(a)} p^{l_p}$, где $P(a) \subset P_\infty(A_{\tau'})$. Определим

$$a' = \pm \prod_{p\in P(a)\cap P_\infty(A_\sigma)} p^{l_p},$$

т.е. оставим в a те множители p^{l_p}, для которых p соответствует символу ∞ в типе рациональной группы A_σ. Следовательно, $a' \in \Gamma(A_\sigma) \cong Z(\operatorname{Aut} A)$. Всякому элементу α поставим в соответствие элемент $[a', \ldots, a']$. Очевидно, что полученное отображение является гомоморфизмом.

Положим $\phi(\alpha) = \alpha a'^{-1}\psi(a')$, где $\psi(a')$ — изоморфизм групп $Z(\operatorname{Aut} A)$ и $Z(\operatorname{Aut} B)$. Так как множества Ω_A и Ω_B — связные, то $Z(\operatorname{Aut} A)$ и $Z(\operatorname{Aut} B)$ изоморфны некоторым рациональным группам. По построению группы B получаем, что $\Gamma(Z(\operatorname{Aut} B))$ является подгруппой $\Gamma(Z(\operatorname{Aut} A))$ и

$$\phi(\alpha\beta) = \alpha\beta(a'b')^{-1}\psi(a'b') = \alpha a'^{-1}\psi(a)\beta b'^{-1}\psi(b') = \phi(\alpha)\phi(\beta).$$

Пусть $\phi(\alpha) = 1$. Тогда

$$\alpha a'^{-1}\psi(a') = 1.$$

Так как $a'^{-1}\psi(a') \in Z(\operatorname{Aut} A)$, то $\alpha \in Z(\operatorname{Aut} A)$. Следовательно, $\lambda(\alpha) = \alpha$ и $\alpha = a'$. Получаем

$$\psi(a') = 1,$$

$$a' = a = 1,$$

$$\alpha = 1.$$

Осталость показать сюръективность. Покажем, что для всякого $\beta \in \operatorname{Aut} B$ найдется α такой, что $\phi(\alpha) = \beta$. Отождествляя группы автоморфизмов групп A и B с соответствующими группами матриц с рациональными коэффициентами, можно считать, что $\operatorname{Aut} B < \operatorname{Aut} A$. Рассмотрим ограничение гомоморфизма λ на группу $\operatorname{Aut} B$. Обозначим через λ_β образ автоморфизма β при гомоморфизме λ. Пусть

$$\alpha = \beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta).$$

$$\phi(\alpha) = \phi(\beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta)) =$$

$$\beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta)\lambda^{-1}[\beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta)]\psi[\lambda(\beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta))] =$$

$$\beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta)\lambda^{-1}[\beta]\lambda^{-1}[\lambda_\beta^{-1}]\lambda^{-1}[\psi^{-1}(\lambda_\beta)]\psi[\lambda(\beta)]\psi[\lambda(\lambda_\beta^{-1})]\psi[\lambda(\psi^{-1}(\lambda_\beta))] =$$

$$\beta\lambda_\beta^{-1}\psi^{-1}(\lambda_\beta)\lambda_\beta^{-1}\lambda_\beta[\psi^{-1}(\lambda_\beta)]^{-1}\psi[\lambda_\beta]\psi[\lambda_\beta^{-1}]\psi[\psi^{-1}(\lambda_\beta)] = \beta$$

Получаем, что группы A и B не изоморфны и $\mathrm{Aut}\,A \cong \mathrm{Aut}\,B$. Противоречие. Значит, для каждого минимального типа $\tau \in \Omega_A$ имеет место $r(A^\tau) > 1$.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы и $\mathrm{Aut}\,A \cong \mathrm{Aut}\,B$. Покажем, что в таком случае $A \cong B$. Рассмотрим $\tau \in \Omega_A$, $r(A^\tau) > 1$. По теореме 1.5 получаем, что $E(A^\tau) \cong E(B^\sigma)$ для некоторого типа σ. Так как группа A почти делимая, то $A^\tau \cong B^\sigma$(лемма 2.2).

Пусть теперь $r(A^\tau) = 1$. Так как тип τ не минимальный то найдется такой тип $\tau' \in \Omega_A$, что $\tau > \tau'$. Тогда по теореме 1.5 найдутся такие типы $\sigma > \sigma'$, что

$$\mathrm{Hom}(A^{\tau'}, A^\tau) \cong \mathrm{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma).$$

Применяя леммы 1.3, 1.4 и учитывая, что группа A^τ имеет почти делимый тип, получаем

$$\mathrm{Hom}(A^{\tau'}, A^\tau) \cong \bigoplus_{r(A^{\tau'})} A^\tau.$$

Тогда $\mathrm{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma)$ — почти делимая группа, поэтому

$$\mathrm{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma) \cong \bigoplus_{r(B^{\sigma'})} B^\sigma.$$

Получаем, что $\tau = \sigma$. Предположим, что $r(B^\sigma) > 1$, тогда по теореме 1.5 найдется такой тип τ, что $E(A^\tau) \cong E(B^\sigma)$. Следовательно, $A^\tau \cong B^\sigma$ и $r(A^\tau) = r(B^\tau)$, но $r(A^\tau) = 1$. Противоречие.

$\square$

2.2. Определяемость вполне разложимых абелевых групп без кручения идемпотентного типа их группами автоморфизмов

Поскольку всякая группа идемпотентного типа определяется своим кольцом эндоморфизмов в классе всех таких групп, то представляет интерес вопрос определяемости этих групп своими группами автоморфизмов в этом классе. Необходимые и достаточные условия определяемости в этом классе должны быть сложнее чем в классе $\mathbf{F_{cd}}$. Однако, можно получить некоторые интересные результаты накладывая дополнительные ограничения на рассматриваемые группы. Так, например, можно полностью решить вопрос определяемости групп идемпотентных типов для ранга 1 и 2.

Теорема 2.2. *Пусть $A \in \mathbf{F_{cdi}}$, $r(A) = 1$. Группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cdi}}$ тогда и только тогда, когда $A \cong \mathbb{Z}$.*

Доказательство: Пусть группа $A \ncong \mathbb{Z}$ определяется в классе $\mathbf{F_{cdi}}$ своей группой автоморфизмов. Группа $\operatorname{Aut} A \cong Z(2) \times \prod_k \mathbb{Z}$, где k число символов бесконечность в типе группы A. Рассмотрим группу $B \in \mathbf{F_{cdi}}$ тип которой содержит k бесконечностей и $A \ncong B$. Очевидно, что $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Получили противоречие.

Покажем теперь, что $\mathbb{Z}$ определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cdi}}$. Пусть $\operatorname{Aut} Z \cong \operatorname{Aut} B$ для некоторой группы $B \in \mathbf{F_{cdi}}$. Значит $\operatorname{Aut} B \cong Z(2)$. Следовательно, тип группы B не содержит бесконечностей. Получаем, что $B \cong \mathbb{Z}$. □

Теорема 2.3. *Пусть $A \in \mathbf{F_{cdi}}$, $r(A) = 2$. Тогда*

1. *если группа A — неоднородная или жесткая, то она определяется*

своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cdi}}$ *тогда и только тогда, когда* $A \cong A_1 \oplus \mathbb{Z}$, *где* $A_1 \in \mathbf{Fcdi}, r(A_1) = 1$;

2. *если* A *— 2-делимая группа, то она определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{F_{cdi}}$ *тогда и только тогда, когда* A *однородная.*

Доказательство: 1. Пусть неоднородная группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cdi}}$. Покажем, что в этом случае $A \cong A_1 \oplus \mathbb{Z}$. Предположим противное.

Пусть сначала A — жесткая группа, $A \cong A_1 \oplus A_2$ и типы

$$\tau(A_1) = (k_1, k_2, \dots, k_i, \dots),$$

$$\tau(A_2) = (h_1, h_2, \dots, h_i, \dots)$$

— не сравнимы. Тогда найдутся такие j и t, что

$$k_j = 0, k_t = \infty, h_j = \infty, h_t = 0.$$

Построим группу B следующим образом:

$$B = A_1 \oplus B_2,$$

где $\tau(B_2) = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots)$. Рассмотрим несколько случаев:

1) Если для некоторого s $(s \neq j, s \neq t)$ $k_s = h_s = 0$, то $\forall i \neq j, s, d_i = h_i, d_j = 0, d_s = \infty$.

2) Если же для некоторого s $(s \neq j, s \neq t)$ $k_s = h_s = \infty$, то $\forall i \neq t, s, d_i = h_i, d_t = \infty, d_s = 0$.

3) Пусть для любого номера s $k_s \neq h_s$. Тогда выберем некоторый номер s' $(s' \neq j, s' \neq t)$ и положим $\forall i \neq s', d_i = h_i, d_{s'} = m$, где $m = \infty$, если $h_{s'} = 0$, и $m = 0$ в противном случае.

Группы A и B не изоморфны по построению, но по лемме 1.6 получаем, что $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Противоречие.

Пусть теперь $A \cong A_1 \oplus A_2$, $A_2 \ncong \mathbb{Z}$, $\tau(A_1) > \tau(A_2)$. Так как $A_2 \ncong \mathbb{Z}$, то найдется t такое, что $h_t = \infty$. Из $\tau(A_1) > \tau(A_2)$ получаем, что существует $j \neq t$ такое, что $k_j = \infty$ и $h_j = 0$. Построим группу B_2 ранга 1 заданием типа. Пусть

$$\tau(B_2) = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots), \forall i (i \neq j, i \neq t), d_i = h_i, d_j = \infty, d_t = 0.$$

Очевидно, что $B = A_1 \oplus B_2 \ncong A$ и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Получили противоречие.

Покажем теперь, что группа $A \cong A_1 \oplus \mathbb{Z}$ определяется своей группой автоморфизмов. Действительно, если $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ для некоторой группы $B \in \mathbf{F_{cdi}}$, то $r(A) = r(B)$, $B \cong B_1 \oplus B_2$ ($\tau(B_1) > \tau(B_2)$). По теореме 1.2 получим, что $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, A_1) \cong \operatorname{Hom}(B_2, B_1)$, так как группы A и B почти делимые, то $A_1 \cong B_1$. Кроме того, из теоремы 1.2 следует, что $\operatorname{Aut} \mathbb{Z} \cong \operatorname{Aut} B_2$. Следовательно, $B_2 \cong \mathbb{Z}$ (теорема 2.2).

2. Предположим, что A — неоднородная или жесткая 2-делимая группа. Тогда по условию 1 настоящей теоремы она не определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cdi}}$.

Пусть теперь A — однородная 2-делимая группа и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ для некоторой группы $B \in \mathbf{F_{cdi}}$. Тогда по теореме 1.1 получаем $E(A) \cong E(B)$. Из определяемости вполне разложимых абелевых групп без кручения идемпотентного типа их кольцами эндоморфизмов получаем, что $A \cong B$.

$\square$

Теорема 2.4. *Пусть $A \in \mathbf{F_{cdi}}$, $r(A) > 1$ и A — однородная 2-делимая группа конечного ранга. Тогда группа A определяется в классе $\mathbf{F_{cdi}}$ своей группой автоморфизмов.*

Доказательство: Пусть A — однородная группа, $r(A) > 1$ и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, где $B \in \mathbf{F_{cdi}}$. Тогда по теореме 1.4 получаем, что группа B однородная. Таким образом, $A = \bigoplus_n A_1, B = \bigoplus_m B_1$ и $GL(n, E(A_1)) \cong GL(m, E(B_1))$. Из леммы 1.5 и теоремы 1.1 следует, что $E(A_1) \cong E(B_1)$. Значит, $A_1 \cong B_1$ и $A \cong B$, так как A и B группы идемпотентных типов. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть $A \in \mathbf{F_{cdi}}$ и для всякого минимального типа $\tau \in \Omega_A$ имеет место неравенство $r(A^\tau) > 1$. Тогда группа A определяется в классе $\mathbf{F_{cdi}}$ своей группой автоморфизмов.*

Доказательство: Пусть выполнены условия теоремы и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Покажем, что в таком случае $A \cong B$. Рассмотрим $\tau \in \Omega_A$, $r(A^\tau) > 1$. По условию 4 теоремы 1.5 получаем, что $E(A^\tau) \cong E(B^\sigma)$ для некоторого типа σ. Поскольку группы A и B идемпотентные, то $A^\tau \cong B^\sigma$.

Пусть теперь $r(A^\tau) = 1$. Так как тип τ не минимальный то найдется такой тип $\tau' \in \Omega_A$, что $\tau > \tau'$. Тогда по условию 3 теоремы 1.5 найдутся такие типы $\sigma > \sigma'$, что

$$\operatorname{Hom}(A^{\tau'}, A^\tau) \cong \operatorname{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma).$$

Так как A, B — группы идемпотентных типов, то

$$\operatorname{Hom}(A^{\tau'}, A^\tau) \cong \bigoplus_{r(A^{\tau'})} A^\tau,$$

$$\operatorname{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma) \cong \bigoplus_{r(B^{\sigma'})} B^\sigma.$$

Получаем, что $\tau = \sigma$.

Предположим, что $r(B^\sigma) > 1$, тогда по теореме 1.5 найдется такой тип τ, что $E(A^\tau) \cong E(B^\sigma)$. Следовательно, $A^\tau \cong B^\sigma$ и $r(A^\tau) = r(B^\tau)$, но $r(A^\tau) = 1$. Противоречие.

$\square$

Следующий пример показывает, что это условие не является необходимым.

Пример 2.1. *Пусть*

$$\tau_1 = (\infty, \infty, 0, 0, \dots),$$

$$\tau_2 = (\infty, 0, 0, 0, \dots),$$

$$\tau_3 = (\infty, 0, \infty, 0, \dots).$$

Тогда группа $A = A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_2} \oplus A_{\tau_3} \oplus A_{\tau_3}$ *определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{F_{cdi}}$.

Покажем, что это действительно так. Из изоморфизма $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ для некоторой группы $B \in \mathbf{F_{cdi}}$ следует, что $r(B) = 5$. Так как

$$Z(2) \times \mathbb{Z} \cong Z(\operatorname{Aut} A) \cong Z(\operatorname{Aut} B),$$

то Ω_B — связное множество и $pB = B$ для некоторого простого числа p.

Рассмотрим множество диагональных инволюций K в группе $\operatorname{Aut} B$, $|K| = 2^5$. Покажем, что существует изоморфизм ϕ, который сохраняет диагональный вид инволюций. Пусть $\phi_1 : \operatorname{Aut} B \to \operatorname{Aut} A$. Тогда $\phi_1(K)$ — множество коммутирующих инволюций в $\operatorname{Aut} A$ и $|\phi_1(K)| = 2^5$. Так как $2A = A$, то по лемме 1.12 получаем, что

$$g\phi_1(K)g^{-1} \subset \prod_{\tau \in \Omega_A} \operatorname{Aut} A^{\tau} = \operatorname{Aut} A^{\tau_1} \times \operatorname{Aut} A^{\tau_2} \times \operatorname{Aut} A^{\tau_3}$$

для подходящего $g \in \operatorname{Aut} A$. Таким образом, $\phi_2(K) = [K_1, \pm 1, K_3]$, где $\phi_2(K) = g\phi_1(K)g^{-1}$ и $|K_1| = |K_3| = 2^2$. Поскольку $r(A^{\tau_1}) = r(A^{\tau_3}) = 2$, то, пользуясь доказательством леммы 1.10, получим, что

$$\gamma\phi_2(K)\gamma^{-1} = [\gamma_1 K_1 \gamma_1^{-1}, 1, \gamma_3 K_3 \gamma_3^{-1}] = [\pm 1, \dots, \pm 1].$$

Тогда $\phi(\alpha) = \gamma\phi_2(\alpha)\gamma^{-1}$ — изоморфизм групп $\operatorname{Aut} B$ и $\operatorname{Aut} A$, сохраняющий диагональный вид инволюций.

Рассмотрим в K подмножество $L \subset Z(\prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau)$. Всякая инволюция ε из множества L не сопряжена ни с одной инволюцией из $K \setminus \{\varepsilon\}$, и любая инволюция ε из $K \setminus L$ сопряжена с некоторой инволюцией $\varepsilon' \neq \varepsilon$ из K. Так как при изоморфизме сопряженные инволюции переходят в сопряженные, то $L^* \subset \phi(L)$, где $L^* \subset Z(\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau)$. Поскольку все инволюции из $\phi(K)\setminus L^*$ сопряжены с некоторыми отличными от них инволюциями из $\phi(K)$, то $\phi(L) = L^*$.

Рассматривая централизаторы множеств L и L^*, получаем, что

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \cong \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

Пусть $K^* = \phi(K)$. Пользуясь обозначениями теоремы 1.5, рассмотрим образ $K_{\tau_1,A} \subset K^*$ при изоморфизме ϕ^{-1}. Так как на множестве $K_{\tau_1,A}$ тождественно действует группа подстановок S_2 и изоморфизм ϕ^{-1} сохраняет диагональный вид инволюций, то на $\phi^{-1}(K_{\tau_1,A}) \subset K$ группа S_2 тоже действует тождественно.

Аналогично доказательству теоремы 1.5 получаем, что

$$\phi^{-1}(K_{\tau_1,A}) = K_{\sigma_1,B}$$

для некоторого типа $\sigma_1 \in \Omega_B$. Рассматривая централизаторы множеств $K_{\tau_1,A}$ и $K_{\sigma_1,B}$, получим

$$C(K_{\tau_1,A}) \cong C(K_{\sigma_1,B}),$$

$$\operatorname{Aut} A^{\tau_1} \times P_2 \times P_3 \cong \operatorname{Aut} B^{\sigma_1} \times R_2 \times R_3.$$

Далее, следуя доказательству теоремы 1.5, получим, что $2B^{\sigma_1} = B^{\sigma_1}$ и $A^{\tau_1} \cong B^{\sigma_1}$. Аналогично получаем, что $A^{\tau_3} \cong B^{\sigma_3}$ для некоторого типа

$\sigma_3 \in \Omega_B$. Так как $Z(\operatorname{Aut} B) \cong Z(2) \times \mathbb{Z}$ и множество Ω_B связное получаем, что $2B^{\sigma_2} = B^{\sigma_2}$. Тогда группа B — 2-делимая.

Из свойства 3 теоремы 1.5 получаем, что тип σ_2 минимальный. Следовательно, $\tau_2 = \sigma_2$ и $A \cong B$. Таким образом, мы получили, что группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F_{cdi}}$ и при этом не удовлетворяет условиям теоремы 2.5.

Глава 3

Определяемость абелевых групп центрами их колец эндоморфизмов

3.1. Известные результаты

Будем говорить, что группа A из некоторого класса абелевых групп $\mathbf{X}$ определяется своим центром $Z(E(A))$ кольца эндоморфизмов в этом классе, если из изоморфизма $Z(E(A)) \cong Z(E(B))$, где B принадлежит классу $\mathbf{X}$, следует $A \cong B$. Класс групп, определяющихся своим центром кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{X}$, обозначим через $\mathbf{X}(ZE)$. Если $\mathbf{X}(ZE) = \{0\}$ или $\mathbf{X}(ZE) = \emptyset$, то класс $\mathbf{X}$ авторы статьи [28] называют NC-классом.

В работе [28] были найдены достаточные условия принадлежности группы классу $\mathbf{F_n}(ZE)$, где $\mathbf{F_n}$ – класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга n, описаны NC-подклассы для различных классов абелевых групп $\mathbf{X}$. Приведем формулировки этих результатов.

Класс $\mathbf{X}$ будем называть A-классом, если с каждой группой $A \in \mathbf{X}$ он содержит и прямую сумму её копий $A_\alpha = \bigoplus_\alpha A$ для любого кардинала α.

Класс $\mathbf{X}$ будем называть AB-классом, если он является A-классом, но замкнут относительно конечных прямых сумм, т.е. $A, B \in \mathbf{X}$ влечет $A \oplus B \in \mathbf{X}$.

Теорема 3.1 ([28]) *Обозначим через* $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}$ *классы всех абелевых групп, абелевых групп без кручения, периодических абелевых групп, сепарабельных абелевых групп без кручения соответственно. Тогда*

1. *Классы* $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{F_{cd}}$, $\mathbf{S}$ *являются* NC*-классами;*

2. *Любой AB-подкласс $\mathbf{L}(AB)$ класса $\mathbf{L}$ является NC-классом;*

3. *Любые AB-подклассы $\mathbf{F_{cd}}(AB)$ класса $\mathbf{F_{cd}}$ и $\mathbf{S}(AB)$ класса $\mathbf{S}$ являются NC-классами.*

Теорема 3.2 ([28]) *Если группа $A \in \mathbf{F_n}$ является делимой группой или почти делимой жесткой группой, то она принадлежит классу $\mathbf{F_n}(ZE)$.*

Следствие 1 ([28]) *Класс $\mathbf{F_1}(ZE)$ состоит в точности из почти делимых групп ранга 1.*

Пусть $G \in \mathbf{F_n}$, $n > 1$ и Ω_G — множество всех (различных) типов прямых слагаемых ранга 1 группы G. Рассмотрим на множестве Ω_G отношение эквивалентности введеное в первой главе. Запишем разбиение множества Ω_G:

$$\Omega_G = \Omega_1(G) \cup, \ldots, \cup \Omega_s(G).$$

Назовем группу G канонической, если $|\Omega_G| = r(G)$. Пусть $\alpha_j = \inf \Omega_j(G)$. Тогда

$$Z(E(G)) \cong E(A_1) \oplus E(A_2) \oplus \ldots \oplus E(A_m),$$

где A_j – группы без кручения ранга 1 типов α_j. Заметим, что среди типов α_j могут быть равные. Если Ω – некоторое конечное множество типов, то множество всех различных инфимумов классов эквивалентности будем называть сопряженным с Ω и обозначать через $[\Omega]$. Тогда $[\Omega_G]$ – множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 аддитивной группы кольца $Z(E(G))$.

3.2. Необходимые условия определяемости абелевых групп центрами их колец эндоморфизмов

Будем говорить, что группа $G \in \mathbf{F_{cd}}$ удовлетворяет свойству (*), если:

1) группа G – почти делимая,

2) множество Ω_G не является связным,

3) группа G – редуцированная,

4) группа G – каноническая,

5) любой класс эквивалентности с наименьшим элементом тривиален,

6) множество Ω_G содержит только максимальные и минимальные типы.

7) для любого типа из Ω_G множество типов меньших его либо пусто, либо содержит по крайней мере 2 элемента.

Следующая теорема описывает необходимые условия определяемости абелевой группы центром её кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{F_n}$.

Теорема 3.3. *Если не делимая группа G принадлежит классу $\mathbf{F_n}(ZE)$ ($n > 1$), то она удовлетворяет свойству (*).*

Доказательство: Пусть группа G принадлежит классу $\mathbf{F_n}(ZE)$. Покажем, что она удовлетворяет всем условиям свойства (*).

1) Доказано в [28].

2) Пусть G – почти делимая группа, со связным множеством Ω_G.

Если группа G — однородная группа типа $\tau = \tau(A)$, где A — группа без кручения ранга 1, то полагаем

$$H = \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{n-1} A.$$

Если же G — не однородная и $|\Omega_G| > 1$. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{n} A, \quad \tau(A) = \inf(\Omega_G).$$

Очевидно, что в обоих случаях группа $G \ncong H \in \mathbf{F_n}$ и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$.

3) Если группа G не редуцированная и не делимая, то Ω_G – связное множество. Тогда по условию 2 получаем, что G не принадлежит классу $\mathbf{F_n}(ZE)$.

4) Пусть теперь группа G – не однородная, редуцированная и содержит однородное прямое слагаемое ранга не менее двух. Рассмотрим каноническое разложение группы G в прямую сумму однородных ненулевых слагаемых:

$$G = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G} G^{\tau}.$$

Пусть $G^{\tau'}$ и $G^{\tau''}$ – два различных таких слагаемых, причем $r(G^{\tau'}) > 1$. Тогда каноническое разложение группы H строим следующим образом:

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G} H^{\tau},$$

где $H^{\tau} = G^{\tau}$, если $\tau \in \Omega_G \setminus \{\tau'', \tau'\}$, $r(H^{\tau'}) = r(G^{\tau'}) - 1$ и $r(H^{\tau''}) = r(G^{\tau''}) + 1$. Ясно, что группа H не изоморфна G и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$.

5) Пусть G – почти делимая группа, у которой множество Ω_G не является связным и разбиение множества Ω_G содержит нетривиальный класс эквивалентности $\Omega_j(G)$ с наименьшим элементом α_j. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G \setminus \Omega_j(G)} G^{\tau} \oplus \bigoplus_{m} A,$$

где $m = card(\Omega_j(G))$, $r(A) = 1$, $\tau(A) = \alpha_j$. Получаем снова, что группа G не изоморфна $H \in \mathbf{F_n}$ и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$.

6) Пусть G – почти делимая каноническая группа и $\tau'' < \tau' < \tau$ цепочка типов из Ω_G. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega(G) \setminus \{\tau'\}} G^{\tau} \oplus A \in \mathbf{F_n},$$

где $r(A) = 1$, $\tau(A) = \tau''$. Ясно, что группа G не изоморфна H и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$.

7) Предположим, что $\tau' > \tau''$ цепочка типов из Ω_G и в $\Omega_G \setminus \{\tau''\}$ не содержится типов меньших типа τ'. Учитывая условие 6, получаем, что тип τ' несравним ни с каким другим типом из Ω_G отличным от τ''. Строим группу H следующим образом:

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G \setminus \{\tau'\}} G^{\tau} \oplus A \in \mathbf{F_n},$$

где $r(A) = 1$, $\tau(A) = \tau''$. Как и в предыдущем случае получаем, что группа G не изоморфна H и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$. □

Покажем теперь, что для $1 < n < 4$ класс $\mathbf{F_n}(ZE)$ полностью описывается следующей теоремой:

Теорема 3.4. *Группа $G \in \mathbf{F_n}$ $(1 < n < 4)$ определяется в классе $\mathbf{F_n}$ своим центром кольца эндоморфизмов, тогда и только тогда, когда она либо делимая, либо все ее прямые слагаемые ранга 1 почти делимы и типы этих слагаемых попарно несравнимы.*

Доказательство: Необходимость. Пусть группа G принадлежит классу $\mathbf{F_n}(ZE)$. Предположим, что она не является делимой. Тогда согласно условиям 1, 3 и 4 свойства (*) она редуцированная, почти делимая и каноническая, т.е. $|\Omega_G| = n = r(G)$. Если $n = 2$, то, учитывая условие 2, получаем, что типы прямых слагаемых несравнимы. При $n = 3$ согласно условиям 5, 6 снова получаем, что все типы из Ω_G — несравнимые.

Достаточность следует из работы [28]. □

Приведем несколько примеров не делимых групп из $\mathbf{F_n}(ZE)$ со сравнимыми типами прямых слагаемых ранга 1. Заметим, что любая группа $A \in \mathbf{F_1}$ идемпотентного (в частности, почти делимого) типа полностью определяется множеством

$$N(A) = \{n \in \mathbf{N} : p_n \in P(A)\}.$$

Пример 3.1. *Группа* $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \in \mathbf{F_4}$*, где*

$$N(A_1) = \{1\}, N(A_2) = \{1, 2\}, N(A_3) = \{1, 3\}, N(A_4) = \{2, 3\},$$

определяется своим центром кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{F_4}$*.*

Пример 3.2. *Группа* $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_6 \in \mathbf{F_6}$*, где*

$$N(A_1) = \{1\}, N(A_2) = \{1, 2, 4, 5\}, N(A_3) = \{1, 3\},$$

$$N(A_4) = \{2, 3\}, N(A_5) = \{3, 4\}, N(A_6) = \{3, 5\},$$

определяется своим центром кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{F_6}$*.*

Пусть Ω_0 — множество всех (различных) почти делимых типов. Подмножества Ω', Ω'' множества Ω_0 назовем сравнимыми, если существуют сравнимые типы $\tau' \in \Omega'$ и $\tau'' \in \Omega''$. Подмножество из Ω_0 будем называть τ'-множеством, если оно состоит из нетривиальных связанных подмножеств с одинаковым инфимумом равным τ', а число таких подмножеств — длиной τ'-множества. Подмножества Ω', Ω'' множества Ω_0 будем называть подобными, если их сопряженные множества равны и соответствующие τ'-подмножества имеют одинаковую длину. В частности, два τ'-множества одинаковой длины являются подобными.

Почти делимую группу $G \in \mathbf{F_n}$ будем называть минимальной, если каждое ее τ'-подмножество Ω'_G минимально, т.е. множество $\{\tau'' \in \Omega_G \setminus \Omega'_G : \tau' < \tau''\}$ не пусто и для любого τ'-множества $\Omega' \subset \Omega_0$ подобного Ω'_G и несравнимого с $\Omega_G \setminus \Omega'_G$ имеем $|\Omega'_G| \leq |\Omega'|$.

Теорема 3.5. *Если группа* $G \in \mathbf{F_n}$ *(*$n > 1$*) принадлежит классу* $\mathbf{F_n}(CE)$*, то она минимальна.*

Доказательство:

Если $\{\tau'' \in \Omega_G \setminus \Omega'_G : \tau' < \tau''\} = \emptyset$, то полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G \setminus \Omega'_G} G^\tau \oplus \bigoplus_{|\Omega'_G|} A \in \mathbf{F_n},$$

где $r(A) = 1$, $\tau(A) = \tau'$. Ясно, что группа G не изоморфна H и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$.

Пусть теперь τ'-множество Ω' подобное Ω'_G несравнимо с $\Omega_G \setminus \Omega'_G$ и $|\Omega'_G| > |\Omega'|$. Тогда полагаем

$$H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G \setminus \Omega'_G} G^\tau \oplus \bigoplus_{\tau'' \in \Omega'} H^{\tau''} \oplus H' \in \mathbf{F_n},$$

где $H^{\tau''}$ – группа ранга 1 типа τ'', H' – однородная вполне разложимая группа фиксированного типа из Ω' ранга $|\Omega'_G| - |\Omega'|$. Снова получаем группу H неизоморфную G, $[\Omega_G] = [\Omega_H]$ и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$. Заметим, что группа G – каноническая (теорема 3.3). Следовательно, группы G^τ имеют ранг 1. □

Теорема 3.6. *Если группа $G \in \mathbf{F_n}(ZE)$ имеет сравнимые типы и неделима, то для любого $m > n$ существует бесконечное множество групп $H \in \mathbf{F_m}(ZE)$, для которых группа G является прямым слагаемым.*

Доказательство:

Пусть группа $G \in \mathbf{F_n}(ZE)$ имеет сравнимые типы и неделима, тогда для $m = n + 1$ строим группы $H \in \mathbf{F_m}(ZE)$ добавлением к G прямого почти делимого редуцированного слагаемого A ранга 1, для которого $pA = A$ при любом $p \in P(G)$. Ясно, что таких групп существует бесконечное множество. Аналогично поступаем для любых $m > n$. □

Следствие 1. *Для любого $n > 3$ существуют не делимые группы из $\mathbf{F_n}(ZE)$ со сравнимыми типами прямых слагаемых ранга 1.*

Действительно, для $n = 4$ существование такой группы следует из примера 3.1. Осталось применить теорему 3.6.

Лемма 3.1. *Пусть группа $G \in \mathbf{F_n}$ удовлетворяет свойству (*). Если $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$ для некоторой группы $H \in \mathbf{F_n}(H \ncong G)$, то существует группа $H' \in \mathbf{F_m}(m \leq n)$ такая, что $Z(E(G)) \cong Z(E(H'))$ и H' удовлетворяет свойству (*).*

Доказательство: Пусть $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$ и группа G удовлетворяет условиям 1-7 свойства (*). Тогда группа H удовлетворяет условиям 1-3.

Пусть группа H не является канонической. Тогда найдется тип τ такой, что $r(H^{\tau'}) > 1$. Построим группу H' следующим образом:

$$H' = \bigoplus_{\tau \in \Omega_H \setminus \{\tau'\}} H^{\tau} \oplus H_{\tau'}.$$

Очевидно, что $Z(E(H)) \cong Z(E(H'))$. Значит $Z(E(G)) \cong Z(E(H'))$.

Пусть теперь для группы H не выполнено условие 5 и найдется класс эквивалентности $\Omega_j(H)$ с наименьшим элементом τ_j. Тогда полагаем

$$H' = \bigoplus_{\tau \in \Omega_H \setminus \Omega_j(H)} H^{\tau} \oplus H_{\tau_j}.$$

Снова видим, что $Z(E(G)) \cong Z(E(H'))$. Построим соответствующие группы для всех классов эквивалентности с наименьшим элементом и получим группу H' удовлетворяющую условию 5.

Предположим, что $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$ и найдутся такие типы $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \Omega(H)$, что $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$. Тогда

$$H' = \bigoplus_{\tau \in \Omega_H \setminus \{\tau_2\}} H^{\tau}.$$

Пусть выполнены условия теоремы и H не удовлетворяет условию 7. То есть найдется тип $\tau' \in \Omega_H$ такой, что существует единственный тип τ'', для которого выполнено условие $\tau'' < \tau'$. По доказанному, можем считать, что группа H удовлетворяет условиям 1-6 теоремы. Если это не так, то заменим группу H на H', как показано в доказательстве, нужное количество раз. Группу H' построим следующим образом:

$$H' = \bigoplus_{\tau \in \Omega_H \setminus \{\tau'\}} H^{\tau}.$$

□

Теорема 3.7. *Пусть $G \in \mathbf{F_n}(ZE)$. Тогда для всякого класса эквивалентности Ω_i, каждого минимального типа $\sigma \in \Omega_i$, множество*

$$W_{i,\sigma} = \{\tau | \inf(\Omega_i) < \tau < \sigma\}$$

либо пусто, либо все типы из $W_{i,\sigma}$ сравнимы с $\Omega_G \setminus \Omega_i$.

Доказательство: Пусть выполнены условия теоремы. Для тривиального класса эквивалентности утверждение теоремы очевидно. Предположим, что найдется не тривиальный класс эквивалентности Ω_i и минимальный тип $\sigma \in \Omega_i$ такой, что множество $W_{i,\sigma}$ не пусто. Покажем тогда, что всякий тип $\tau \in W_{i,\sigma}$ сравним с множеством типов $\Omega_G \setminus \Omega_i$. Предположим противное. Пусть найдется тип $\tau' \in W_{i,\sigma}$ не сравнимый с $\Omega_G \setminus \Omega_i$. По определению множества $W_{i,\sigma}$ получаем следующее:

$$\inf(\Omega_i) < \tau' < \sigma.$$

Тогда

$$\inf(\Omega_i) = \inf((\Omega_i \cup \{\tau'\}) \setminus \{\sigma\})$$

и множества $(\Omega_i \cup \{\tau'\}) \setminus \{\sigma\}$ и $\Omega_G \setminus \Omega_i$ не сравнимы между собой. Таким образом, для группы $H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G \setminus \{\sigma\}} H^{\tau} \oplus H_{\tau'}$ получаем, что

$$Z(E(G)) \cong Z(E(H)),$$

а группы G и H не изоморфны. Получили противоречие с условиями теоремы. $\square$

Теорема 3.8. *Пусть $G \in \mathbf{F_n}(ZE)$ и G не является делимой группой. Тогда для всякого не тривиального класса эквивалентности Ω_i, каждого максимального типа $\sigma \in \Omega_i$, множество*

$$\overline{W}_{i,\sigma} = \{\tau | \sigma < \tau\}$$

связано с $\Omega_G \setminus \Omega_i$.

Доказательство: Заметим, что множество $\overline{W}_{i,\sigma}$ не пусто для любого максимального типа σ. Действительно,

$$\tau(\mathbb{Q}) \in \overline{W}_{i,\sigma}.$$

Так как $\tau(\mathbb{Q}) > \tau$ для любого типа τ, то утверждение теоремы выполнено. Пусть теперь $\tau' \in \overline{W}_{i,\sigma}$ и $\tau' \neq \tau(\mathbb{Q})$. Предположим, что тип τ' не сравним с $\Omega_G \setminus \Omega_i$. Тогда для группы $H = \bigoplus_{\tau \in \Omega_G \setminus \{\sigma\}} H^\tau \oplus H_{\tau'}$ получаем, что

$$Z(E(G)) \cong Z(E(H)),$$

а группы G и H не изоморфны. Следовательно, $G \notin \mathbf{F_n}(ZE)$. Получили противоречие. $\square$

3.3. Один класс абелевых групп, определяющихся центрами их колец эндоморфизмов

В примере 3.1 указана не делимая группа, которая определяется своим центром кольца эндоморфизмов. Фактически этот пример описывает целый класс групп из $\mathbf{F_4}(ZE)$. Запишем приведенный пример группы в общем виде. Пусть $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \in \mathbf{F_4}$, где

$$N(A_1) = \{i\}\,, N(A_2) = \{i, j\}\,, N(A_3) = \{i, k\}\,, N(A_4) = \{j, k\}\,.$$

При попарно различных i, j, k будут получаться различные группы из $\mathbf{F_4}$, которые определяются своим центром кольца эндоморфизмов в классе $\mathbf{F_4}$.

Теорема 3.9. *Пусть* $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \in \mathbf{F_4}$, *где*

$$N(A_1) = \{i\}\,, N(A_2) = \{i, j\}\,, N(A_3) = \{i, k\}\,, N(A_4) = \{j, k\}\,.$$

Тогда $G \in \mathbf{F_4}(ZE)$.

Доказательство: Пусть $H \in \mathbf{F_{cd}}$ и $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$. Заметим, что $\Omega_G = \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G)$, где $\Omega_1(G) = \{\tau(A_1), \tau(A_2), \tau(A_3)\}$ и $\Omega_2(G) = \{\tau(A_4)\}$ — связные множества.

Так как $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$, то можем считать, что группа H удовлетворяет свойству (*).

Предположим, что $r(H) < 4$. Тогда Ω_H содержит два изолированных типа равных $\inf \Omega_1(G)$ и $\inf \Omega_2(G)$, что невозможно, так как $\inf \Omega_1(G) \leq \inf \Omega_2(G)$.

Пусть теперь $r(H) = 4$. Так как Ω_H содержит только два связных подмножества, то для

$$H \cong B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4$$

$$\Omega_H = \Omega_1(H) \cup \Omega_2(H),$$

где

$$\Omega_1(H) = \{\tau(B_1), \tau(B_2), \tau(B_3)\},$$

$$\Omega_2(H) = \{\tau(B_4)\}$$

возможны два случая:

1) $\inf \Omega_1(G) = \inf \Omega_1(H)$, $\inf \Omega_2(G) = \inf \Omega_2(H)$,

2) $\inf \Omega_1(G) = \inf \Omega_2(H)$, $\inf \Omega_2(G) = \inf \Omega_1(H)$.

Пусть имеет место первый случай. Тогда $\Omega_2(G) = \Omega_2(H)$ и $\tau(B_4) = \tau(A_4)$. Без ограничения общности будем считать, что $\tau(B_1)$ максимальный тип в $\Omega_1(H)$. Тогда $i \in N(B_1)$, $i \in N(B_2)$ и $i \in N(B_3)$, поскольку $\inf \Omega_1(G) \leq \tau(B_1)$ и тип $\tau(B_1)$ не сравним с $\tau(B_4)$.

Предположим, что $j \in N(B_1)$. Следовательно, $j \in N(B_2)$ и $j \in N(B_3)$. Тогда либо $k \in N(B_2)$, либо $k \in N(B_3)$, что невозможно, так как группа H удовлетворяет условию 5 теоремы 3.3.

Аналогично, если предположить, что $k \in N(B_1)$, приходим к противоречию.

Таким образом, $N(B_1) = N(A_1)$, а значит $N(B_2) = N(A_2)$, $N(B_3) = N(A_3)$ или $N(B_2) = N(A_3)$, $N(B_3) = N(A_2)$.

Получили, что $G \cong H$.

$\square$

Заметим, что приведенную выше теорему можно доказать полным перебором всех возможных групп из класса $\mathbf{F_4}$, множество типов которых имеют два связанных подмножества с соответствующими инфимумами.

Покажем теперь, что класс групп описанных в теореме 3.9 вместе с делимой группой и всевозможными жесткими группами ранга 4 составляют класс $\mathbf{F_4}(ZE)$.

Теорема 3.10. *Пусть группа $G \in \mathbf{F_4}(ZE)$. Тогда выполненно одно и только одно из следующих условий:*

1. G — делимая группа;

2. G — жесткая группа;

3. Для попарно различных i, j, k и некоторого разложения $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$:

$$N(A_1) = \{i\}\,, N(A_2) = \{i, j\}\,, N(A_3) = \{i, k\}\,, N(A_4) = \{j, k\}\,.$$

Доказательство: Пусть G не является делимой и не является жесткой группой. Покажем, что выполнено третье условие теоремы. Так как группа $G \in \mathbf{F_4}(ZE)$, то по теореме 3.3 G удовлетворяет свойству (*). Из условий теоремы 3.3 можем считать, что $\Omega_G = \Omega_1(G) \cup \Omega_2(G)$, где $\Omega_1(G) = \{\tau(A_1), \tau(A_2), \tau(A_3)\}$, $\Omega_2(G) = \{\tau(A_4)\}$ — связные множества и $\tau(A_1)$ — максимальный тип.

Пусть $N(A_1) = \emptyset$. Тогда Ω_G — связное множество и не выполнено условие 2 теоремы 3.3. Следовательно, $N(A_1) \neq \emptyset$ и найдется $i \in N(A_1)$. Получаем, что $i \in N(A_2)$, $i \in N(A_3)$. Кроме того, найдутся j, k такие, что $j \in N(A_2), j \notin N(A_3)$ и $k \in N(A_3), k \notin N(A_2)$

Предположим, что найдется $i_1 \neq i$ такое, что $i_1 \in N(A_1)$. Тогда найдется некоторое $i_2 \neq i, i_2 \neq i_1$ и возможны три случая:

a) $i \notin N(A_4)$, $i_1 \in N(A_4)$, $i_2 \in N(A_4)$;

b) $i \in N(A_4)$, $i_1 \notin N(A_4)$, $i_2 \in N(A_4)$;

c) $i \notin N(A_4)$, $i_1 \notin N(A_4)$, $i_2 \in N(A_4)$. Пусть выполнено условие a). Тогда множества

$$N(A_1') = \{i_1\}, N(A_2), N(A_3), N(A_4)$$

определяют группу $H \ncong G$ такую, что $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$. Если выполнено условие b) или c), то множества

$$N(A_1') = \{i\}, N(A_2), N(A_3), N(A_4)$$

определяют группу $H' \ncong G$ такую, что $Z(E(G)) \cong Z(E(H))$. Таким образом, доказано следующее: $N(A_1) = \{i\}$, $i \in N(A_2)$, $i \in N(A_3)$, $j \in N(A_2), j \notin N(A_3)$, $k \in N(A_3), k \notin N(A_2)$ и найдется некоторое $i_2 \neq i$, что $i_2 \in N(A_4)$.

Предположим, что $\bigcup_{t=1,2,3} N(A_t) \ni k_2$ и $k_2 \notin \{i, j, k\}$. Следовательно, $k_2 \in N(A_2)$ или $k_2 \in N(A_3)$. Заметим, что k_2 не может принадлежать множествам $N(A_2)$ и $N(A_3)$ одновременно. Пусть $k_2 \in N(A_2)$ и $k_2 \notin N(A_3)$. Тогда из определяемости группы G своим центром кольца эндоморфизмов следует, что $N(A_3) \cup \{k_2\} \supset N(A_4)$ и $N(A_3) \cup \{j\} \supset N(A_4)$. Так как $j \neq k_2$, то $N(A_4) \subset N(A_3)$. Получили противоречие.

Рассуждения для случая $k_2 \in N(A_3)$ и $k_2 \notin N(A_2)$ аналогичны.

Осталось показать, что $N(A_4) = \{j, k\}$. Действительно, так как $N(A_4) \subset \{i, j, k\}$, $i \notin N(A_4)$ и $N(A_3) \cup \{j\} \supset N(A_4)$, $N(A_2) \cup \{k\} \supset N(A_4)$, то $N(A_4) = \{j, k\}$.

$\square$

Заключение

В диссертационной работе получены некоторые необходимые и достаточные условия изоморфизма двух групп автоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения. Получен критерий определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения конечного своей группой автоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. Для класса вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 2 получены условия, необходимые и достаточные для изоморфизма двух групп автоморфизмов. Найдены достаточные условия определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения конечного ранга идемпотентного типа в классе всех таких групп. Приведены примеры групп показывающие, что полученные условия не являются необходимыми. В диссертации рассмотрен вопрос определяемости абелевой группы центром своего кольца эндоморфизмов, получены необходимые условия определяемости вполне разложимой абелевой группы центром своего кольца эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного фиксированного ранга, исследованы некоторые классы абелевых групп, которые определяются центрами колец эндоморфизмов.

Литература

1. *Bazzoni, S.* On abelian torsion-free separable gruops and their endomorphism rings / S. Bazzoni, C. Metelli // *Symposia Mathematica.* — 1979. — Pp. 259–285.

2. *Kaplansky, I.* Infinite Abelian groups / I. Kaplansky. — Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1969.

3. *Leptin, H.* Abelsche p-gruppen und ihre automorphismengruppen / H. Leptin // *Math. Z.* — 1960. — Vol. 73. — Pp. 235–253.

4. *Libert, W.* Isomorphic automorphism groups of primary abelian groups. ii / W. Libert // *Contemp. Math.* — 1989. — Vol. 87. — Pp. 51–59.

5. *Waterhouse, W.* Automorphisms of $GL_n(R)$ / W. Waterhouse // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1980. — Vol. 79. — Pp. 347–351.

6. *Антонова, Н. Ю.* Об изоморфизме группы гомоморфизмов двух абелевых групп без кручения одной из этих групп / Н. Ю. Антонова, А. М. Себельдин // *Известия высших учебных заведений.* — 1995. — Т. 393, № 2. — С. 53–59.

7. *Беккер, И. Х.* Автоморфизмы абелевых групп без кручения / И. Х. Беккер, С. Ф. Кожухов. — Томск: Томский гос. ун-т., 1988. — 238 с.

8. *Береговая, Т. А.* Определяемость вполне разложимых абелевых групп без кручения группами гомоморфизмов / Т. А. Береговая, А. М. Себельдин // *Матем. заметки.* — 2003. — Т. 73, № 5. — С. 643–648.

9. *Бунина, Е.* Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей / Е. Бунина,

А. В. Михалев // *Фундам. Прикл. Матем.* — 2004. — Т. 10, № 2. — С. 51–134.

10. *Бэр, Р.* Линейная алгебра и проективная геометрия / Р. Бэр. — Москва: ИЛ, 1955. — 400 с.

11. *Голубчик, И. З.* Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом / И. З. Голубчик, А. В. Михалёв // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика.* — 1983. — № 3. — С. 61–72.

12. *Гриншпон, С. Я.* Определямость периодических абелевых групп своими группами эндоморфизмов / С. Я. Гриншпон, А. М. Себельдин // *Матем. заметки.* — 1995. — Т. 57, № 5. — С. 663–669.

13. *Коленова, Е. М.* Вполне разложимые End-группы без кручения / Е. М. Коленова // *Изв. вузов. Матем.* — 2007. — № 7. — С. 53–56.

14. *Коленова, Е. М.* Об определяемости периодической $EndE^{+}$-группы своей группой эндоморфизмов / Е. М. Коленова // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2007. — Т. 13, № 2. — С. 123–131.

15. *Коленова, Е. М.* Об изоморфности абелевой группы своей группе эндоморфизмов / Е. М. Коленова, А. М. Себельдин // *Матем. заметки.* — 2006. — Т. 80, № 4. — С. 536–545.

16. *Кон, П.* О строении группы GL_2 над кольцом / П. Кон // *Автоморфизмы классических групп.* — 1976. — С. 31–56.

17. *Крылов, П. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев. — Москва: Факториал Пресс, 2006. — 512 с.

18. *Курманова, Е. Н.* Автоморфизмы прямых сумм рациональных групп / Е. Н. Курманова, А. Себельдин // *Математика в образовании: сб. статей. Вып. 6.* — 2010. — С. 243–249.

19. *Курош, А. Г.* Теория групп / А. Г. Курош. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 808 с.

20. *О'Мира, О.* Лекции о линейных группах / О. О'Мира // *Автоморфизмы классических групп.* — 1976. — С. 129–161.

21. *Себельдин, А. М.* Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Матем. заметки.* — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 403–408.

22. *Себельдин, А. М.* Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов, i / А. М. Себельдин // *Матем. заметки.* — 1973. — Т. 14, № 6. — С. 867–878.

23. *Себельдин, А. М.* Абелевы группы без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Абелевы группы и модули.* — 1979. — С. 157–162.

24. *Себельдин, А. М.* Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов, ii / А. М. Себельдин // *Абелевы группы и модули.* — 1979. — С. 151–156.

25. *Себельдин, А. М.* Абелевы группы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Усп. матем. наук.* — 1994. — Т. 49, № 6. — С. 211–212.

26. *Себельдин, А. М.* Определяемость векторных групп полугруппами эн-

доморфизмов / А. М. Себельдин // *Алгебра и логика.* — 1994. — Т. 33, № 4. — С. 422–428.

27. *Себельдин, А. М.* Абелевы группы некоторых классов с изоморфными кольцами эндоморфизмов / А. М. Себельдин // *Усп. матем. наук.* — 1995. — Т. 50, № 1. — С. 207–208.

28. *Себельдин, А. М.* Определяемость абелевых групп центром их кольца эндоморфизмов / А. М. Себельдин, Д. С. Чистяков // *Матем. заметки.* — 2008. — Т. 84, № 6. — С. 952–954.

29. *Фукс, Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. — Москва: Мир, 1974. — 335 с.

30. *Фукс, Л.* Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. — Москва: Мир, 1977. — 416 с.

Публикации автора по теме диссертации

31. *Вильданов, В. К.* К вопросу об определяемости вполне разложимых абелевых групп без кручения своими группами автоморфизмов / В. К. Вильданов, А. М. Себельдин // *Вторая всероссийская молодежная научно-инновационная школа „Математика и математическое моделирование“.* — Саров, 2008. — С. 3.

32. *Вильданов, В. К.* Об определяемости вполне разложимых абелевых групп без кручения своими группами автоморфизмов / В. К. Вильданов, А. М. Себельдин // *Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета : Сборник тезисов.* — Томск, 2008. — С. 36.

33. *Vildanov, V. K.* Groupe abelien determine par le centre de son anneau des endomorphismes / T.S. Barry, A.M Sebeldin, A.L. Sylla, V. K.Vildanov// *Revue des Scienses de l'Universite de Conakry, Serie Math-Phys.* — 2009. — №7. — Pp. 4–8.

34. *Вильданов, В. К.* Критерий определяемости группы ранга 2 своей группой автоморфизмов в классе вполне разложимых групп без кручения / В. К. Вильданов // *Четвертая Всероссийская молодежная научно-инновационная школа „Математика и математическое моделирование": Сборник материалов.* — Саров, 2010. — С.8.

35. *Вильданов, В. К.* Об определяемости вполне разложимой группы ее группой автоморфизмов / В. К. Вильданов, А. М. Себельдин // *Математические науки: Тезисы докладов на XV Нижегородской сессии молодых ученых.* — Нижний Новгород, 2010. — С. 8.

36. *Вильданов, В. К.* Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В. Яковлева.* — Санкт-Петербург, 2010. — С. 15.

37. *Вильданов, В. К.* Определяемость абелевой группы без кручения своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Алгебра и математическая логика: материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Морозова, и молодежной школы-конференции „Современные проблемы алгебры и математической логики".* — Казань, 2011. — С. 63–64.

38. *Вильданов, В. К.* Определяемость абелевых групп без кручения своими группами автоморфизмов / В. К. Вильданов //*Математика, ин-*

форматика и методика их преподавания: Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ. — Москва, 2011. — С. 39–40.

39. *Вильданов, В. К.* Определяемость абелевых групп своими группами автоморфизмов / В. К. Вильданов // *V Всероссийская молодежная научно-инновационная школа „Математика и математическое моделирование“: Сборник материалов.* — Саров, 2011. — С. 14.

40. *Вильданов, В. К.* Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2011. — № 3 (1). — С. 174–177.

41. *Вильданов, В. К.* Изоморфизмы групп автоморфизмов абелевых групп без кручения / В. К. Вильданов // *Абелевы группы: материалы Всероссийского симпозиума.* — Бийск, 2012. — С. 13.

42. *Вильданов, В. К.* Изоморфизмы групп автоморфизмов абелевых групп без кручения / В. К. Вильданов // *VI Всероссийская молодежная научно- инновационная школа „Математика и математическое моделирование“: Сборник материалов.* — Саров, 2012. — С. 49–50.

43. *Вильданов, В. К.* К вопросу об определяемости абелевых групп центрами их колец эндоморфизмов / В. К. Вильданов, А. М. Себельдин //*Математические заметки.* — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 44–48.

44. *Вильданов, В. К.* Определяемость вполне разложимой блочно жесткой абелевой группы своей группой автоморфизмов / В. К. Вильданов // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 13–19.

45. *Вильданов, В. К.* Условия изоморфизма групп автоморфизмов вполне разложимых групп без кручения / В. К. Вильданов // *Лобачевские чтения – 2012: материалы XI молодежной научной школы-конференции.* — Казань, 2012. — С. 35–36.

46. *Sebel'din, A. M.* The Question of the Definability of Abelian Groups by the Centers of Their Endomorphism Rings / A. M. Sebel'din, V. K. Vildanov // *Mathematical Notes.* – 2012. – Vol. 92, № 1. – Pp. 39–42. – DOI: 10.1134/S0001434612070048

47. *Vildanov, V. K.* Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group / V. K. Vildanov // *Journal of Mathematical Sciences (New York).* – 2014. – Vol. 197, № 5. – Pp. 590–594.