

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



Жуков Андрей Петрович

ДИНАМИКА ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ  
КРУПНОГАБАРИТНОГО ЗОНТИЧНОГО РЕФЛЕКТОРА  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Пономарев Сергей Васильевич

Томск – 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1. Физическая модель космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором.....	30
1.1. Основные характеристики космического аппарата с зонтичным рефлектором.....	30
1.2. Оценка массы и жесткости конструкции солнечных батарей.....	32
1.3. Конструкция зонтичного рефлектора.....	34
1.4. Характеристики физической модели космического аппарата.....	38
1.5. Нагрузки, действующие на космический аппарат.....	40
1.6. Необходимые допущения, упрощающие физическую модель космического аппарата.....	42
Глава 2. Математическая модель свободного нежесткого космического аппарата с крупногабаритным рефлектором.....	44
2.1. Выбор системы отсчета.....	44
2.2. Системы координат, используемые при численном моделировании космического аппарата и рефлектора.....	47
2.3. Геометрия офсетного рефлектора.....	48
2.4. Математическое описание движения нежесткого космического аппарата.....	56
2.4.1. Постановка задачи.....	56
2.4.2. Технология получения начальных условий.....	61
2.5. Конечноэлементная модель космического аппарата.....	67
2.5.1. Метод конечных элементов.....	67
2.5.2. Конечноэлементное представление уравнения движения нежесткого космического аппарата.....	69
2.5.3. Матрица демпфирования.....	72
2.5.4. Интегрирование уравнений движения.....	73
2.5.5. Собственные частоты и формы колебаний.....	75
2.5.6. Программная реализация.....	77

Глава 3. Верификация используемых программных элементов и численной динамической модели космического аппарата.....	80
3.1. Предварительные замечания.....	80
3.2. Малые колебания свободной упругой балки.....	80
3.3. Колебания с большой амплитудой упругой балки с заземленным концом.....	84
3.4. Колебания с большой амплитудой заземленной пластины.....	85
3.5. Сравнение результатов моделирования колебаний сетеполотна обобщенной модели мембранного рефлектора, полученных для различных реализаций конечноэлементной модели.....	86
3.6. Достоверность динамической конечноэлементной модели космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором	90
3.7. Вычислительные ресурсы.....	97
3.8. Выводы.....	97
Глава 4. Динамический анализ космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором.....	99
4.1. Собственные частоты и формы колебаний космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором.....	99
4.2. Реакция зонтичного рефлектор на действие одиночного возмущающего импульса.....	106
4.2.1. Характеристики возмущающего импульса и условия его приложения к космическому аппарату.....	106
4.2.2. Симметричное нагружение космического аппарата.....	108
4.2.3. Несимметричное нагружение космического аппарата.....	112
4.3. Реакция зонтичного рефлектор на действие возмущения в виде двух последовательных импульсов.....	115
4.3.1. Описание возмущения в виде двух последовательных импульсов.....	115
4.3.2. Симметричное нагружение космического аппарата.....	116
4.3.3. Несимметричное нагружение космического аппарата.....	119

4.4. Влияние формы одиночного возмущающего импульса на динамику отклонения отражающей поверхности зонтичного рефлектора от оптимального положения.....	121
4.5. Выводы.....	125
Глава 5. Моделирование процесса активного демпфирования колебаний нежесткого космического аппарата с зонтичным рефлектором.....	127
5.1. Жесткость полой балки при ее нагружении внутренним давлением.....	127
5.2. Численная реализация и результаты моделирования процесса активного демпфирования.....	130
5.3. Выводы.....	135
Заключение.....	137
Список литературы.....	139

## ВВЕДЕНИЕ

Высокие радиотехнические характеристики параболических антенн обусловили их широко применение в конструкциях космических аппаратов. Первые антенны такого типа имели нетрансформируемые конструкции. Поэтому их диаметр ограничивался размерами отсека полезной нагрузки ракеты-носителя. Параболическая антенна космического аппарата Pioneer-10 (рисунок В.1), запущенного в марте 1972 г [138], имела диаметр 2,74 м. Размер антенны был немного меньше диаметра головного обтекателя ракеты-носителя, который составлял 3,05 м [74]. Через тридцать лет после запуска эта антенна обеспечивала связь космического аппарата с Землей, когда расстояние между ними составляло более 12 миллиардов километров [137].



Рисунок В.1 – Параболическая антенна космического аппарата Pioneer-10

Развитие систем мобильной связи, средств метеорологического мониторинга и наблюдения за наземными и космическими объектами потребовало качественного улучшения характеристик спутниковых параболических рефлекторов. Антенны нового поколения должны обеспечивать большой коэффициент усиления, прием и передачу высокочастотного широкополосного сигнала, иметь высокое угловое

разрешение. Эти требования могли быть реализованы только при больших размерах апертуры и жестких ограничениях на величину среднеквадратического отклонения (СКО) отражающей поверхности рефлектора от формы идеального параболоида. Величина СКО является одним из основных критериев качества зеркала рефлекторной антенны. Допустимое значение СКО не должно превышать величины 2–3% от рабочей длины волны [1], [119].

Вследствие увеличения своих размеров антенны уже не помещались в грузовых отсеках ракет-носителей. Естественным решением этой проблемы явился переход к трансформируемым рефлекторам. В транспортном положении такой рефлектор складывался и занимал небольшой объем, а после вывода на орбиту антенна каким-либо способом разворачивалась и переводилась в рабочее состояние.

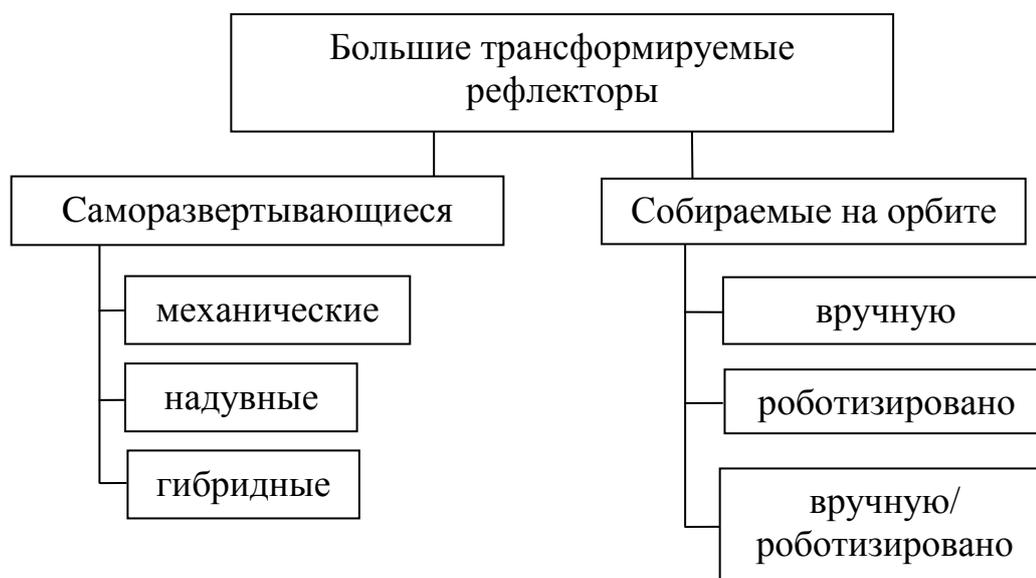


Рисунок В.2 – Классификация больших трансформируемых рефлекторов по способам развертывания

Сформировалось несколько направлений развития больших трансформируемых рефлекторов (рисунок В.2) [20], [84]. Они отличаются принципами, на которых строится процедура развертывания конструкции. Результаты, достигнутые в рамках этих направлений, значительно

различаются по степени теоретической, технической и практической проработки.

Наибольшее развитие получили саморазвертывающиеся рефлекторы, которые приводятся в рабочее состояние без выполнения дополнительных операций по сборке или разборке. Развертывание выполняется с помощью механического привода, энергии упругих деформаций, давлением сжатого газа.

Рефлекторы с механическим способом развертывания успешно работают в составе спутниковых систем [72], [73], [81], [84], [93], [96], [113]–[115], [125], [130], [134], [141]–[143], [147], [148]. При всем разнообразии конструкций, они могут быть объединены в следующие группы:

- трансформируемые, вантово-стержневые структуры с зеркалом рефлектора, сформированном из ткани (сетеполотна), изготовленной из тонких, металлических нитей (mesh-рефлектор);

- трансформируемые системы жестких панелей с шарнирными соединениями, в развернутом состоянии образующие отражающую поверхность параболической формы;

- тонкие оболочки параболической формы, которые упруго деформируются (сворачиваются) в транспортное положение и возвращаются к первоначальной форме после снятия закреплений (spring-back рефлектор).

На рисунке В.3 показан mesh-рефлектор, созданный совместно NASA Jet Propulsion Laboratory и Lockheed Missiles and Space Company для спутника ATS-6. Рефлектор имел 48 гибких спиц с заданным параболическим профилем, которые при транспортировке упруго деформировались и сворачивались вокруг ступицы. В сложенном положении антенна представляла цилиндр диаметром 2 м и высотой 0,45 м. Развертывание осуществлялось благодаря упругой энергии накопленной в спицах, на что в вакууме требовалось около 2 секунд. Полная масса антенна составила 60 кг. Зеркало антенны формировалось из дакронового сетеполотна с покрытием из

меди. Сетеполотно закреплялось непосредственно на спицах. При этом СКО не превышало 0,8 мм.

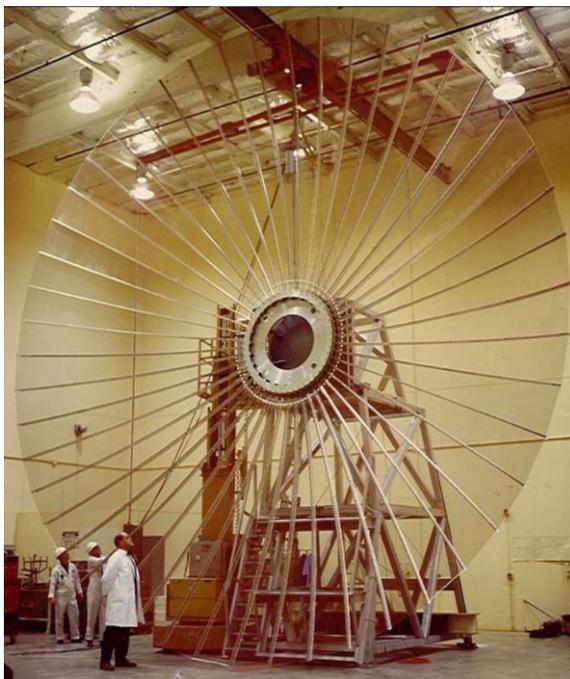


Рисунок В.3 – Рефлектор с гибкими спицами диаметром 9,1 м  
для спутника ATS-6

Фирма Harris Corporation разработала рефлектор диаметром 5 м с 18 жесткими параболическими спицами для спутников NASA TDRS и Galileo (рисунок В.4).



Рисунок В.4 – Рефлектор с жесткими спицами диаметром 5 м

Эта конструкция относится к зонтичному типу, так как ее спицы складывались вокруг штанги, на которой закреплен субрефлектор, подобно спицам зонтика. В сложенном состоянии диаметр пакета равнялся 0,9 м, его высота составила 2,7 м. Материал сетеполотна – молибденовая позолоченная проволока. Сетеполотно, как и в предыдущем случае (рисунок В.3), также крепилось к спицам. Масса конструкции составила 24 кг, величина СКО – 0,56 мм. В космос было запущено 12 таких рефлекторов.

Конструкции, показанные на рисунках В.3 и В.4, имели в своем составе достаточно большое количество параболических спиц. Переход к вантовой системе формирования отражающей поверхности (рисунок В.5) позволил уменьшить их количество.

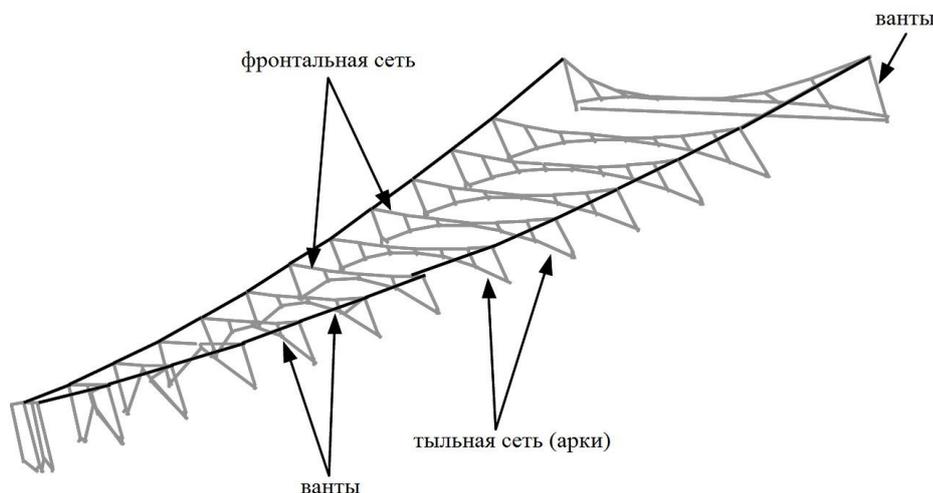


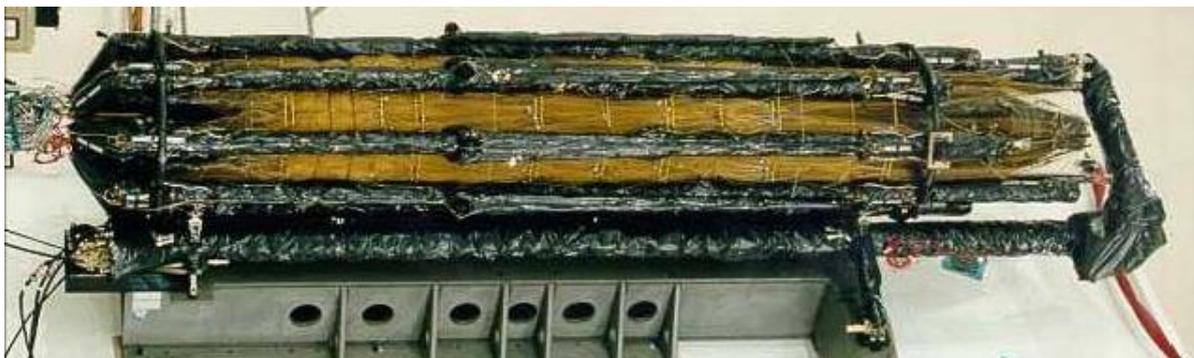
Рисунок В.5 – Вантовая система формирования отражающей поверхности зонтичного рефлектора. Показан один сектор, сетеполотно не отображено

Примером зонтичной антенны с вантовой системой формирования отражающей поверхности может служить рефлектор фирмы Harris Corporation с восемью спицами, спроектированный для Азиатского Спутника Сотовой Связи (АСеС) (рисунок В.6). Диаметр антенны составил 12 м. В сложенном виде конструкция имела длину 4,5 м и диаметр 0,86 м. Общая масса антенной системы достигала 127 кг, при этом около половины от нее

приходилось на массу рефлектора. На космическом аппарате Garuda-1, запущенном в 2000 г, было установлено два таких рефлектора.



а) рабочее состояние



б) транспортное состояние

Рисунок В.6 – 12-метровый зонтичный рефлектор с вантовой системой формирования отражающей поверхности

Фирма Astro Aerospace Corporation разработала рефлектор (AstroMesh) с силовым каркасом в виде ободной фермы, который показан на рисунке В.7. Формирование отражающей поверхности осуществлялось с помощью вантовой системы, соединенной с двумя сетчатыми структурами, к одной из которых прикреплено сетеполотно, изготовленное из молибденовой позолоченной проволоки. Отсутствие деления на секторы позволило сделать ячейки фронтальной сети практически одного размера, что улучшило точность отражающей поверхности. Конструкция обладала малой массой и занимала небольшой объем в сложенном состоянии. Кроме этого она

характеризовалась высокой жесткостью и термической стабильностью. При апертуре равной 12,25 м полная масса составила 57 кг, а СКО зеркала антенны находилось в пределах 1,4 мм. Вариант рефлектора диаметром 6 м имел массу 14,5 кг и СКО – 0,62 мм.

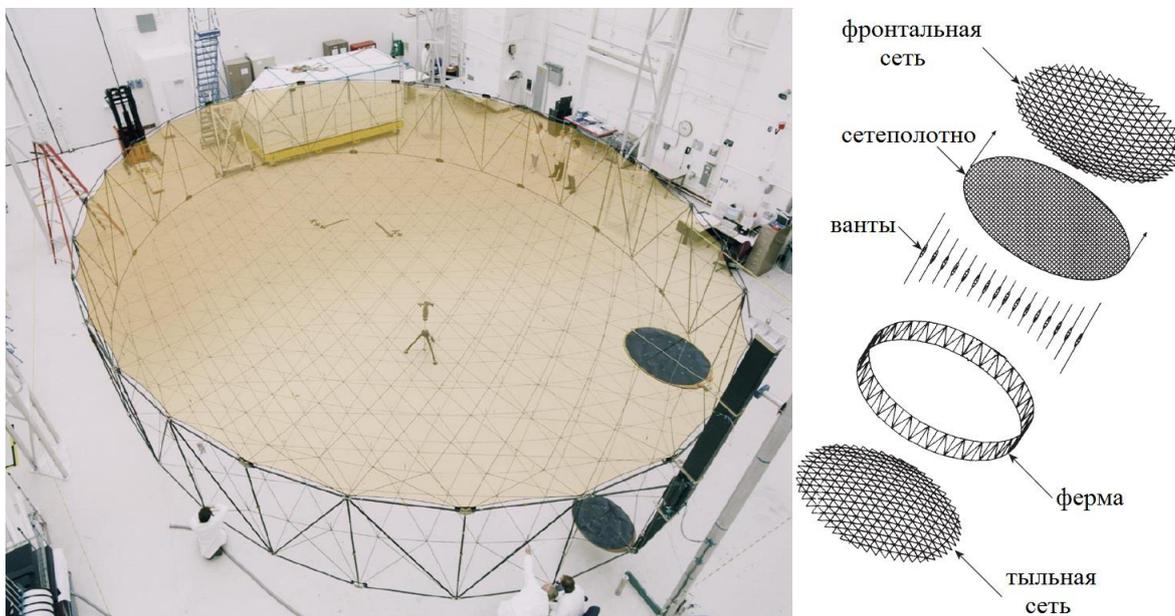


Рисунок В.7 – Рефлектор типа AstroMesh

Конструкциям mesh-рефлекторов присущи систематические погрешности в аппроксимации отражающей поверхности. В основном эти погрешности обусловлены так называемым "подушечным эффектом" (pillow effect), а также отклонением сетеполотна внутри ячеек фронтальной сети.

Значительно лучшим качеством отражающей поверхности обладают рефлекторы на основе разворачиваемой системы жестких панелей [93], [125] либо рефлекторы типа spring-back [113]–[115], [134], [147].

На рисунке В.8 показан рефлектор Sunflower фирмы TRW с жесткими панелями. При диаметре 10 м такая конструкция обеспечивала СКО не более 0,13 мм. Рефлектор, с апертурой 4,9 м, в сложенном состоянии имел длину 1,8 м и диаметр 2,15 м.

Концепция антенны, способной упруго деформироваться была впервые предложена Робинсоном [134]. Зеркало такой антенны представляет тонкую и гибкую поверхность, усиленную упругим углепластиковым каркасом

(рисунок В.9). При диаметре апертуры 6 м, толщина параболической оболочки варьируется от 0,3 мм до 3,2 мм, при массе около 20 кг. Конструкция обеспечивает высокую точность отражающей поверхности, надежность и простоту процедуры развертывания. Однако в свернутом состоянии длина пакета равна диаметру рефлектора. В результате диаметр рефлектора не может быть больше длины обтекателя ракеты-носителя.

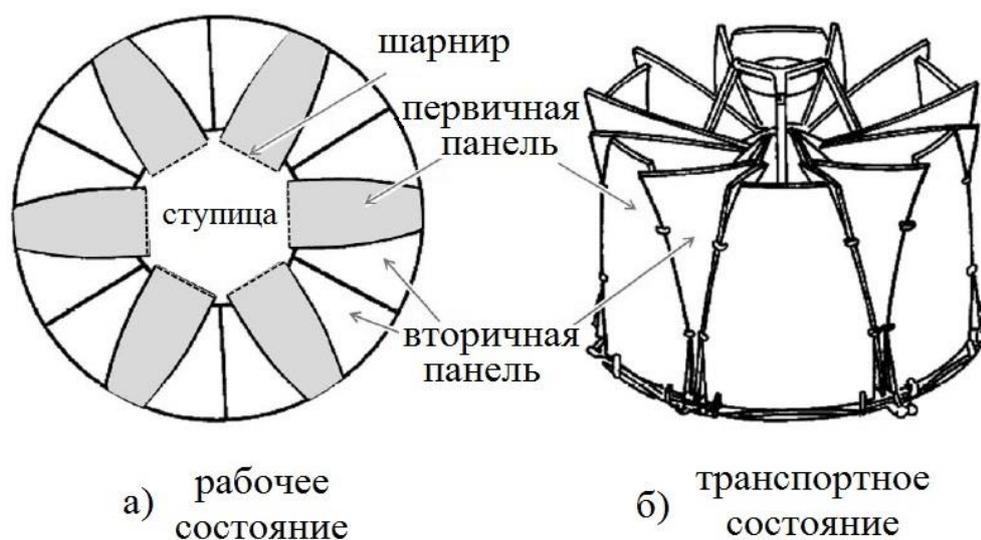


Рисунок В.8 – Рефлектор TRW Sunflower на основе развертываемой системы жестких панелей



Рисунок В.9 – Рефлектор типа spring-back

Используемые в настоящее время материалы для формирования отражающей поверхности mesh-рефлекторов изготавливаются из тонкой позолоченной вольфрамовой или молибденовой проволоки толщиной 10–30 мкм. Плотность такого материала составляет около 40 г/м<sup>2</sup> [66]. В результате масса материала отражающей поверхности для рефлектора диаметром 50 м достигает 80 кг, что является достаточно большой величиной. Необходимость уменьшения массы рефлектора, а также его габаритных размеров в сложенном состоянии стимулировало исследования, направленные на создание крупногабаритных антенн на основе надувных конструкций.

Надувная антенна изготавливается из тонкой, прочной, газонепроницаемой пленки. Ее форма поддерживается за счет давления газа, заполняющего внутренний объем. Отражающий слой создается путем напыления на пленку тонкого слоя металла. Пример такой конструкции является экспериментальная антенна фирмы L'Garde [139], показанная на рисунке В.10.

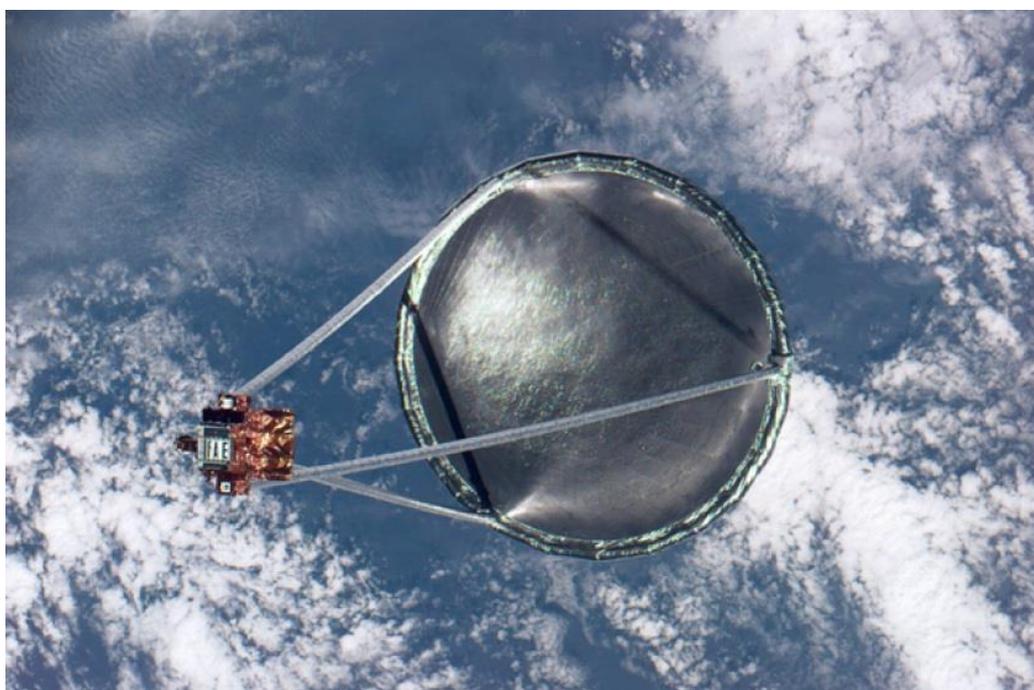


Рисунок В.10 – Надувная антенна диаметром 14 м

Эта антенна имела диаметр 14 м и состояла из трех типов надувных элементов: рефлектора, элемента жесткости, расположенного по периметру рефлектора и трех опор длиной 28 м.

К основным факторам, влияющим на точность формы надувного рефлектора, следует отнести термический нагрев, внутриволновое давление газа, краевые эффекты. Совершенствование надувных конструкций ведется в направлении создания материалов с низким коэффициентом термического расширения, тонких самоотверждающихся полимерных пленок, развития методов адаптивного управления [79], [95]. Для поддержания формы рефлектора на спутнике должен находиться запас газа, который предназначен для компенсации утечек из-за возможной потери герметичности. Масса такого газа при 10-летнем сроке эксплуатации становится неприемлемо большой [79]. Применение материалов, способных самоотвердаться через некоторое время после развертывания рефлектора, является одним из решений данной проблемы.

В гибридных конструкциях одновременно используются несколько принципов развертывания: энергия механических деформаций, давление наддува. Примером гибридного рефлектора является конструкция, показанная на рисунке В.11 [95], [116], [87].

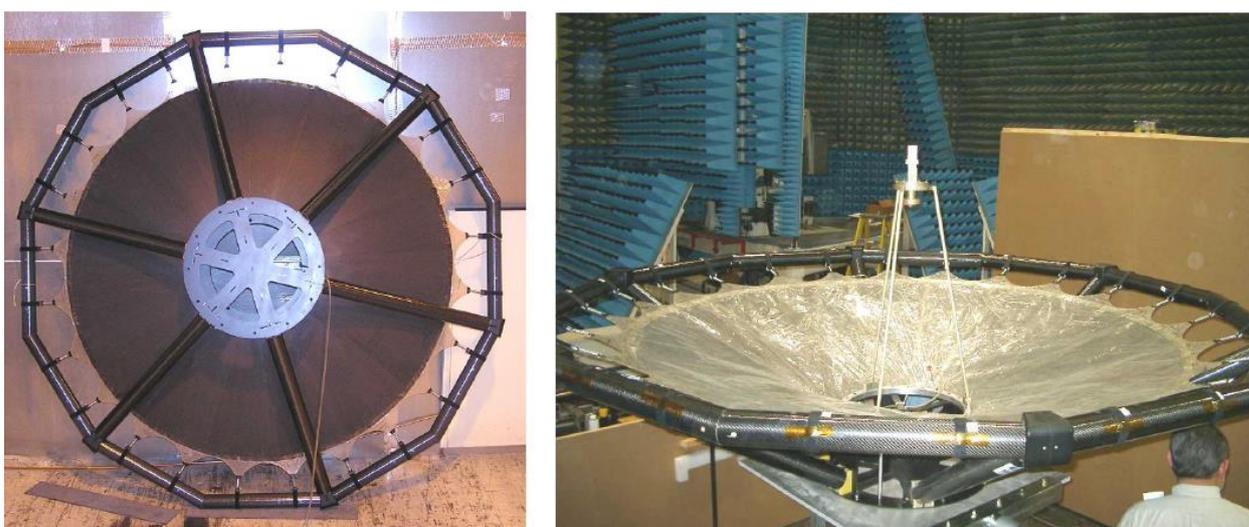


Рисунок В.11 – Гибридная антенна диаметром 2 м

Силовой каркас антенны представляет оболочку, изготовленную из полимерного материала с памятью формы. По сравнению с mesh-рефлекторами такая конструкция обладает значительно меньшим объемом в сложенном состоянии. На начальном этапе разворачивания основную роль играют механические напряжения, обусловленные механизмом эффекта памяти формы. Однако по мере раскрытия их величина падает и на заключительном этапе используется наддув, помогающий завершить разворачивание. Затем происходит отверждение материала.

Зеркало антенны также изготовлено из материала с памятью формы. Для его разворачивания и формирования используются встроенные надувные полости.

В настоящее время гибридные антенны находятся в стадии исследования инженерных моделей.

Рассмотренные конструкции трансформируемых рефлекторов имеют пределы практической применимости, так как увеличение геометрических размеров обычно приводит к уменьшению рабочей частоты. Концептуально эту проблему предлагается решать путем создания конструкций собираемых в космосе. В работах [123], [124] рассматривалась конструкция сегментированного рефлектора диаметром 10–40 м, и величиной СКО около 20 мкм (рисунок В.12).

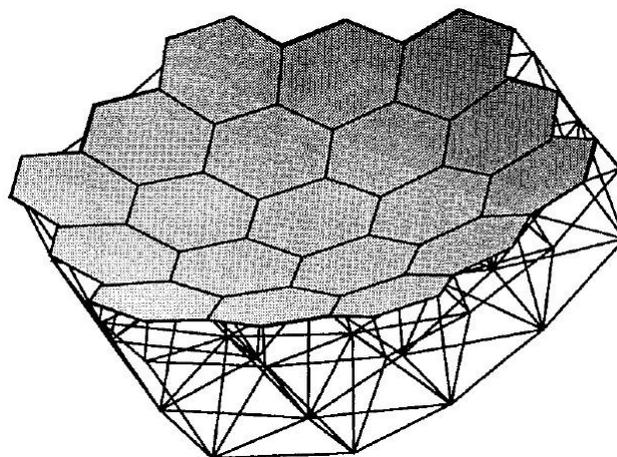


Рисунок В.12 – Сегментированный рефлектор диаметром 16,6 м

Конструкция состояла из фермы, с закрепленными на ней шестиугольными панелями, форма которых с высокой точностью аппроксимировала теоретический профиль отражающей поверхности. Размеры сегментов в значительной степени зависят от геометрии грузового отсека космического транспортного средства. Разработчики данной концепции опирались на возможности космического корабля типа Space Shuttle. Поэтому размеры сегментов ограничивались величиной 4,2 м. Следует учесть, что диаметр такого рефлектора определяется не только размером сегментов, но и их количеством.

Проведенный многопараметрический анализ конструкции рефлектора позволил определить зависимости геометрии фермы и количества ее конструктивных элементов, полной массы и жесткости рефлектора от его диаметра, количества панелей и их размера.

В соответствии с принятой концепцией полагалось, что рефлектор выводится в космос в разобранном состоянии, что обеспечивало высокую плотность упаковки. Затем выполнялась его сборка вручную либо с применением средств автоматизации и робототехники. Сделана оценка времени сборки, как фермы, так и рефлектора в целом в зависимости от количества сегментов и времени, затрачиваемого на выполнение элементарных операций.

Основным фактором, ограничивающим диаметр сегментированного рефлектора, является количество запусков космической транспортной системы, необходимых для доставки всех элементов конструкции. При одном запуске носителя, подобного Space Shuttle, диаметр сегментированного рефлектора может достигать 50 м.

Вопросы сборки больших космических конструкций в космосе рассмотрены в работах [18], [78].

Экспериментальное и практическое применение концепции собираемых конструкций сдерживается высокой стоимостью таких проектов.

На рисунке В.13, в обобщенном виде, представлены оценки областей применимости различных типов рефлекторов [96]. Высокую рабочую частоту имеют жесткие рефлекторы, что связано с высоким качеством отражающей поверхности. Однако их диаметр ограничен размерами отсека полезной нагрузки ракеты-носителя. Надувные конструкции могут обеспечить большой диаметр апертуры, но им свойственны низкие рабочие частоты.

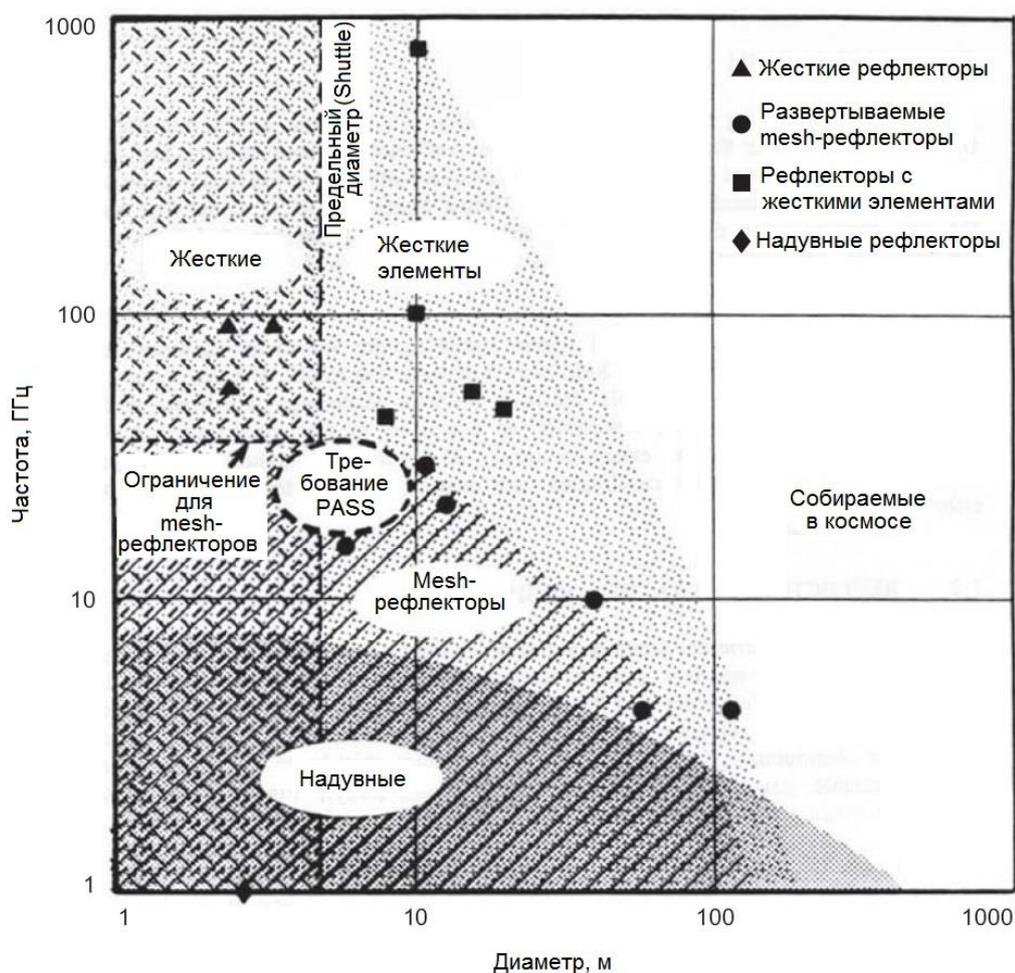


Рисунок В.13 – Области применимости различных типов рефлекторов (PASS - спутниковая система персонального доступа)

При разработке концепции крупногабаритного трансформируемого рефлектора возникает ряд проблем, основными из которых являются:

- определение напряженно-деформированного состояния рефлектора при минимальном СКО отражающей поверхности;
- разработка эффективной процедуры регулирования рефлектора;

- оценка влияния силы тяжести при наземных испытаниях;
- разработка конструкционных материалов с оптимальными характеристиками;
- определение тепловых деформаций при неравномерном нагреве конструкции;
- расчет радиотехнических характеристик антенны с учетом геометрического несовершенства отражающей поверхности;
- динамика разворачивания рефлектора;
- динамика рефлектора при возмущающем действии систем управления космическим аппаратом.

Решение этих задач путем прямого физического моделирования требует значительных материальных затрат и времени. В связи с этим большое значение приобрели методы математического моделирования, которые значительно сокращают временной путь от предложения концепции до ее реализации и при этом позволяют адекватно учесть такие факторы как невесомость, вакуум, теплообмен в космосе, что в наземных экспериментах сделать затруднительно или просто невозможно.

Для локального исследования конструкций рефлекторов, а это в основном балочные или ферменные структуры, используются аналитические модели [126]–[128], [136]. Однако наиболее широкое применение нашли комплексные математические модели на основе численных методов [77], [101], [103], [117], [140] метода конечных элементов, который реализован в программных пакетах ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и др.

В работах С. Пеллегрини и С. Лая [105]–[109] рассматривался большой круг вопросов, связанных с напряженно-деформированным состоянием рефлекторов зонтичного типа. Основная цель состояла в определении взаимосвязи между геометрическими характеристиками рефлектора (диаметр, фокусное расстояние, допустимая величина СКО, параметр офсетности) и его конструктивными параметрами.

Для проведения численного анализа использовались методы плотности сил и конечных элементов. В основе метода плотности сил лежит представление сетеполотна в виде триангулярной системы кабелей, причем напряжения в сетеполотне преобразовывались в эквивалентные силы натяжения кабельных элементов. Рассмотрено влияние предварительного натяжения сетеполотна, количества и профиля спиц на форму рефлектора и величину СКО. Показана принципиальная возможность создания офсетного рефлектора со спицами.

Геометрические аспекты конструкций крупногабаритных рефлекторов представлены в работах Д. Хеджпета, М. Микуласа, Д. Фагера и др. В работах [67], [68] оценивалось влияние технологических допусков и тепловых деформаций на точность формы отражающей поверхности. Соответствие геометрических параметров ферменных конструкций силового каркаса рефлектора требованиям механической жесткости и тепловой стабильности рассматривалось в работах [83], [92], [110], [120], [121]. В работе [91] выполнены оценки нагрузок, в зависимости от диаметра орбиты, которые действуют на рефлектор со стороны факторов околоземного космического пространства. Необходимая жесткость ферменной конструкции оценивалась не только по величине внешней квазистатической нагрузки, но и с учетом динамических свойств системы управления.

Отражающая поверхность рефлектора из сетеполотна требует предварительной настройки. При выполнении этой процедуры, с помощью системы оттяжек, добиваются наилучшего соответствия отражающей поверхности форме идеального параболоида. Методики настройки отражающей поверхности зонтичного рефлектора рассматривались в работах [77], [53], [124]. Алгоритм основывался на использовании матрицы влияния, которая представляла набор коэффициентов, показывающих степень влияния изменения длины отдельной управляющей ванты на перемещения узлов фронтальной сети. Коэффициенты матрицы влияния определялись расчетным путем из конечноэлементного анализа напряженно-

деформированного состояния рефлектора. Работа алгоритма настройки тестировалась как на численных, так и на инженерных моделях.

Проблема оптимального выбора параметров (прочность, жесткость) для композиционных материалов на основе углеволокна рассмотрена в работе [62].

Термоструктурный анализ больших космических конструкций включает [144]:

- определение температурного поля и реакции конструкции на воздействие падающего излучения [50], [51], [56], [88], [98], [154] на основе численного решения уравнений теплопроводности и механики твердого тела с граничными условиями, учитывающими орбитальное движение космического аппарата относительно Земли и эффекты самозатенения [23], [118];

- изменение жесткости конструкции обусловленное длительной деградацией свойств композиционных материалов [102];

- численное моделирование нелинейных эффектов в тепловых задачах [117], вызванных зависимостью свойств композиционных материалов от температуры;

- численное моделирование термически индуцированных колебаний конструкции [85], [86], [99], [100], [145], [146] возникновение которых характерно для больших балочных систем с очень низким уровнем собственных частот.

В работах [37]–[39], [43], [44], [150] посвященных задачам динамики развертывания космического рефлектора, определяются динамические и кинематические параметры процесса развертывания. Основные требования, которым должен удовлетворять этот процесс, сформулированы в работе [43]: упорядоченность, отсутствие рывков и ударных нагрузок, отсутствие соударений между элементами конструкций, непродолжительность по времени. Постановка задачи ограничивается силовым каркасом рефлектора.

Отражающая поверхность из сетеполотна и формообразующая система не рассматриваются.

В работах, выполненных в НИИПММ ТГУ С. В. Пономаревым, В.Г. Бутовым и др., построены численные модели напряженно-деформированного состояния сетчатых отражающих поверхностей зонтичных рефлекторов [4], [5], [7]–[9] исследованы механические свойства сетеполотен и вантовых шнуров [31], [45]–[47], [49] разработаны методы настройки отражающей поверхности зонтичных рефлекторов [12], [13], [59]. Предложена методика определения диаграммы направленности рефлектора, с учетом несовершенства формы отражающей поверхности [26]–[28].

Тепловая модель рефлектора, разработанная А. А. Ящуком (НИИПММ ТГУ) [15], определяет нестационарное тепловое поле крупногабаритного рефлектора в условиях движения по геостационарной орбите. Рассчитанному полю температур соответствуют температурные деформации, полученные из решения стационарных уравнений механики твердого тела [14]. В своем полном виде эта модель [71] учитывает неравномерный нагрев Солнцем и взаимное затенение элементов конструкции. Для корректировки тепловых искажений отражающей поверхности предложен алгоритм, использующий матрицу влияния.

В ряде работ рассматривались вопросы динамики зонтичного рефлектора как отдельной конструкции [10], так и в составе космического аппарата [11], [29], [30], [32]–[34].

#### АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

В настоящее время наибольшее развитие и широкое применение на практике получили рефлекторы зонтичного типа с отражающей поверхностью, изготовленной из металлического сетеполотна. К концу 2011 года общее число, запущенных космических аппаратов, имеющих рефлекторы такого типа, превысило 51 единицу [143].

Эффективность работы крупногабаритного зонтичного рефлектора определяется условиями его функционирования в составе космического

аппарата. На свободно движущийся космический аппарат действуют динамические нагрузки со стороны работающих систем. Так как такой аппарат, имеющий в своем составе крупногабаритные антенны и панели солнечных батарей большого размаха, обладает малым уровнем жесткости, то динамические нагрузки вызывают колебания, затрагивающие все элементы конструкции. Колебания рефлектора нарушают соответствие между формой отражающей поверхности и идеальным параболоидом, что отрицательно влияет на радиотехническую эффективность рефлектора. Подобная проблема возникла с японским спутником VSOP-2 [135], который, находясь на орбите, должен был совершать повороты на  $3^\circ$  через каждые 15 с.

Динамические характеристики отдельного рефлектора рассмотрены в работах [21], [76], [80]. При этом под ними понимались формы собственных колебаний и спектр собственных частот, которые рассматривались как характеристики жесткости механической системы.

Динамике больших космических конструкций посвящено достаточно много работ. Общие методы динамического анализа представлены в работе [2]. Обзорная работа по моделированию движения и управления большими космическими конструкциями [129] содержит обширную библиографию по этой теме. Однако в открытой литературе [133], [149], [153] вопросы динамики рефлектора в составе космического аппарата, практически не освещены. Так в работе [133] рассматривается нежесткий космический аппарат, состоящий из корпуса, к которому присоединены гибкие элементы, в обобщенном виде представляющие солнечные панели, антенны и т.д. При этом внутренняя динамика таких элементов не рассматривается.

В работе [19] исследовалась динамика упругой трансформируемой конструкции космического аппарата. Однако, рассматриваемые в этой работе модели, не содержали крупногабаритных рефлекторных антенн.

Для решения задач динамики больших космических конструкций в основном применяются численные методы. В этой связи следует отметить

работу П.А. Белоножко и др. [3], а также работы О.П. Клишева и В.И. Халимановича [40] и В.А. Бужинского, О.П. Клишева, А.И. Мытарева [6]. В первой работе оценивалось воздействия динамических факторов на точность формы отражающей поверхности зонтичной рефлекторной антенны. Для этого рассматривалась численная модель обособленной меридиональной цепи, нагруженной силами натяжения вант. При этом сетеполотно не учитывалось. В остальных двух работах методом суперпозиции форм собственных колебаний построена математическая модель космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором и панелями солнечных батарей. Штанга соединяла корпус космического аппарата со ступицей рефлектора.

Метод суперпозиции собственных форм колебаний и его модификации широко используется в динамическом анализе конструкций космических аппаратов благодаря своей экономичности в отношении вычислительных ресурсов. Однако его применение ограничено линейными задачами. При этом реализация метода всегда сопряжена с вопросами выбора собственных форм колебаний, на основе которых будет строиться решение, а также способа их определения.

В настоящее время актуальным является разработка математических моделей и пакетов программ, прогнозирующих динамическое поведение крупногабаритных зонтичных рефлекторов в составе космического аппарата. Для этих задач наиболее перспективным является прямой метод моделирования на основе геометрически нелинейной системы уравнений движения деформируемого твердого тела. Он позволяет комплексно рассмотреть динамику конструкции с минимальным количеством допущений, учесть различные типы нелинейностей и граничных условий, оценить эффективность методов стабилизации отражающей поверхности антенны.

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью данной работы является создание динамических математической и численной моделей нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором, проведение на их основе исследования динамического состояния отражающей поверхности рефлектора при различных условиях функционирования космического аппарата.

Достижение данной цели решались следующие задачи:

1. Разработка математической модели движения нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором на основе нестационарной, нелинейной системы уравнений механики деформируемого твердого тела.

2. Постановка начальных условий, учитывающих преднапряженное состояние конструкции рефлектора, которое обусловлено предварительной настройкой формы отражающей поверхности.

3. Разработка численной модели движения нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором и ее реализация в виде пакета программ.

4. Разработка метода получения начальных условий для численной модели движения космического аппарата, учитывающей различные способы крепления рефлектора.

5. Численное исследование влияния возмущения, приложенного к корпусу свободного нежесткого космического аппарата, на форму отражающей поверхности зонтичного рефлектора.

6. Моделирование процесса активного демпфирования колебаний нежесткого космического аппарата с зонтичным рефлектором на основе принципа нагружения внутренним давлением полой штанги, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата.

## ОБЩАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

При выполнении диссертационной работы применялись методы механики деформируемого твердого тела, метод конечных элементов.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА ДИССЕРТАЦИИ состоит в следующем:

1. Предложена математическая модель движения нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором на основе геометрически нелинейной системы уравнений движения деформируемого твердого тела, с начальными условиями, учитывающими преднапряженное состояние конструкции рефлектора.

2. Предложена конечноэлементная модель нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором, учитывающая все основные элементы конструкции, в том числе и отражающую поверхность рефлектора.

3. Предложен метод получения начальных условий для численного решения задачи движения нежесткого космического аппарата при различных способах крепления крупногабаритного зонтичного рефлектора.

4. С использованием конечноэлементной модели космического аппарата рассмотрена динамика СКО отражающей поверхности рефлектора при действии возмущений, моделирующих работу системы управления.

5. На основе полученных результатов определено условие согласования параметров возмущений с собственными частотами нежесткого космического аппарата, при которых динамическое отклонение СКО от стационарного значения минимально.

6. Предложен метод активного демпфирования колебаний нежесткого космического аппарата, использующий свойство полой штанги, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата, изменять изгибную жесткость при ее нагружении внутренним давлением.

7. Численно показана принципиальная работоспособность предложенного метода активного демпфирования колебаний нежесткого космического

аппарата. Получены коэффициенты затухания колебаний СКО отражающей поверхности зонтичного рефлектора в зависимости от величины внутреннего давления в полый штанге, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата.

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Предложенная математическая модель движения нежесткого КА с крупногабаритным зонтичным рефлектором строится на основе геометрически нелинейной системы уравнений движения деформируемого твердого тела, что является ее основным отличием от широко распространенных математических моделей космического аппарата, использующих метод суперпозиции собственных форм колебаний. Такая модель наиболее полно описывает динамику нежесткого космического аппарата, учитывает нелинейность задачи, позволяет рассматривать сложные сценарии нагружения.

Предложенная математическая модель реализована в численной модели в виде пакета программ, написанных на языке программирования APDL системы конечноэлементного моделирования ANSYS. При построении численной модели учитывалось, что конструкция космического аппарата представляет систему одномерных (балки) и двумерных (панели, оболочки) элементов. Это позволило снизить затраты вычислительных ресурсов до уровня, приемлемого для современных персональных компьютеров.

Данный программный пакет позволяет проводить динамический анализ конструкции нежесткого космического аппарата с зонтичным рефлектором в широких диапазонах изменений конструктивных параметров. Структура пакета допускает внедрение новых программных компонент для описания изменений или дополнений в конструкции космического аппарата и рефлектора. Разработанные модели и пакет программ использовались при выполнении совместных работ с ОАО «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПУТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ» имени академика М. Ф. Решетнева при

проектировании и отработки конструкций крупногабаритных трансформируемых рефлекторов.

#### ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ:

1. Математическая и конечноэлементная модели нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором.

2. Метод получения начальных условий для численного решения задачи движения нежесткого космического аппарата при различных способах крепления крупногабаритного зонтичного рефлектора.

3. Результаты численного исследования реакции зонтичного рефлектора на возмущения, действующие на космический аппарат.

4. Условие согласования параметров возмущения с собственными частотами нежесткого космического аппарата, минимизирующее динамические искажения формы отражающей поверхности зонтичного рефлектора.

5. Численная модель и результаты численного моделирования активного демпфирования колебаний зонтичного рефлектора при нагружении внутренним давлением полый штанги, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата.

#### ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ИХ АПРОБАЦИЯ

Достоверность полученных результатов обеспечена адекватностью используемых физической и математической моделей, тестированием численной модели на основе имеющихся экспериментальных данных, аналитических и численных решений. Сходимость численных алгоритмов подтверждена сопоставлением результатов расчетов, выполненных для различных пространственных конечноэлементных сеток и шагов интегрирования по времени.

Материалы диссертационной работы представлялись на следующих конференциях:

1. IX Международная научная конференция посвященная 45-летию СибГАУ им. ак. М.Ф. Решетнева, 10-12 ноября, 2005, г. Красноярск;

2. V Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», 3-5 октября, 2006, Томск;

3. VII Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», 12-14 апреля, 2011, Томск;

4. VIII Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», 23-25 апреля, 2013, Томск.

## ПУБЛИКАЦИИ

По теме диссертации опубликовано 8 работ:

1. Бутов В.Г., **Жуков А.П.**, Пономарев С.В., Солоненко В.А., Халиманович В.И. Динамика трансформируемой конструкции рефлектора // Материалы IX Международной научной конференции посвященной 45-летию СибГАУ им. ак. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 10-12 ноября, 2005, С. 35.

2. Бутов В.Г., **Жуков А.П.**, Пономарев С.В. Моделирование динамики космического аппарата с крупногабаритными рефлекторами // Материалы V Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск, 3-5 октября, 2006, С. 218-219.

3. **Жуков А.П.**, Пономарев С.В. Оценка влияния физико-механических свойств сетеполотна на форму отражающей поверхности рефлектора зонтичного типа // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2010. – Т. 53, № 12/2. – С. 142-147.

4. **Жуков А.П.**, Пономарев С.В. Оценка динамических характеристик космического аппарата // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2010. – Т. 53, № 12/2. – С. 148-154.

5. **Жуков А.П.** Реакция отражающей поверхности крупногабаритного рефлектора на действие возмущающего импульса // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика – 2011 – №4(16) – С. 101-109.

6. **Жуков А.П.**, Пономарев С.В. Динамические характеристики космического аппарата с рефлектором зонтичного типа // Материалы VII Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск, 12-14 апреля, 2011, С. 305-306.

7. **Жуков А.П.**, Пономарев В.С. Технология получения начальных условий для задачи динамики крупногабаритного рефлектора // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – Т. 55, № 7/2. – С. 72-76.

8. **Жуков А.П.**, Пономарев С.В., Величко А.И., Халиманович В.И. Динамика отражающей поверхности крупногабаритного зонтичного рефлектора космического аппарата // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56, № 7/3. – С. 152-154.

#### СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного текста, заключения и списка литературы. Работа содержит 156 страниц, 75 рисунков, 5 таблиц. Список литературы включает 154 наименований.

# **ГЛАВА 1. Физическая модель космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором**

## **1.1. Основные характеристики космического аппарата с зонтичным рефлектором**

В настоящее время телекоммуникационные спутники, работающие на геостационарных орбитах, имеют рефлекторы диаметром от 10 до 20 м [72]. Размеры рефлектора во многом определяют компоновку спутника. Целью данной главы является оценка физических параметров (форма, размеры, масса и т.д.) космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором, которые будут служить основой для разработки его численной динамической модели. Модель не является точным соответствием какому-либо конкретному космическому аппарату. Однако она содержит все основные конструктивные элементы, присущие аппаратам рассматриваемого класса.

Физические параметры модели космического аппарата определялись по доступным литературным источникам, в которых описаны существующие или проектируемые космические аппараты с крупногабаритными рефлекторами. Оценка параметров физической модели основывается на характеристиках космических аппаратов, которые имеют зонтичные рефлекторы диаметром около 12 м. Конфигурации подобных космических аппаратов показаны на рисунке 1.1.

Космический аппарат такого класса состоит из корпуса, имеющего форму параллелепипеда, симметрично расположенных панелей солнечных батарей и одного или двух зонтичных рефлекторов, причем точка фокуса антенны располагается на корпусе космического аппарата.

Рефлектор присоединяется к корпусу с помощью штанги. Он может быть закреплен за ступицу. На спутнике "Garuda-1" и спутнике "Садко" (проект ОАО "Информационные спутниковые системы" им. акад. М.Ф. Решетнева) штанга присоединялась к ступице с тыльной стороны рефлектора

(рисунки 1.1 а, б). При этом штанга имела большую длину с изломом в середине. В работе [40] рассматривалась модель космического аппарата с рефлектором, узел крепления которого находился на ступице с фронтальной стороны рефлектора (рисунок 1.1 г). В этом случае относительная длина штанги была существенно меньше. Другим вариантом является крепление за одну из спиц, как показано на рисунке 1.1 в.

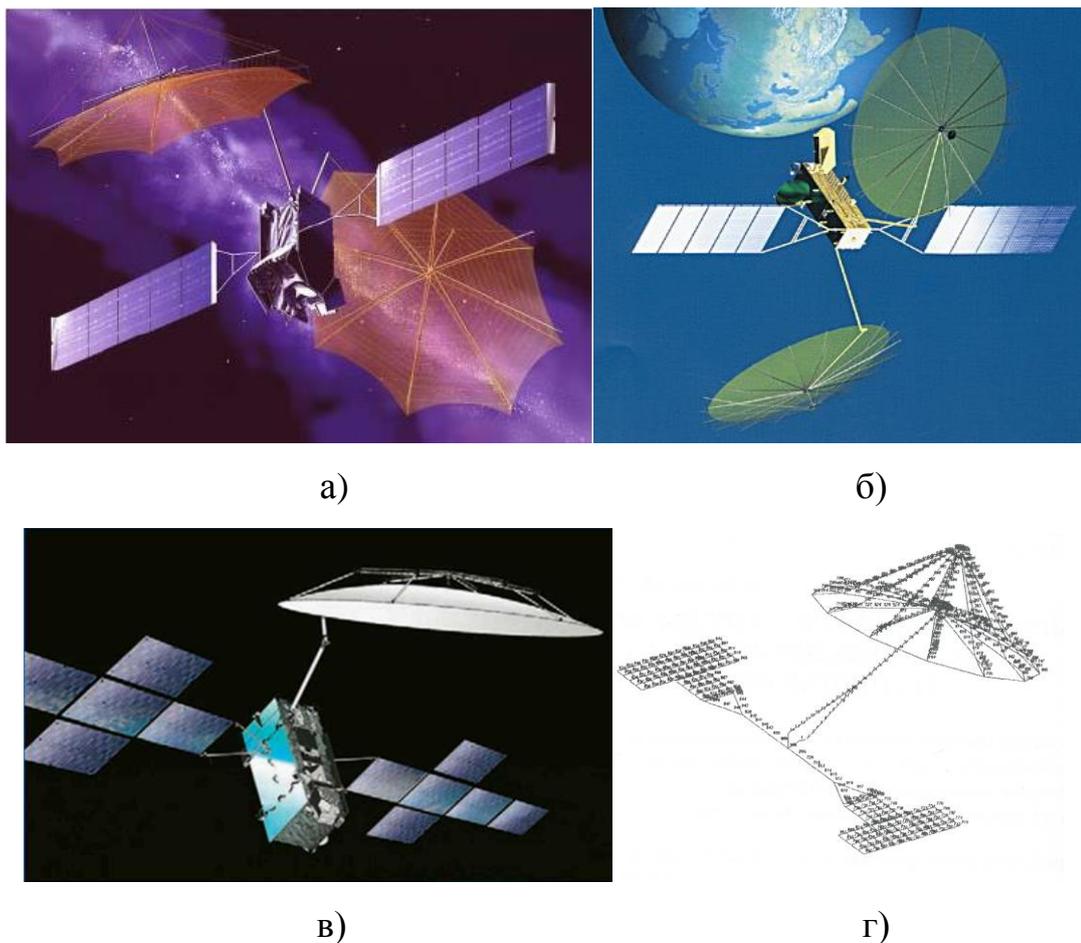


Рисунок 1.1 – Компонировка спутника: а) "Garuda-1", б) "Садко" (проект), в) "EuropaSat", г) с креплением рефлектора за ступицу

В таблице 1.1 приведены основные характеристики космических аппаратов, показанных на рисунке 1.1: "Garuda-1"[41], [88], "Садко"[41], "EuropaSat" [90].

По данным ОАО "Информационные спутниковые системы" им. акад. М.Ф. Решетнева [42], производимые им телекоммуникационные спутники, предназначенные для работы на геостационарной орбите, имеют

массу около 2500 кг: "Луч" - 2400 кг (1985г.); SESAT - 2600 кг (2000г.); "Экспресс-АМ44" - 2532 кг (2009г.).

Таблица 1.1 – Основные характеристики космических аппаратов

Наименование параметра	"Garuda-1"	"Садко"	"EuropaSat"
Масса КА на орбите, кг	4500	2650	5700
Масса полезной нагрузки, кг	1200	1170	-
Мощность солнечных батарей, Вт	10000	8000	8500
Размер рефлектора, м	12	12	12
Число спиц	8	16	6
Год введения в эксплуатацию	2000	2004	2011

Геометрические характеристики элементов конструкции космического аппарата оценивались по их относительным размерам (рисунок 1.1), где в качестве опорной величины использовался диаметр рефлектора. Результаты представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Геометрические размеры космических аппаратов

Наименование параметра	"Garuda-1"	"Садко"	"EuropaSat"
Размеры корпуса, м	4,8×2×2	6×2×1,7	5,5×2×1,7
Размах панелей солнечных батарей, м	30	30	20
Размер одной панели солнечной батареи, м	10×3	9×4	-

## 1.2. Оценка массы и жесткости конструкции солнечных батарей

Масса солнечных батарей оценивалась по величине удельной мощности (мощность, приходящаяся на единицу массы солнечной батареи, Вт/кг). Существующие конструкции силового каркаса и характеристики

фотоэлектрических преобразователей обеспечивают величину этого параметра в пределах 20-40 Вт/кг [111]. Если исходить из величины удельной мощности в 40 Вт/кг, то для космического аппарата "Садко" масса солнечных батарей оставит около 200 кг.

Жесткость конструкции солнечных батарей на примере космического аппарата "Садко" можно оценить, основываясь на результатах соответствующих испытаний солнечных батарей спутника ETS-V [104], используя в качестве критерия жесткости основную частоту изгибных колебаний.

На рисунке 1.3 показана конструктивная схема солнечной батареи.

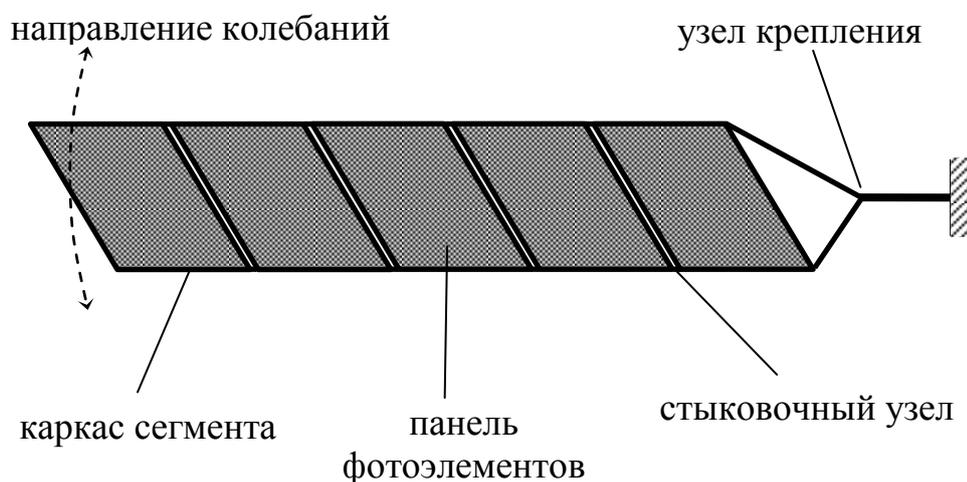


Рисунок 1.3 – Схема конструкции солнечной батареи

Она состоит из состыкованных сегментов, каждый из которых имеет силовой каркас и панель фотоэлементов. С помощью вилкообразного узла панель крепится к опоре. Если допустить, что масса конструкции равномерно распределена по размаху солнечной панели, а жесткость на изгиб одинакова в каждом сечении, то солнечную батарею можно рассматривать как заземленную балку, для которой основная частота изгибных колебаний определяется выражением [64]

$$f = \frac{k}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho_l}}, \quad (1.1)$$

где  $l$  – длина балки;  $\rho_l$  – линейная плотность;  $EJ$  – жесткость на изгиб;  $k$  – коэффициент.

Две солнечные батареи, имеющие одинаковый тип силового каркаса (рисунок 1.3), могут различаться своими геометрическими размерами и массами. Если считать, что в обоих случаях жесткость на изгиб элементов силового каркаса одинакова (величина  $EJ$  в уравнении (1.1)), то для изгибных колебаний будет выполняться следующее соотношение

$$\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}} = \left( \frac{l^{(1)}}{l^{(2)}} \right)^2 \sqrt{\frac{\rho_l^{(1)}}{\rho_l^{(2)}}}. \quad (1.2)$$

Солнечная батарея спутника ETS-V имеет основную частоту изгибных колебаний равную 0,5 Гц, длину конструкции, с учетом вилкообразного узла крепления, около 4,8 м и массу 22,6 кг [104], а геометрические и массовые характеристики солнечных батарей космического аппарата "Садко" приведены в таблицах 1.1 и 1.2. На основе этих данных и формулы (1.2) можно оценить основную частоту изгибных колебаний солнечных батарей спутника "Садко".

Следует отметить, что на спутнике ETS-V узел крепления солнечной батареи имеет относительно малую длину. Поэтому при оценке основной частоты колебаний солнечная батарея спутника "Садко" рассматривалась, как с учетом длины узла крепления, так и без него. Оценки показывают, частота колебаний лежит в пределах от 0,047 Гц до 0,092 Гц, со средним значением 0,07 Гц.

### **1.3. Конструкция зонтичного рефлектора**

Зонтичный рефлектор, общий вид которого показан на рисунке 1.4, представляет механическую систему, форма которой поддерживается благодаря действию внутренних напряжений.

Конструкция рефлектора включает силовой каркас и систему тросовых оттяжек, вантовую сеть, фронтальную сеть, отражающую поверхность.

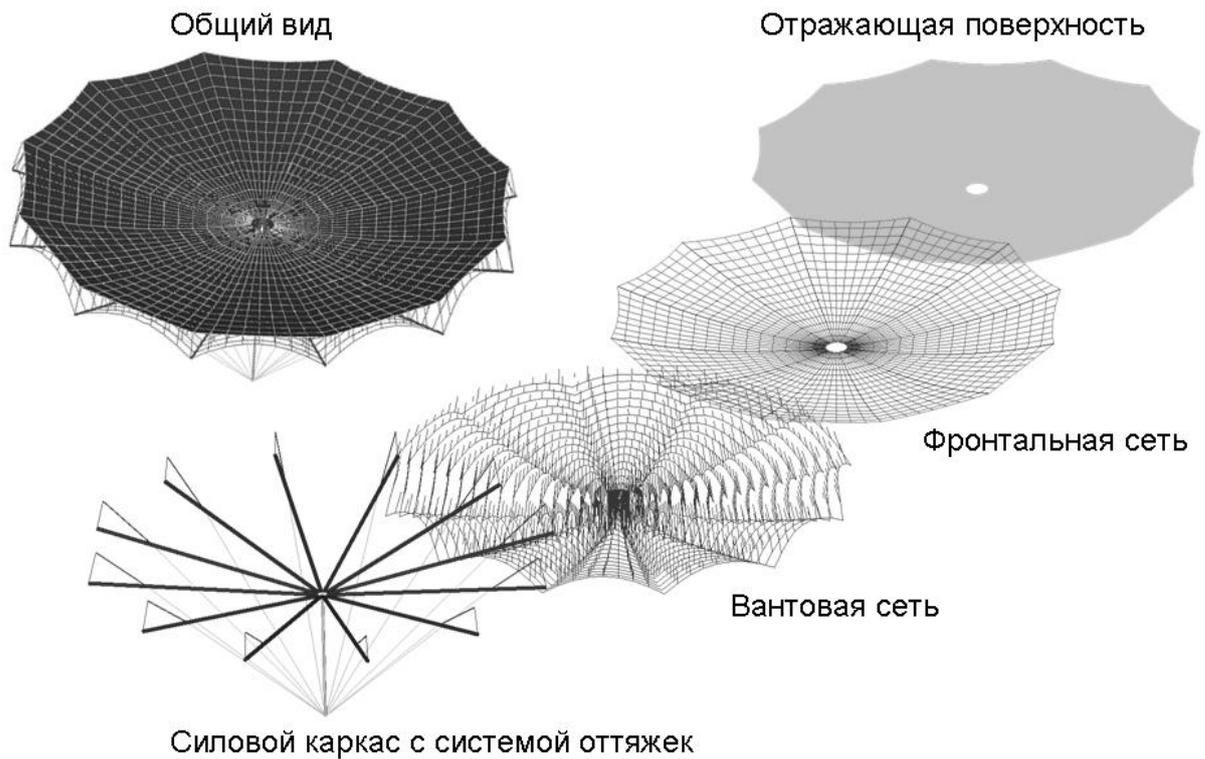


Рисунок 1.4 – Конструкция зонтичного рефлектора

Отражающая поверхность рефлектора сформирована из сетеполотна – трикотажного материала, сотканного из тонкой металлической проволоки (рисунок 1.4 [96]). Размер ячейки сетеполотна зависит от толщины проволоки и типа плетения. Для показанного фрагмента материала он составляет 2,5 мм.

Максимальный коэффициент отражения сетеполотна реализуется при оптимальной величине натяжения. При большем натяжении коэффициент отражения сетеполотна уменьшается из-за избыточного увеличения размера ячеек (увеличивается коэффициент пропускания). При недостаточном натяжении увеличивается контактное сопротивление между проволоками, что также снижает коэффициент отражения. Кроме этого величина натяжения определяет способность сетеполотна сохранять форму при действии механических нагрузок. Величина оптимального натяжения зависит от типа сетеполотна и находится в пределах от 2 Н/м до 11 Н/м [71].

Фронтальная сеть является силовым каркасом для сетеполотна, который обеспечивает заданный уровень натяжения. Она состоит из шнуров с

высоким модулем упругости и малым коэффициентом термического расширения. В литературе [71], [77], [109] представлены различные варианты схем фронтальной сети. Для обеспечения наименьшей величины СКО элементы фронтальной сети должны быть равномерно натянуты, без провисания. Выполнение этого условия во многом зависит от свойств вантовой системы.

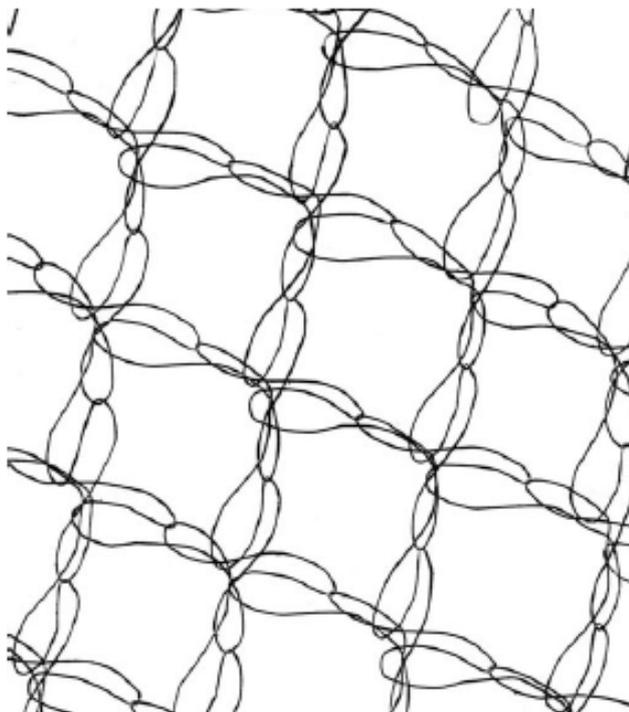


Рисунок 1.4 – Структура сетеполотна

Вантовая система служит для придания параболической формы отражающей поверхности рефлектора. Рассматривается два типа вантовых систем – арочная и подкосная (рисунок 1.5). В обоих случаях один из концов ванты соединяется с узлом фронтальной сети, а другой конец присоединяется к спице либо к арке. Изменение длины ванты приводит к перемещению узла фронтальной сети. Это перемещение происходит в основном по нормали к поверхности сетеполотна, так как жесткость фронтальной сети препятствует перемещению в других направлениях.

Силовой каркас рефлектора воспринимает нагрузки, возникающие при растяжении сетеполотна и натяжении вантовой системы. Он состоит из

мачты, корневых и откидных спиц, которые соединяются между собой с помощью шарниров (рисунок 1.6). Эти элементы имеют трубчатую конструкцию, выполненную из углепластика. Тросовые оттяжки удерживают спицы в заданном положении и позволяют в некоторой степени регулировать форму отражающей поверхности.

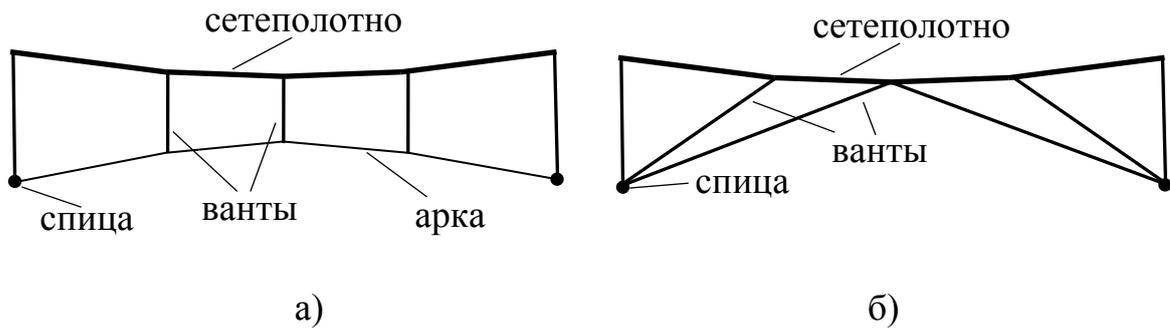


Рисунок 1.5 – Вантовая система  
 а) арочный вариант; б) подкосный вариант

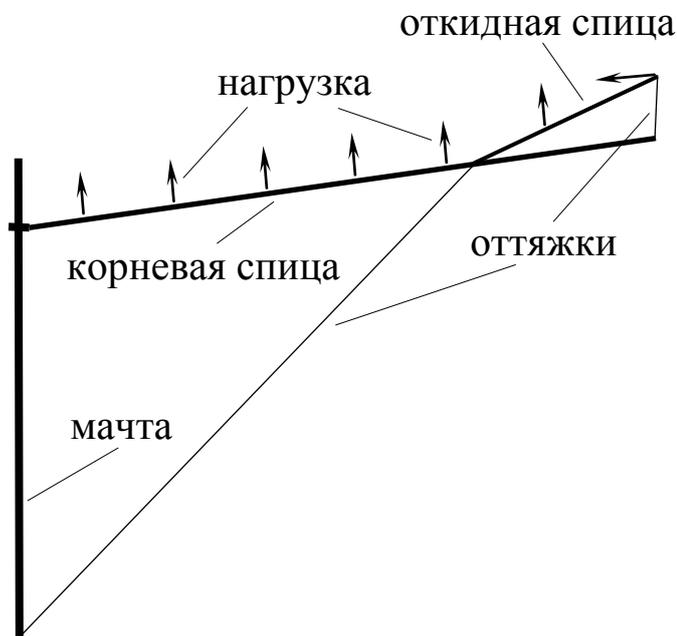


Рисунок 1.6 – Элементы силового каркаса, стрелками показаны нагрузки от натяжения вант и фронтальной сети

Величину фокусного расстояния рефлектора можно оценить по величине относительного фокусного расстояния  $F/D$  – отношению фокусного расстояния  $F$  к диаметру рефлектора  $D$ . Значения относительных фокусных расстояний для некоторых рефлекторов приведены в работе [148]. Они лежат в пределах от 0,167 до 0,423. При этом для офсетных рефлекторов относительное фокусное расстояние вычислялось через диаметр родительского параболоида, определяемый выражением

$$D_p = 2(D + X_A), \quad (1.3)$$

где  $D$  – диаметр рефлектора;  $X_A$  - величина офсетного сдвига.

Тогда при  $D=12$ м,  $F/D_p=0,295$  и офсетном сдвиге  $X_A=2$ м фокусное расстояние офсетного рефлектора 8,26 м.

#### **1.4. Характеристики физической модели космического аппарата**

Проведенные оценки характеристик реальных конструкций позволяют определить физические параметры численной модели космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором.

Геометрия модели показана на рисунке 1.7. Она включает корпус, две симметрично расположенные панели солнечных батарей и один зонтичный офсетный рефлектор.

Рефлектор имеет диаметр 12 м и фокусное расстояние 8,26 м. Точка фокуса расположена на верхней стороне корпуса. Зеркало антенны сформировано из двенадцати секторов. В соответствии с этим силовой каркас также содержит по двенадцать корневых и откидных спиц. Рассмотрено два способа крепления рефлектора: за ступицу (рисунок 1.7 а) и за спицу (рисунок 1.7 б).

Фронтальной сети представляет совокупность радиальных и кольцевых шнуров, которые соединены между собой в точках пересечения (рисунок 1.8). Образующиеся ячейки имеют форму четырехугольника. При этом в

центральной части ячейки более вытянутые, чем на периферии.  
Рассматриваемые варианты вантовой системы показаны на рисунке 1.5.

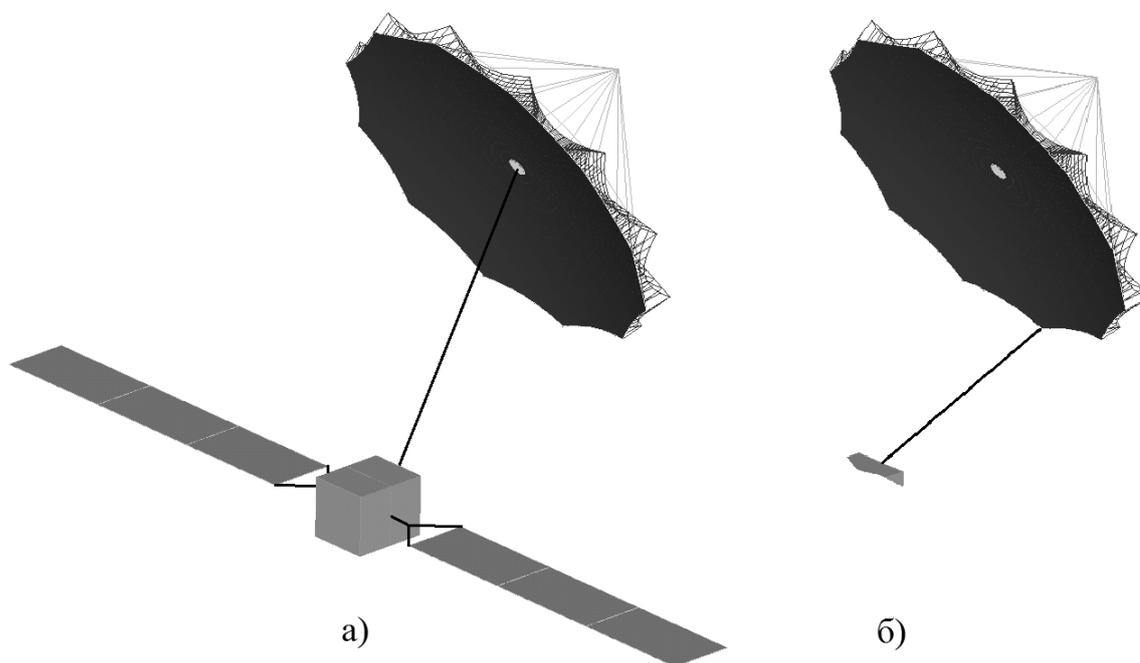


Рисунок 1.7 – Геометрия модели космического аппарата  
и крепление рефлектора: а) за ступицу; б) за спицу

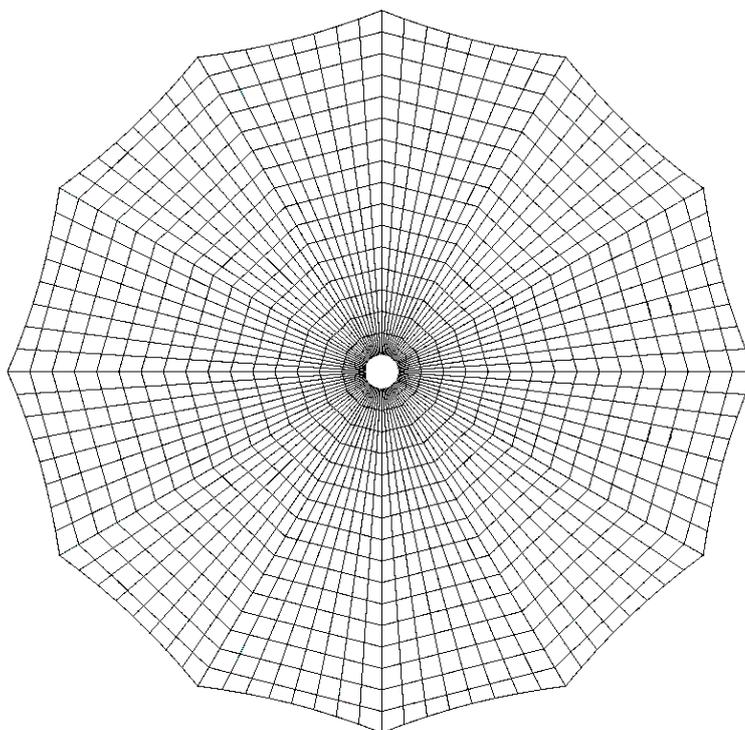


Рисунок 1.8 – Фронтальная сеть

Полная масса космического аппарата принимается равной 2500 кг. Масса рефлектора – 60-70 кг. Это соответствует массе зонтичного рефлектора ACeS фирмы Harris Corporation (рисунок В.6). Жесткость силового каркаса панелей солнечных батарей должна обеспечивать основную частоту изгибных колебаний на уровне 0,07 Гц. Натяжение сетеполотна – 5 Н/м.

### 1.5. Нагрузки, действующие на космический аппарат

При орбитальном движении на космический аппарат действуют нагрузки, обусловленные работой системы управления, аэродинамическими силами, градиентом гравитационного поля, взаимодействием с электромагнитным полем, световым давлением.

Во время орбитального полета космический аппарат выполняет различные маневры. При этом система управления вырабатывает управляющие импульсы, которые различаются по силовым параметрам и времени действия. В таблице Таблица 1.3 приведены характерные величины силы тяги управляющих реактивных двигателей при маневрировании [112].

Таблица 1.3 – Уровень тяги управляющих двигателей при различных видах маневров

Тип маневра	Сила тяги, Н
Ориентация в пространстве	<1-5
Точная регулировка орбиты	10-22
Апогейный маневр	400-500
Коррекция орбиты	10-500

В дальнейшем будут рассматриваться нагрузки, возникающие при изменении ориентации космического аппарата в пространстве. В этом случае вращающий момент создается двумя двигателями. Исходя из геометрических размеров корпуса (таблица 1.2) полагается, что двигатели разнесены на расстояние 2 м. Тогда величина вращающего момента составит 2–10 Н·м.

Аэродинамические нагрузки существенны при движении космического аппарата по низким околоземным орбитам [91]. На геостационарной орбите влияние этого фактора практически отсутствует.

Существование гравитационного градиента приводит к появлению момента сил, величина которого зависит от распределения массы космического аппарата и его пространственной ориентации в гравитационном поле. Компоненты вектора момента сил описываются выражением [60]

$$M_i^g = C_i \omega_0^2 (I_j - I_k) \sin(2\theta_i), \quad (1.4)$$

где  $C_i$  – коэффициенты ( $0,5 \leq C_i \leq 2$ );  $\omega_0$  – орбитальная угловая скорость;  $I_i$ ,  $I_j$ ,  $I_k$  – моменты инерции космического аппарата;  $\theta_i$ ,  $\theta_j$ ,  $\theta_k$  – углы тангажа, крена и рыскания. Орбитальная угловая скорость космического аппарата равна

$$\omega_0 = \gamma M_{\oplus} / r^3, \quad (1.5)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $M_{\oplus}$  – масса Земли,  $r$  – радиус орбиты космического аппарата. Гравитационный момент является быстро затухающей функцией, так как  $\sim 1/r^3$ . На геостационарной орбите его величина будет почти в 300 раз меньше чем на низкой околоземной орбите. Для рассматриваемой физической модели космического аппарата наибольшая величина  $|I_j - I_k| = 9,56 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup>. Тогда при  $\omega_0^2 = 5,3 \cdot 10^{-9}$  с<sup>-2</sup> (геостационарная орбита) максимальный гравитационный момент будет равен  $10^{-4}$  Н·м.

Космический аппарат взаимодействует с магнитным полем Земли, если его конструкция содержит материалы, имеющие собственную начальную намагниченность, либо способные намагничиваться под действием внешнего магнитного поля, а также за счет электрических токов в бортовой аппаратуре. Кроме этого оказывают влияние вихревые токи, возникающие в проводящих материалах конструкции при вращении спутника. В первом приближении геомагнитное поле можно рассматривать как поле магнитного диполя [2],

которое меняется  $\sim 1/r^3$  [48]. Оценить магнитный момент космического аппарата сложно. Однако в литературе [22] указывается, что электромагнитная система ориентации применима до высоты 6000 км. Поэтому можно ожидать, что на геостационарной орбите взаимодействие космического аппарата с магнитным полем Земли достаточно мало.

Величина светового давления для зеркально отражающей поверхности нормально ориентированной на Солнце равна  $0,9 \cdot 10^{-5}$  Н/м<sup>2</sup> [91]. Тогда на 12-метровый рефлектор будет действовать сила, не превышающая  $10^{-3}$  Н. Для выбранных параметров модели космического аппарата такая сила создаст вращающий момент около  $6 \cdot 10^{-3}$  Н·м.

Таким образом, оценочные расчеты показывают, что нагрузки, создаваемые системой управления, являются преобладающими. Поэтому, рассматривая динамику зонтичного рефлектора как часть космического аппарата, учитываются только возмущающие действия нагрузок от работы системы управления.

#### **1.6. Необходимые допущения, упрощающие физическую модель космического аппарата**

Силовой каркас рефлектора представляет совокупность балок (рисунок 1.6). Балки имеют ферменную структуру, образованную спиральными элементами, которые подкреплены кольцевыми элементами (рисунок 1.9).

В физической модели такая балка заменяется трубчатой балкой кольцевого сечения с эквивалентными характеристиками по жесткости и массе. Материал силового каркаса изотропный и линейно упругий.

Для сетеполотна можно определить значения поверхностной плотности и жесткости при растяжении. Однако из-за своей структуры (рисунок 1.4) его толщина не определяется однозначно. Поэтому сетеполотно рассматривается как тонкая оболочка (толщина  $10^{-4}$  м) из однородного материала. Жесткость на изгиб равна нулю, т.е. оболочка имеет свойства мембраны.

Корпус космического аппарата считается недеформируемым.

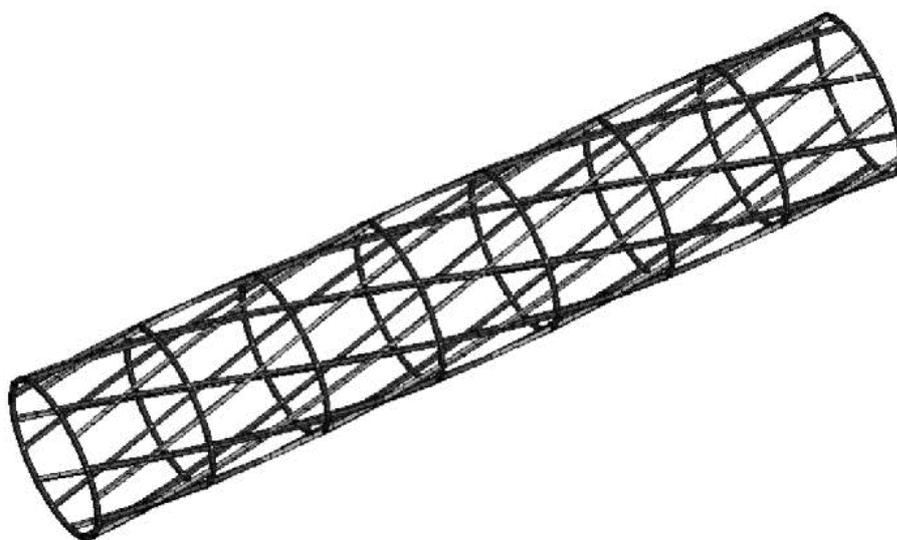


Рисунок 1.9 – Ферменная структура балок силового каркаса

На борту космического аппарата имеется запас жидкости (топлива). При повороте аппарата жидкость с задержкой вовлекается в движение, а в случае неполного заполнения баков возможно ее плескание. Данная модель не учитывает гидродинамические эффекты, поэтому полагается, что вся масса жидкости связана с корпусом космического аппарата.

## ГЛАВА 2. Математическая модель свободного нежесткого космического аппарата с крупногабаритным рефлектором

### 2.1. Выбор системы отсчета

Математическое описание динамики крупногабаритного рефлектора в составе свободного космического аппарата основано на законах механики Ньютона. Наиболее простую форму эти законы приобретают в инерциальной системе отсчета. Однако строго инерциальных систем в природе не существует. Любая реальная система отсчета не изолирована полностью от действия внешних сил и поэтому является лишь приближением к идеальной инерциальной системе. Допустимая степень приближения определяется конкретными условиями решаемой задачи.

Обычно в качестве тела отсчета инерциальной системы выбирается Земля. Несмотря на то, что она движется вокруг Солнца с ускорением  $a_{\oplus} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$ , такая система отсчета считается достаточно хорошим приближением. Однако при ее использовании придется учитывать орбитальное движение спутника.

Для определения оптимальной системы отсчета рассмотрим систему отсчета, связанную с Землей и имеющую систему координат  $(X_{и}, Y_{и}, Z_{и})$ . Эта система принимается за инерциальную. Неинерциальная система отсчета с системой координат  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$  связана с движущейся материальной точкой. Под действием силы тяжести материальная точка движется по круговой орбите с вектором ускорения  $\mathbf{a}_0$ , как показано на рисунке 2.1. Оси систем координат  $(X_{и}, Y_{и}, Z_{и})$  и  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$  сохраняют свое направление, то есть система координат  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$  не поворачивается, а только перемещается вместе с материальной точкой. Вблизи материальной точки находится космический аппарат с массой  $m_{КА}$ , на который действует сила тяжести  $\mathbf{F}_T$ , кроме этого на него действует сила  $\mathbf{f}$ , обусловленная работой системы управления. При этом спутник с материальной точкой не взаимодействует.

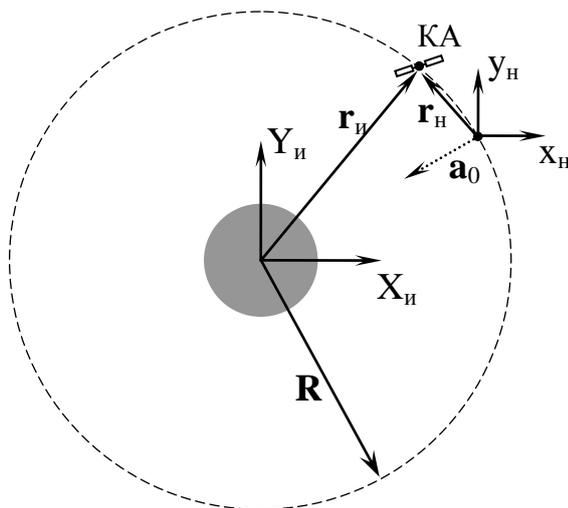


Рисунок 2.1 – Космический аппарат (КА); инерциальная  $(X_{и}, Y_{и}, Z_{и})$  и неинерциальная  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$  системы отсчета;  $R$  – радиус орбиты

В инерциальной системе отсчета уравнение движения спутника имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_{и} = \frac{1}{m_{КА}} (\mathbf{F}_T + \mathbf{f}). \quad (2.1)$$

В неинерциальной системе отсчета в уравнении движения тела необходимо учитывать ускорения связанные с силами инерции. Так тело, покоящееся в инерциальной системе отсчета  $(X_{и}, Y_{и}, Z_{и})$ , в неинерциальной системе  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$  будет двигаться с ускорением  $-\mathbf{a}_0$ . Тогда уравнение движения спутника (2.1) в системе отсчета  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$  запишется как

$$\ddot{\mathbf{r}}_{н} = \frac{\mathbf{f}}{m_{КА}} + \boldsymbol{\delta}, \quad (2.2)$$

$$\text{где } \boldsymbol{\delta} = \frac{\mathbf{F}_T}{m_{КА}} - \mathbf{a}_0 \quad (2.3)$$

Если центр масс спутника совпадает с началом системы координат  $(x_{н}, y_{н}, z_{н})$ , то величина ускорения  $\boldsymbol{\delta} = 0$ , так как  $\frac{\mathbf{F}_T}{m_{КА}} = \mathbf{a}_0$  (состояние невесомости). В этом случае уравнение (2.2) принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_{н} = \frac{\mathbf{f}}{m_{КА}}, \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) можно рассматривать как описывающее движение тела в инерциальной системе отсчета в отсутствии силы тяжести.

С удалением спутника от начала координат величина  $\delta$  увеличивается. Однако существует окрестность, в которой эта величина будет оставаться достаточно малой, чтобы можно было использовать уравнение (2.4). Для оценки размеров этой области рассмотрим два случая расположения космического аппарата (рисунок 2.2). В первом случае спутник смещен вдоль орбитального радиуса на величину  $\Delta$  (рисунок 2.2 а). Во втором случае смещение происходит по касательной к орбите (рисунок 2.2 б). Для  $\Delta$  выполняется условие  $\Delta \ll |\mathbf{R}|$ .

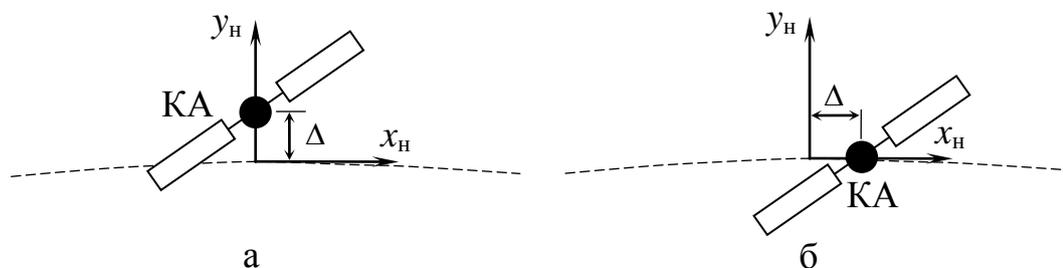


Рисунок 2.2 – Смещение космического аппарата (КА) относительно начала координат: а) по радиусу; б) по касательной к орбите

В первом случае (рисунок 2.2 а) выражение (2.3) запишется как

$$|\delta|_I = \left| -\gamma M_{\oplus} \left( \frac{1}{(|\mathbf{R}| + \Delta)^2} - \frac{1}{|\mathbf{R}|^2} \right) \right|, \quad (2.5)$$

где постоянная  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>; масса Земли  $M_{\oplus} = 5,98 \cdot 10^{24}$  кг;  $|\mathbf{R}|$  – радиус орбиты. Используя условие  $\Delta \ll |\mathbf{R}|$  можно разложить первое слагаемое в скобках в ряд по степеням  $\Delta$ , оставляя члены до первой степени включительно. Тогда выражение (2.5) преобразуется к виду

$$|\delta|_I = 2 \frac{\gamma M_{\oplus}}{|\mathbf{R}|^3} |\Delta|. \quad (2.6)$$

Во втором случае (рисунок 2.2 б)  $\frac{|\mathbf{F}_T|}{m_{КА}} = |\mathbf{a}_0|$ . Однако векторы  $\mathbf{F}_T$  и  $\mathbf{a}_0$  не параллельны и образуют угол  $\alpha = \frac{\Delta}{|\mathbf{R}|}$ . Тогда величина  $|\delta|$  будет равна

$$|\delta|_{II} = \frac{\gamma M_{\oplus}}{|\mathbf{R}|^3} |\Delta|, \quad (2.7)$$

т.е. в два раза меньше чем в (2.6).

Ограничивая ускорения  $|\delta|_I$  и  $|\delta|_{II}$  величиной  $a_{\oplus}$  и выражая  $\Delta$  из (2.6) и (2.7) можно найти размеры области инерциальности системы отсчета  $(x_H, y_H, z_H)$ . Для геостационарной орбиты, радиус которой  $|\mathbf{R}|=42000$  км

$$|\Delta|_I < \frac{a_{\oplus} \cdot |\mathbf{R}|^3}{2 \cdot \gamma \cdot M_{\oplus}} = 5,6 \cdot 10^5 \text{ м}, \quad (2.8)$$

$$|\Delta|_{II} < \frac{a_{\oplus} \cdot |\mathbf{R}|^3}{\gamma \cdot M_{\oplus}} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ м}. \quad (2.9)$$

В данном исследовании рассматривается динамика рефлектора при возмущающем воздействии, приложенном к свободному космическому аппарату. Орбитальное движение спутника остается за рамками данной работы. Поэтому размеры области инерциальности, полученные из (2.8) и (2.9), являются достаточными, чтобы рассматривать систему отсчета  $(x_H, y_H, z_H)$  как инерциальную и использовать уравнение движения в виде (2.4).

2.2. Системы координат, используемые при численном моделировании космического аппарата и рефлектора

Для описания геометрии и моделировании динамики космического аппарата используется совокупность систем координат, которые показаны на рисунке 2.3.

Движение космического аппарата рассматривается в инерциальной системе отсчета с системой координат  $(X_{КА}, Y_{КА}, Z_{КА})$ . В начальный момент времени центр масс космического аппарата находится в начале координат системы  $(X_{КА}, Y_{КА}, Z_{КА})$ . В последующие моменты времени под действием

внешних сил космический аппарат может совершать повороты и перемещения.

Система координат  $(X_{\text{пар}}, Y_{\text{пар}}, Z_{\text{пар}})$  жестко связана с корпусом спутника. Она служит для задания поверхности идеального параболоида, на основе которого строится отражающая поверхность рефлектора. Ось  $Z_{\text{пар}}$  направлена по оси параболоида, причем его фокус лежит на верхней грани корпуса спутника.

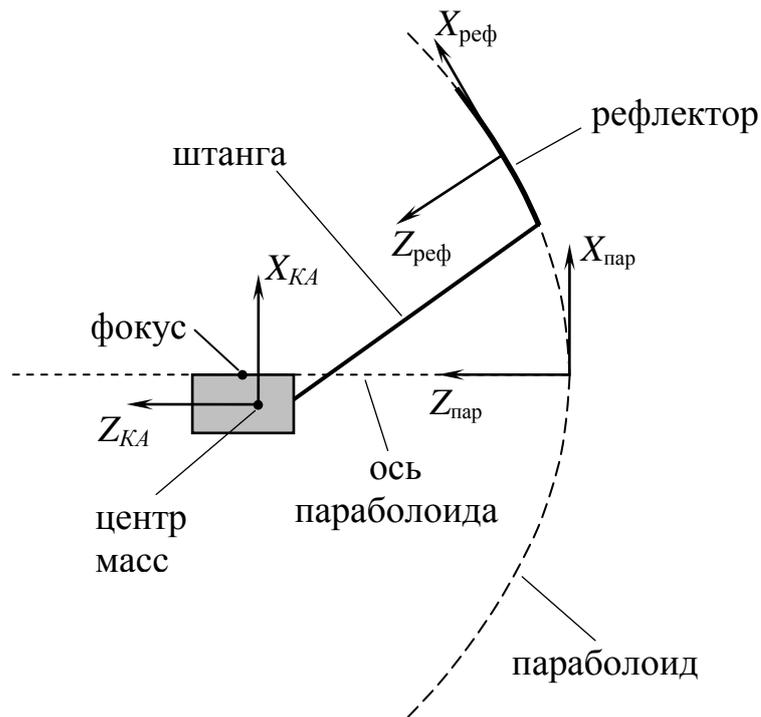


Рисунок 2.3 – Системы координат, используемые для построения численной модели космического аппарата

Система координат  $(X_{\text{реф}}, Y_{\text{реф}}, Z_{\text{реф}})$  связана с рефлектором и используется для построения отражающей поверхности рефлектора, элементов силового каркаса, фронтальной и вантовой систем, вычисления величины СКО.

### 2.3. Геометрия офсетного рефлектора

Отражающая поверхность параболического рефлектора представляет вырезку из поверхности параболоида, которая задана уравнением

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4F}, \quad (2.10)$$

где  $F$  – фокусное расстояние параболоида.

Обычно вырезка осуществляется с помощью цилиндрической поверхности (вырезающий цилиндр), которая пересекается с поверхностью параболоида (рисунок 2.4). Линия пересечения ограничивает элемент поверхности параболоида, который формирует зеркало рефлектора.

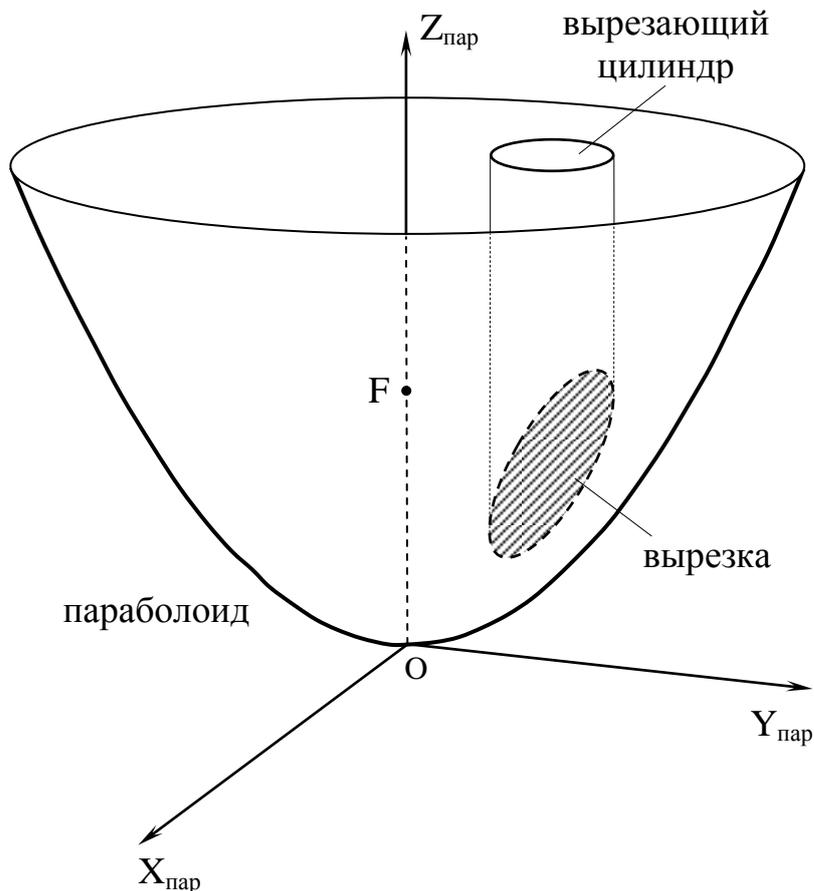


Рисунок 2.4 – Формирования отражающей поверхности параболического рефлектора вырезающим цилиндром.

Существуют следующие основные варианты относительного положения параболоида и вырезающего цилиндра:

- оси симметрии параболоида и вырезающего цилиндра совпадают;
- оси симметрии параболоида и вырезающего цилиндра не совпадают.

В первом случае линией пересечения цилиндра с параболоидом является окружность, а зеркало рефлектора имеет наиболее простую осесимметричную форму. Во втором случае вырезающий цилиндр смещен относительно оси параболоида (рисунок 2.4). Если оси симметрии

параллельны, то линия пересечения двух поверхностей имеет форму эллипса. Причем ее точки лежат в одной плоскости. Если оси симметрии параболоида и цилиндра непараллельны, то точки на границе вырезки не лежат в одной плоскости.

Рефлектор, зеркало которого получено с помощью смещенного вырезающего цилиндра, называется офсетным. На практике, применение осесимметричного рефлектора не является оптимальным решением, так как в точке его фокуса всегда располагается излучатель или приемник излучения, размеры которых, вместе с узлом крепления, могут быть значительными. В результате происходит частичное затенение апертуры и ухудшение характеристик рефлектора. Этого недостатка лишен офсетный рефлектор. Кроме того, он позволяет в целом значительно упростить конструкцию космического аппарата за счет размещения облучателя или приемника на его корпусе. Эти факторы обеспечивают широкое применение офсетных рефлекторов.

Для описания геометрии офсетного рефлектора используется стандартный подход [148], основные элементы которого показаны на рисунке 2.5. В соответствии с этим подходом идеальный параболоид, заданный в системе координат  $(X_{\text{пар}}, Y_{\text{пар}}, Z_{\text{пар}})$  уравнением (2.10), называется родительским параболоидом, а система координат – системой координат родительского параболоида. Ось вырезающего цилиндра, имеющего диаметр  $D_{\text{ц}}$ , лежит в плоскости  $X_{\text{пар}}OZ_{\text{пар}}$ . Эта плоскость является плоскостью симметрии вырезки. Поверхность вырезающего цилиндра пересекает ось  $OX_{\text{пар}}$  в точках  $X_A$  и  $X_B$ , а ось цилиндра пересекает ту же ось в точке  $X_{O_1}$ . При этом выполняется условие  $X_{O_1} = \frac{X_A + X_B}{2} = X_A + \frac{D_{\text{ц}}}{2}$ . Расстояние  $X_A$  называется клиренсом рефлектора.

Поверхность офсетного рефлектора удобно рассматривать в системе координат  $(X_2, Y_2, Z_2)$  (техническая система координат). Точка  $O_1$  (технический центр рефлектора) является началом технической системы координат. Она

расположена в точке пересечения оси вырезающего цилиндра с поверхностью вырезки (офсетного рефлектора). Ось  $X_2$  лежит в плоскости  $X_{\text{пар}}Z_{\text{пар}}$  и направлена по касательной к родительскому параболоиду в точке  $O_1$ . Ось  $Z_2$  неортогональна плоскости эллипса, который является границей рефлектора, и не проходит через его центр.

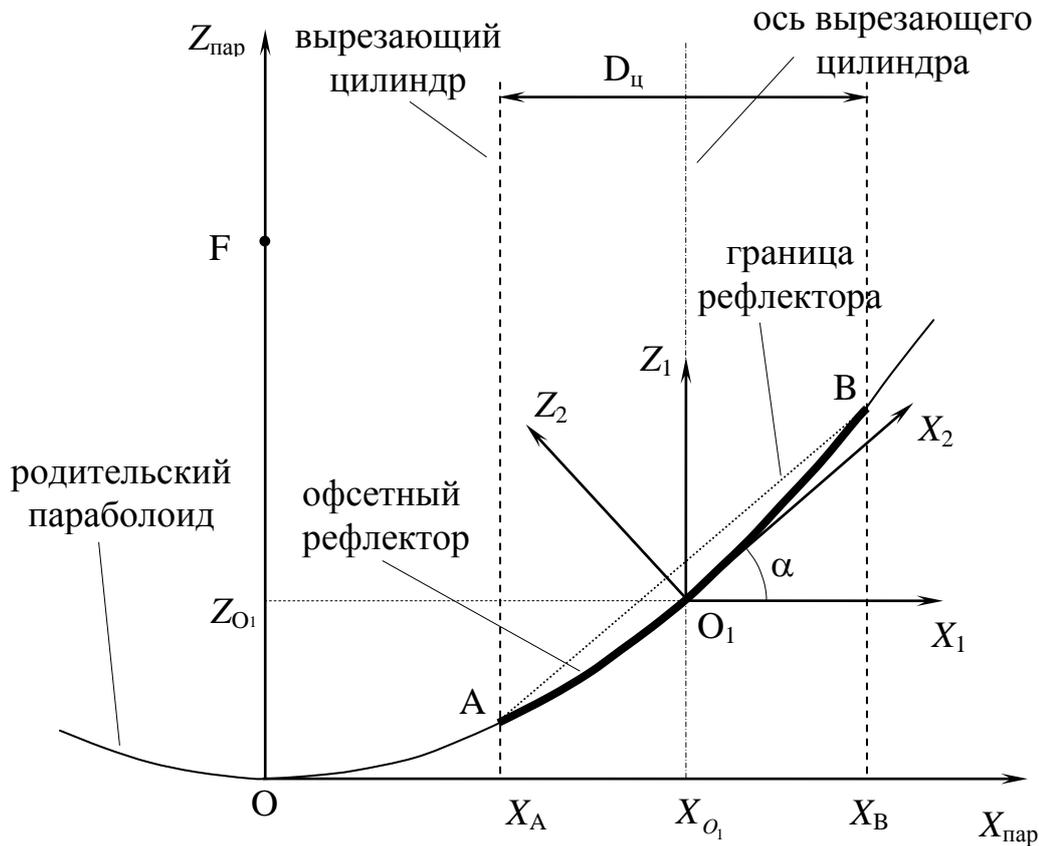


Рисунок 2.5 – Основные элементы геометрии офсетного рефлектора.

Система координат  $(X_1, Y_1, Z_1)$  выполняет вспомогательную роль и имеет в качестве своего начала точку  $O_1$ .

Переход от одной координатной системы к другой производится по следующим правилам

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\text{пар}} \\ Y_{\text{пар}} \\ Z_{\text{пар}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X_{0_1} \\ 0 \\ -X_{0_1}^2 / 4F \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где  $\alpha = \arctan \frac{X_{O_1}}{2F}$ .

Обратные преобразования имеют вид

$$\begin{pmatrix} X_{\text{пар}} \\ Y_{\text{пар}} \\ Z_{\text{пар}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{O_1} \\ 0 \\ X_{O_1}^2 / 4F \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

С помощью выражений (2.13) и (2.14) уравнение родительского параболоида (2.10) в технической системе координат  $(X_2, Y_2, Z_2)$  записывается в виде алгебраического уравнения второго порядка

$$A \cdot Z_2^2 + B \cdot Z_2 + C = 0, \quad (2.15)$$

с коэффициентами

$$A = \sin^2 \alpha;$$

$$B = -(4F \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \sin \alpha \cdot (X_{O_1} + X_2 \cdot \cos \alpha)); \quad (2.16)$$

$$C = Y_2^2 + X_2 \cdot (2X_{O_1} \cdot \cos \alpha + X_2 \cdot \cos^2 \alpha - 4F \cdot \sin \alpha),$$

и решением

$$(Z_2)_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (2.17)$$

Относительное положение корней уравнения (2.15) показано на рисунке 2.6. Таким образом, выражения (2.15)–(2.17) задают поверхность родительского параболоида в технической системе координат. Применительно к офсетному рефлектору интерес представляет только корень  $(Z_2)_-$ .

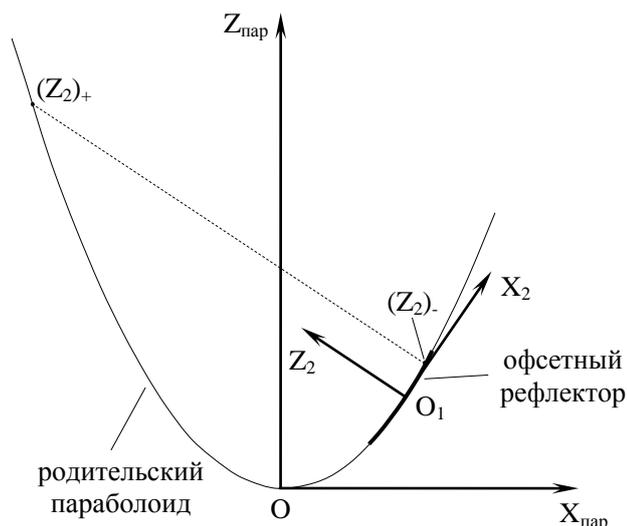


Рисунок 2.6 – Относительное положение корней уравнения (2.15).

При определении в технической системе координат  $(X_2, Y_2, Z_2)$  граничных точек рефлектора следует исходить из того, что вырезающий цилиндр проектирует эти точки на плоскость  $X_{\text{пар}}, Y_{\text{пар}}$  (в системе координат родительского параболоида  $X_{\text{пар}}, Y_{\text{пар}}, Z_{\text{пар}}$  в виде окружности с радиусом  $R_{\text{ц}}=D_{\text{ц}}/2$  и с центром в точке  $X_{O_1}$  (рисунок 2.7).

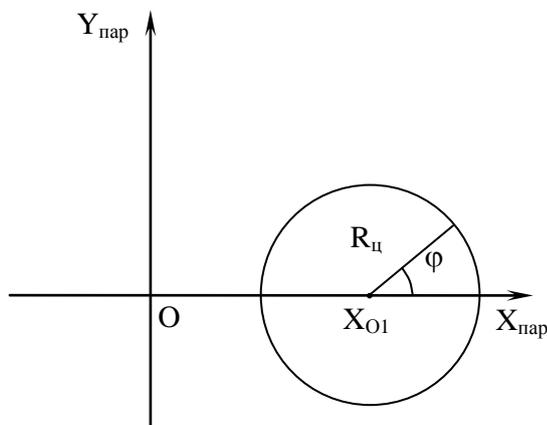


Рисунок 2.7 – Проекция границы рефлектора на плоскость  $X_{\text{пар}}Y_{\text{пар}}$  системы координат родительского параболоида.

Тогда, в системе координат  $X_{\text{пар}}, Y_{\text{пар}}, Z_{\text{пар}}$  граница офсетного рефлектора определяется выражениями

$$\begin{aligned} X_{\text{пар}} &= R_{\text{ц}} \cos \varphi + X_{O_1}, \\ Y_{\text{пар}} &= R_{\text{ц}} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$Z_{\text{пар}} = \frac{R_{\text{ц}} \cdot (R_{\text{ц}} + 2 \cdot X_{O_1} \cdot \cos \varphi) + X_{O_1}^2}{4F},$$

где  $\varphi$  – угол, определенный как показано на рисунке 2.7.

По известным координатам  $X_{\text{пар}}$ ,  $Y_{\text{пар}}$ , и  $Z_{\text{пар}}$ , которые определены выражениями (2.18), можно найти координаты границы рефлектора в технической системе координат  $(X_2, Y_2, Z_2)$ , если воспользоваться преобразованиями координат (2.11)–(2.12).

Выше изложенная геометрическая модель отражающей поверхности рефлектора называется стандартной [148]. В этой модели геометрический центр эллиптической границы не лежит на оси  $Z_2$ , а смещен на некоторое расстояние по оси  $X_2$ , что приводит к неравномерному полю напряжений в материале отражающей поверхности [148].

Существующие модификации геометрической модели направлены на то, чтобы совместить центр эллипса с ось технической системы координат. Упоминаемая в работе [148] конфигурация с центральной ступицей состоит в том, что соответствующее ей начало координат  $O_{\text{цс}}$  (рисунок 2.8) выбирается из условия

$$X_{O_{\text{цс}}} = \frac{(X_2)_A + (X_2)_B}{2} \quad (2.19)$$

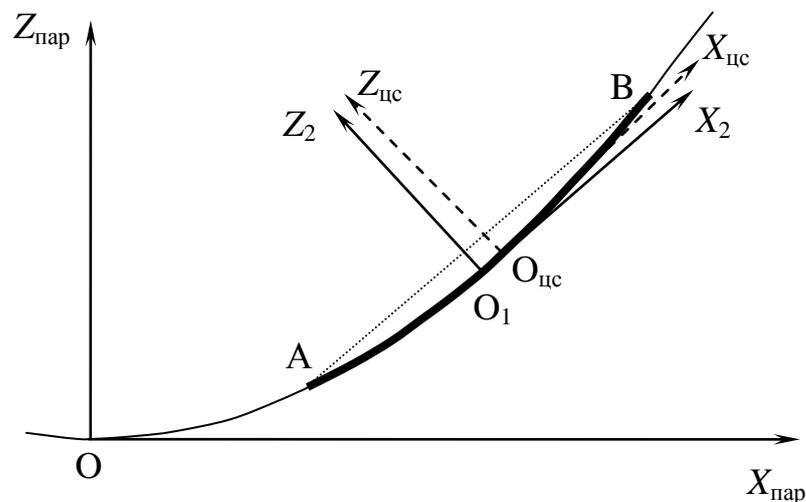


Рисунок 2.8 – Конфигурация с центральной ступицей [8]

В этом случае точка  $O_{\text{цс}}$  остается на параболоиде, ось  $X_{\text{цс}}$  касательная к параболоиду.

Другая модификация предложена в работе [71]. В этом случае вводится система координат  $(X_{\text{реф}}, Y_{\text{реф}}, Z_{\text{реф}})$ , которая получается из технической системы координат путем смещения по оси  $X_2$  на величину  $\Delta X_2$ , как показано на рисунке 2.9. При этом ось  $Z_{\text{реф}}$  проходит через центр эллипса. Однако начало системы координат  $O_{\text{реф}}$  уже не является точкой касания осью  $X_{\text{реф}}$  поверхности параболоида.

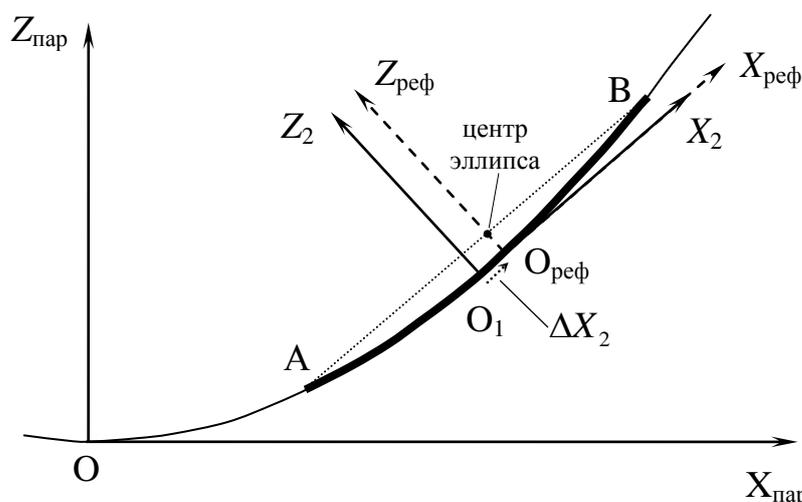


Рисунок 2.9 – Конфигурация со смещенной системой координат

Величина смещения  $\Delta X_2$  определяется следующим образом. Центр эллипса лежит на середине его большой оси в точке пресечения отрезка  $AB$  с осью вырезающего цилиндра (рисунок 2.5). В системе координат родительского параболоида, координаты этой точки равны

$$\begin{pmatrix} X_{\text{пар}}^{ц.э.} \\ Y_{\text{пар}}^{ц.э.} \\ Z_{\text{пар}}^{ц.э.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{O_1} \\ 0 \\ \frac{X_A^2 + X_B^2}{8F} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

В технической системе координат положение центра эллипса вычисляется с помощью преобразований вида (2.11)–(2.12), которые приводят к выражениям

$$\begin{pmatrix} X_1^{y.z.} \\ Y_1^{y.z.} \\ Z_1^{y.z.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\text{пар}}^{y.z.} \\ Y_{\text{пар}}^{y.z.} \\ Z_{\text{пар}}^{y.z.} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X_{0_1} \\ 0 \\ -X_{0_1}^2 / 4F \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{pmatrix} X_2^{y.z.} \\ Y_2^{y.z.} \\ Z_2^{y.z.} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{y.z.} \\ Y_1^{y.z.} \\ Z_1^{y.z.} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

По построению  $\Delta X_2 = X_2^{y.z.}$  (рисунок 2.9). Поэтому система координат  $(X_{\text{реф}}, Y_{\text{реф}}, Z_{\text{реф}})$ , связана с технической системой  $(X_2, Y_2, Z_2)$  преобразованием

$$\begin{pmatrix} X_{\text{реф}} \\ Y_{\text{реф}} \\ Z_{\text{реф}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X_2^{y.z.} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

## 2.4 Математическое описание движения нежесткого космического аппарата

### 2.4.1. Постановка задачи

При действии внешних нагрузок нежесткий космический аппарат совершает поступательные и угловые перемещения. При этом относительные перемещения не считаются малыми. Для описания состояния такой механической системы используется геометрически нелинейная система уравнений движения деформируемого твердого тела.. Движение космического аппарата рассматривается в инерциальной системе отсчета  $(X_{\text{КА}}, Y_{\text{КА}}, Z_{\text{КА}})$  (рисунок 2.3). Для удобства записи вводятся обозначения:

$$X_{\text{КА}} \rightarrow x_1;$$

$$Y_{\text{КА}} \rightarrow x_2;$$

$$Z_{\text{КА}} \rightarrow x_3.$$

В системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  космический аппарат занимает область пространства  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ . Область  $\Omega$  включает объемные, оболочечные и линейные структуры. Она заполнена континуумом для которого

определены физико-механические свойства материала как функции координат. Точка континуума характеризуется вектором  $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$ .

В лагранжевом подходе система уравнений движения элементарного объема имеет вид

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right), \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right), \quad (2.25)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{lm}). \quad (2.26)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещения  $\mathbf{u}=\{u_1, u_2, u_3\}$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\rho$  – плотность материала,  $\rho=\rho(\mathbf{x})$ ;  $\sigma_{ij}$  – компоненты второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа. Так как космический аппарат находится в состоянии невесомости, то в уравнении движения (2.24) объемные силы не учитываются.

Выражение (2.26) устанавливает в общем виде связь между напряжениями и деформациями (закон Гука). Так как материал элементов силового каркаса полагается изотропным и линейно упругим, то выражение (2.26) принимает вид

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \cdot (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \delta_{ij} \varepsilon_{ll}) - \frac{E}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_{ij}^T \cdot \delta_{ij} + \sigma_{ij}^0, \quad (2.27)$$

где  $E=E(\mathbf{x})$ ,  $\nu=\nu(\mathbf{x})$ ,  $\alpha$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент температурного расширения;  $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x})$  – тензор начальных напряжений;  $\varepsilon_{ij}^T(\mathbf{x})$  – тензор температурных деформаций,  $\varepsilon_{ij}^T = \alpha \cdot \Delta T$ ,  $\Delta T$  – величина изменение температуры.

Материала сетеполотна обладает нелинейными и ортотропными свойствами [58]. Поэтому было проведено исследование влияния различных моделей материала сетеполотна на форму отражающей поверхности осесимметричного зонтичного рефлектора, когда тот находится в состоянии с минимальной величиной СКО (отражающая поверхность рефлектора

настроена) [31]. Рассматривались следующие случаи реализации закона Гука (2.26):

– линейный, изотропный материал (2.27);

– линейный, ортотропный материал с различной ориентацией осей жесткости относительно сектора сетеполотна

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.28)$$

где

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}^T,$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}\}^T,$$

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix},$$

$E_i$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $G_{ij}$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига. При этом выполняются условия

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12},$$

$$E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23},$$

$$E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31};$$

– гиперупругий материал (модель Муни-Ривлина)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.29)$$

где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации,

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2,$$

где  $C_{01}$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{11}$ ,  $d$  – материальные константы, определяемые из эксперимента. Параметры  $\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$ ,  $\bar{I}_2 = J^{-2/3} I_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  – инварианты тензора деформаций,  $J$  – детерминант матрицы градиента деформаций.

Результаты показали, что использование указанных выше моделей приводит к отклонению величины СКО не более чем на 0,174% относительно линейной изотропной модели (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – СКО рефлектора для различных моделей материалов

Модель материала	Изотропный, линейный	Ортотропный, линейный		Изотропный, гиперупругий
		$E_{\text{рад}} > E_{\text{тан}}$	$E_{\text{рад}} < E_{\text{тан}}$	
СКО, мм	0,5168	0,5173	0,5159	0,5160
$\Delta$ СКО, %	–	0,097	-0,174	-0,155

На рисунке 2.10 показано рассчитанное распределение отклонений сетеполотна от идеального параболоида.

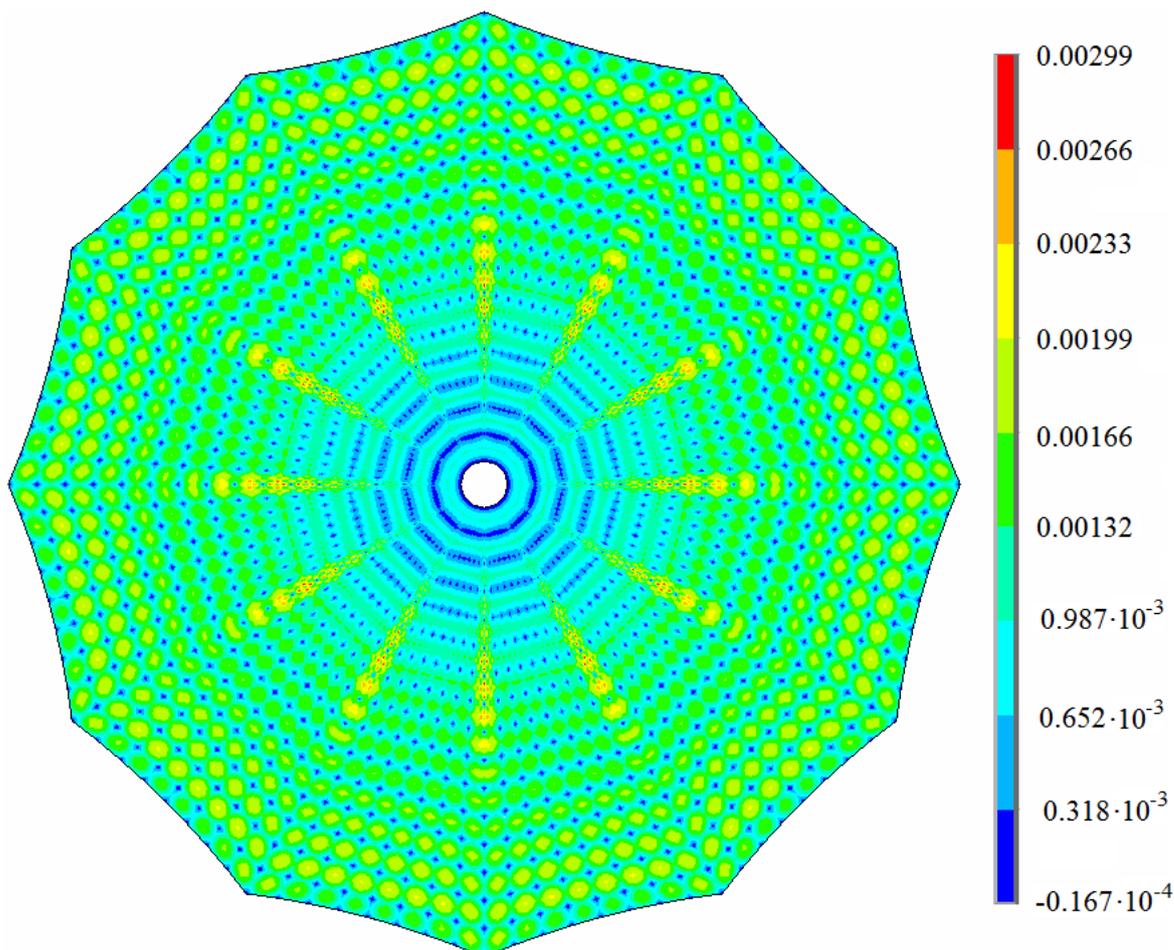


Рисунок 2.10 – Отклонение сетеполотна от поверхности идеального параболоида, м

Распределение интенсивности напряжений для различных моделей материалов показано на рисунке 2.11. Максимальное отклонение напряжений относительно линейной изотропной модели составило около 2,6%.

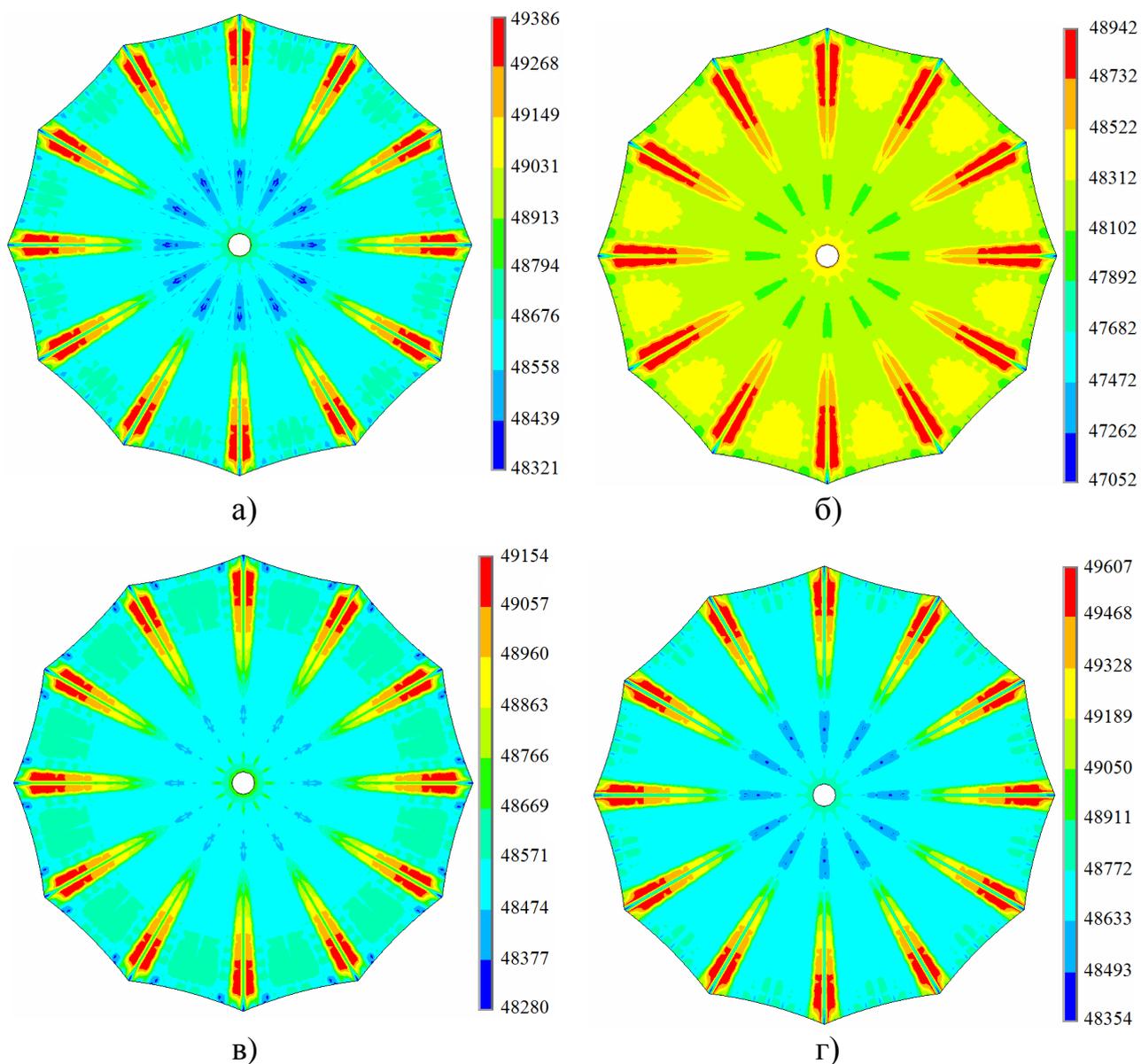


Рисунок 2.11 – Интенсивность напряжений [ $\text{Н/м}^2$ ] в сетеполотне для различных моделей материалов: а) изотропный, линейный; б) изотропный, гиперупругий; в) ортотропный, линейный ( $E_{\text{рад}} < E_{\text{тан}}$ ); г) ортотропный, линейный ( $E_{\text{рад}} > E_{\text{тан}}$ )

Таким образом оправданным является использование закона Гука для материала сетеполотна в виде (2.27).

Система уравнений (2.24)-(2.26) дополняется граничными и начальными условиями. Так как рассматривается движение свободного космического аппарата, то на границе  $\partial\Omega$  задаются граничные условия в напряжениях

$$\left. \begin{aligned} n_k \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= p_i^n(t, \mathbf{x}) \\ p_i^n(t=0, \mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \right\}, \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.30)$$

где  $p_i^n(t, \mathbf{x})$  – нагрузка на границе, характеризуемой текущим вектором нормали  $\mathbf{n}=\{n_1, n_2, n_3\}$ .

В начальный момент времени рефлектор находится в некотором напряженно-деформированном состоянии, обусловленном его предварительной настройкой до состояния, когда СКО минимально. Этому состоянию соответствуют начальные перемещения  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ , температуры  $T^0(\mathbf{x})$  и напряжения  $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x})$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(t=0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{u}}(t=0, \mathbf{x}) &= 0 \\ T(t=0, \mathbf{x}) &= T^0(\mathbf{x}) \\ \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\}, \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.31)$$

Так как состояние с минимальным СКО нельзя найти из каких-либо очевидных соображений, то для определения  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x})$ ,  $T^0(\mathbf{x})$  требуется решение отдельной задачи.

#### 2.4.2. Технология получения начальных условий

Чтобы определить начальные значения  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x})$ ,  $T^0(\mathbf{x})$ , которые соответствуют напряженно-деформированному состоянию рефлектора с минимальным СКО отражающей поверхности, необходимо [34]:

- найти исходное (до настройки) состояние рефлектора под действием начального натяжения сетеполотна, фронтальной сети и вантовой системы;
- построить модель процесса настройки рефлектора;
- настроить рефлектор;

- сохранить положение точки фокуса.

В начале следует рассмотреть рефлектор отдельно от остальной конструкции космического аппарата. Его состояние описывается системой стационарных уравнений, которая включает уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) \right) = 0, \quad (2.32)$$

тензор деформаций (2.25) и закон Гука (2.27). Граничные условия для напряжений имеют вид

$$n_k \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.33)$$

В ступице рефлектора ставится условие закрепления

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}_{cm}) = 0, \quad \mathbf{x}_{cm} \in \omega_{cm}, \quad (2.34)$$

где  $\omega_{cm}$  – область пространства, занимаемая ступицей. Кроме этого задаются начальные натяжения сетеполотна и элементов фронтальной и вантовой сети, т.е. компоненты тензора начальных напряжений  $\sigma_{ij}^0$  из (2.27).

Для задачи (2.32), (2.25), (2.27), (2.33), (2.34) большую роль играет выбор начального приближения, т. к. опыт показывает, что такая задача имеет малую область сходимости. Трудно определить хорошее начальное приближение, позволяющее за один шаг получить искомое решение. Поэтому строится последовательность решений, в которой каждое новое решение использует предыдущее как начальное приближение (рисунок 2.11). Для каждого шага в последовательности промежуточных решений ставятся соответствующие граничные условия. Причем искомое решение будет последним в этой последовательности.

Для получения начального решения ставится условие закрепления

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega - \omega_{cm}, \quad (2.35)$$

где  $\omega_{cm}$  – область пространства, занимаемая сетеполотном. Условие (2.35) соответствует полному закреплению рефлектора за исключением сетеполотна.

При решении задачи с условием (2.35) находится форма сетеполотна, которое закреплено на неподвижном каркасе. Полученное начальное решение является начальным приближением при поиске следующего решения с условием закрепления

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega - \omega_{cem} - \omega^*, \quad (2.36)$$

где  $\omega^*$  – некоторая область пространства, занимаемая рефлектором,  $\omega^* \in \Omega$ . Процесс снятия закреплений продолжается до тех пор, пока не будет получено решение с условием (2.34). Такая процедура была разработана Пономаревым С. В. и Солоненко В. А. (НИИПММ при ТГУ, г. Томск) и использовалась при численном моделировании напряженно-деформированного состояния отдельного крупногабаритного зонтичного рефлектора. Следует отметить, что данная процедура до сих пор не формализована и каждая конструкция требует индивидуального подхода в определении последовательности снятия закреплений.

После определения исходного состояния рефлектора выполняется его настройка до состояния с минимальным СКО, которое определяется выражением [148]

$$\delta_{СКО} = \sqrt{\frac{1}{S_{ref}} \iint_{S_{ref}} (\Delta z)^2 ds}, \quad (2.37)$$

где  $S_{ref}$  – площадь отражающей поверхности рефлектора,  $\Delta z$  – распределение отклонений сетеполотна от поверхности идеального параболоида.

Распределение отклонений  $\Delta z$  зависит от большого количества параметров (количества вант в вантовой сети). В результате аналитическое или численное определение конфигурации с минимальным СКО становится трудоемкой задачей. Поэтому для настройки рефлектора используется методика, предложенная в работе [71]. Она состоит в том, что узлы фронтальной сети совмещаются с поверхностью идеального параболоида путем подбора длин вантовых элементов. Затем для всех узлов вычисляется

поправка смещения, которая равна среднему отклонению сетеполотна от поверхности исходного идеального параболоида

$$\delta_{CO} = \frac{1}{S_{ref}} \iint_{S_{ref}} \Delta z' ds, \quad (2.38)$$

где  $\Delta z'$  – распределение отклонений сетеполотна от поверхности идеального параболоида после выполнения этапа настройки. После настройки величина СКО определяется относительно параболоида наилучшего приближения, который получается из исходного параболоида путем его смещения на величину  $\delta_{CO}$ .

Регулирование длин вантовых элементов в численной модели рефлектора выполняется с помощью введения термических деформаций [77], [71], которые учитываются в законе Гука (2.27). Все ванты имеют одинаковую опорную температуру  $T_{on}$ . Если длину какой-либо ванты следует изменить на величину  $\Delta l$ , то ей присваивается температура  $T^0$  такая, что

$$T^0 = T_{on} + \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l}, \quad (2.39)$$

где  $l$  – начальная длина ванты,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала ванты.

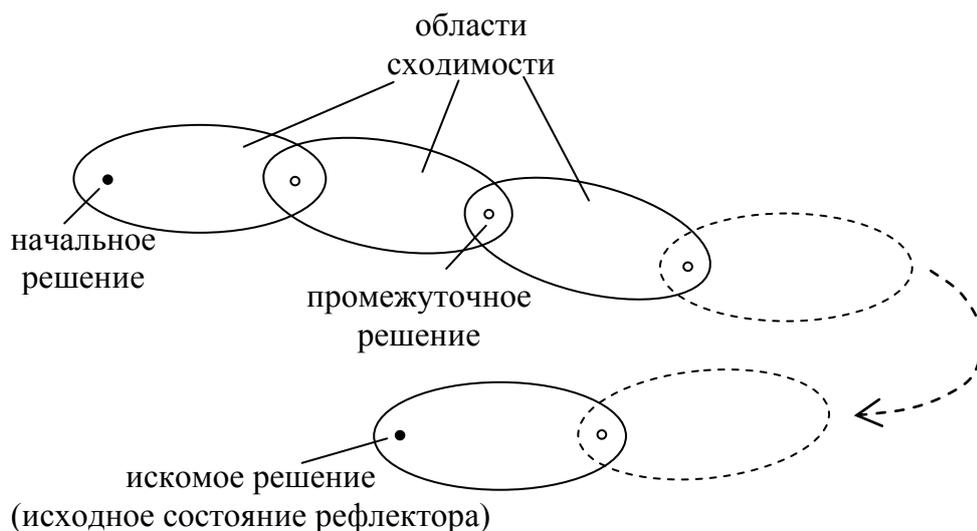


Рисунок 2.11 – Последовательность решений при поиске исходного состояния рефлектора

Переходя к настройке рефлектора в составе КА, в начале рассмотрим вариант, в котором рефлектор прикреплен ступицей к штанге (рисунок 1.7 а). В этом случае условие закрепления (2.34) заменяется на условие

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \omega_{крп}, \quad (2.40)$$

где  $\omega_{крп}$  – подобласть, соответствующая корпусу КА. Условия (2.34) и (2.40) можно считать эквивалентными. В последнем случае ступица также фиксирует рефлектор в пространстве, так как связана через штангу с корпусом. Для такого варианта крепления применима изложенная выше методика настройки.

Существенно более сложной оказывается процедура настройки при закреплении рефлектора за спицу силового каркаса (рисунок 1.7 б). Дело в том, что любое натяжение вант приводит к изгибу спиц (рисунок 2.12).

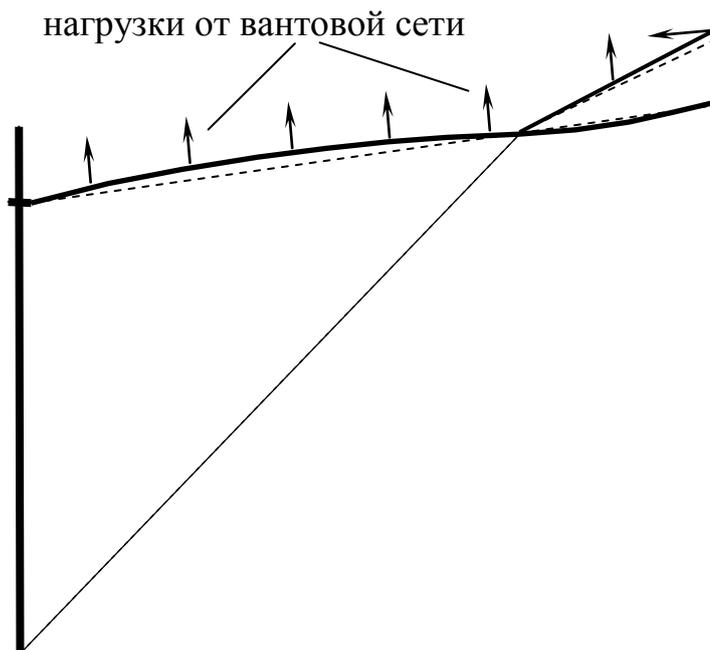


Рисунок 2.12 – Деформация каркаса под нагрузкой:

- - - - недеформированное состояние; — деформированное состояние

В результате рефлектор поворачивается относительно точки закрепления, что затрудняет контроль процесса настройки по параметру  $\delta_{СКО}$ . Для компенсации этого необходимо скорректировать угловое положение

рефлектора и подобрать длину штанги так, чтобы сохранилось положение фокуса рефлектора относительно корпуса КА.

Рассматривались три варианта процедуры настройки при креплении рефлектора за спицу.

В первом случае на рефлектор переносились температурные деформаций вантовой системы, полученные в результате настройки рефлектора закрепленного за ступицу. Затем предполагалось скорректировать его угловое положение и длину штанги. Однако уже на первом этапе получалось расходящееся решение.

Во втором случае предполагалось выполнить настройку рефлектора при креплении его за ступицу и при незакрепленном корпусе КА. В процессе настройки корпус КА будет перемещаться в соответствии с изменением углового положения штанги. На заключительном этапе предполагалось выполнить корректировку положения корпуса КА. Однако оказалось, что на этапе настройки решение сходится очень медленно. Возможно, это обусловлено тем, что большая масса корпуса, закрепленная на нежесткой штанге, порождает плохо обусловленную матрицу.

Наиболее приемлемым оказался третий вариант. В нем использовались условия закрепления (2.34) и (2.40). При этом штанге присваивался малый модуль упругости, такой, чтобы он не влиял на результат настройки рефлектора по методике, соответствующей креплению рефлектора за ступицу. При численном моделировании модуль упругости материала штанги имел значение  $0,1 \text{ Н/м}^2$ . Затем выполнялась корректировка длины штанги, путем введения температурных деформаций. Кроме этого прилагались пары моментов сил в точках соединения штанги с корпусом и спицей. В результате устанавливалось правильное угловое положение штанги. На заключительном этапе материалу штанги возвращалось истинное значение модуля упругости и снимались условия (2.34) и (2.40).

Таким образом, вышеописанная технология позволяет получить распределения  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ ,  $T^0(\mathbf{x})$  для космического аппарата, с настроенным,

закрепленным на штанге крупногабаритным зонтичным рефлектором при сохранении положения точки фокуса. Найденные  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ ,  $T^0(\mathbf{x})$ , а также  $\sigma_{ij}^0$ , используются в качестве начального условия при решении динамической задачи.

## 2.5 Конечноэлементная модель космического аппарата

### 2.5.1. Метод конечных элементов

Вывод уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние тела, строится на основе свойств бесконечно малого объема. В этом случае сплошная среда, заполняющая область  $\Omega$ , имеет бесконечное число степеней свободы. В методе конечных элементов происходит переход от бесконечно малого объема к малому, но конечному объему. При этом сплошная среда заменяется дискретной моделью, число степеней свободы становится ограниченным, а дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические.

Теории метода конечных элементов и его применению посвящена обширная литература [16], [17], [35], [36], [52], [55], [57], [65]. Основные конечноэлементные соотношения для решаемой задачи можно получить непосредственно из соответствующих дифференциальных уравнений, используя метод Галеркина как один из вариантов метода взвешенных невязок.

Рассмотрим в области  $\Omega$  краевую задачу

$$Lu + f = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.41)$$

$$Bu + q = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (2.42)$$

где  $L$  и  $B$  – линейные дифференциальные операторы, а  $f$  и  $q$  – известные функции независимых переменных.

При конечноэлементной дискретизации области  $\Omega$  выбирается конечное число точек, для которых вводится глобальная нумерация,  $\mathbf{x}_{[i]}$ ,  $i=1,2,\dots,I$ . Эти

точки называются узлами, и в них будут определяться значения функции  $u(\mathbf{x})$ .

Далее используется следующая индексация. Нижние индексы без скобок  $(x_i, \sigma_{ij})$  указывают на компоненты вектора или тензора. Индексы в квадратных скобках  $(\mathbf{x}_{[i]})$  указывают на номера узлов или элементов в конечноэлементной сетке. Индексы в круглых скобках соответствуют позиции элемента в матрице или векторе-столбце  $(a_{(i)} \in \mathbf{a}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\})$ .

Область  $\Omega$  приближенно представляют в виде совокупности конечного числа, построенных на узлах, непересекающихся областей, называемых элементами. Таким образом, область определения функции  $u(\mathbf{x})$  аппроксимируется совокупностью элементов, которые связаны между собой в узлах на их границах. Элементы нумеруются. Элемент с номером  $k$  занимает пространство  $\Omega_{[k]}^e, k=1,2,\dots,K$ .

Приближенное решение уравнения (2.41) представляется в виде

$$u^*(\mathbf{x}) = a_{[i]} N_{[i]}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.43)$$

где  $N_{[i]}(\mathbf{x})$  – базисная функция, соответствующая узлу с номером  $i$ ;  $a_{[i]}$  – узловое значение приближенного решения,  $u^*(\mathbf{x}_{[i]}) = a_{[i]}$ . Здесь и далее по повторяющимся индексам в квадратных скобках подразумевается суммирование.

Элементы, смежные с узлом  $i$  образуют окрестность  $\Omega_{[i]}^\Sigma$  этого узла. Внутри нее базисная функция отлична от нуля. Базисные функции выбираются таким образом, чтобы

$$N_{[i]}(\mathbf{x}_{[j]}) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.44)$$

Кроме этого

$$N_{[i]}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \notin \Omega_{[i]}^\Sigma. \quad (2.45)$$

На каждом элементе аппроксимация (2.43) может быть выражена через локальные функции  $N_{[k][j']}^e(\mathbf{x})$ , называемые функциями формы. Первый индекс соответствует номеру элемента, второй индекс – локальный (внутри элемента) номер узла  $j'=1,2,\dots,J'$ . Тогда в области  $\Omega_{[k]}^e$

$$u^*(\mathbf{x}) = a_{[j']} N_{[k][j']}^e(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{[k]}^e. \quad (2.46)$$

Локальная функция  $N_{[k][j']}^e(\mathbf{x})$  также удовлетворяет условиям (2.40) и (2.41).

Базисная функция  $N_{[i]}(\mathbf{x})$  является обобщением локальных функций  $N_{[k][j']}^e(\mathbf{x})$  сопряженных с узлом  $i$ . Если  $\mathbf{x} \in \Omega_{[k]}^e$  и глобальный номер  $i$  указывает на тот же узел, что и локальный номер  $j'$ , то

$$N_{[i]}(\mathbf{x}) = N_{[k][j']}^e(\mathbf{x}). \quad (2.47)$$

При подстановке приближенного решения  $u^*(\mathbf{x})$  в (2.37) величина невязки равна

$$R = Lu^* + f \quad (2.48)$$

В соответствии с методом взвешенных невязок узловые значения  $a_{[i]}$  функции  $u^*(\mathbf{x})$  находятся из системы алгебраических уравнений

$$\int_{\Omega} W_{[l]} R d\Omega = 0, \quad (2.49)$$

где  $W_{[l]}$  – некоторая система весовых функций ( $l=1,2,\dots,L$ ). Так как общее число неизвестных равно  $I$ , то  $L=I$ .

В методе Галеркина в качестве весовых используются сами базисные функции. Поэтому система уравнений (2.49) принимает вид

$$\int_{\Omega} N_{[l]} R d\Omega = 0. \quad (2.50)$$

## 2.5.2. Конечноэлементное представление уравнения движения нежесткого космического аппарата

Область пространства  $\Omega$  является областью определения функции перемещения  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ . В соответствии с методом конечных элементов область  $\Omega$  покрывается сеткой элементов.

Применяя метод Галеркина к уравнению (2.24) можно записать для  $i$ -ой компоненты перемещений систему уравнений

$$\int_{\Omega} N_{[l]} \left( \rho \ddot{u}_i - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) \right) d\Omega = 0. \quad (2.51)$$

С учетом (2.43) первое слагаемое в (2.51) запишется в виде

$$\int_{\Omega} N_{[l]} \rho \ddot{u}_i d\Omega = \ddot{u}_{i[m]} \int_{\Omega_{[l]}^{\Sigma}} N_{[l]} \rho N_{[m]} d\Omega_{[l]}^{\Sigma} = m_{[l][m]}^{<i>} \cdot \ddot{u}_{i[m]} = \mathbf{M}^{<i>} \ddot{\mathbf{u}}^{<i>}. \quad (2.52)$$

где  $m_{[l][m]}^{<i>}$  – элементы матрицы масс  $\mathbf{M}^{<i>}$ , которая соответствует  $i$ -ой компоненте перемещений и имеет размерностью  $I \times I$ ;  $\ddot{\mathbf{u}}^{<i>}$  – вектор ускорений,  $\ddot{\mathbf{u}}^{<i>} = \{\ddot{u}_{i[1]}, \ddot{u}_{i[2]}, \dots, \ddot{u}_{i[l]}\}$ . Матричные элементы  $m_{[l][m]}^{<i>}$  отличны от нуля только для узлов, лежащих в окрестности узла  $l$ .

При интегрировании по частям второго слагаемого из (2.51) получается

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} N_{[l]} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) d\Omega = \\ = - \int_S N_{[l]} \cdot \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \cdot n_k \cdot dS + \int_{\Omega} \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_k} \cdot \sigma_{kj} \cdot \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \cdot d\Omega. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Первый интеграл в правой части (2.53), вычисляемый по поверхности, с учетом (2.30) представляет вклад граничных условий

$$- \int_S N_{[l]} \cdot \sigma_{kj} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \cdot n_k \cdot dS = - \int_{S_{[l]}^{\Sigma}} N_{[l]} \cdot p_i^n \cdot dS_{[l]}^{\Sigma} = -b_{[l]}^{<i>}, \quad (2.54)$$

где  $b_{[l]}^{<i>}$  – компонента вектора,  $\mathbf{b}^{<i>} = \{b_{[1]}^{<i>}, b_{[2]}^{<i>}, \dots, b_{[l]}^{<i>}\}$ . Для внутренних узлов  $b_l^{<i>} = 0$ .

Второй интеграл учитывает напряжения, распределенные по объему. При его вычислении производные вида  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  выражаются через базисные функции

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N_{[k]}}{\partial x_j} u_{i[k]}. \quad (2.55)$$

Тогда (2.25) принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_{[k]}}{\partial x_j} u_{i[k]} + \frac{\partial N_{[k]}}{\partial x_i} u_{j[k]} + \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_j} \frac{\partial N_{[m]}}{\partial x_j} u_{k[l]} u_{k[m]} \right). \quad (2.56)$$

Использование (2.52), а также (2.26) в виде (2.27) позволяет представить второй интеграл в правой части (2.53) в форме

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_k} \cdot \sigma_{kj} \cdot \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega_{[l]}^{\Sigma}} \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_k} \cdot (\boldsymbol{\psi}(\tilde{\mathbf{u}})^T \cdot \tilde{\mathbf{u}}) \cdot d\Omega_{[l]}^{\Sigma} = k_{[l](m)}^{<i>}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{(m)}, \quad (2.57)$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}$  – полный вектор компонент узловых перемещений,  $\tilde{\mathbf{u}}^T = \{\tilde{u}_{(1)}, \tilde{u}_{(2)}, \dots, \tilde{u}_{(3I)}\} = \{u_{1[1]}, u_{1[2]}, \dots, u_{1[l]}, u_{2[1]}, u_{2[2]}, \dots, u_{2[l]}, u_{3[1]}, u_{3[2]}, \dots, u_{3[l]}\}$ ;

$\boldsymbol{\psi}(\tilde{\mathbf{u}})$  – вектор из функций-коэффициентов,  $\boldsymbol{\psi}(\tilde{\mathbf{u}})^T = \{\psi_{(1)}(\tilde{\mathbf{u}}), \psi_{(2)}(\tilde{\mathbf{u}}), \dots, \psi_{(3I)}(\tilde{\mathbf{u}})\}$ . Компоненты вектора  $\boldsymbol{\psi}(\tilde{\mathbf{u}})$  являются суммами, слагаемые которых

состоят из произведений вида  $\left( \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_j} \right)^{\alpha} \left( \frac{\partial N_{[m]}}{\partial x_j} \right)^{\beta} \tilde{u}_{\xi}^{\gamma} \tilde{u}_{\eta}^{\chi}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma, \chi$  – целые,

неотрицательные числа.  $k_{[l](m)}^{<i>}(\tilde{\mathbf{u}})$  – элемент матрицы жесткости  $\mathbf{K}^{<i>}$ , равный

$$k_{[l](m)}^{<i>}(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_{[l]}^{\Sigma}} \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_k} \cdot \psi_{(m)}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot d\Omega_{[l]}^{\Sigma}. \quad (2.58)$$

Размерность матрицы жесткости  $\mathbf{K}^{<i>}$  равна  $I \times 3I$ .

В матричном виде система уравнений (2.51) представляется как

$$\mathbf{M}^{<i>} \ddot{\mathbf{u}}^{<i>} + \mathbf{K}^{<i>} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{b}^{<i>} \quad (2.59)$$

Полная система уравнений, записанная для всех компонент перемещений, имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{b}, \quad (2.60)$$

где  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  – полные матрицы масс и жесткости, с размерностями  $3I \times 3I$ ;  $\mathbf{b}$  – полный вектор правых частей, с размерностью  $3I$ . Они имеют следующую структуру

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{<1>} & & \\ & \mathbf{M}^{<2>} & \\ & & \mathbf{M}^{<3>} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{<1>} \\ \mathbf{K}^{<2>} \\ \mathbf{K}^{<3>} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{<1>} \\ \mathbf{b}^{<2>} \\ \mathbf{b}^{<3>} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

При вычислении элементов матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  и компонент вектора  $\mathbf{b}$ , удобнее выполнять поэлементное интегрирование. Так для элемента с номером  $k$  можно ввести соответствующую локальную матрицу масс с компонентами

$$m_{[k][l'][m']}^{e<i>} = \int_{\Omega_{[k]}^e} N_{[k][l']}^e \rho N_{[k][m']}^e d\Omega_{[k]}^e, \quad (2.62)$$

где  $l'$ ,  $m'$  – локальные номера узлов.

Тогда элемент глобальной матрицы  $\mathbf{M}$  выражается через локальные матрицы элементов, входящих в окрестность  $\Omega_{[l]}^\Sigma$  узла  $l$ , как

$$m_{[l][m]}^{<i>} = \sum_k m_{[k][l'][m']}^{e<i>}, \quad (2.63)$$

где каждая пара индексов  $l$ ,  $l'$  и  $m$ ,  $m'$  указывает на один и тот же узел. Аналогичным образом выражаются элементы матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  и компоненты вектора  $\mathbf{b}$ .

### 2.5.3. Матрица демпфирования

В уравнении (2.24) не учитывались демпфирующие силы (силы трения), возникающие при динамических деформациях. Физическая природа этих сил различна: внутреннее трение в материале, вязкое или сухое трение, трение в шарнирных соединениях и т. д. Соответственно различным является и

математическое описание этих факторов. Обычно демпфирование учитывается в матричном уравнении [54], [63] и считается пропорциональным скорости движения (вязкое трение), так как этот случай является простейшим с позиции математического анализа. Трение более сложной природы заменяется эквивалентным вязким демпфированием [63]. Исходя из этого уравнение (2.60) примет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (2.64)$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица демпфирования размером  $3I \times 3I$ ;  $\dot{\mathbf{u}}$  – вектор узловых скоростей перемещений.

Матрица  $\mathbf{C}$  выбирается как линейная комбинация матриц масс и жесткости [63]

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}, \quad (2.65)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные. На практике определение компонент матрицы демпфирования представляет отдельную задачу, которая решается большей частью экспериментально.

Следует отметить одну особенность представления матрицы демпфирования в виде (2.65), которая становится важной в случае свободного движения гибких механических систем. Численные исследования показали, что демпфирование, пропорциональное матрице масс, соответствует действию внешних вязких сил. Это приводит к тому, что полный импульс и полный момент импульса свободной механической системы не сохраняются. Демпфирование, пропорциональное матрице жесткости, связано с внутренними силами, действующими в материале. В этом случае полный импульс и полный момент импульса сохраняются. Таким образом, рассматривая свободное движение нежесткого космического аппарата, следует в (2.65) брать коэффициент  $a=0$ .

#### 2.5.4. Интегрирование уравнений движения

При моделировании динамики сложных вантово-стержневых и оболочечных конструкций предпочтительны прямые методы интегрирования

уравнений движения. Применение альтернативных методов, основанных на синтезе форм собственных колебаний, целесообразно, если при решении задачи достаточно учесть лишь несколько значимых форм колебаний. При этом необходимо располагать соответствующими методами определения и критериями отбора таких форм. В тоже время, говоря о прямом методе интегрирования, можно утверждать, что он, в общем случае, учитывает все формы колебаний.

При выполнении численного интегрирования возникает вопрос о выборе шага интегрирования по времени  $\Delta t$ . Очевидно, что величина  $\Delta t$  должна быть такой, чтобы достаточно точно описывать колебания, наиболее существенные в динамике конструкции. Таковыми являются низкочастотные колебания. При этом вклад высокочастотных колебаний будет искажен. Это допустимо, так как их влияние будет не существенным. Если процедура численного расчета безусловно устойчива, то единственным критерием выбора величины  $\Delta t$  будет обеспечение точности результатов.

В работах [54], [75] рассмотрены прямые методы интегрирования: метод центральных разностей, метод Хоболта (Houbolt),  $\theta$ -метод Вильсона (Wilson), метод Ньюмарка (Newmark).

В методе Ньюмарка уравнение (2.64) в момент времени  $t+\Delta t$  записывается в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \mathbf{b}^{t+\Delta t}. \quad (2.66)$$

Скорость и перемещение в момент времени  $t+\Delta t$  аппроксимируются выражениями

$$\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}^t + \left( (1-\beta)\ddot{\mathbf{u}}^t + \beta\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right) \Delta t, \quad (2.67)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{u}}^t + \dot{\mathbf{u}}^t \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \right) \Delta t^2, \quad (2.68)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты, которые выбираются из условия обеспечения безусловной устойчивости процесса интегрирования. Векторы  $\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  и  $\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$  выражаются из (2.61), (2.62) через  $\tilde{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}^t$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^t$  и  $\ddot{\mathbf{u}}^t$  в виде

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\tilde{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{u}}^t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^t + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^t, \quad (2.69)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{t+\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha\Delta t}(\tilde{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{u}}^t) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^t + \Delta t\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^t. \quad (2.70)$$

При подстановке (2.69) и (2.70) в уравнение (2.66), оно примет следующую форму

$$\hat{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{b}}^{t+\Delta t}, \quad (2.71)$$

где

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C}; \quad \hat{\mathbf{b}}^{t+\Delta t} = \mathbf{b}^{t+\Delta t} + \mathbf{M}\mathbf{b}_M^t + \mathbf{C}\mathbf{b}_C^t; \quad (2.72)$$

$$\mathbf{b}_M^t = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\tilde{\mathbf{u}}^t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^t - \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^t; \quad \mathbf{b}_C^t = \frac{\beta}{\alpha\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}^t - \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^t - \Delta t\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^t.$$

В начальный момент времени необходимо задать вектор  $\tilde{\mathbf{u}}^{t=0}$ . Он может быть определен из уравнения (2.66) по известным начальным ( $\tilde{\mathbf{u}}^{t=0}$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{t=0}$ ) и граничным условиям.

Метод Ньюмарка безусловно устойчив при значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  [54], [75]

$$\beta \geq \frac{1}{2}; \quad \alpha \geq \frac{1}{4}\left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (2.73)$$

На каждом временном шаге, для решения уравнения (2.71) используется процедура Ньютона-Рафсона.

### 2.5.5. Собственные частоты и формы колебаний

Спектр собственных колебаний определяется для напряженно-деформированного состояния конечноэлементной модели, которое соответствует состоянию рефлектора с минимальным СКО. Это состояние получено из решения статической задачи (раздел 2.3.1). Если считать колебания малыми, то поле перемещений можно представить в виде суммы

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^I(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{II}(t, \mathbf{x}), \quad (2.74)$$

где  $\mathbf{u}^I(\mathbf{x})$  – поле перемещений, соответствующее минимуму СКО, получено из решения статической задачи;  $\mathbf{u}^II(t, \mathbf{x})$  – поле перемещений, соответствующее малым гармоническим колебаниям. Причем выполняются условия

$$u_i^II = u_i^I, \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial u_i^II}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^I}{\partial x_j}, \quad (2.76)$$

При подстановке (2.74) в (2.25) с учетом (2.75) и (2.76) тензор деформаций принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^I + \varepsilon_{ij}^II, \quad (2.77)$$

где

$$\varepsilon_{ij}^I = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^I}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^I}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^I}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^I}{\partial x_i} \right), \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{ij}^II = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^II}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^II}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^I}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^II}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^I}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^II}{\partial x_j} \right). \quad (2.79)$$

Выражение (2.77) позволяет представить закон Гука (2.27) как сумму двух слагаемых

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^II, \quad (2.80)$$

где

$$\sigma_{ij}^I = \frac{E_m}{1+\nu_m} (\varepsilon_{ij}^I + \frac{\nu_m}{1-2\nu_m} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^I) - \frac{E_m}{1-2\nu_m} \cdot \varepsilon_{ij}^T \cdot \delta_{ij} + \sigma_{ij}^0 \quad (2.81)$$

$$\sigma_{ij}^II = \frac{E_m}{1+\nu_m} (\varepsilon_{ij}^II + \frac{\nu_m}{1-2\nu_m} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^II) \quad (2.82)$$

Учитывая (2.74), (2.75) и (2.76), а также то, что  $\mathbf{u}^I$  является решением статической задачи, динамическое уравнение (2.24) приводится к виду

$$\rho_m \ddot{u}_i^II = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sigma_{kj}^II \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i^I}{\partial x_j} \right) \right). \quad (2.83)$$

Космический аппарат свободен от внешних воздействий и его корпус не закреплен, поэтому граничные условия имеют вид

$$n_k \sigma_{kj}^{II} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i^I}{\partial x_j} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.84)$$

Исходя из малости собственного демпфирования конструкции, матричное уравнение (2.64) примет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{II} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}^{II} = 0. \quad (2.85)$$

Решение ищется в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}^{II} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \cos \omega t, \quad (2.86)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор-столбец амплитудных значений перемещений (форма колебаний);  $\omega$  – собственная круговая частота. После подстановки (2.86) в (2.85) приходим к уравнению

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (2.87)$$

Спектр собственных частот находится из условия равенства нулю определителя

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (2.88)$$

Компоненты вектора-столбца  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , соответствующего частоте  $\omega_i$ , определяются из уравнения

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}_i = 0. \quad (2.89)$$

Для вычисления собственных значений и собственных векторов используется метод Ланцоша (Lanczos) [75]. Собственные вектора определяются с точностью до масштабирующего множителя.

### 2.5.6. Программная реализация

Динамическая численная модель космического аппарата с зонтичным рефлектором реализована в конечноэлементном пакете ANSYS в виде программного комплекса на языке программирования APDL (ANSYS Parametric Design Language).

Для снижения размерности задачи балки силового каркаса, шнуры фронтальной и тыльной сетей, ванты, оттяжки силового каркаса

моделировались одномерными элементами, а сетеполотно и панели солнечных батарей – двумерными элементами.

В таблице 2.2 приведены типы конечных элементов из библиотеки ANSYS, которые использовались при построении численной модели космического аппарата.

Таблица 2.2 – Типы конечных элементов, используемые в численной модели.

Элементы конструкции космического аппарата	Тип элемента ANSYS
шнуры фронтальной и тыльной сетей, вантовая сеть, оттяжки	LINK10
балки силового каркаса	BEAM188
сетеполотно,	SHELL181 (мембрана)
панели солнечных батарей	SHELL181 (оболочка)
корпус космического аппарата	SOLID45

На рисунке 2.13 показана схема программного комплекса. Программный комплекс включает:

- блок создания геометрической модели (без сетеполотна);
- блок построения конечноэлементной модели, включая элементы сетеполотна;
- процедуру получения начальных условий;
- блок динамического расчета;
- процедуры обработки и визуализации результатов.

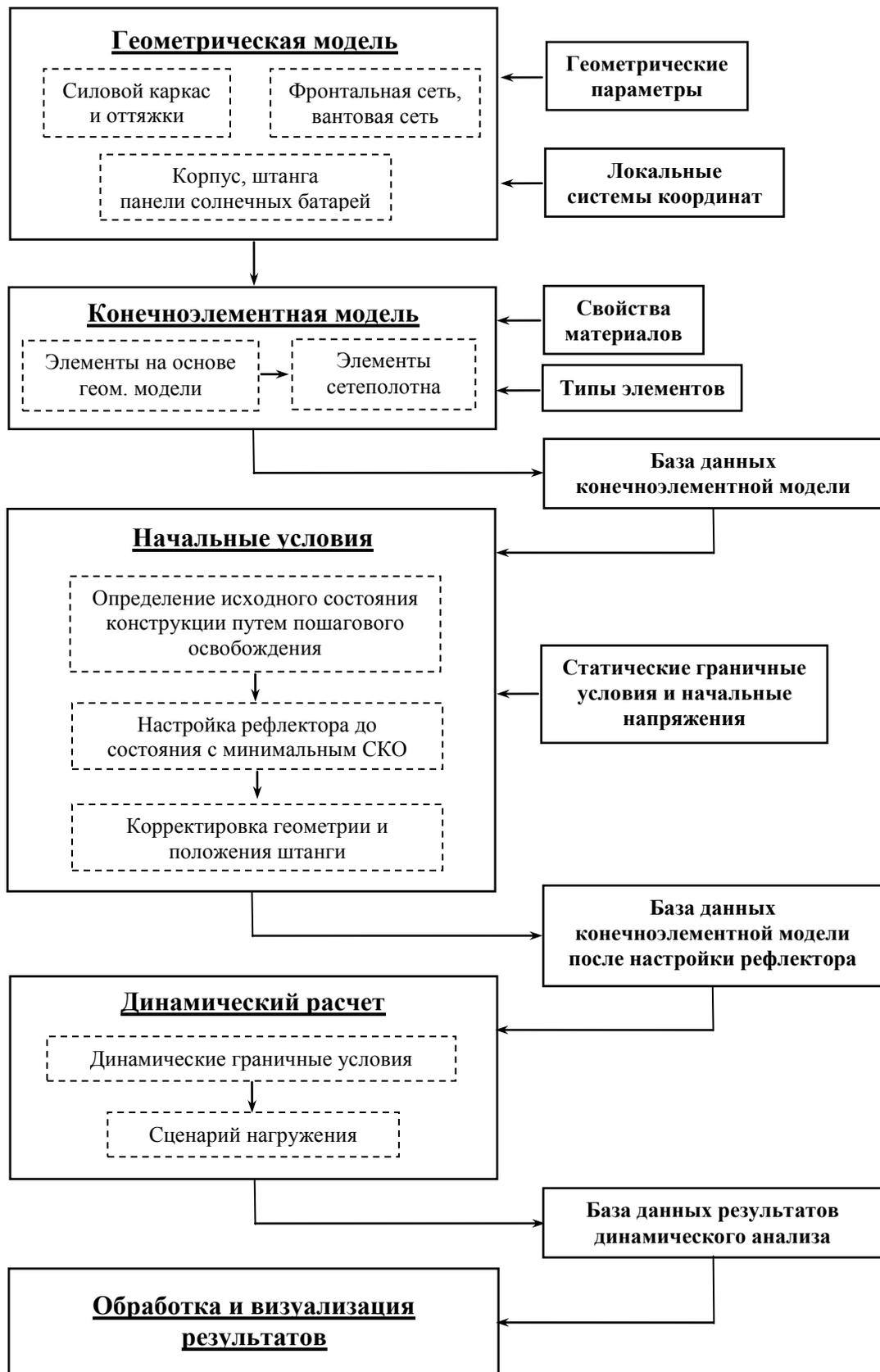


Рисунок 2.13 – Основные элементы программного комплекса, реализующего численную динамическую модель космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором

## **ГЛАВА 3. Верификация используемых программных элементов и численной динамической модели космического аппарата**

### **3.1. Предварительные замечания**

В данной главе проверяется адекватность программной реализации метода конечных элементов и подтверждается достоверность численной динамической модели космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором.

Первоначально рассматривается применимость используемых типов конечных элементов из библиотеки ANSYS для численного моделирования динамики линейных и нелинейных механических систем. Полученные численные решения сравниваются с аналитическими решениями и результатами экспериментов.

Верификация совместного использования данных типов конечных элементов проводится на обобщенной модели мембранного рефлектора. Результаты динамического анализа, полученные на ANSYS-модели, сравниваются с результатами для аналогичной модели, реализованной в пакете MATLAB.

Достоверность конечноэлементной модели космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором проверяется путем исследования сходимости численного решения при различных параметрах пространственной и временной сеток. Кроме того сравниваются результаты численного анализа движения космического аппарата с аналитическим решением.

### **3.2. Малые колебания свободной упругой балки**

Рассматривается свободная балка (рисунок 3.1) длины  $l$ . В конечноэлементной модели балки используются элементы типа BEAM188 из библиотеки элементов ANSYS.

Малые поперечные колебания балки описываются уравнением [63]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (3.1)$$

где  $a = \sqrt{EI / \rho S}$ ;  $E$ ,  $\rho$  – модуль упругости и плотность материала;  $I$ ,  $S$  – момент инерции и площадь сечения.

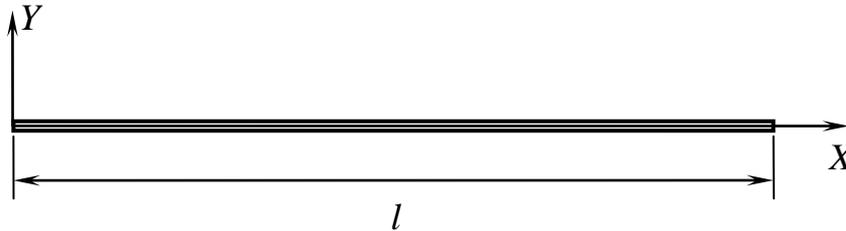


Рисунок 3.1 – Балка и система координат

Задаются граничные условия

$$\left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=l} = \left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=l} = 0 \quad (3.2)$$

и начальные условия

$$\begin{aligned} y(t=0, x) &= 0, \\ \dot{y}(t=0, x) &= v_{t=0}(x). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функция  $v_{t=0}(x)$  выбирается из условия возбуждения первой собственной формы колебаний.

Решение уравнения (3.1) для первой формы колебаний имеет вид [63]

$$y_1(t, x) = Y_1(x) \cdot \sin(\omega_1 t), \quad (3.4)$$

где  $Y_1(x) = C_1(\cos(k_1 x) + ch(k_1 x)) + C_2(\sin(k_1 x) + sh(k_1 x))$ ;  $\omega_1 = k_1^2 a$ .

Величина  $k_1$  определяется из условия  $k_1 l = 4,73$  [63]. Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  связаны соотношением

$$C_1 = -(a_{12} + a_{22}) / (a_{11} + a_{21}) C_2, \quad (3.5)$$

где  $a_{11} = -\cos(kl) + ch(kl)$ ;  $a_{12} = -\sin(kl) + sh(kl)$ ;  $a_{21} = \sin(kl) + sh(kl)$ ;  $a_{22} = -\cos(kl) + ch(kl)$ .

Из (3.4) следует, что функция  $v_{t=0}(x)$  из (3.3) равна  $v_{t=0}(x) = \omega_1 Y_1(x)$ , причем накладывается условие

$$\int_0^l v_{t=0}(x) dx = 0. \quad (3.6)$$

Если условие (3.6) выполняется, то полный импульс механической системы равен нулю.

Параметры задачи имели следующие значения:  $l=1\text{ м}$ ;  $S=7,85\cdot 10^{-5}\text{ м}^2$  (соответствует диаметру балки  $10^{-2}\text{ м}$ );  $I=4,9\cdot 10^{-10}\text{ м}^4$ ;  $E=10^{11}\text{ Н/м}^2$ ;  $\rho=10^3\text{ кг/м}^3$ . Амплитуда колебаний для точек на концах балки задавалась равной  $5\cdot 10^{-4}\text{ м}$ . Конечноэлементная модель содержала 100 балочных элементов. На рисунке 3.2 показано перемещение конца балки в зависимости от времени, полученные из аналитического и численного решений.

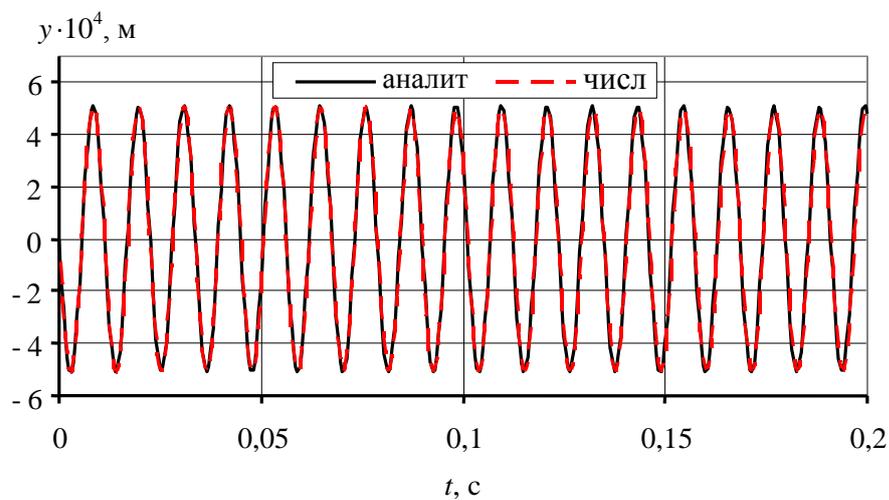


Рисунок 3.2 – Перемещение конца балки, аналитическое и численное решения.

Частота колебаний, соответствующая аналитическому решению, равна  $f_{\text{ан}}=\omega_1/2\pi=89,02\text{ Гц}$ . Численное решение дает частоту колебаний  $f_{\text{чис}}=88,89\text{ Гц}$ . Величина относительной погрешности равна  $\varepsilon_f=0,15\%$ .

Из (3.6) следует, что полный импульс системы равен 0. Однако это равенство для численного решения выполняется приблизительно

$$\int_0^l v_{t=0}(x)dx = \varepsilon_v \neq 0. \quad (3.7)$$

Величина  $\varepsilon_v/l$  представляет скорость дрейфа центра масс балки вследствие ошибок аппроксимации. На рисунке 3.3 показана зависимость величины  $\varepsilon_v/l$  от числа элементов, используемых в конечноэлементной модели балки.

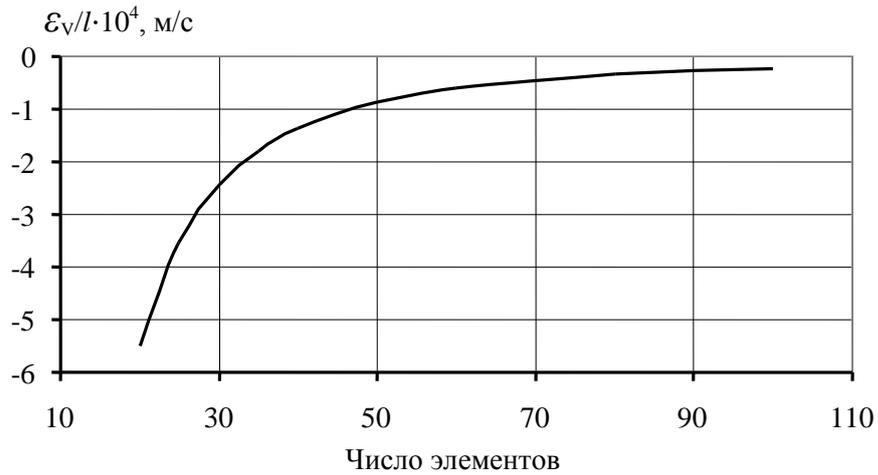


Рисунок 3.3 – Зависимость величины  $\epsilon_v/l$  от числа элементов в конечноэлементной модели балки

На рисунке 3.4 показаны перемещения конца балки для двух конечноэлементных аппроксимаций: 100 элементов и 20 элементов. В последнем случае перемещение центра масс балки вносит существенную погрешность.

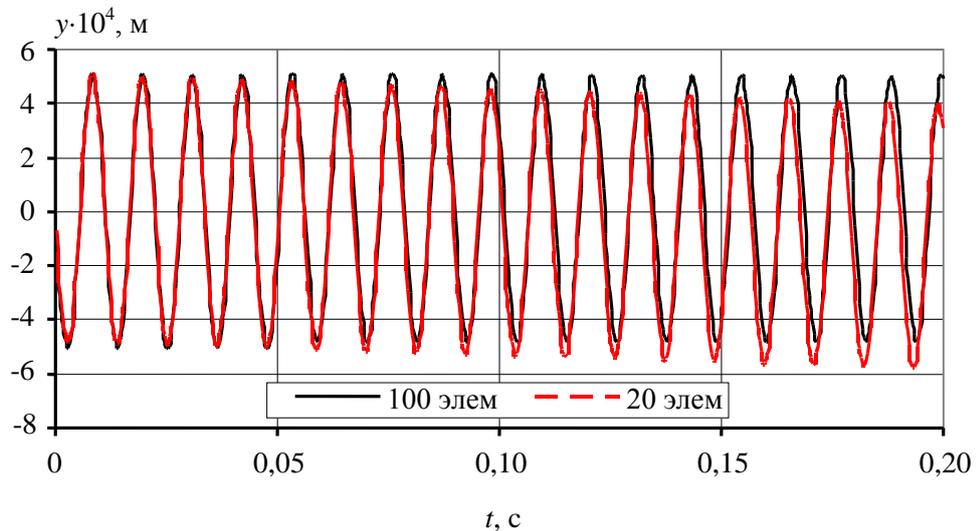


Рисунок 3.4 – Перемещение конца балки для двух конечноэлементных аппроксимаций

### 3.3. Колебания с большой амплитудой упругой балки с защемленным концом

В работе [25] рассмотрена защемленная балка, которая под собственным весом совершает колебания с большой амплитудой. На ее свободном конце закреплена дополнительная масса  $M$  с моментом инерции  $J_{zz}$  (рисунок 3.5). В различные моменты времени измерялась форма балки. С этими экспериментальными данными сравниваются результаты численного анализа.



Рисунок 3.5 – Защемленная балка с грузом на свободном конце

Параметры задачи: длина балки  $l=0,4$ м; диаметр балки  $d=10^{-3}$ м, плотность материала  $\rho=7919$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости  $E=2\cdot 10^{11}$ Н/м<sup>2</sup>; масса груза  $M=20\cdot 10^{-3}$  кг; момент инерции  $J_{zz}=1,5810^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>.

В конечноэлементной модели балки используются элементы типа BEAM188. Модель содержала 100 элементов.

На рисунке 3.6 показана форма балки при динамическом изгибе под действием собственного веса в момент времени  $t=0,4$  с. Погрешность в определении положения конца балки при изгибе составила  $\varepsilon_x=2,4\%$  и  $\varepsilon_y=0,4\%$ .

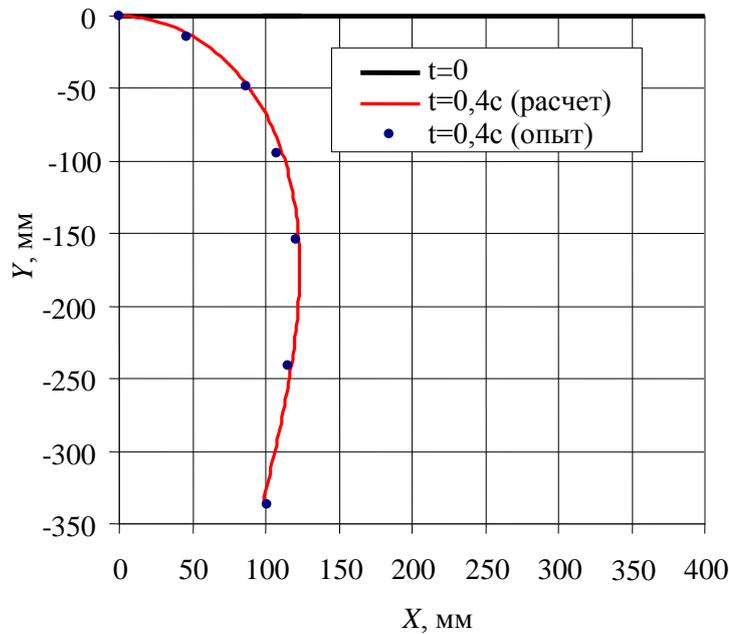


Рисунок 3.6 – Изгиб балки при  $t=0,4$  с

### 3.4. Колебания с большой амплитудой заземленной пластины

В работе [25] также приведены результаты экспериментов с заземленной прямоугольной пластиной, колеблющейся под собственным весом. В углу пластины закреплен груз (рисунок 3.7).

Параметры задачи: размеры пластины  $0,4 \times 0,2$  м; толщина пластины  $0,4 \cdot 10^{-3}$  м; плотность материала  $7554$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости  $189$  МПа; масса груза  $M=0,26$  кг; моменты инерции  $J_{xx}=82,1 \cdot 10^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{yy}=72,9 \cdot 10^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{zz}=149 \cdot 10^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>; смещение центра массы груза  $h=18,7 \cdot 10^{-6}$  м.

Конечноэлементная модель пластины содержала 450 элементов типа SHELL181 (оболочка). В узлах элементов задавались силы, моделирующие аэродинамическое демпфирование. Величина силы в узле определялись выражением

$$F = -C_1 \cdot V - C_2 \cdot V \cdot |V|, \quad (3.8)$$

где  $V$  – скорость в узле;  $C_1$  и  $C_2$  – коэффициенты. Величины  $C_1$  и  $C_2$  одинаковы для всех узлов и подбирались исходя из наилучшего совпадения расчета с экспериментом по амплитуде колебаний.

Сравнение результатов эксперимента с расчетными данными приведено на рисунке 3.8, где показано перемещение точки  $P$  (рисунок 3.7) в зависимости от времени. Погрешность результатов расчета по времени составила около 0,6%.

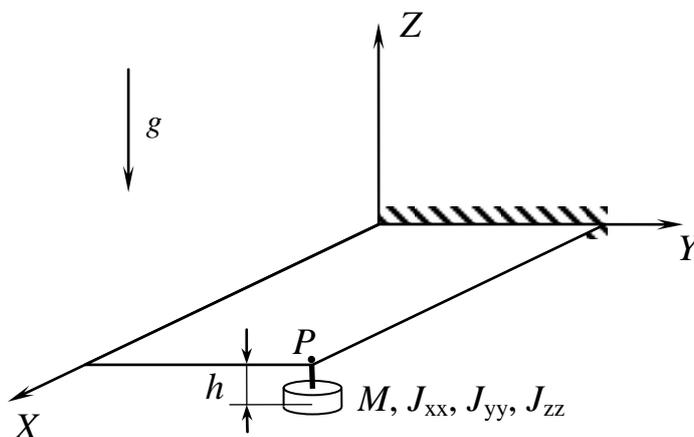


Рисунок 3.7 – Защемленная пластина с грузом

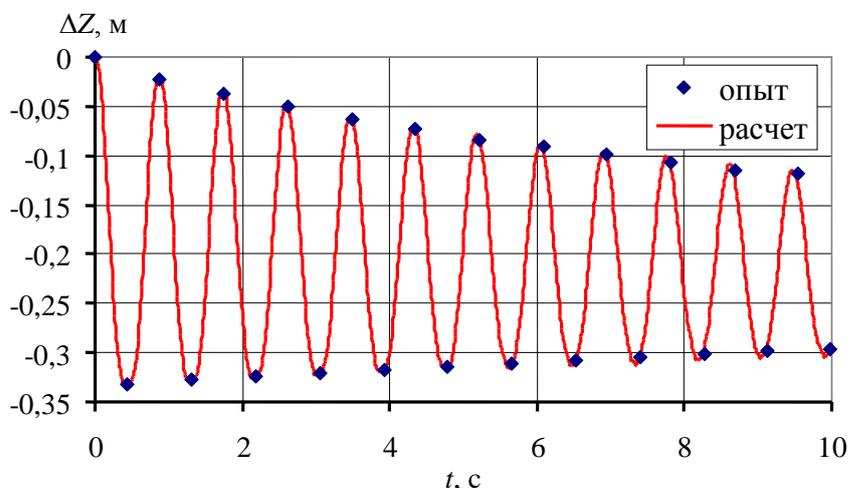


Рисунок 3.8 – Перемещение точки  $P$  в зависимости от времени

### 3.5. Сравнение результатов моделирования колебаний сетеполотна обобщенной модели мембранного рефлектора, полученных для различных реализаций конечноэлементной модели

В работе [135] моделировалось развитие колебательного процесса в сетеполотне (мембране) обобщенной модели мембранного рефлектора, которая показанная на рисунке 3.9. Конструкция представляла относительно

жесткий обод, на котором на каркасе из шнуров закреплено сетеполотно. Мембрана состояла из 7 секторов и была вписана в окружность радиусом 10 м.

Сетеполотно имело толщину  $5 \cdot 10^{-6}$  м; модуль упругости  $3,454 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>; коэффициент Пуассона 0,312; плотность 1440 кг/м<sup>3</sup>; начальное напряжение 502000 Н/м<sup>2</sup>. Шнуры имели площадь сечения  $6,58 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>; модуль упругости  $1,93 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>; плотность 1790 кг/м<sup>3</sup>. В начальный момент времени все элементы конструкции находились в одной плоскости.

К модели прикладывалось возмущение в виде вращения обода относительно оси симметрии, как показано на рисунке 3.9. Закон изменения угла вращения  $\theta(t)$  имел вид [135]

$$\frac{\theta(t)}{\theta_0} = -2 \left( \frac{t}{t_0} \right)^3 + 3 \left( \frac{t}{t_0} \right)^2, \text{ при } 0 \leq t \leq t_0; \quad (3.9)$$
$$\theta(t) = \theta_0, \text{ при } t \geq t_0;$$

где  $t_0$  – время действия возмущения;  $\theta_0$  – конечное значение угла поворота. Параметры возмущения имели следующие значения:  $t_0=1$  с;  $\theta_0=0,3^\circ$ . Сетеполотно моделировалось 322 четырехугольными элементами. Программный код для данной конечноэлементной модели был написан в пакете MATLAB.

Аналогичная конечноэлементная модель была построена на основе подхода, описанного в главе 2 данной работы. Код программы написан на языке APDL конечноэлементного пакета ANSYS. В модели использовались элементы типов LINK10, BEAM188, SHELL181 в соответствии с таблицей 2.2.

Так как начальное состояние сетеполотна является плоским, то для этой модели отсутствовала стадия настройки отражающей поверхности. Задача решалась в геометрически нелинейной постановке.

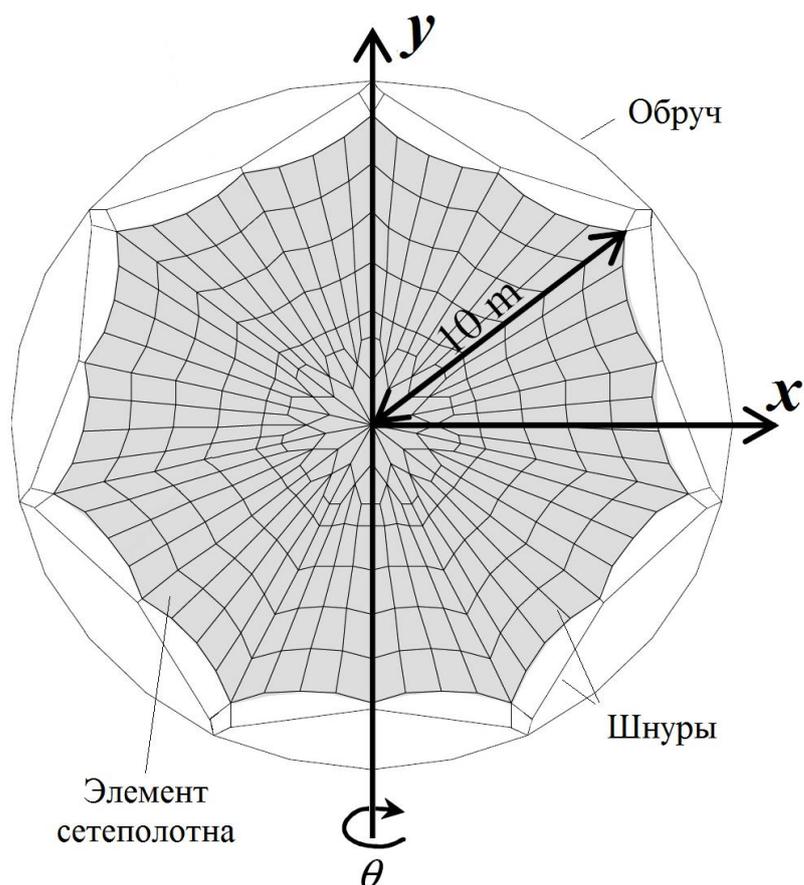


Рисунок 3.9 – Конечноэлементная модель мембранного рефлектора

Сравнение моделей проводилось по величинам собственных частот и по зависимости СКО сетеполотна от времени. Результаты для MATLAB-модели взяты из работы [135], а для ANSYS-модели – непосредственно из расчетов.

В таблице 3.1 приведены величины пяти первых собственных частот рефлектора.

Таблица 3.1 – Собственные частоты конечноэлементных моделей мембранного рефлектора

Номер тона	1	2	3	4	5
Частота MATLAB-модели, Гц	0,7	1,13	1,13	1,55	1,55
Частота ANSYS-модели, Гц	0,65	1,11	1,11	1,4	1,4
Погрешность, %	7,1	1,8	1,8	9,7	9,7

Развитие колебательного процесса в мембране (изменение величины СКО) при действии возмущения (3.9) показаны на рисунке 3.10 (MATLAB-модель) и на рисунке 3.11 (ANSYS-модель).

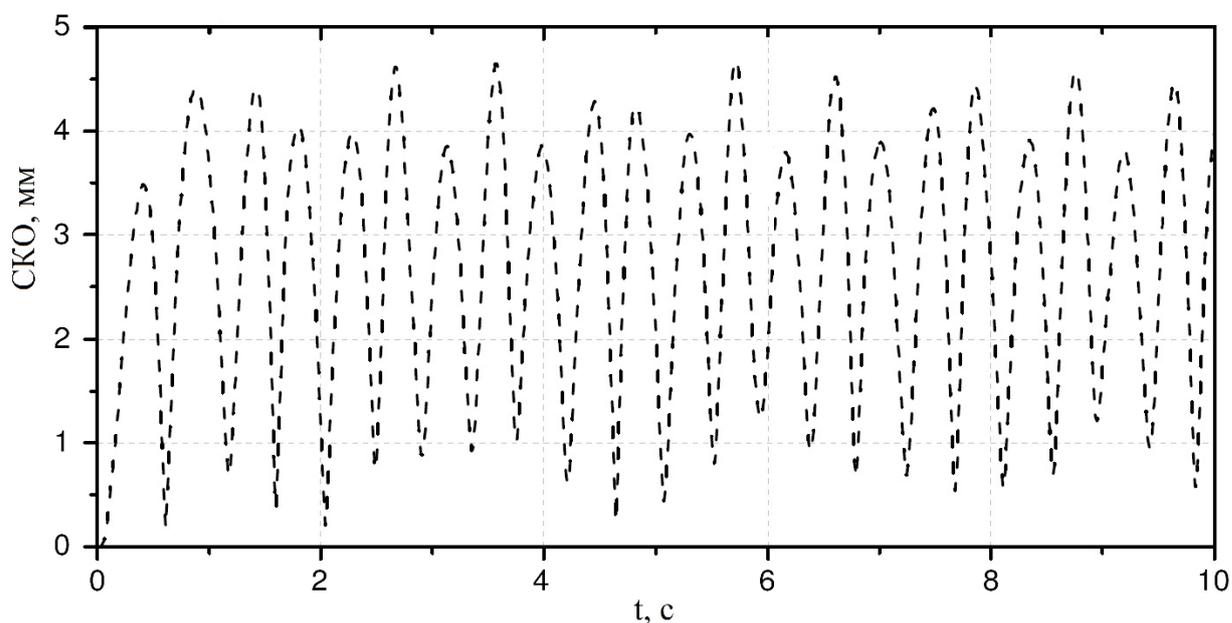


Рисунок 3.10 – Изменение СКО во времени для MATLAB-модели рефлектора

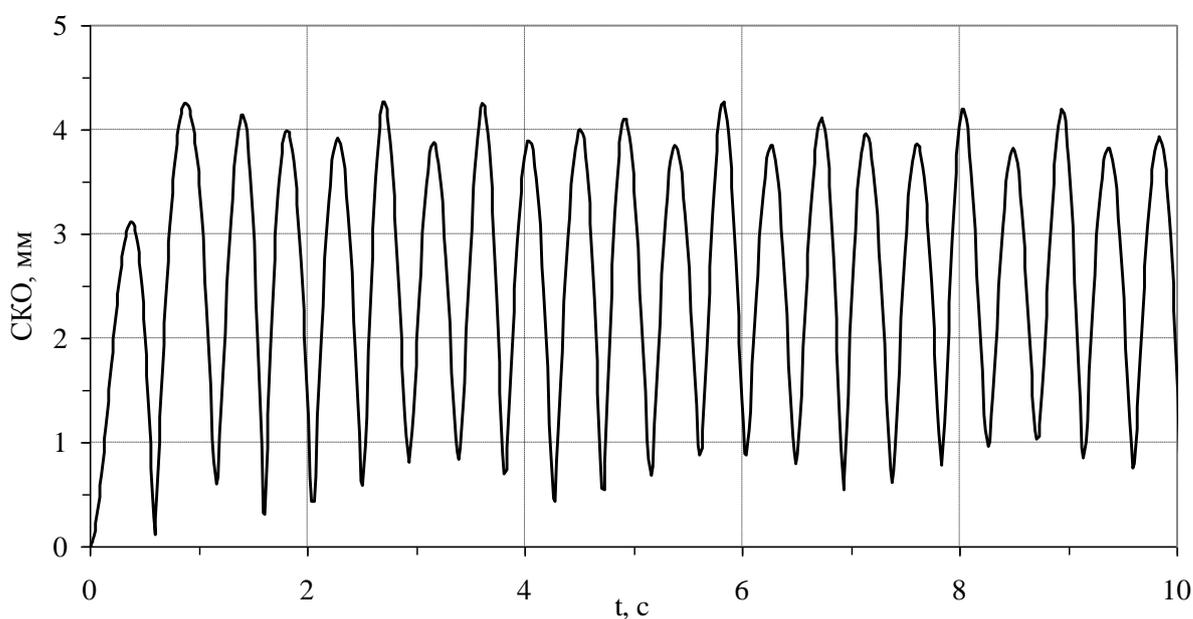


Рисунок 3.11 – Изменение СКО во времени для ANSYS-модели рефлектора

При сравнении двух моделей погрешность по времени в соответствующих точках графиков составила 2,2%, по максимуму СКО – 6,5%. Степень совпадения результатов во многом определяется

эквивалентностью геометрий и начальных напряженно-деформированных состояний двух моделей. Однако геометрия и начальное состояние MATLAB-модели описаны не достаточно полно. В целом совпадение результатов, полученных по MATLAB-модели и ANSYS-модели, можно считать удовлетворительными.

### **3.6. Достоверность динамической конечноэлементной модели космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором**

На рисунке 3.12 показан космический аппарат. К его корпусу прикладывается момент сил  $M_0=3$  Н·м, который действует в течение  $t_0=20$  с. Момент импульса, сообщенный механической системе равен 60 Н·м·с. Соответствующий момент инерции относительно центра масс космического аппарата составляет  $J_0=14222$  кг·м<sup>2</sup>. Действие возмущения приводит космический аппарат во вращательное движение, а также вызывает колебания частей конструкции относительно недеформированного состояния. Динамическое состояние конструкции космического аппарата находится из численного решения.

Это движение сравнивается с движением абсолютно жесткого тела с той же геометрией, массой и моментами инерции, что и космический аппарат. Причем к абсолютно жесткому телу прикладывается то же самое возмущение. Движение такого тела описывается выражением

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0,5 \cdot M_0 \cdot t^2 / J_0, & 0 < t < t_0 \\ \alpha_0 + \omega_0(t - t_0), & t_0 < t \end{cases}, \quad (3.10)$$

где  $\alpha$  – угловое перемещение;  $\alpha_0 = \alpha(t_0)$ ;  $\omega_0 = \dot{\alpha}(t_0)$ .

Для анализа движения космического аппарата выбраны две точки: точка  $Kpn$ , расположенная на корпусе, и точка  $Cn$  на конце спицы рефлектора (рисунок 3.12).

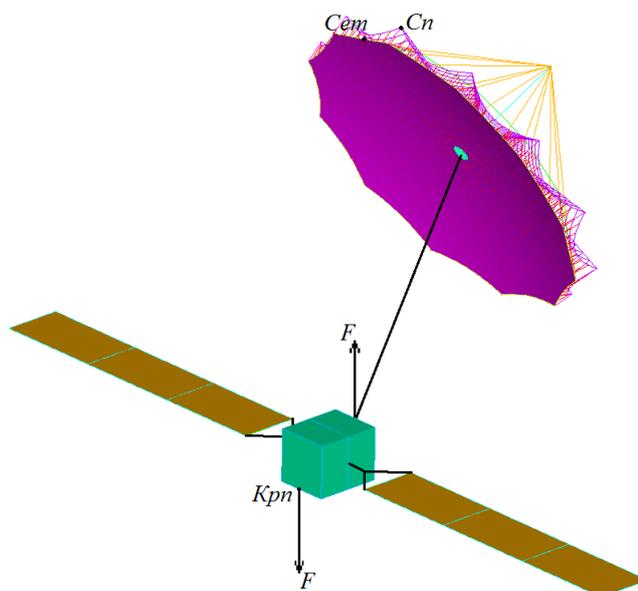


Рисунок 3.12 – Нагрузки, действующие на космический аппарат

На рисунках 3.13–3.14 показаны рассчитанные угловые перемещения и угловые скорости корпуса (точка  $Kpn$ ) и спицы (точка  $Cn$ ) в сравнении с движением абсолютно жесткого тела. Амплитуда колебаний углового перемещения для корпуса (точка  $Kpn$ ) составляет около  $0,01^\circ$ , для спицы (точка  $Cn$ ) –  $0,02^\circ$  (рисунок 3.14).

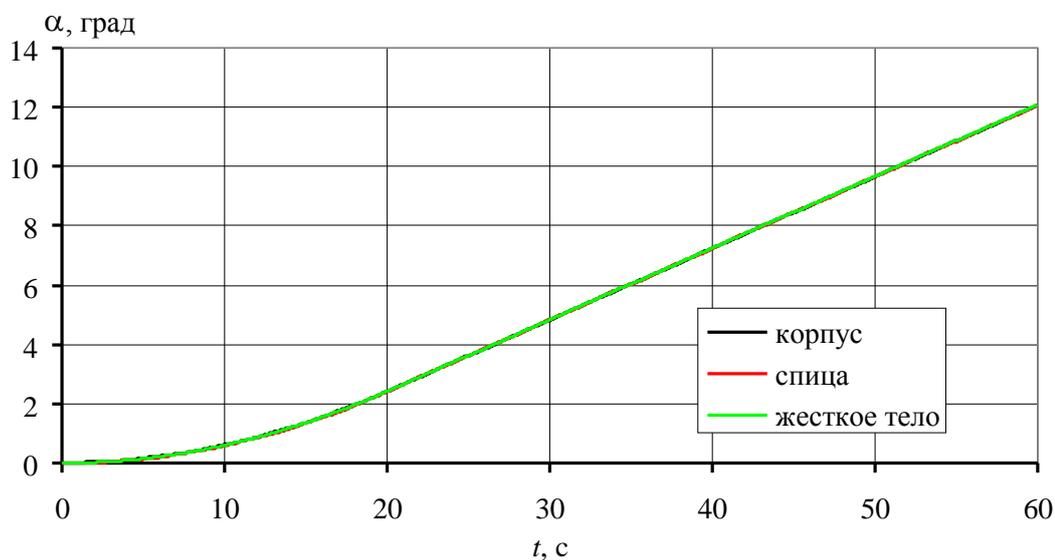


Рисунок 3.13 – Угловые перемещения

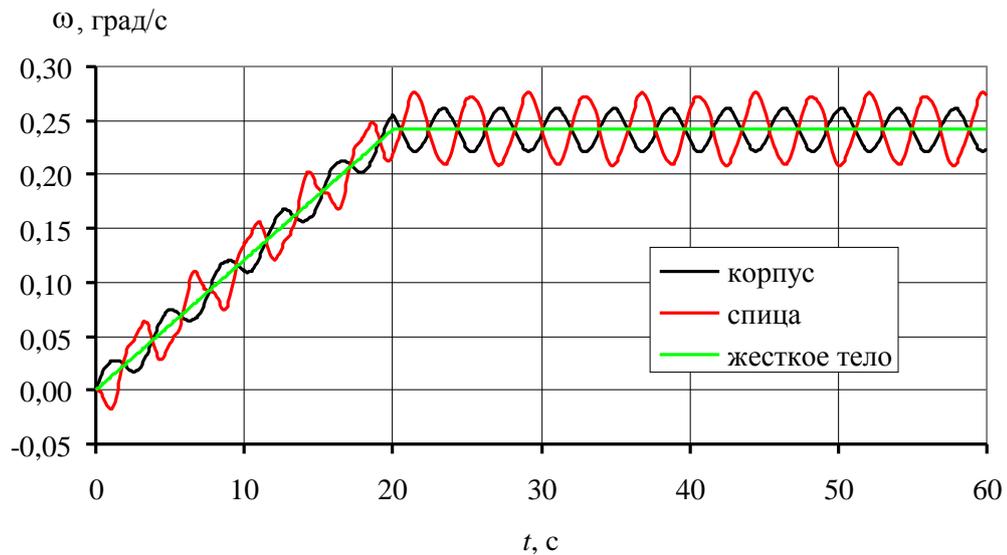


Рисунок 3.14 – Угловые скорости

Приведенные результаты показывают, что осредненное угловое движение космического аппарата совпадает с движением абсолютно жесткого тела. Под действием вращающего момента угловые скорости в точках  $Kp$  и  $Cn$  в среднем увеличивается линейно. По окончании действия возмущения осредненный уровень угловых скоростей также соответствует скорости вращения абсолютно жесткого тела. Постоянство угловой скорости говорит о сохранении момента импульса. Корпус и спица колеблются в противофазе. Такое поведение также соответствует закону сохранения момента импульса.

Сходимость данного решения исследовалась в точках  $Cn$  и  $Cem$  (рисунок 3.12) в зависимости от шага интегрирования по времени  $\Delta t$  и параметров пространственных сеток силового каркаса и сетеполотна. При построении последовательности решений шаг интегрирования по времени изменялся от 0,2 с до 0,005 с. Количество элементов, моделирующих штангу, варьировалось от 4 до 100. Конечноэлементная модель спицы содержала от 16 до 64 элементов. Нижнее ограничение количества элементов спицы наложено самой конструкцией рефлектора и обусловлено связями элементов спицы с элементами вант (рисунок 3.15).

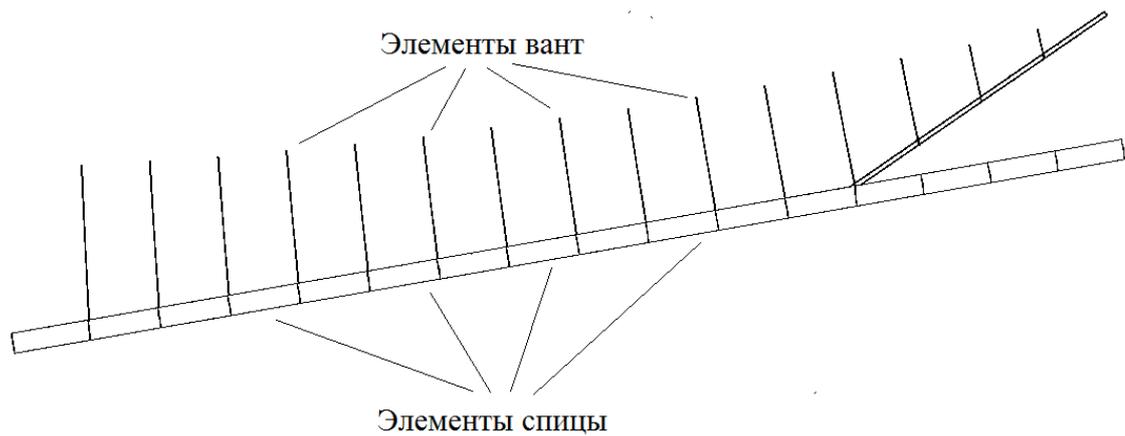


Рисунок 3.15 – Конечноэлементная модель спицы с минимальным количеством элементов

Ячейки сетеполотна, ограниченные шнурами фронтальной сети, аппроксимировались 4, 9 и 16 элементами (рисунок 3.16).

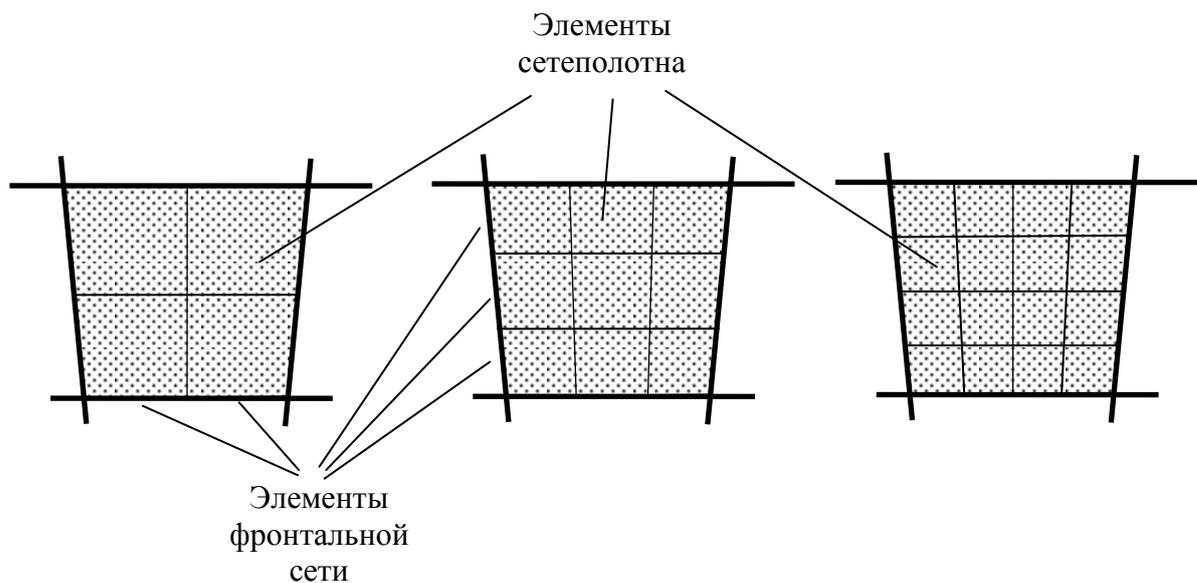


Рисунок 3.16 – Аппроксимация ячейки сетеполотна 4 (слева), 9 (в центре) и 16 (справа) элементами

При исследовании сходимости решения в качестве исходного принималось состояние конечноэлементной модели в котором штанга имела 4 элемента, каждая спица силового каркаса рефлектора содержала 16 элементов, а ячейки сетеполотна включали по 4 элемента. Затем количество

элементов, аппроксимирующих конструкцию, последовательно, в три этапа, увеличивалось.

На первом этапе рассматривалась зависимость решения от шага интегрирования по времени  $\Delta t$  и числа элементов штанги  $n_{эл.шт.}$ . На рисунке 3.17 показано изменение относительной угловой скорости  $\omega_{отн}$  в точке  $Cn$  от указанных параметров, причем  $\omega_{отн}$  определялась как

$$\omega_{отн} = \frac{\omega(\Delta t, n_{эл.шт.})}{\omega(\Delta t = 0,005с, n_{эл.шт.} = 100)}. \quad (3.11)$$

Из представленных результатов следует, что для данных условий решение можно считать сошедшимся при  $\Delta t < 0,02$  с и  $n_{эл.шт.} > 30$ . При таких значения  $n_{эл.шт.}$  возмущение передается от корпуса КА к рефлектору без существенных искажений.

На втором этапе рассматривалась зависимость решения в точке  $Cn$  от количества элементов  $n_{эл.сп.}$ , аппроксимирующих спицу. В этом случае относительная угловая скорость  $\omega_{отн}$  определялась как

$$\omega_{отн} = \frac{\omega(\Delta t, n_{эл.шт.} = 100, n_{эл.сп.})}{\omega(\Delta t = 0,005с, n_{эл.шт.} = 100, n_{эл.сп.} = 64)}. \quad (3.12)$$

На рисунке 3.18 приведены результаты расчетов второго этапа, которые показывают, что  $\omega_{отн}$  практически не зависит от величины  $n_{эл.сп.}$ . Такое поведение  $\omega_{отн}$  объясняется тем, что минимального количества элементов  $n_{эл.сп.}=16$  достаточно для получения сошедшегося решения и последующее увеличение  $n_{эл.сп.}$  уже ничего не меняет.

На заключительном этапе рассматривалась зависимость решения в точке  $Cет$  от количества элементов  $n_{эл.яч}$  в ячейке сетеполотна. Относительная угловая скорость  $\omega_{отн}$  определялась как

$$\omega_{отн} = \frac{\omega(\Delta t, n_{эл.шт.} = 100, n_{эл.сп.} = 64, n_{эл.яч.})}{\omega(\Delta t = 0,005с, n_{эл.шт.} = 100, n_{эл.сп.} = 64, n_{эл.яч.} = 16)}. \quad (3.13)$$

Результаты представлены на рисунке 3.19. Решение практически не зависит от количества элементов в ячейке. Такое поведение связано с тем, что фронтальная сеть рефлектора уже имеет 1536 ячеек. Это позволяет получить

сошедшее динамическое решение без их дополнительного разбиения на элементы.

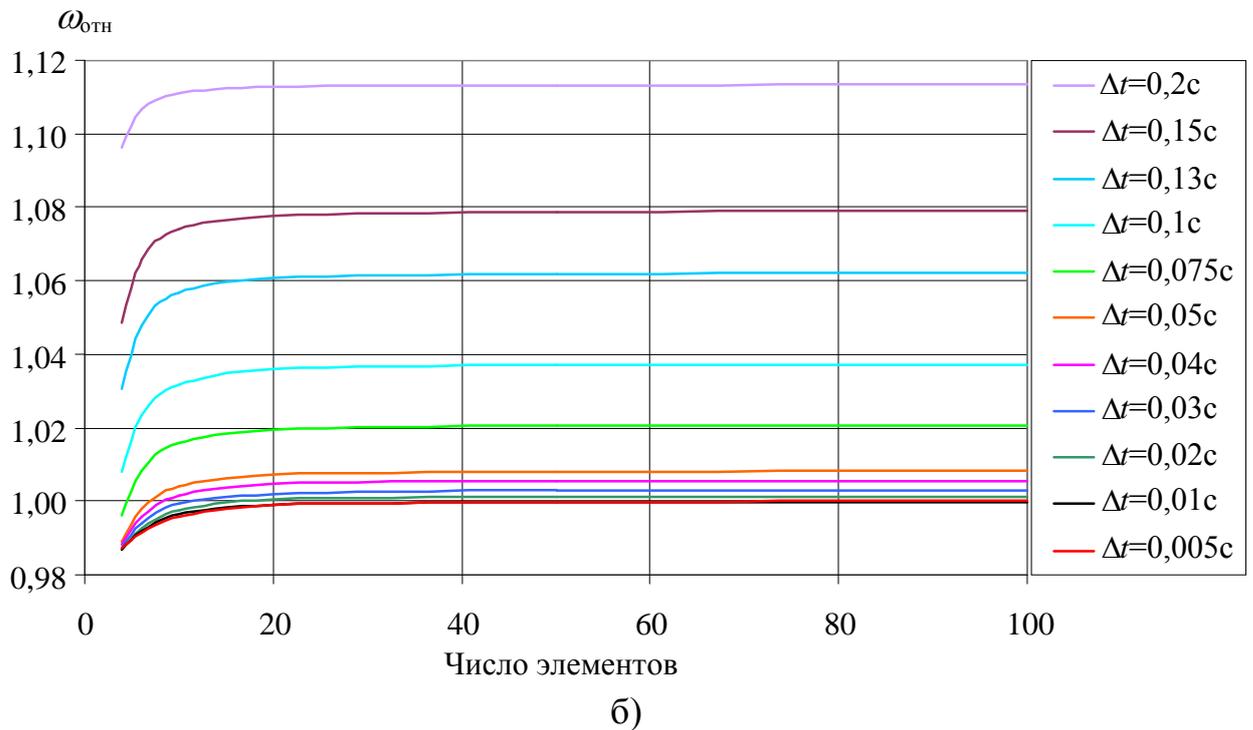
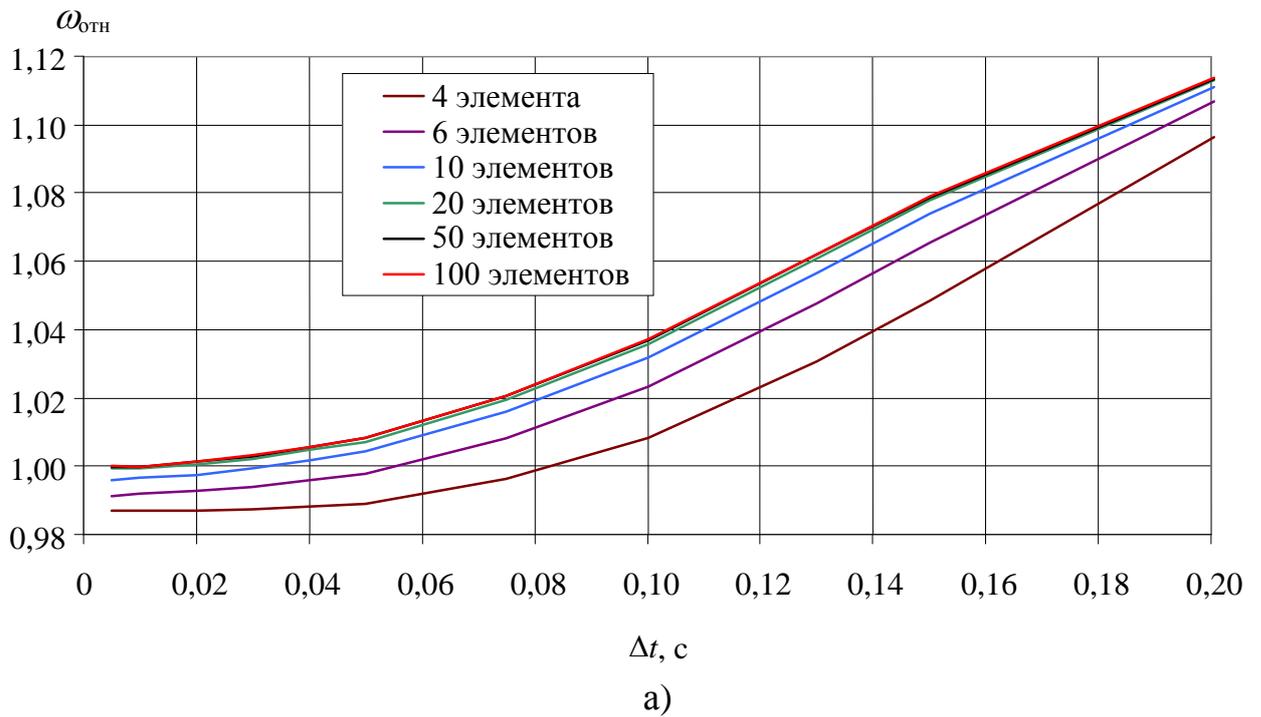


Рисунок 3.17– Зависимость решения (относительной угловой скорости  $\omega_{отн}$ ) от шага интегрирования по времени  $\Delta t$  и числа элементов штанги

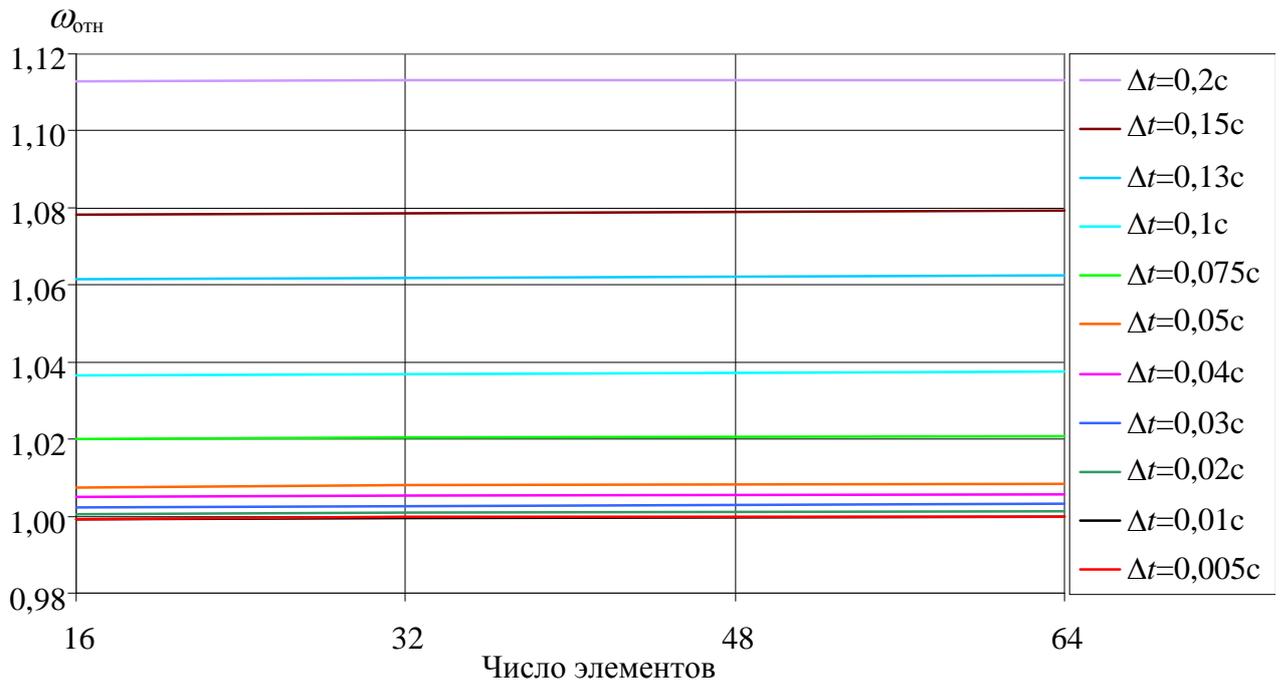


Рисунок 3.18 – Зависимость решения (относительной угловой скорости  $\omega_{отн}$ ) от числа элементов, аппроксимирующих спицу

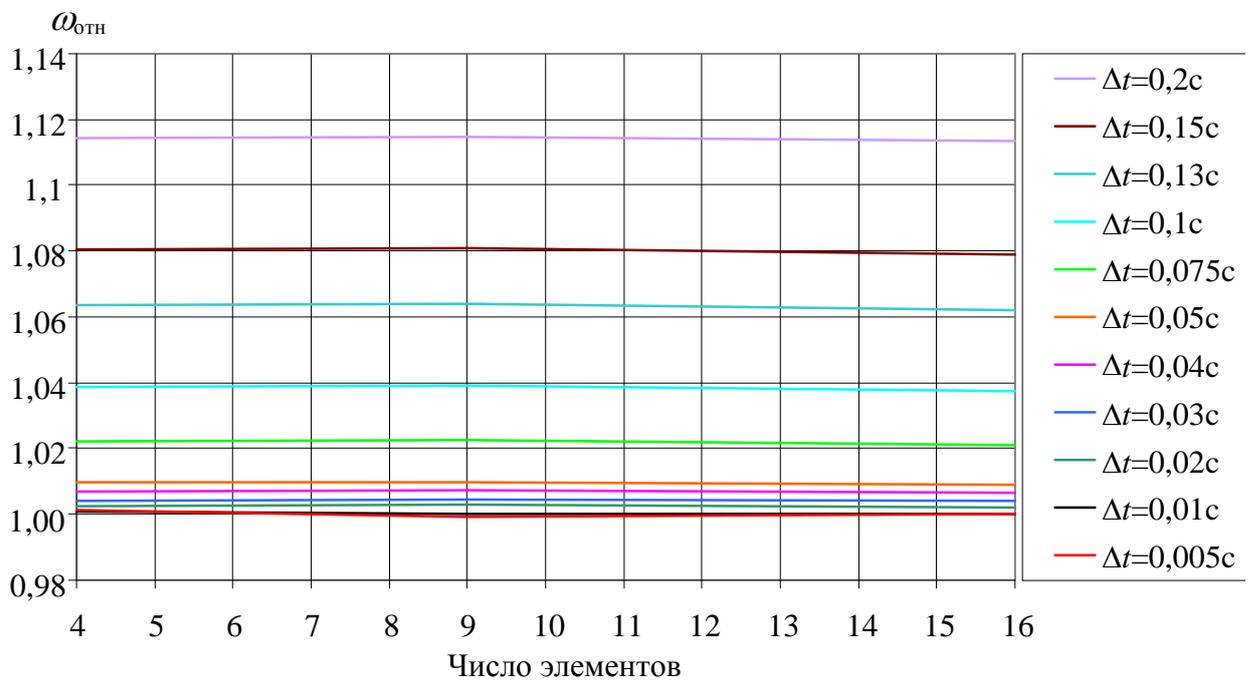


Рисунок 3.19 – Зависимость решения (относительной угловой скорости  $\omega_{отн}$ ) от числа элементов в ячейке сетеполотна

Следует отметить, что абсолютная величина СКО, которая является критерием точности отражающей поверхности, зависит от количества элементов в ячейке сетеполотна, как показано на рисунке 3.19. График на рисунке 3.19 является обобщением результатов статического анализа. Сходимость решения наблюдается, когда в ячейке содержится около 25 элементов.



Рисунок 3.19 – Зависимость СКО от количества элементов в ячейке сетеполотна

### 3.7. Вычислительные ресурсы

Расчеты проводились на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-3960X, с рабочей частотой 3,30 ГГц и доступной оперативной памятью 32,0 ГБ.

Конечноэлементная модель космического аппарата с зонтичным рефлектором, использованная для динамического анализа, содержала 42836 элементов. На 1 с динамического анализа требовалось 168 с расчетного времени.

### 3.8. Выводы

Результаты тестовых расчетов, приведенные в данной главе, показывают, что используемые типы элементов из библиотеки конечноэлементного пакета ANSYS пригодны для численного моделирования динамики механических систем при больших перемещениях и поворотах. Верификация на основе

обобщенной модели мембранного рефлектора подтверждает возможность совместного использования данных типов конечных элементов. Достоверность конечноэлементной модели космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором подтверждается сходимостью решения на последовательно измельчаемых сетках. Этот вывод подтверждается сравнительным анализом численного и аналитического решений о движении деформируемого и абсолютно жесткого космических аппаратов под действием возмущения.

## **ГЛАВА 4. Динамический анализ космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором**

### **4.1. Собственные частоты и формы колебаний космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором**

Реакция космического аппарата на действие возмущения во многом определяется его спектром собственных частот. Частотный спектр зависит от динамических свойств подсистем космического аппарата, таких как рефлектор и панели солнечных батарей. На вид частотного спектра оказывает влияние тип вантовой системы и способ крепления рефлектора к корпусу.

Собственные частоты и формы колебаний конечноэлементной модели космического аппарата определялись после выполнения процедуры настройки рефлектора. Рассматривались закрепления рефлектора за ступицу рефлектора и за спицу силового каркаса (рисунок 1.7), с арочной и подкосной вантовыми системами (рисунок 1.5). На рисунке 4.1 показаны частотные спектры космического аппарата, включающие первые 100 частот.

Из полученных результатов следует, что способ закрепления рефлектора (за спицу или за ступицу) оказывает слабое влияние на частотные спектры. Большое значение имеет различие в типах вантовых систем. Оно приводит к тому, что на уровне 4 Гц спектры разделяются. При этом конструкция с подкосной вантовой системой показывает более высокую жесткость, чем конструкция с арочной вантовой системой.

Обычно собственные частоты в спектре располагают в порядке возрастания их величин. В данном случае при сравнении спектров такое представление не достаточно информативно, так как не объясняет относительное смещение графиков. Поэтому будет рассмотрена зависимость собственных частот от собственных форм колебаний [32]. Для этого все формы колебаний сравниваемых спектров нумеруются в порядке возрастания частот. Совпадающие формы колебаний имеют одинаковый номер. Формы колебаний, относящиеся к разным спектрам, могут совпадать, но иметь

разную частоту. К совпадающим также относятся формы, подобные тем, что на рисунке 4.2. Спектры рассматриваются попарно, группируясь по признаку типа вантовой системы.

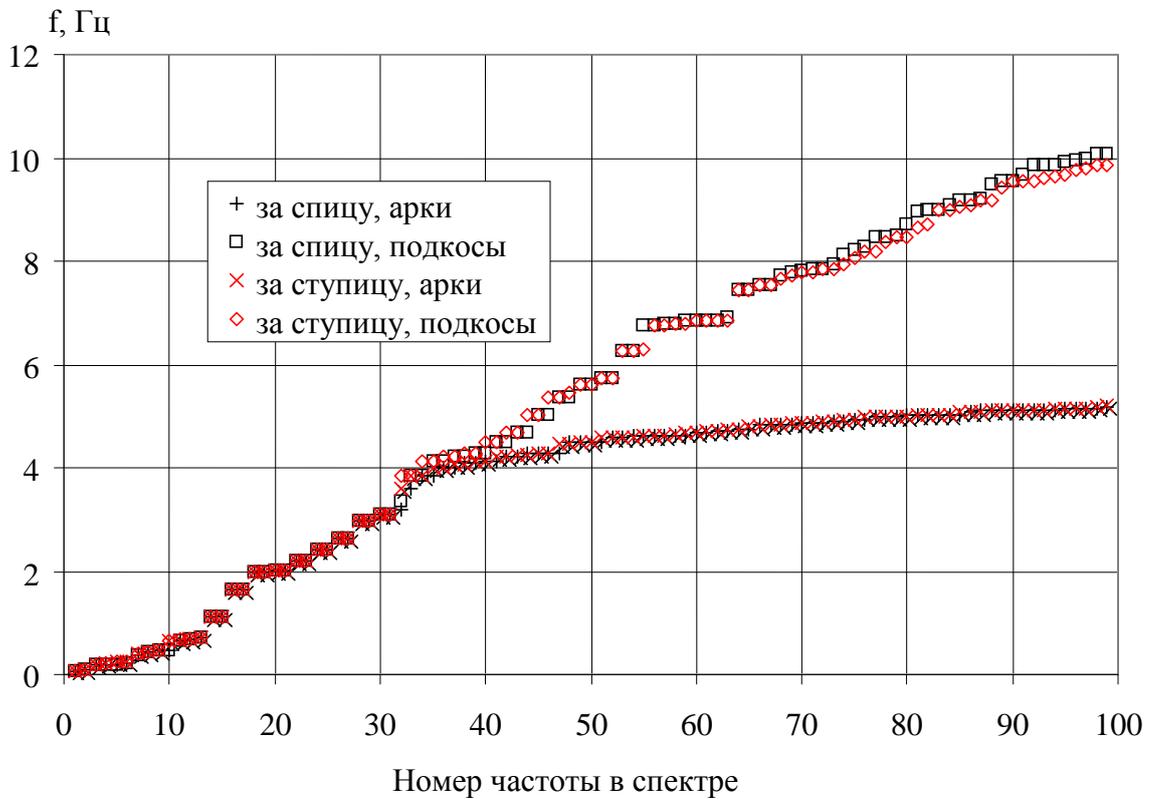


Рисунок 4.1 – Частотные спектры космического аппарата при различных способах крепления рефлектора и типах вантовых систем

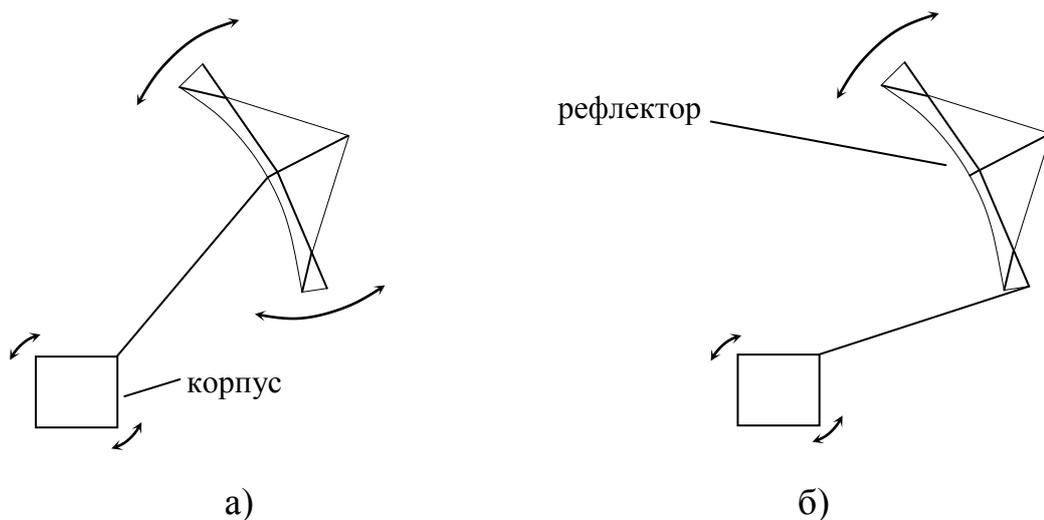


Рисунок 4.2 – Совпадающие формы колебаний рефлектора на спице при креплении: а) за ступицу; б) за спицу

Результаты такого представления частотных спектров показаны на рисунке 4.3 (рефлектор с подкосной вантовой системой) и на рисунке 4.4 (рефлектор с арочной вантовой системой).

На этих графиках собственные формы колебаний разделены на три типа:

- колебания собственно космического аппарата (тип *КА*);
- колебания рефлектора (тип *РЕФ*);
- колебания панелей солнечных батарей (тип *СБ*).

Колебания типа *КА* (рисунок 4.5 а) затрагивают все элементы космического аппарата: рефлектор, корпус, штангу, панели солнечных батарей. Колебания типа *РЕФ* охватывают рефлектор в целом (рисунок 4.5 б), или отдельные его части (рисунок 4.5 в). В некоторых случаях колебания затрагивают конец штанги, соединенный с рефлектором. Остальные элементы конструкции космического аппарата почти не колеблются. Колебания типа *СБ* ограничены колебаниями панелей солнечных батарей (рисунок 4.5 г).

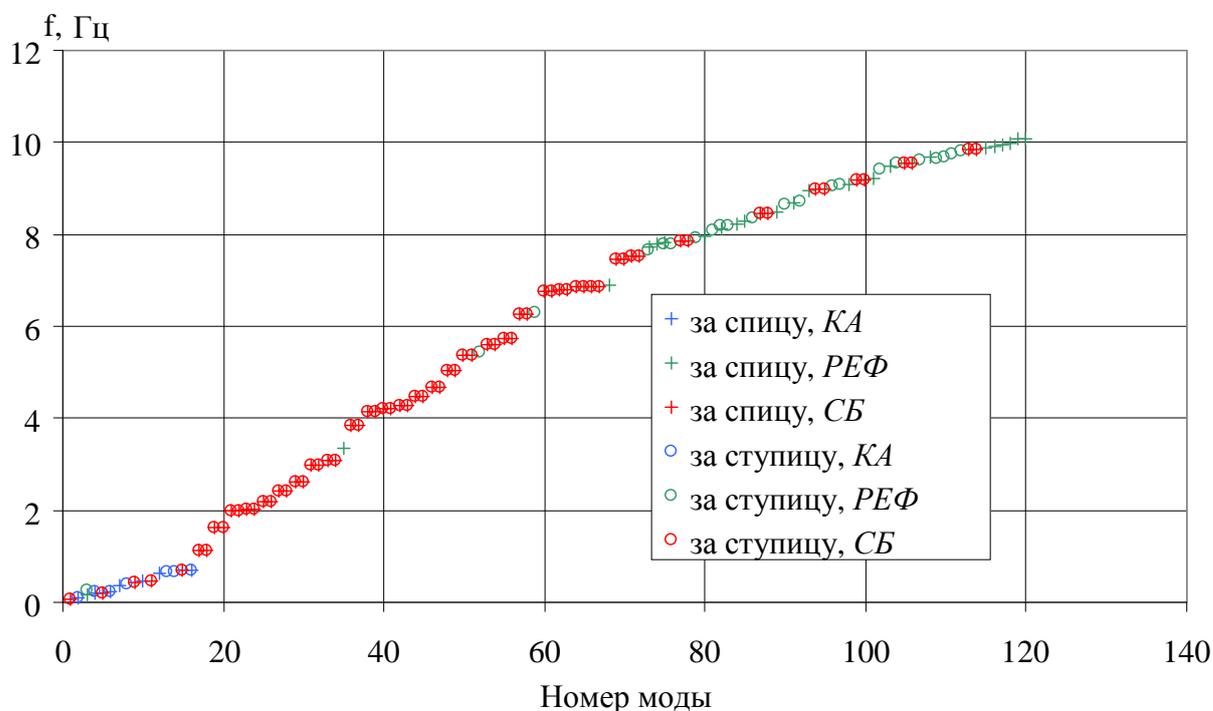


Рисунок 4.3 – Спектр собственных частот космического аппарата при различных способах крепления рефлектора (подкосная вантовая система)

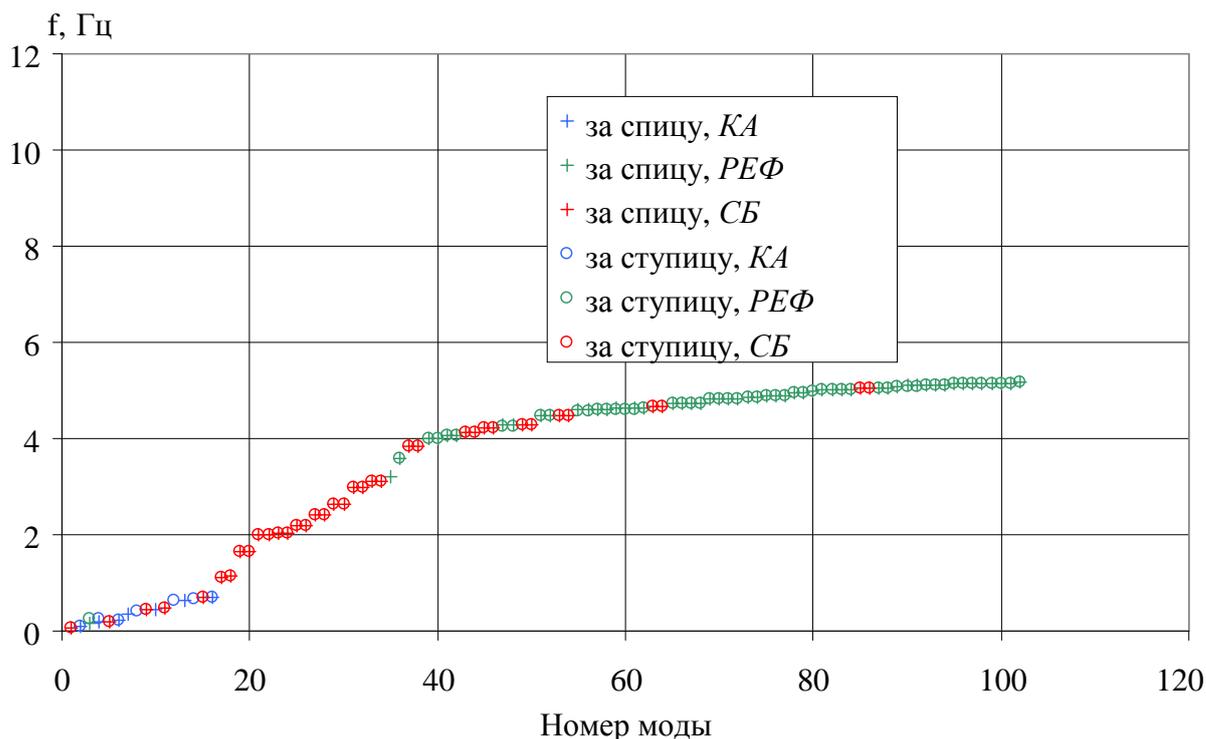


Рисунок 4.4 – Спектр собственных частот космического аппарата при различных способах крепления рефлектора (арочная вантовая система)

Начальные участки рассматриваемых спектров находятся в диапазоне частот  $0 \text{ Гц} < f < 0,7 \text{ Гц}$ . В них находятся все формы колебаний космического аппарата (тип *КА*), а также низшие формы колебаний солнечных батарей (тип *СБ*) и колебания рефлектора как целого (тип *РЕФ*). Во всех случаях формой колебаний, имеющей наименьшую частоту, является форма колебание панелей солнечных батарей, показанная на рисунке 4.6, с частотой  $7,36 \cdot 10^{-2} \text{ Гц}$ .

Результаты, приведенные на рисунках 4.3–4.4, позволяют качественно оценить, как влияют тип вантовой системы и способ закрепления рефлектора на формы и частоты собственных колебаний космического аппарата с зонтичным рефлектором.

Наибольшее влияние способ закрепления рефлектора оказывает на форму и частоту собственных колебаний типа *КА*. Из 10 форм колебаний такого типа к совпадающим относятся только три. Первая из этих форм показана на рисунке 4.7. При закреплении за ступицу соответствующая частота

колебаний равна  $9,49 \cdot 10^{-2}$  Гц, при закреплении за спицу –  $8,75 \cdot 10^{-2}$  Гц. Перенос точки крепления рефлектора изменяет частоту колебаний на  $\sim 8\%$ . При этом влияние типа вантовой системы на изменение частоты пренебрежимо мало, рефлектор колеблется как целое.

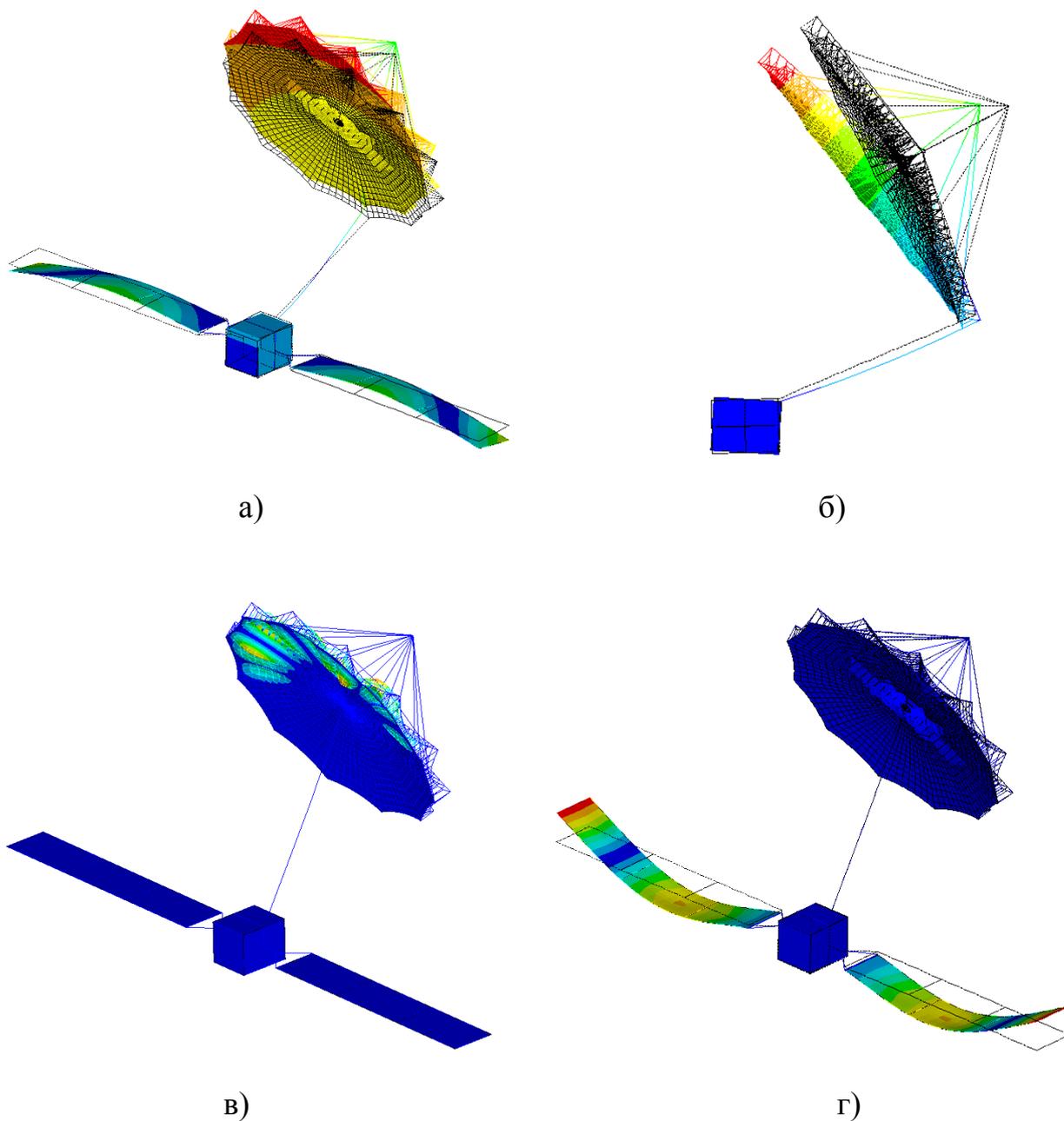


Рисунок 4.5 – Типы форм колебаний космического аппарата:  
а) колебания типа *КА*; б) колебание рефлектора в целом (тип *РЕФ*);  
в) колебание частей рефлектора (тип *РЕФ*); г) колебание типа *СБ*

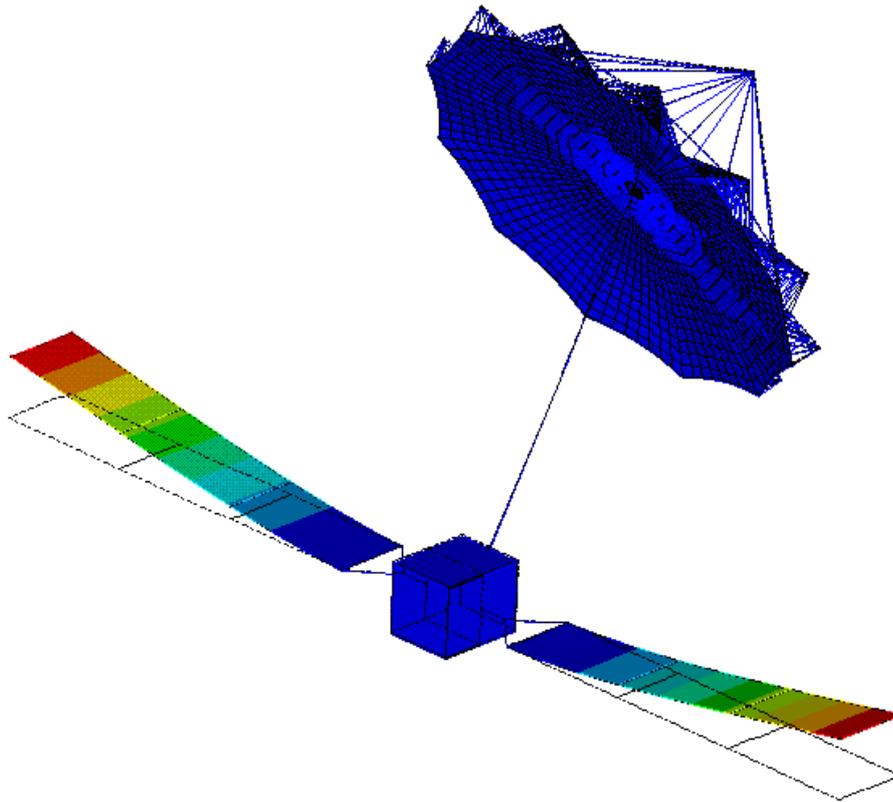


Рисунок 4.6 – Первая форма колебаний в спектрах,  $f=7,36 \cdot 10^{-2}$  Гц

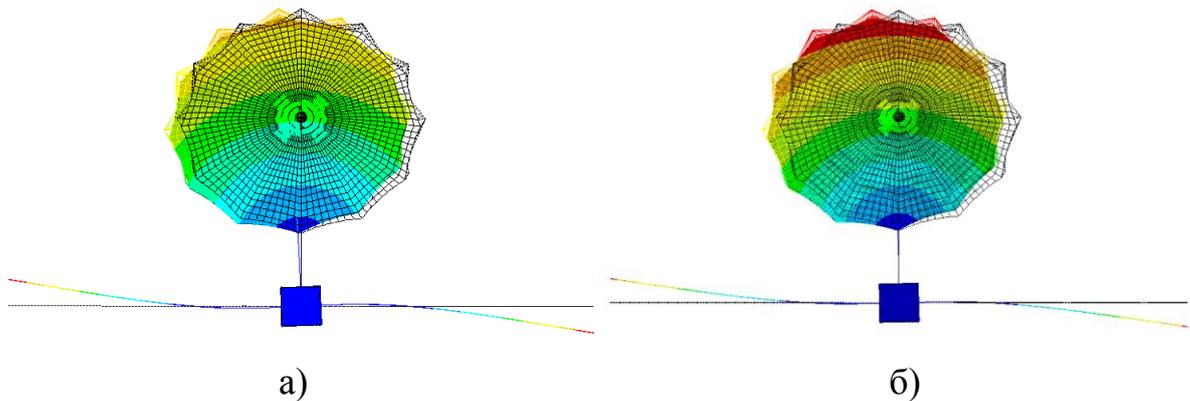


Рисунок 4.7 – Первая форма колебаний типа *КА*:

а) крепление за ступицу,  $f=9,49 \cdot 10^{-2}$  Гц; б) крепление за спицу,  $f=8,75 \cdot 10^{-2}$  Гц

На начальных участках спектров находится одна форма колебаний типа *РЕФ*, которая показана на рисунке 4.8. Частота колебаний рефлектора, закрепленного за ступицу выше частоты колебаний рефлектора, закрепленного за спицу на 53%.

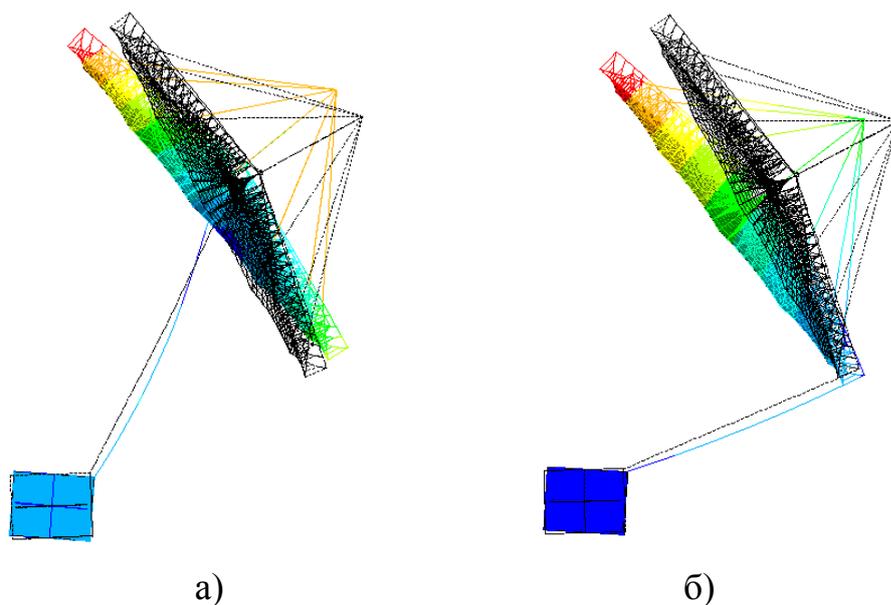


Рисунок 4.8 – Первая форма колебаний типа *РЕФ*:

а) крепление за ступицу,  $f= 0,261$  Гц; б) крепление за спицу,  $f=0,171$  Гц

В диапазоне  $0,7 \text{ Гц} < f < 4 \text{ Гц}$  в основном располагаются формы колебаний панелей солнечных батарей. Как видно из графиков способ крепления рефлектора к штанге и тип вантовой системы не оказывают влияние на эти формы колебаний, не изменяются и их частоты.

При  $f > 4 \text{ Гц}$  рассматриваемые спектры существенно различаются. В первом случае (рисунок 4.3, рефлектор с подкосной вантовой системой) вначале преобладают колебания солнечных батарей, совпадающие как по форме, так и по частоте. При  $f > 7,5 \text{ Гц}$  преобладают колебания типа *РЕФ*, которые в основном имеют несовпадающие формы и частоты. Это объясняется тем, что в таких колебаниях участвуют элементы силового каркаса рефлектора – спицы, что делает их чувствительными к способу крепления рефлектора. Так как подкосная вантовая система обладает достаточной жесткостью, то колебаний вант в рассматриваемом частотном диапазоне не обнаружено.

Во втором случае (рисунок 4.4, рефлектор с арочной вантовой системой) при  $f > 4 \text{ Гц}$  наблюдается излом спектра. В этом диапазоне преобладают колебания рефлектора. В данном случае колеблется сетеполотно, а также шнуры арочной вантовой системы, которая по сравнению с подкосной имеет

меньшую жесткость. При этом спицы силового каркаса в колебаниях не участвуют. В отличие от предыдущего случая колебания большей частью совпадают по форме и частоте, несмотря на различие в способах крепления рефлектора. Излом спектра объясняется плотным расположением собственных частот арочной вантовой системы. Поэтому, при увеличении номера моды на единицу, соответствующее увеличение частоты существенно меньше по сравнению с подкосной вантовой системой.

Способ крепления рефлектора к корпусу определяет характер механического взаимодействия этих двух основных частей космического аппарата. Поэтому изменение способа крепления оказывает влияние на колебания собственно космического аппарата (тип КА) в которых рефлектор и корпус, благодаря их относительно большей внутренней жесткости, выступают как цельные элементы колебательной системы. Смена способа крепления сказывается на колебаниях типа *РЕФ*, так как это приводит к смене ограничений (граничных условий), накладываемых на колебательную систему. Это особенно заметно для рефлектора с подкосной вантовой системой, для которого низшие формы колебаний соответствуют колебаниям силового каркаса. У рефлектора с арочной вантовой системой низшие формы колебаний соответствуют колебаниям вант, которые не зависят от способа крепления рефлектора к корпусу. В этом случае колебания силового каркаса не попали в рассматриваемый ряд собственных форм.

## **4.2. Реакция зонтичного рефлектор на действие одиночного возмущающего импульса**

### **4.2.1. Характеристики возмущающего импульса и условия его приложения к космическому аппарату**

Для изменения ориентации космического аппарата в пространстве ему необходимо сообщить некоторый момент количества движения. Если на космический аппарат действует момент сил  $M_F(t)$ , то за время  $\Delta t_{imp}$  ему будет сообщен момент количества движения равный [33]

$$M_p = \int_0^{\Delta t_{imp}} M_F(t) dt . \quad (4.1)$$

Далее будут рассматриваться только так называемые "прямоугольные" возмущающие импульсы, для которых функция  $M_F(t)$  имеет вид

$$M_F(t) = \begin{cases} M_F^{(a)}, & 0 \leq t \leq \Delta t_{imp} \\ 0, & t > \Delta t_{imp} \end{cases} , \quad (4.2)$$

где  $M_F^{(a)}$  – амплитуда момента сил в возмущающем импульсе. В этом случае выражение (4.1) примет вид

$$M_p = M_F^{(a)} \cdot \Delta t_{imp} \quad (4.3)$$

На рисунке 4.9 показано семейство функций момента сил  $M_F(t)$ , которые сообщают одинаковый момент количества движения  $M_p$ .

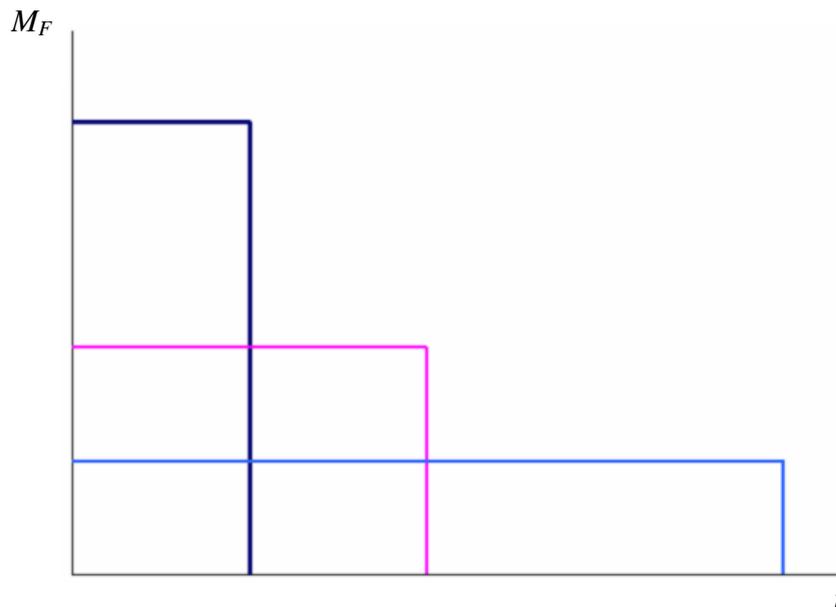


Рисунок 4.9 – Семейство функций момента сил  $M_F(t)$ , сообщающих одинаковый момент импульса

Момент сил  $M_F(t)$  прикладывается к корпусу космического аппарата. В рамках данной работы рассматривалось два варианта приложения момента сил  $M_F(t)$ . Они показаны на рисунке 4.10. На этом рисунке момент сил изображен в виде пары сил. В первом случае (рисунок 4.10 а) пара сил лежит

в плоскости симметрии космического аппарата. Во втором случае (рисунок 4.10 б) – вне этой плоскости.

В расчетах величина момента количества движения, сообщаемая космическому аппарату, была постоянной и равнялась  $M_p=10$  Н·м·с. Тогда момент сил  $M_F^{(a)}$  определялся из (4.3) по заданной длительности возмущающего импульса  $\Delta t_{imp}$ .

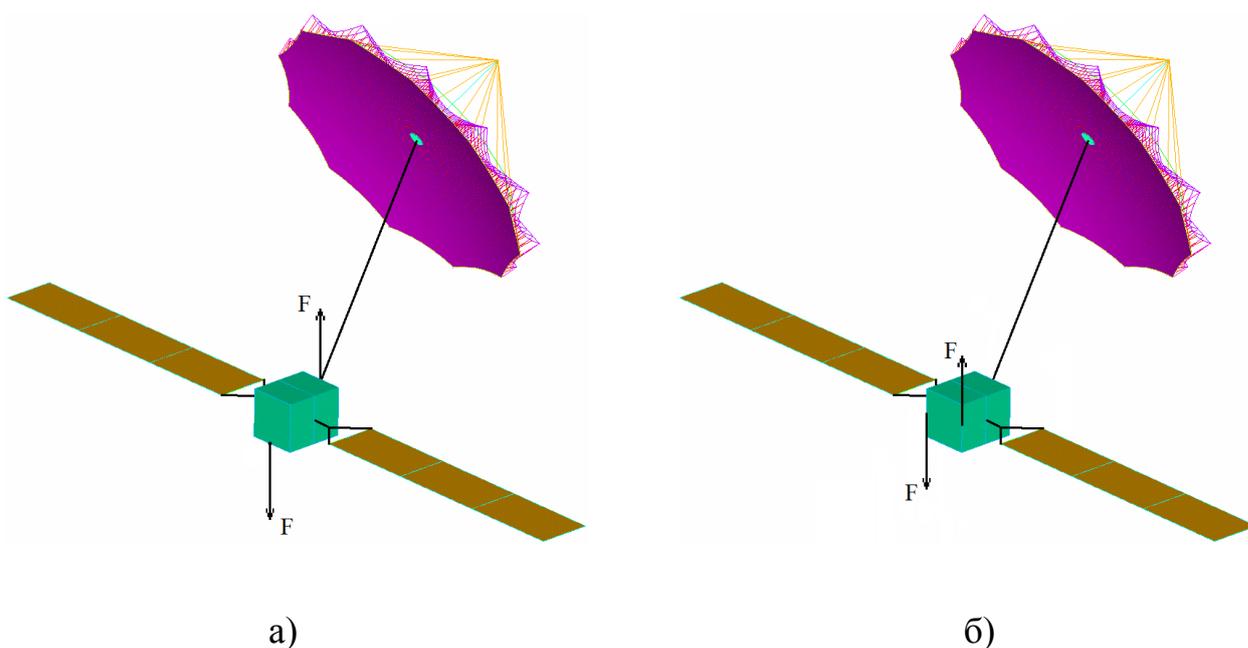


Рисунок 4.10 – Два варианта приложения момента сил:  
а) в плоскости симметрии; б) вне плоскости симметрии

#### 4.2.2. Симметричное нагружение космического аппарата

Работа систем управления приводит к возмущению напряженно-деформированного состояния космического аппарата, что вызывает отклонение отражающей поверхности рефлектора от статического положения. В связи с этим важно оценить возможность минимизации отклонения отражающей поверхности путем оптимального выбора параметров управляющего импульса.

Отклонение отражающей поверхности рефлектора от своего статического положения характеризуется величиной относительного среднеквадратичного отклонения ( $СКО_{отн}$ ), которое определяется как

$$СКО_{отн}(t) = \frac{СКО(t)}{СКО(t=0)}. \quad (4.4)$$

На рисунке 4.11 показана реакция отражающей поверхности зонтичного рефлектора при различных длительностях возмущающего импульса  $\Delta t_{imp}$ . Рефлектор закреплен за ступицу и имеет арочную вантовую систему. Условия нагружения симметричны, как показано на рисунке 4.10 а).

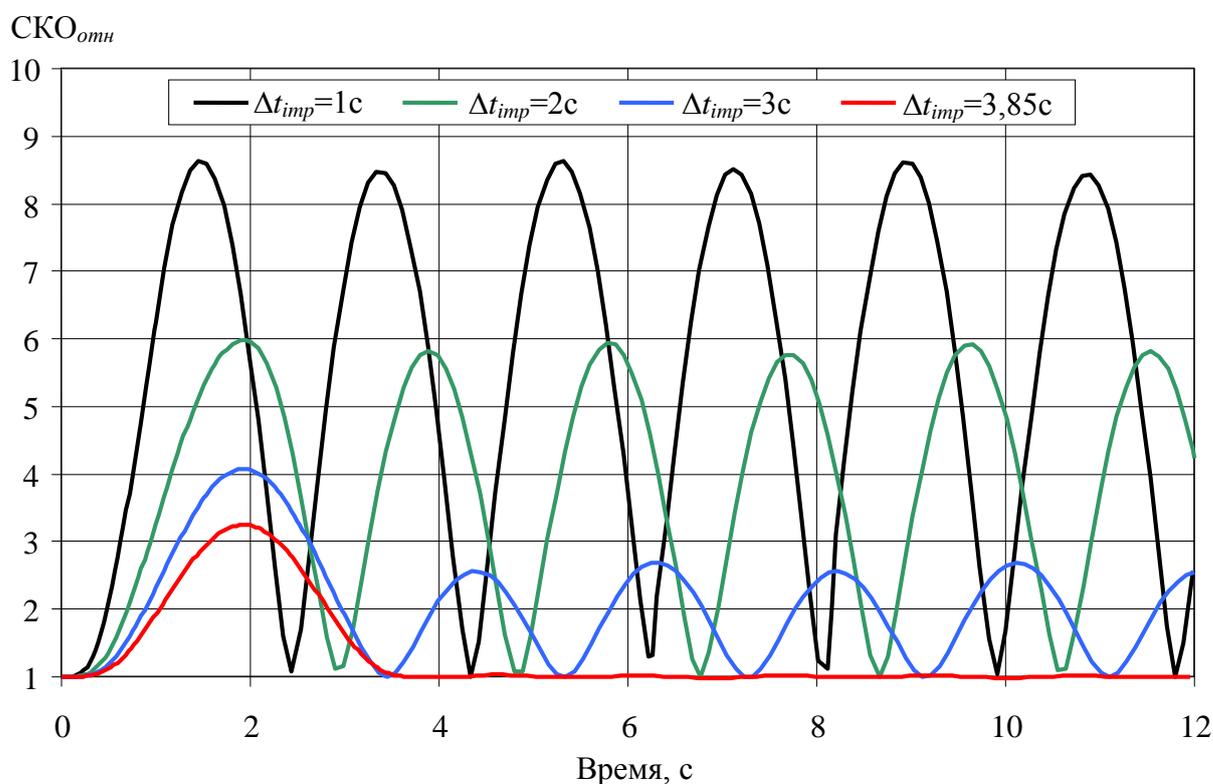


Рисунок 4.11 – Реакция отражающей поверхности рефлектора на действие возмущения при симметричном нагружении

Действие возмущения вызывает колебания конструкции космического аппарата, что в свою очередь приводит к колебаниям величины  $СКО_{отн}$ , которые продолжают (остаточные колебания) и после окончания действия возмущения. Причем одному колебанию соответствует два полупериода на рисунке 4.11.

С увеличением длительности действия возмущения  $\Delta t_{imp}$  амплитуда колебаний  $СКО_{отн}$  уменьшается. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, при заданной величине  $M_p$ , в соответствии с (4.3), амплитуда момента сил  $M_F^{(a)}$  в возмущающем импульсе меняется  $\sim 1/\Delta t_{imp}$ . Во-вторых, в начальный момент действия возмущающего импульса в конструкции космического аппарата возбуждаются колебания. Затем, в момент окончания действия возмущения, возбуждаются такие же колебания, но обратного знака. Если разность фаз между ними кратна  $2\pi$ , то остаточные колебания гасятся. Этот эффект особенно заметен, если возбуждается одна форма колебаний.

В данном случае возбуждаются колебания с периодом  $T=3,85$  с, что соответствует частоте  $f=0,26$  Гц. Такая форма колебаний показана на рисунке 4.2 а). Можно заметить, что при  $\Delta t_{imp}=3,85$  с, по окончании действия возмущения, остаточные колебания  $СКО_{отн}$  практически отсутствуют.

На рисунке 4.12 приведены зависимости максимальной амплитуды остаточных колебаний относительного среднеквадратичного отклонения ( $СКО_{отн}^{(a)}$ ) от длительности возмущающего импульса. Графики построены для различных способов закрепления рефлектора и типов вантовых систем.

Результаты показывают, что во всех случаях увеличение продолжительности действия возмущения приводит к уменьшению амплитуды остаточных колебаний (сообщаемый момент количества движения  $M_p$  остается постоянным). Остаточные колебания значительно ослабляются, если выполняется условие [33]

$$\frac{\Delta t_{imp}}{T} = n, \quad (4.5)$$

где  $T$  – период возбуждаемых колебаний;  $n$  – целое положительное число. Так при закреплении рефлектора за ступицу ослабление колебаний наблюдается при  $\Delta t_{imp}^{(1)}=3,83$  с, а также при  $\Delta t_{imp}^{(2)}=2 \cdot \Delta t_{imp}^{(1)}=7,66$  с. При таких длительностях возмущения величина  $СКО_{отн}^{(a)} \leq 1,01$ .

Зависимости, приведенные на рисунке 4.12, позволяют разделить возмущающие импульсы по критерию их длительности на два типа: короткие и длинные. Различие между ними состоит в том, что в отличие от длинных импульсов амплитуда остаточных колебаний  $СКО_{отн}^{(a)}$  слабо зависит от длительности коротких импульсов. Для рассматриваемой механической системы и заданном способе приложения нагрузки длительность коротких импульсов лежит в пределах  $\Delta t_{imp} < 0,5$  с (рисунок 4.12). При стремлении  $\Delta t_{imp}$  к нулю величина момента сил  $M_F^{(a)}$  возрастает  $\sim 1/\Delta t_{imp}$ , однако на рисунке 4.12 видно, что при этом амплитуда остаточных колебаний практически не меняется.

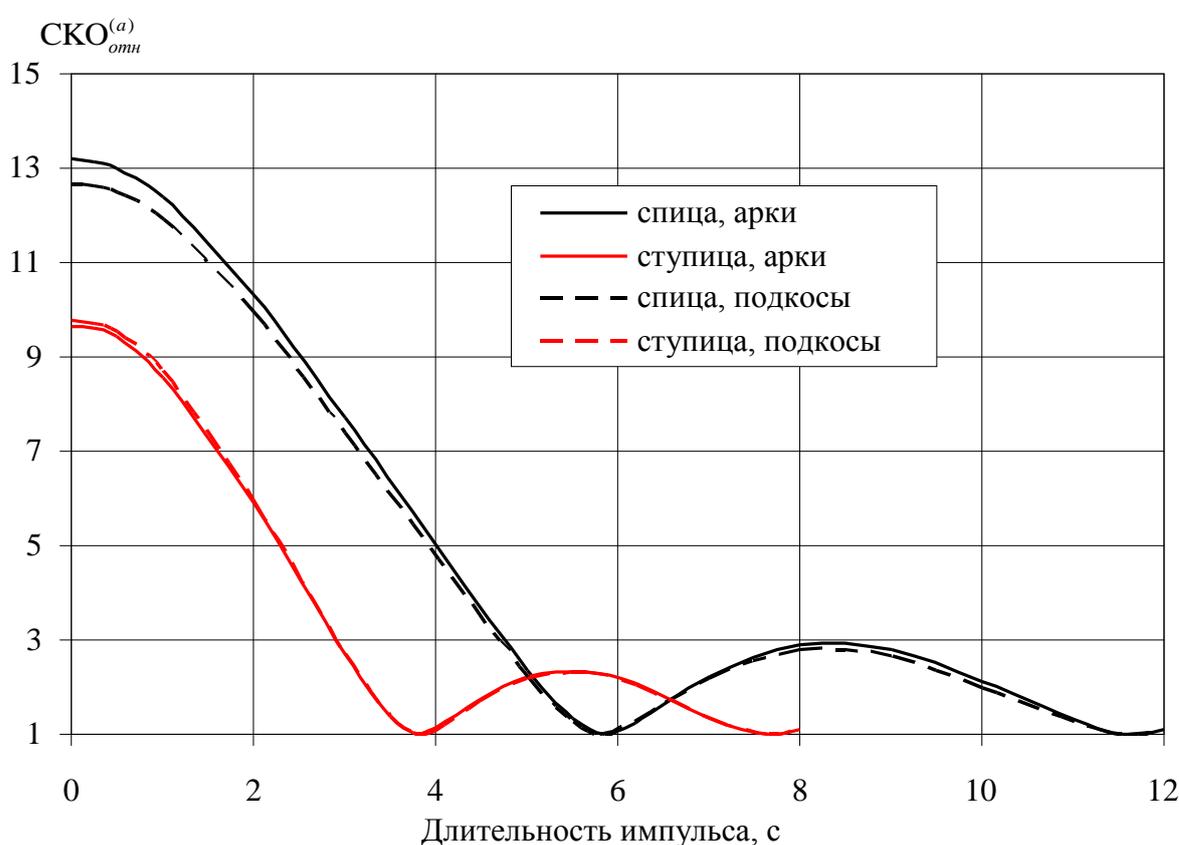


Рисунок 4.12 – Зависимости амплитуд остаточных колебаний от длительности возмущающего импульса, при различных способах закрепления рефлектора и типах вантовых систем

Такой эффект можно объяснить тем, что при действии короткого импульса возмущение не успевает распространиться по конструкции.

Поэтому можно считать, что корпус космического аппарата практически мгновенно получает момент количества движения  $M_p$  и соответствующую угловую скорость. В следствии этого изменение длительности короткого импульса не сказывается на амплитуде остаточных колебаний.

Способ крепления рефлектора к корпусу космического аппарата оказывает значительное влияние на амплитуду остаточных колебаний. Для коротких возмущающих импульсов закрепление рефлектора за спицу увеличивает амплитуду колебаний на 30% по сравнению закреплением за ступицу.

Амплитуда остаточных колебаний слабо зависит от типа вантовой системы. Это связано с тем, что напряжения, действующие в конструкции рефлектора, обеспечивают ему достаточный уровень жесткости. В результате внутренние колебания, возникающие в рефлекторе, малы по сравнению с колебаниями рефлектора как целого относительно точки закрепления на штанге (рисунок 4.2).

Следует еще раз отметить, что в данном случае наиболее эффективно возбуждалась только одна форма колебаний.

### **4.2.3. Несимметричное нагружение космического аппарата**

Схема несимметричного нагружения космического аппарата показана на рисунке 4.10 б). Рефлектор закреплен за ступицу и имеет арочную вантовую систему.

На рисунке 4.13 показана реакция отражающей поверхности зонтичного рефлектора при различных длительностях возмущающего импульса  $\Delta t_{imp}$ . Видно, что при несимметричном нагружении зависимости  $СКО_{отн}(t)$  имеют значительно более сложный вид, чем в случае симметричного нагружения.

На рисунке 4.14 приведена зависимость максимальной амплитуды остаточных колебаний относительного среднеквадратичного отклонения ( $СКО_{отн}^{(a)}$ ) от длительности возмущающего импульса. В этом случае также выполняется условие (4.5). При длительностях возмущающего импульса

$\Delta t_{imp}^{(1)}=2,45$  с и  $\Delta t_{imp}^{(2)}=2 \cdot \Delta t_{imp}^{(1)}=4,9$  с наблюдается ослабление колебаний. Однако при  $\Delta t_{imp}=\Delta t_{imp}^{(1)}$  величина  $СКО_{отн}^{(a)}=1,15$ , а при  $\Delta t_{imp}=\Delta t_{imp}^{(2)}$  –  $СКО_{отн}^{(a)}=1,01$ . Такое различие говорит о том, что в этом случае возбуждаются несколько форм колебаний. Частота первой формы определяется по рисунку 4.13 и равна  $f_1=1/\Delta t_{imp}^{(1)}=0,408$  Гц. Ослабление происходит, когда длительность возбуждающего импульса кратна  $\Delta t_{imp}^{(1)}$ . Эта форма колебаний показана на рисунке 4.15. Соответствующая ей частота, определенная из модального анализа равна  $f_1=0,407$  Гц. Другие присутствующие формы колебаний ослабляются, когда длительность возбуждения  $\Delta t_{imp}$  становится кратной их периоду колебаний. Для некоторых из них это происходит, когда  $\Delta t_{imp}=\Delta t_{imp}^{(2)}$ . Однако вид этих форм колебаний определить не удалось.

По графику на рисунке 4.14 можно оценить длительности коротких импульсов, как лежащие в пределах  $\Delta t_{imp} < 0,3$  с.

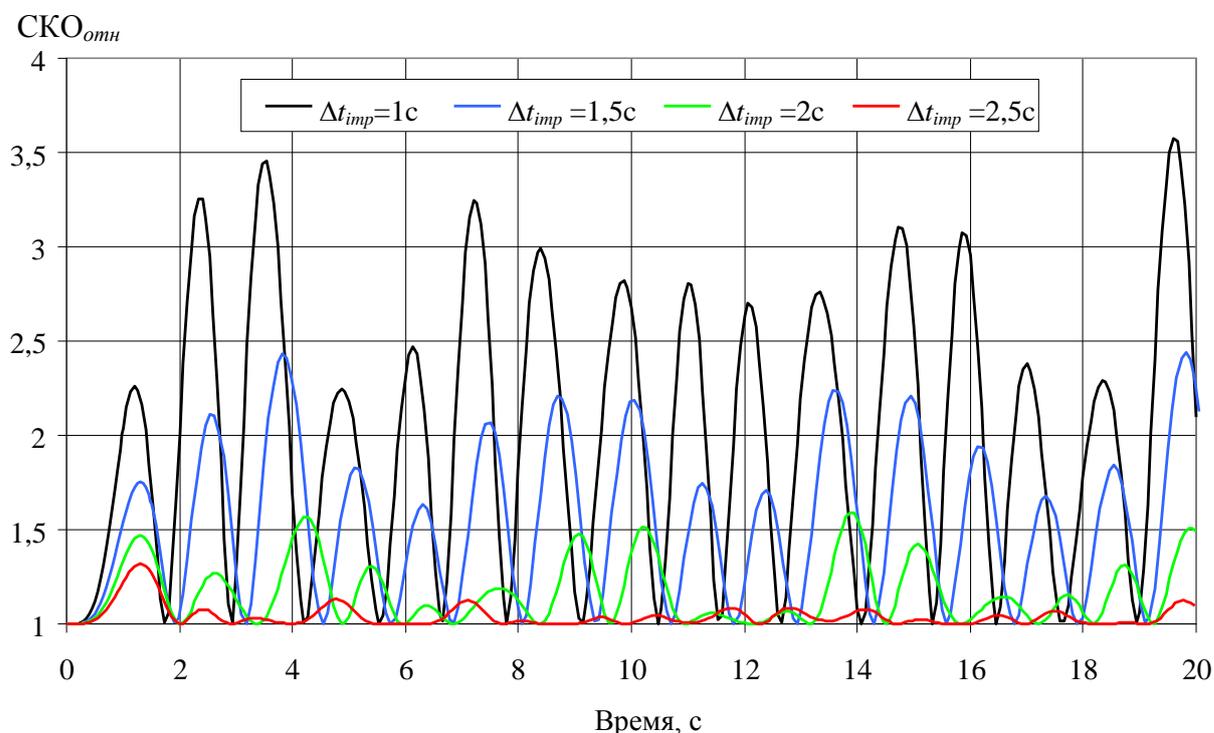


Рисунок 4.13 – Реакция отражающей поверхности рефлектора на действие возмущения при несимметричном нагружении

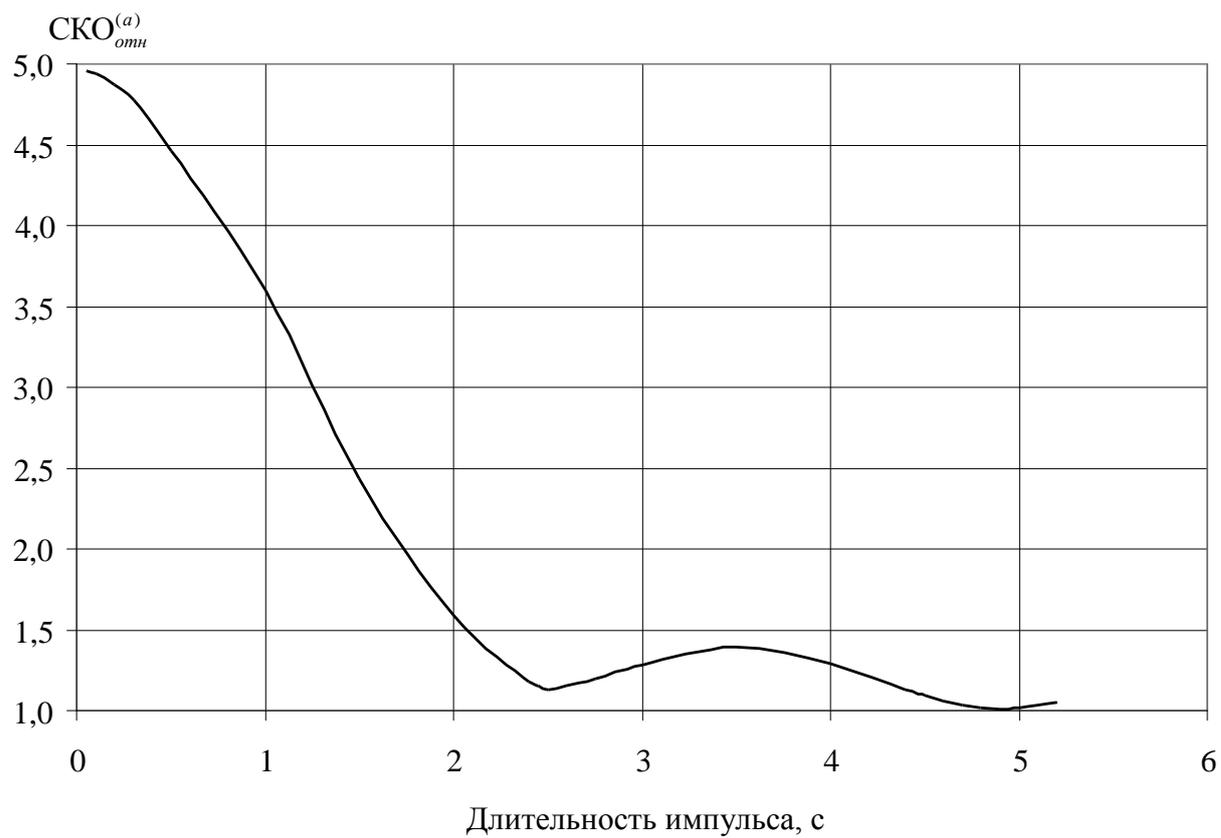


Рисунок 4.14 – Зависимости амплитуд остаточных колебаний от длительности возмущающего импульса, рефлектор закреплен за ступицу, арочная вантовая система

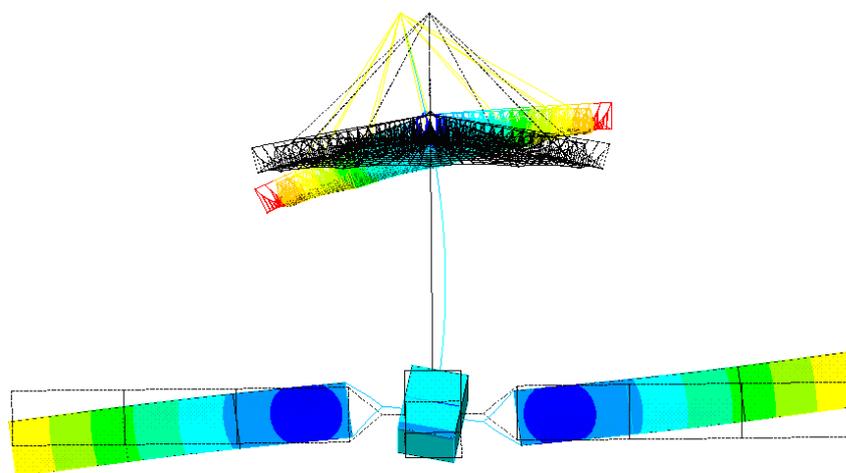


Рисунок 4.15 – Первая форма колебаний при несимметричном нагружении,  $f_1=0,407$  Гц

### 4.3. Реакция зонтичного рефлексор на действие возмущения в виде двух последовательных импульсов.

#### 4.3.1. Описание возмущения в виде двух последовательных импульсов

Для изменения пространственной ориентации космического аппарата (поворота на некоторый угол) к нему необходимо приложить не менее двух управляющих импульсов. Первый импульс сообщает космическому аппарату заданный момент количества движения, в результате чего он начинает вращаться. При действии второго импульса аппарат прекращает вращение, так как этот импульс идентичен первому, но имеет противоположную полярность. Такая последовательность импульсов показана на рисунке 4.16.

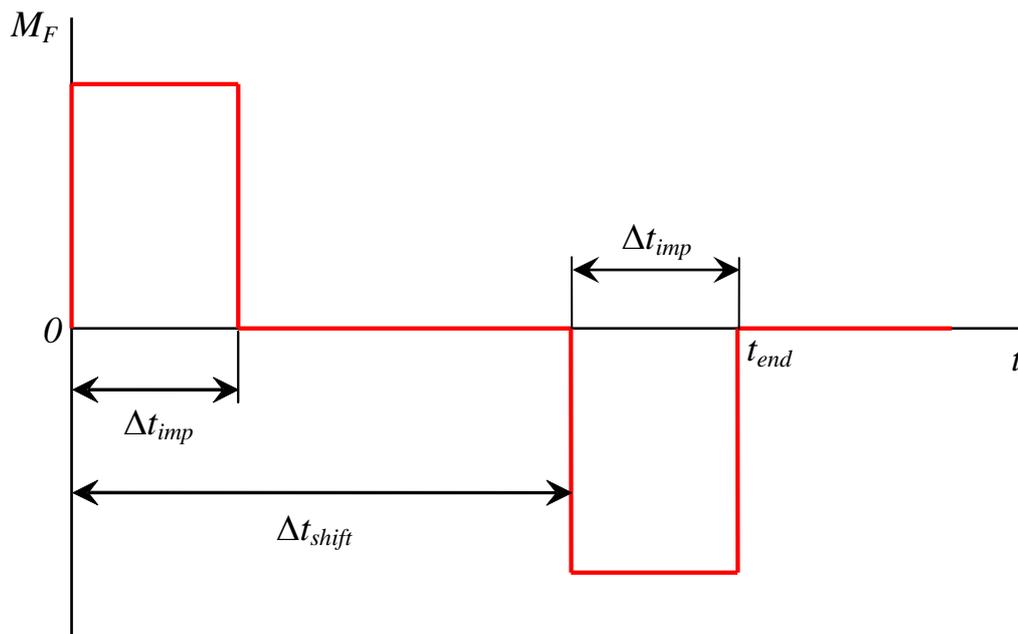


Рисунок 4.16 – Возмущение в виде двух последовательных импульсов

Импульсы имеют одинаковые амплитуды, длительность каждого из них равна  $\Delta t_{imp}$ , при этом выполняются соотношения 4.1–4.3. Второй импульс смещен относительно первого по времени на величину  $\Delta t_{shift}$ . Минимальное значение смещения  $\Delta t_{shift} = \Delta t_{imp}$ . Для последовательности импульсов выполняется условие

$$\int_0^{t_{end}} M_F(t) dt = 0. \quad (4.6)$$

В разделе 4.2 было показано, что можно существенно ослабить реакцию рефлектора на действие возмущения в виде отдельного прямоугольного импульса. Для этого длительность импульса согласуется с собственными колебаниями космического аппарата по (4.5), но это приводит к тому, что импульс может длиться нескольких секунд. Действие отдельного короткого импульса приводит к значительному ухудшению СКО. Однако использование последовательности коротких импульсов, при оптимальном выборе ее параметров, также может привести к ослаблению остаточных возмущений рефлектора.

В данном разделе приведены результаты параметрического исследования влияния последовательности двух коротких импульсов различной полярности (рисунок 4.16) на величину СКО зонтичного рефлектора при симметричном и несимметричном приложении нагрузки к корпусу космического аппарата (рисунок 4.10). Рефлектор имел арочную вантовую систему и крепился к штанге за ступицу

### 4.3.2. Симметричное нагружение космического аппарата

Схема симметричного нагружения космического аппарата показана на рисунке 4.10 а)

Каждый из двух импульсов, входящих в последовательность (рисунок 4.16), сообщает космическому аппарату момент количества движения  $|M_p|=10 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ . В расчетах их длительность ( $\Delta t_{imp}$ ) равнялась 0,1 с, 0,25 с и 0,5 с.

На рисунке 4.17 показаны зависимости  $\text{СКО}_{отн}(t)$ , которые соответствуют значению  $\Delta t_{imp}=0,25 \text{ с}$  и различным значениям величины сдвига по времени  $\Delta t_{shift}$ . Из полученных результатов следует, что с ростом величины  $\Delta t_{shift}$  максимальная амплитуда остаточных колебаний ( $\text{СКО}_{отн}^{(a)}$ ) увеличивается и достигает максимума при сдвиге по времени около  $\Delta t_{shift} = 2 \text{ с}$ . Дальнейшее

увеличении  $\Delta t_{shift}$  приводит к уменьшению  $СКО_{отн}^{(a)}$ , и при  $\Delta t_{shift}=3,83$  с величина  $СКО_{отн}^{(a)}$  достигает минимума, в котором  $СКО_{отн}^{(a)}=2,8$ , а частота остаточных колебаний оказывается больше примерно в 2,5 раза, по отношению к колебаниям для которых  $\Delta t_{shift}<3,83$  с. Такой результат говорит о том, что остаточные колебания представляют суперпозицию по крайней мере двух собственных форм колебаний. При  $\Delta t_{shift}=3,83$  с происходит ослабление низкочастотной формы колебаний и выделение высокочастотной формы.

Дальнейшее увеличение сдвига по времени ( $\Delta t_{shift} > 3,83$  с) снова приводит росту амплитуды остаточных колебаний. При  $\Delta t_{shift} \geq 5,74$  с амплитуда колебаний опять достигает максимума и начинает уменьшаться и достигает второго минимума при  $\Delta t_{shift}=7,65$  с, причем наибольшая  $СКО_{отн}^{(a)}$  остаточных колебаний равна 1,16. В этом случае ослабляются, как низкочастотная, так и высокочастотная формы колебаний.

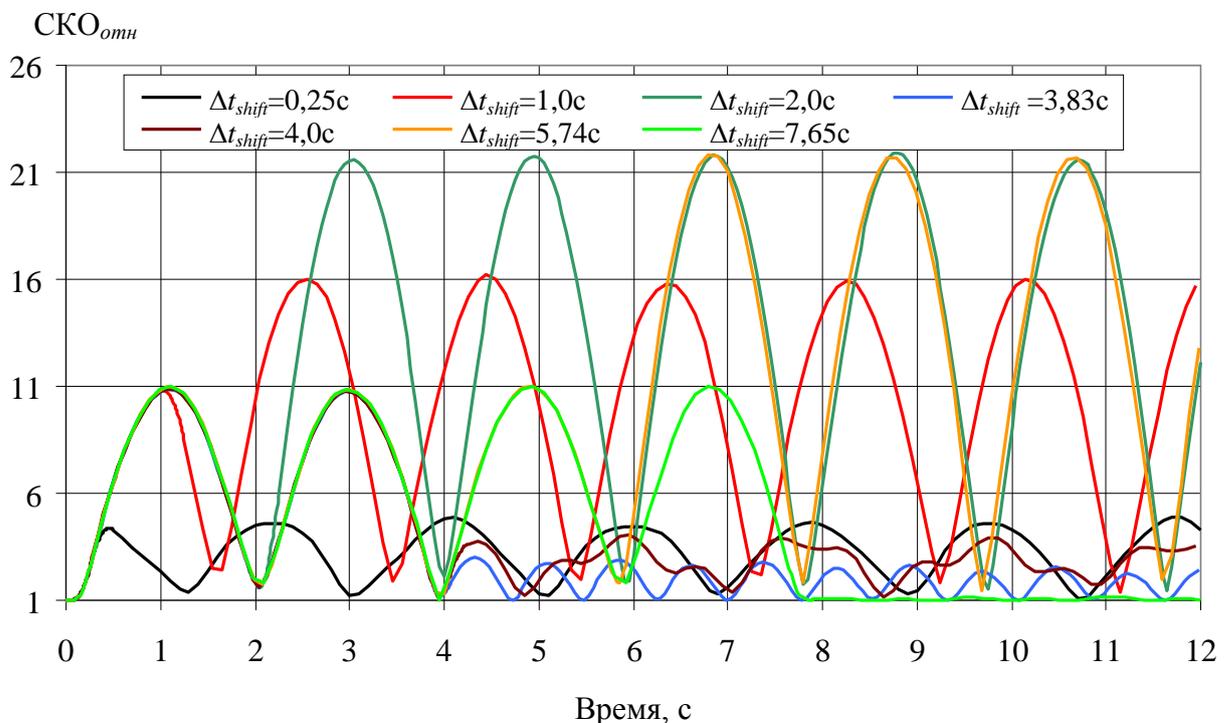


Рисунок 4.17 – Изменение  $СКО_{отн}$  во времени при действии последовательности импульсов,  $\Delta t_{imp}=0,25$  с

Частоты возбуждаемых форм колебаний можно определить непосредственно из графиков, показанных на рисунке 4.17. Низкочастотная форма колебаний имеет период  $T_1=3,83$  с и частоту  $f_1=0,261$  Гц. Период колебаний высокочастотной формы равен  $T_2=1,54$  с, а частота  $f_2=0,649$  Гц. Эти формы колебаний, определенные с помощью модального анализа, показаны на рисунке 4.18. Указанные на рисунке значения частот также являются результатом модального анализа.

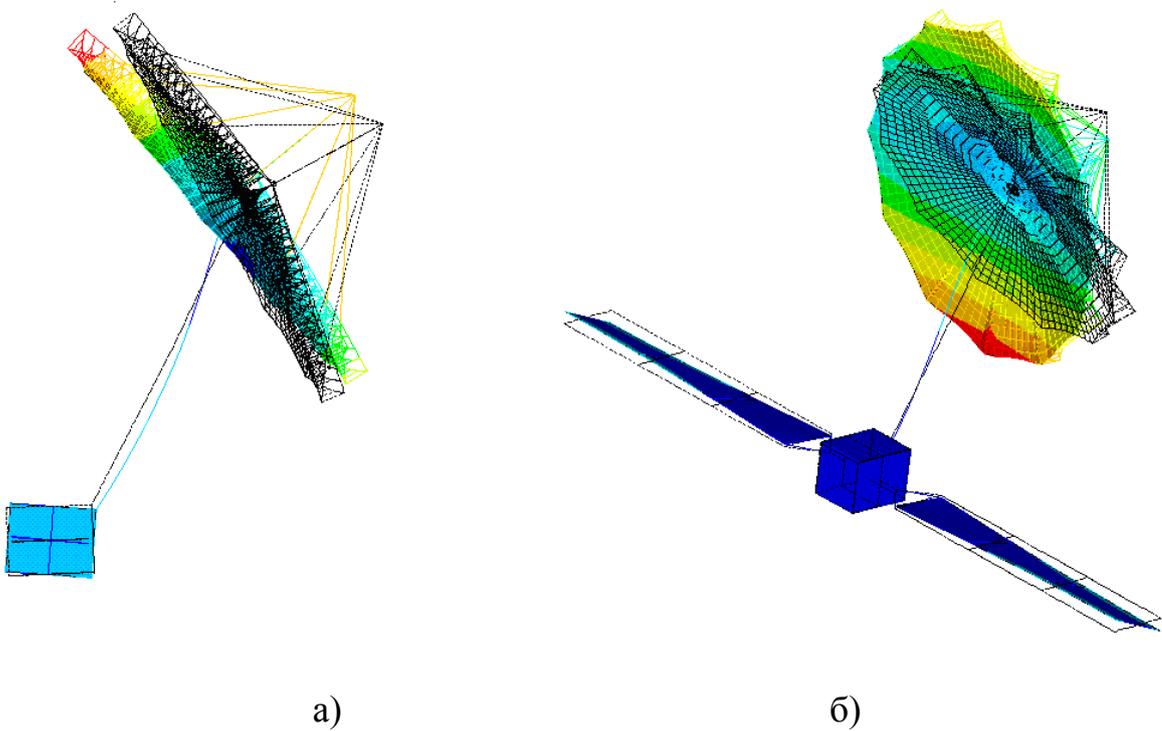


Рисунок 4.18 – Формы колебаний при симметричном нагружении:

а)  $f_1=0,261$  Гц; б)  $f_2=0,651$  Гц

На рисунке 4.19 показаны зависимости  $СКО_{отн}^{(a)}(\Delta t_{shift})$ . Длительность импульсов ( $\Delta t_{imp}$ ) равнялась 0,1 с, 0,25 с и 0,5 с.

Расчеты, проведенные в широком диапазоне изменения параметра  $\Delta t_{shift}$ , показали, что остаточные колебания  $СКО_{отн}$  ослабляются, если величина сдвига по времени удовлетворяет условию

$$\frac{\Delta t_{shift}}{T} = n, \quad (4.7)$$

где  $n$  – целое положительное число;  $T$  – период возбуждаемого колебания. Из рисунков 4.17 и 4.18 видно, что при нечетном  $n$  ослабляется низкочастотная форма колебания, а при четном  $n$  – обе формы.

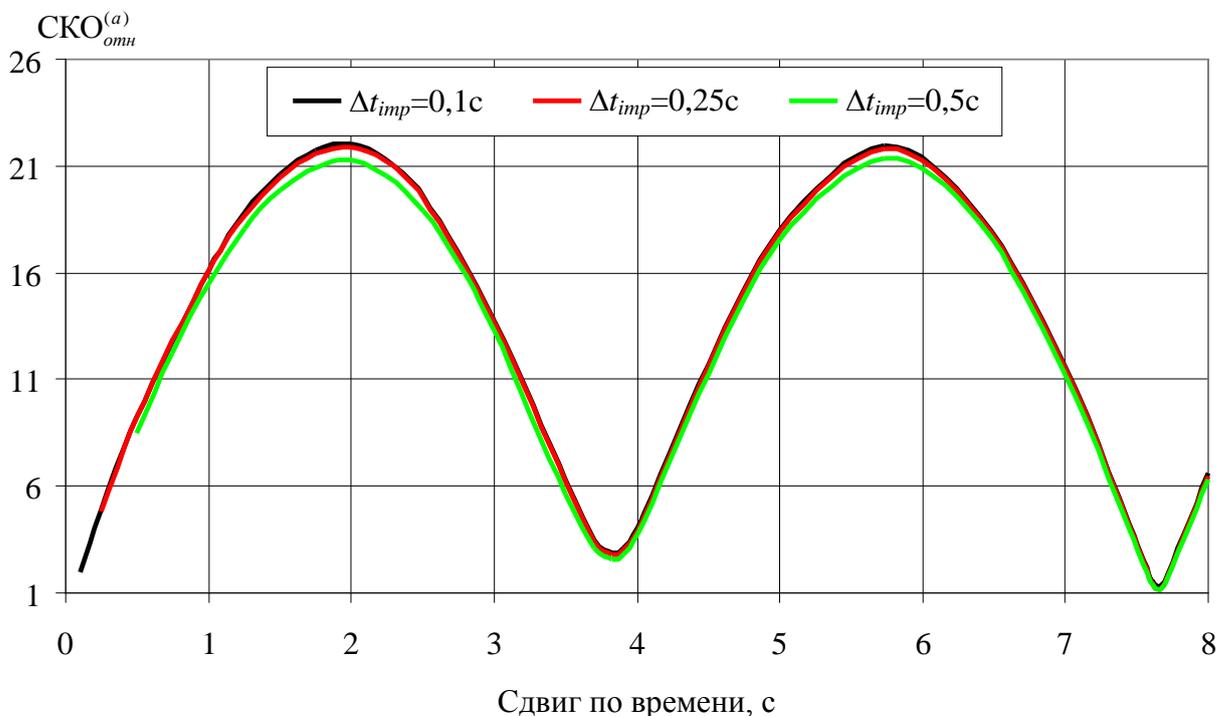


Рисунок 4.19 – Зависимости амплитуд остаточных колебаний  $СКО_{отн}$  от величины сдвига по времени ( $\Delta t_{shift}$ )

### 4.3.3. Несимметричное нагружение космического аппарата

Схема несимметричного нагружения космического аппарата показана на рисунке 4.10 б).

На рисунках 4.20 и 4.21 показаны результаты численного исследования реакции отражающей поверхности зонтичного рефлектора на действие последовательности импульсов. В расчетах длительность импульсов ( $\Delta t_{imp}$ ) равнялась 0,1 с, 0,25 с и 0,5 с.

Зависимости  $СКО_{отн}(t)$ , приведенные на рисунке 4.20, представляют колебательные процессы с переменными амплитудой. На рисунке 4.21

показано как меняются максимальные амплитуды остаточных колебаний  $СКО_{отн}^{(a)}$  в зависимости от величины сдвига по времени  $\Delta t_{shift}$ .

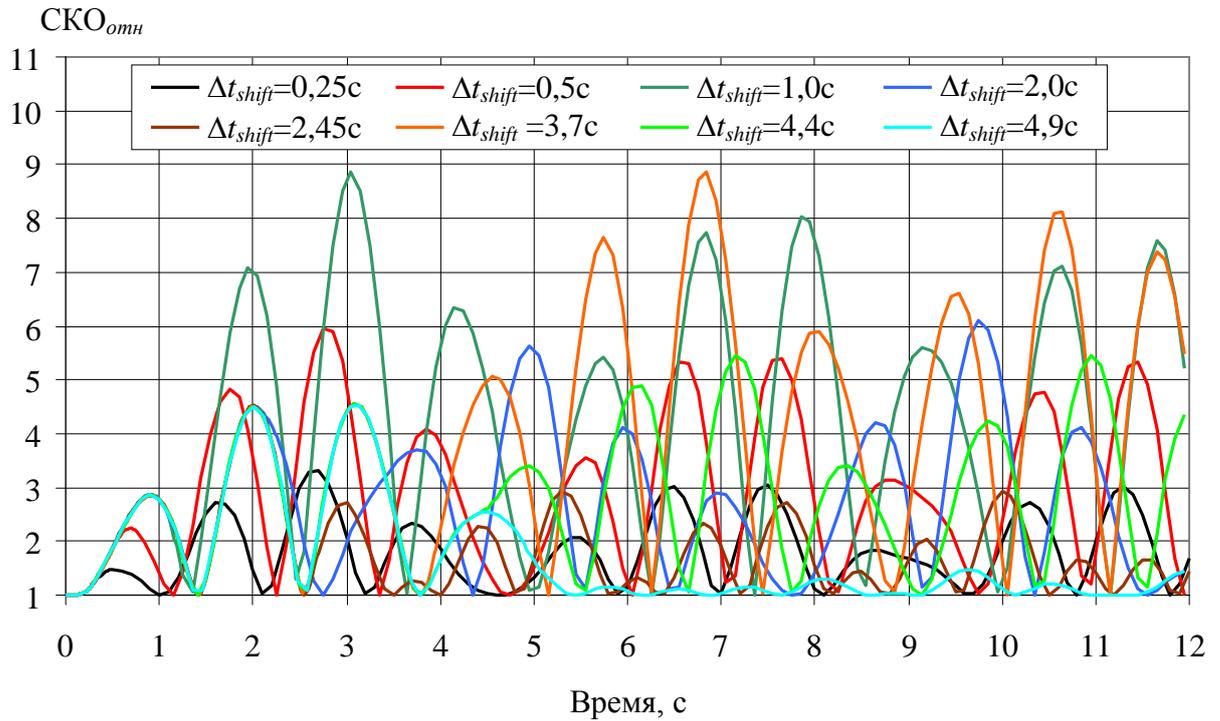


Рисунок 4.20 – Изменение  $СКО_{отн}$  во времени при действии последовательности импульсов,  $\Delta t_{imp}=0,25$  с

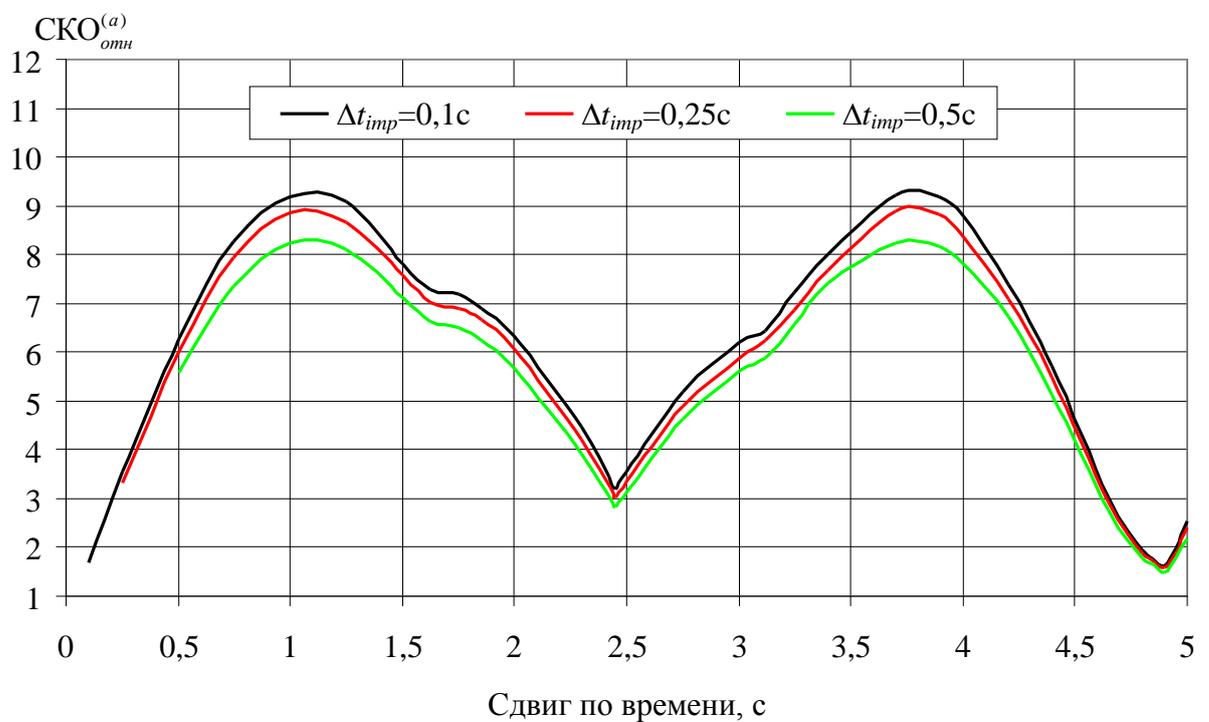


Рисунок 4.21 – Зависимости максимальных амплитуд остаточных колебаний  $СКО_{отн}^{(a)}$  от величины сдвига по времени ( $\Delta t_{shift}$ )

Как и в предыдущем случае, увеличение сдвига по времени ( $\Delta t_{shift}$ ) приводит к росту амплитуды остаточных колебаний. При  $\Delta t_{shift} > 1,2$  с амплитуды колебаний начинают убывать и достигают первого минимума при  $\Delta t_{shift} = 2,45$  с. При дальнейшем увеличении  $\Delta t_{shift}$  амплитуды остаточных колебаний опять растут, а затем убывают. Следующий минимум наблюдается при  $\Delta t_{shift} = 4,9$  с.

Как видно из рисунка 4.20 несимметричное нагружение космического аппарата возмущением, состоящем из последовательности импульсов, дает наиболее сложную картину колебаний  $СКО_{омн}^{(a)}$ . В этом случае наиболее эффективно возбуждаются колебания с периодом  $T_1 = 2,45$  с. Соответствующая форма колебаний показана на рисунке 4.15. Минимумы зависимости  $СКО_{омн}^{(a)}(\Delta t_{shift})$  (рисунок 4.21) располагаются в соответствии с условием (4.7), где значение параметра  $T$  равно  $T_1$ . В точках минимумов амплитуды остаточных колебаний остаются значительными. Например в первом минимуме  $СКО_{омн}^{(a)} \approx 3$ , а во втором –  $СКО_{омн}^{(a)} \approx 1,6$ . Это также связано с присутствием форм колебаний, для которых условие (4.7) выполняется только при  $n > 2$ .

#### **4.4. Влияние формы одиночного возмущающего импульса на динамику отклонения отражающей поверхности зонтичного рефлектора от оптимального положения**

Сравнивалась реакция отражающей поверхности рефлектора на действие двух видов возмущающего импульса момента сил. Зависимость момента сил от времени  $M_F(t)$  первого импульса описывалась выражением (4.2), т. е. он являлся прямоугольным. Во втором виде импульса зависимость  $M_F(t)$  представляла половину синусоидального колебания

$$M_F(t) = \begin{cases} M_F^{(a)} \cdot \sin(\pi \cdot t / \Delta t_{imp}), & 0 \leq t \leq \Delta t_{imp} \\ 0, & t > \Delta t_{imp} \end{cases}, \quad (4.8)$$

где  $M_F^{(a)}$  – амплитуда момента сил в возмущающем импульсе. Амплитудные значения момента сил  $M_F^{(a)}$  в (4.2) и (4.8) подбирались такими, чтобы сообщаемый момент импульса, вычисляемый по (4.1), был равен 10 Н·м·с.

На рисунке 2 показаны формы прямоугольного и синусоидального возмущений, сообщающие космическому аппарату одинаковые моменты импульса.

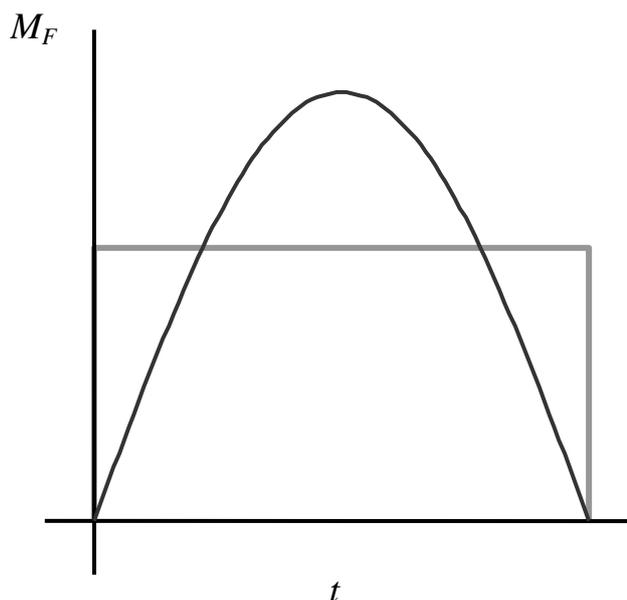


Рисунок 4.22 – Формы прямоугольного и синусоидального возмущений, сообщающие космическому аппарату одинаковые моменты импульса

Силы, создающие вращающий момент, прикладывались к корпусу космического аппарата в плоскости его симметрии, как показано на рисунке 4.10 а).

На рисунке 4.23 показаны зависимости  $СКО_{отн}(t)$  для синусоидального возмущения. Аналогичная зависимость для возмущения прямоугольного вида показана на рисунке 4.11

Реакции рефлектора на действия рассматриваемых видов возмущения во многом схожи. Возмущения возбуждают колебания конструкции космического аппарата с периодом  $T=3,85$  с, форма которых показана на рисунке 4.2 а). После окончания действия возмущения наблюдаются

остаточные колебания. Их амплитуда уменьшается с увеличением длительности действия возмущения  $\Delta t_{imp}$ .

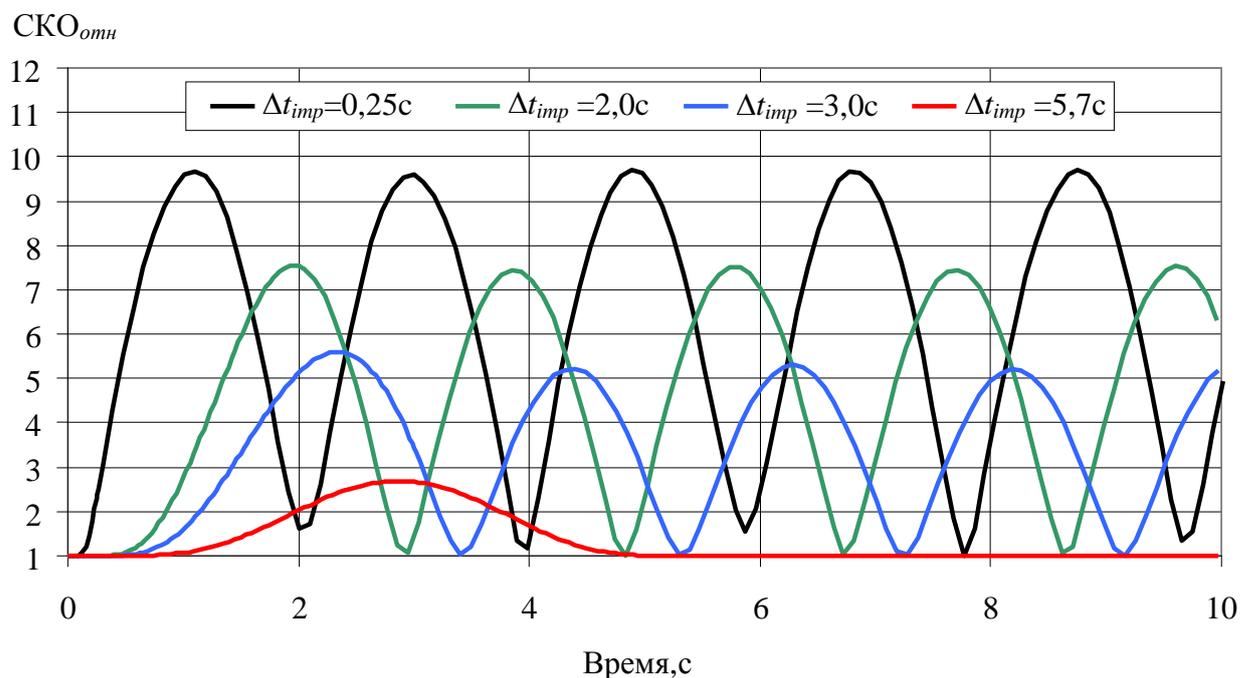


Рисунок 4.23 – Зависимости СКО<sub>отн</sub>(t) для синусоидального возмущения

При согласовании длительности возмущения с периодом возбуждаемых колебаний остаточные колебания могут отсутствовать. При прямоугольном возмущающем импульсе остаточные колебания не наблюдаются, если длительность возмущения совпадает с периодом возбуждаемых колебаний,  $\Delta t_{imp} = T$ , (рисунок 4.11). При синусоидальном возмущении такой эффект имеет место, когда  $\Delta t_{imp} = 1,5T$  (рисунок 4.23).

Данное ранее (п. 4.2.1) объяснение этого эффекта для прямоугольного импульса, состоит в том, что последовательности возбуждаемых колебаний имеют сдвиг фаз равный  $2\pi$ . Случай синусоидального возмущения более сложен для качественного анализа. Однако можно ожидать, что и в этом случае отсутствие остаточных колебаний обусловлено соответствующими фазовыми сдвигами.

На рисунке 4.24 показаны изменения амплитуд остаточных колебаний ( $СКО_{отн}^{(a)}(\Delta t_{imp})$ ) для прямоугольного и синусоидального возмущающих импульсов.

Из представленных результатов следует, что при малых длительностях возмущения ( $\Delta t_{imp} < 0,5$  с) амплитуды остаточных колебаний не зависят ни от величины  $\Delta t_{imp}$ , ни от вида возмущения. Это объясняется тем, что за такое короткое время корпусу космического аппарата сообщается заданный момент импульса, но возмущение не успевает распространиться на остальные элементы конструкции космического аппарата. Можно считать, что в этом случае момент импульса сообщается космическому аппарату мгновенно.

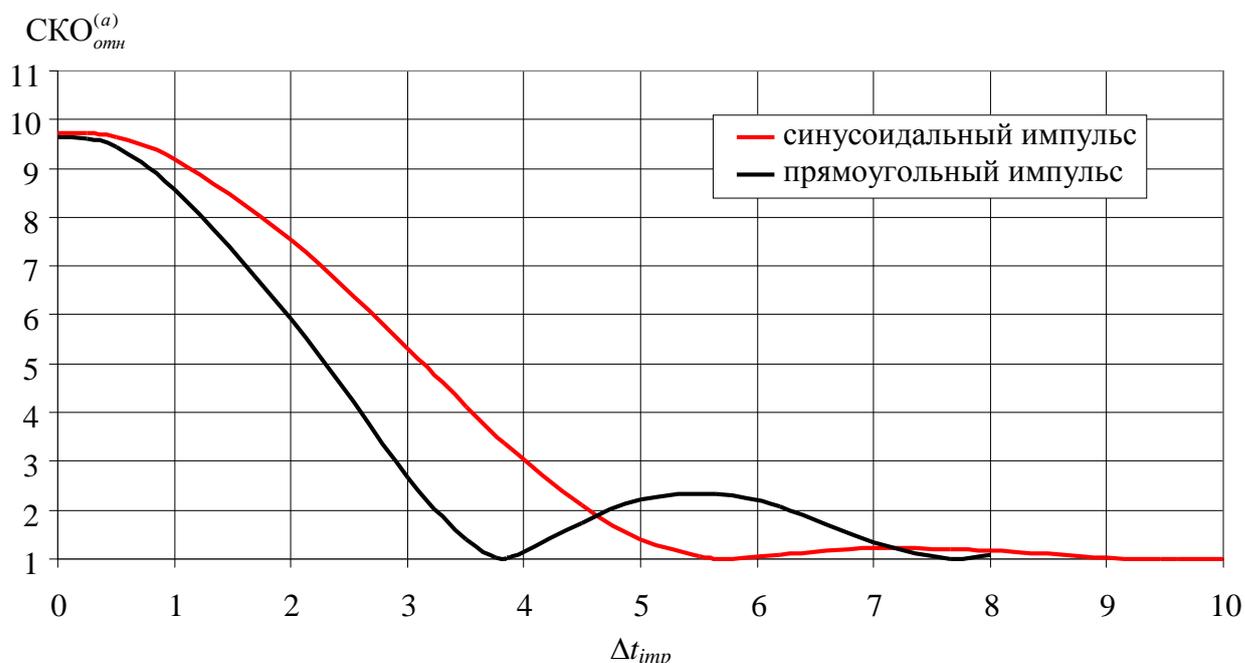


Рисунок 4.24 – Зависимость амплитуд остаточных колебаний от величины  $\Delta t_{imp}$  для двух видов возмущающих импульсов

При увеличении длительностей возмущения ( $\Delta t_{imp} > 0,5$  с) амплитуды колебаний уменьшаются и достигают первого минимума. Затем амплитуды увеличиваются и снова уменьшаются, достигая второго минимума. Зависимости  $СКО_{отн}(t)$ , при  $\Delta t_{imp}$ , соответствующих второму минимуму показаны на рисунке 4.25.

Дальнейшее увеличение  $\Delta t_{imp}$  показывает, что в обоих случаях существует последовательность минимумов функции  $СКО_{отн}^{(a)}(\Delta t_{imp})$ , которые располагаются с шагом  $T$ . Различия связаны с положениями первых минимумов. При прямоугольном возмущающем импульсе первый минимум располагается в точке  $\Delta t_{imp}=T$ , при синусоидальном возмущении в точке  $\Delta t_{imp}=1,5T$ .

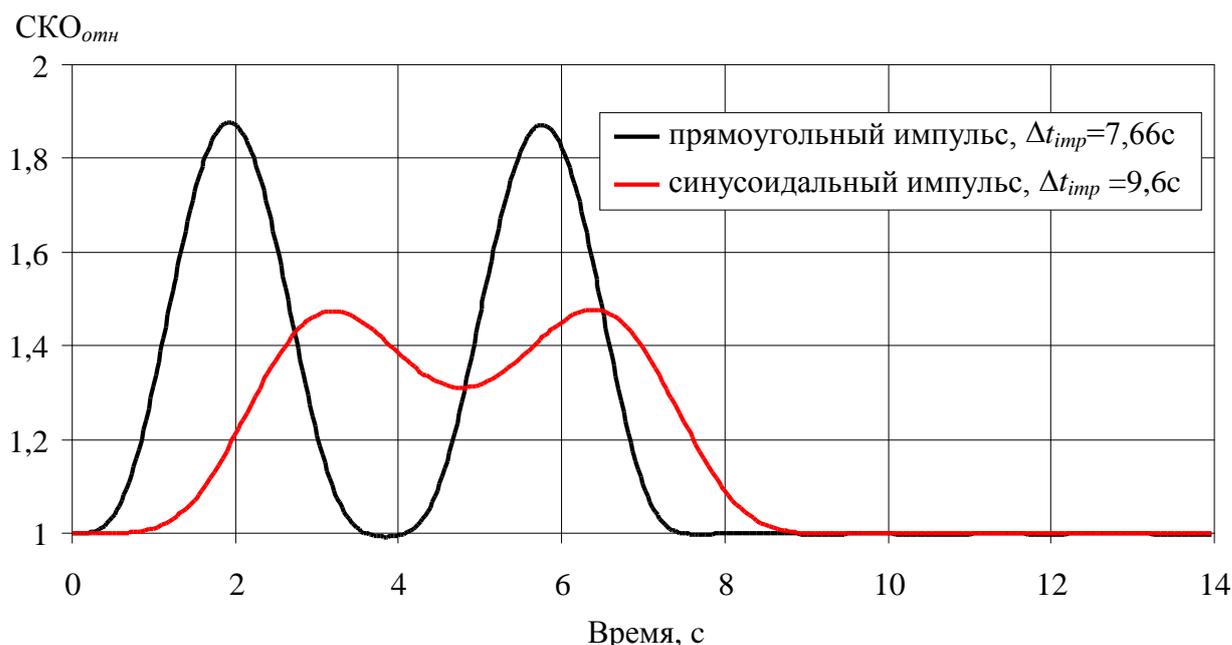


Рисунок 4.25 – Зависимости  $СКО_{отн}(t)$  при длительностях возмущения  $\Delta t_{imp}$ , соответствующих второму минимуму функции  $СКО_{отн}^{(a)}(\Delta t_{imp})$

Таким образом, реакции отражающей поверхности зонтичного рефлектора на действия двух различных видов возмущающих импульсов качественно оказались одинаковыми. Количественные различия связаны с положением первого минимума функции  $СКО_{отн}^{(a)}(\Delta t_{imp})$  и степенью затухания амплитуды остаточных колебаний при увеличении длительности возмущения  $\Delta t_{imp}$ .

#### 4.5. Выводы

Результаты численного анализа динамики крупногабаритного зонтичного рефлектора как составной части космического аппарата показали:

- действие возмущающего импульса возбуждает колебания конструкции космического аппарата, которые приводят к отклонениям отражающей поверхности рефлектора от оптимального положения (положения с наименьшим СКО);
- колебания отражающей поверхности рефлектора продолжаются и после окончания действия возмущения (остаточные колебания);
- амплитуды остаточных колебаний СКО отражающей поверхности рефлектора минимизируются при согласовании параметров возмущения с периодом возбуждаемых колебаний космического аппарата;
- глубина минимума амплитуд остаточных колебаний СКО отражающей поверхности рефлектора определяется количеством и амплитудами возбуждаемых собственных форм колебаний, которые, в свою очередь, зависят от вида действующего возмущения и способа его приложения.

## **ГЛАВА 5. Моделирование процесса активного демпфирования колебаний нежесткого космического аппарата с зонтичным рефлектором**

### **5.1. Жесткость полой балки при ее нагружении внутренним давлением**

Вопросы демпфирования колебаний представляют большой интерес для динамики космических аппаратов с крупногабаритными рефлекторами. В настоящее время существует два направления в развитии методов демпфирования колебаний космических конструкций. Первое направление связано с методами пассивного демпфирования, которые включают использование материалов с высоким внутренним трением [70], [82], [151], учетом демпфирования в местах соединений конструктивных элементов [94], [152], применением пассивных демпферов [24]. Второе направление включает методы активного демпфирования. При активном демпфировании усилия, подавляющие колебания, могут создаваться реактивными струями, пьезоэлементами, натяжениями тросов и т.д. [69], [131], [132]. Каждый метод имеет присущие ему преимущества и недостатки. Следует отметить, что эффективность большинства методов демпфирования проверялась на простейших аналитических, численных или физических моделях.

В первом приближении космический аппарат с крупногабаритным зонтичным рефлектором, который соединяет с корпусом полая штанга, можно рассматривать как свободную балку с сосредоточенными на ее концах массами. Под действием возмущения механическая система совершает изгибные колебания. При этом происходит циклический процесс перехода кинетической энергии сосредоточенных масс в потенциальную энергию деформированной балки и обратно. Если каким-либо образом уменьшить жесткость балки в то время, когда потенциальная энергия достигает максимума (балка максимально деформирована), то механическая система потеряет часть потенциальной энергии. После этого возвратит прежнюю

жесткость балке, не изменив полной энергии механической системы, можно, когда кинетическая энергия достигает максимума (балка не деформирована, потенциальная энергия равна нулю). Таким образом, согласуя изменение жесткость балки с фазами колебаний, можно понижать полную энергию механической системы и, соответственно, амплитуду колебаний. При этом физический механизм диссипации энергии будет определяться выбранным способом изменения жесткости балки.

В данном разделе рассматривается метод активного демпфирования колебаний космического аппарата с зонтичным рефлектором, использующий свойство полой балки изменять изгибную жесткость при ее нагружении внутренним давлением. Зависимость жесткости от величины внутреннего давления определялась численно из статического и динамического анализов.

Расчетная схема статического анализа показана на рисунке 5.1.

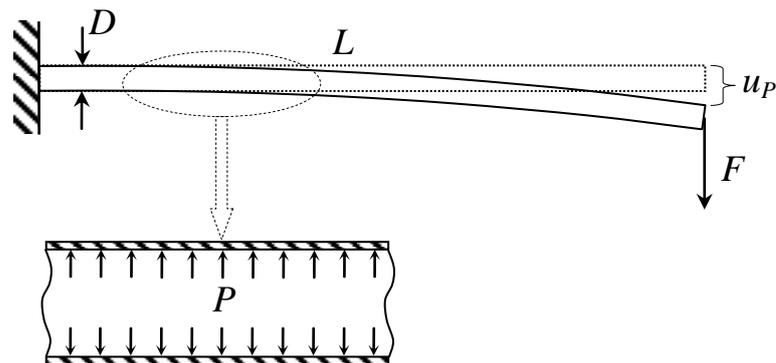


Рисунок 5.1 – Схема приложения нагрузок при определении статического прогиба балки

Консольная тонкостенная балка диаметром  $D$  и длиной  $L$  нагружена внутренним давлением  $P$  и силой  $F$  на свободном конце. Предполагается, что давление прикладывается одновременно и равномерно по всей внутренней поверхности балки. Из конечноэлементного анализа определялась величина прогиба  $u_p$ , соответствующая внутреннему давлению  $P$ . Эффективная изгибная жесткость балки  $(EJ)_p$  находилась из выражения [61]

$$u = \frac{FL^3}{3(EJ)_p} (1 + \lambda), \quad (5.1)$$

где  $\lambda = \frac{k(1+\nu)}{2} \cdot \frac{D^2}{L^2}$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $k$  – коэффициент, для тонкостенной трубы круглого сечения  $k=2$ . Параметры балки соответствовали параметрам штанги, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата:  $D=0,122$  м;  $L=8$  м;  $\nu=0,3$ ;  $(EJ)_{P=0} = 2,56 \cdot 10^4$  Н·м<sup>2</sup>.

Перед проведением динамического анализа необходимо определить начальное состояние балки. Для этого выполнялся статический расчет в соответствии со схемой нагружения, показанной на рисунке 5.1. Затем ставилось условие  $F=0$  и находилось нестационарное решение  $u_P(t)$ , позволяющее определить частоту  $f_P$  колебаний балки. Тогда эффективная жесткость  $(EJ)_P$  находилась из соотношения [63]

$$\frac{\sqrt{(EJ)_P}}{\sqrt{(EJ)_{P=0}}} = \frac{f_P}{f_{P=0}}. \quad (5.2)$$

На рисунке 5.2 показано изменение относительной жесткости балки  $(EJ)_{отн}=(EJ)_P / (EJ)_{P=0}$  в зависимости от величины внутреннего давления  $P$ .

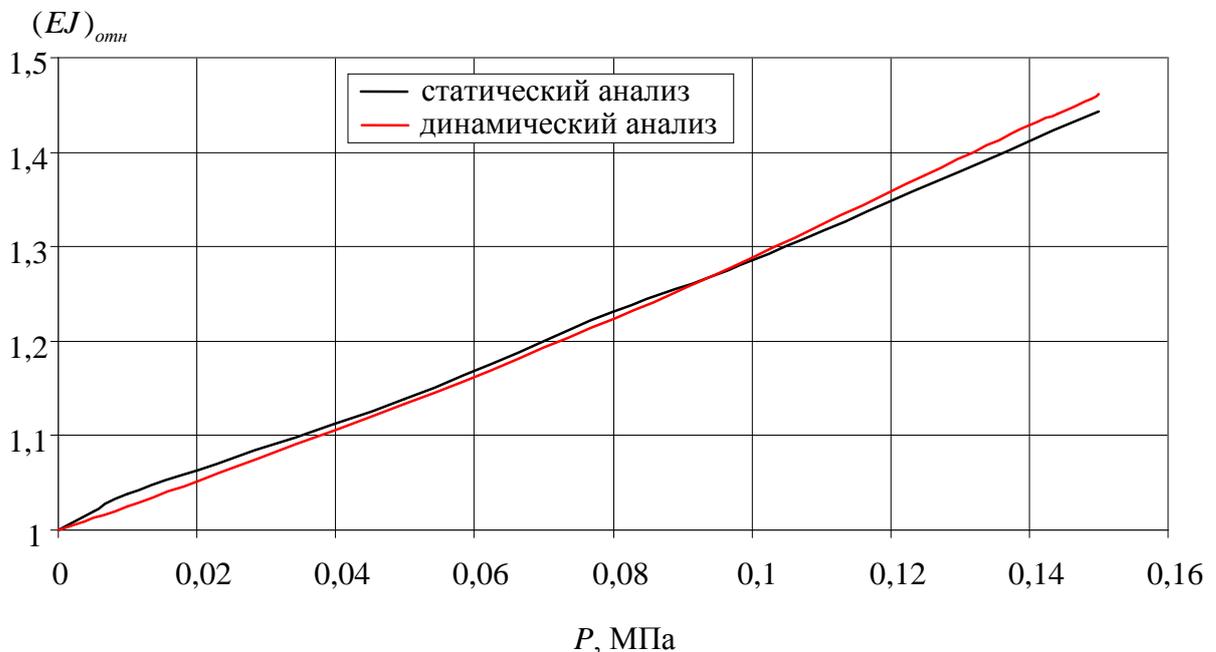


Рисунок 5.2 – Изменение относительной жесткости балки от величины внутреннего давления  $P$

## 5.2. Численная реализация и результаты моделирования процесса активного демпфирования

Для численной реализации процесса активного демпфирования колебаний космического аппарата необходимо [29]:

- выбрать управляющий параметр;
- выбрать закон согласования изменения жесткости штанги с изменениями величины управляющего параметра.

Схема процесса активного демпфирования, реализованного в численной модели космического аппарата, показана на рисунке 5.3.

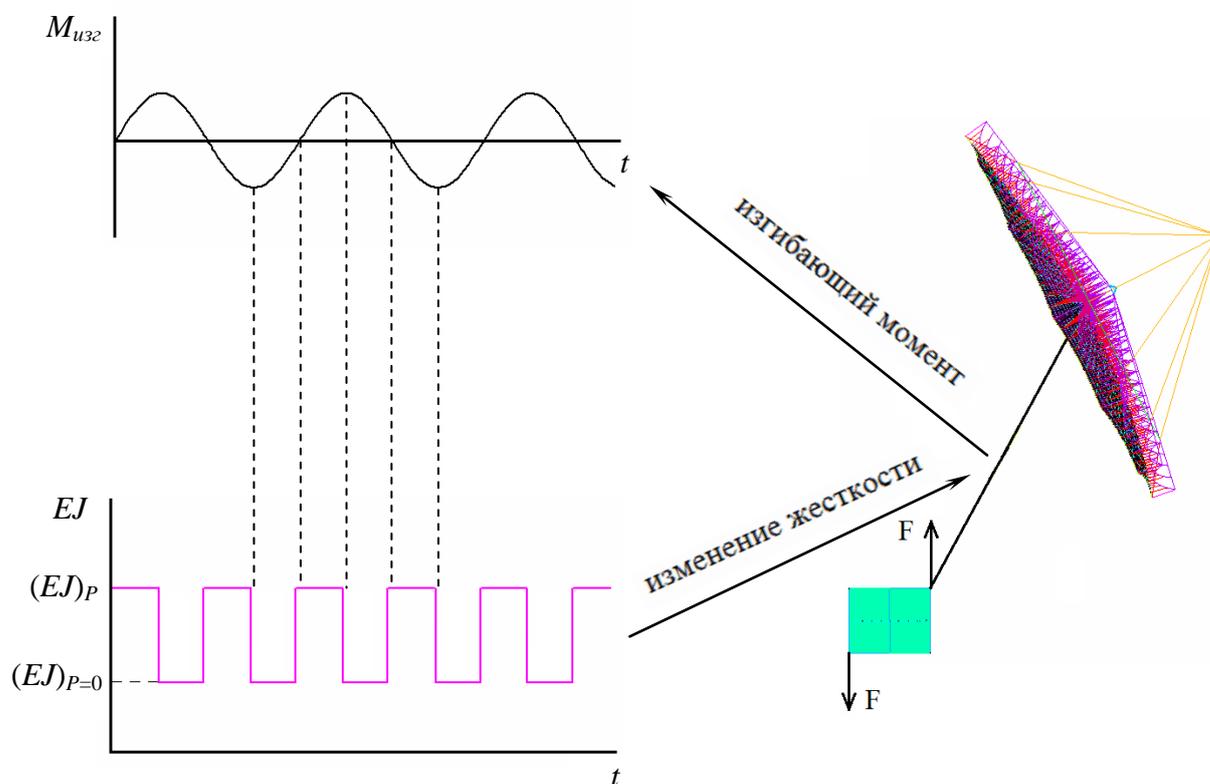


Рисунок 5.3 – Схема численного моделирования процесса активного демпфирования

В качестве управляющего параметра выбрана величина изгибающего момента, действующего в среднем сечении штанги, которая соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата. Изменение жесткости штанги согласуется с изменениями управляющего параметра (изгибающего момента) по закону

$$(EJ) = \begin{cases} (EJ)_p, & \text{если } \frac{d|M_{изг}|}{dt} > 0 \\ (EJ)_{p=0}, & \text{если } \frac{d|M_{изг}|}{dt} < 0 \end{cases}. \quad (5.3)$$

Таким образом жесткость штанги увеличивается, если модуль изгибающего момента растет. Жесткость штанги возвращается к исходному значению, если модуль изгибающего момента уменьшается. Связь между прилагаемым давлением и эффективной жесткостью штанги устанавливает зависимость, показанная на рисунке 5.2.

На рисунках 5.4 и 5.5 приведены результаты численного моделирования процесса активного демпфирования. Колебания космического аппарата возбуждались путем приложения возмущающего импульса, сообщаемого момент количества движения 10 Н·м·с и имеющего длительностью 0,25 с.

Изменение во времени изгибающего момента, действующего в среднем сечении штанги, представлено на рисунке 5.4.

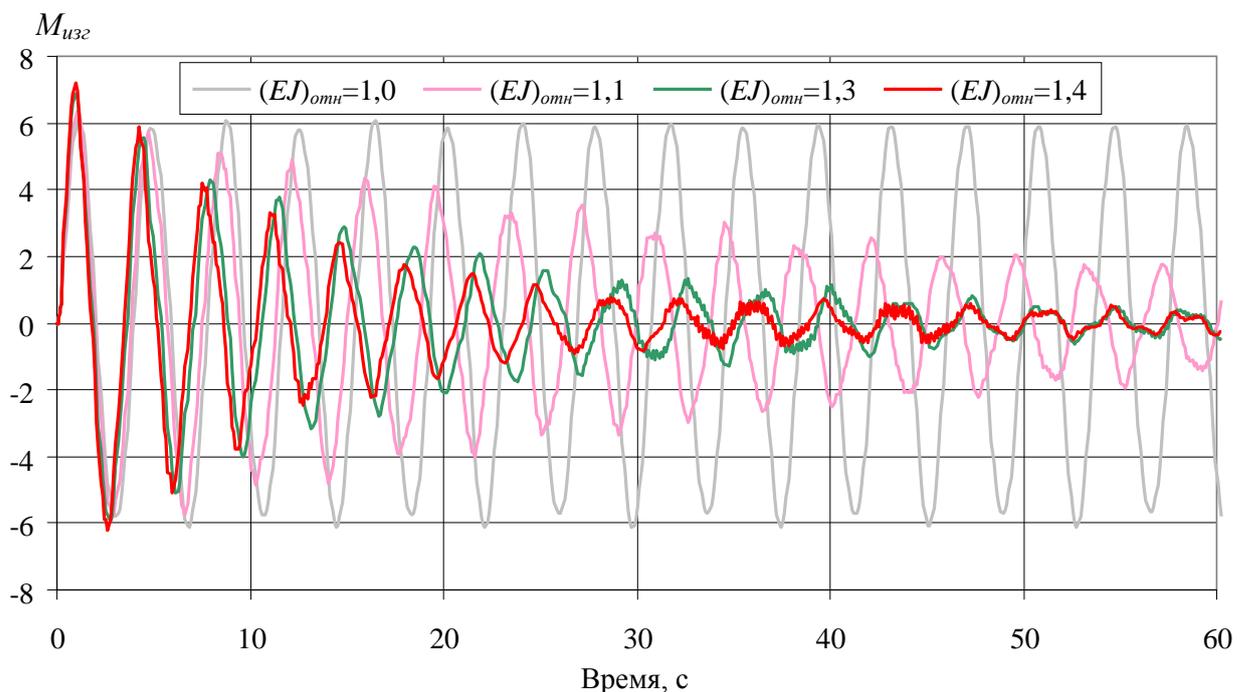


Рисунок 5.4 – Зависимость изгибающего момента в среднем сечении штанги от времени и параметра демпфирования  $(EJ)_{отн}$

Результаты показывают, что с увеличением параметра  $(EJ)_{отн}$  растет степень демпфирования колебаний. Однако резкое изменение жесткости возбуждает новые формы колебаний, которые особенно заметны при  $(EJ)_{отн}=1,4$ . Это приводит к усложнению численной реализации закона (5.3). Чтобы уменьшить амплитуду таких колебаний жесткость штанги, при переходе от  $(EJ)_P$  к  $(EJ)_P=0$ , изменялась не мгновенно, как показано на рисунке 5.3, а за малый, но конечный промежуток времени. Кроме того, при вычислении производной  $\frac{d|M_{узг}|}{dt}$  через отношение  $\frac{\Delta|M_{узг}|}{\Delta t}$  требуется выбирать достаточно большой шаг по времени  $\Delta t$ , чтобы усреднить вклад высокочастотных колебаний в величину  $\Delta|M_{узг}|$ . Следует отметить, что после того как жесткость изменила свое значение знак производной  $\frac{d|M_{узг}|}{dt}$  не повернется до тех пор, пока не изменит знак величина  $M_{узг}$ .

На рисунке 5.5 показано изменение во времени относительного СКО отражающей поверхности зонтичного рефлектора при активном демпфировании колебаний космического аппарата. Увеличение параметра  $(EJ)_{отн}$  приводит к более быстрому затуханию колебаний.

На рисунке 5.6 точками показаны амплитудные значения относительного СКО ( $CKO_{отн}^{(a)}$ ) в различные моменты времени. На том же рисунке сплошными линиями представлены аппроксимации  $CKO_{отн}^{(a)}$  функциями вида  $A=A_0e^{-\alpha t}$ , полученными с помощью метода наименьших квадратов.

Из этих результатов следует, что в начальный период времени колебания затухают интенсивней, чем в последующий период. Это особенно заметно для больших значений параметра  $(EJ)_{отн}$ . Например, при  $(EJ)_{отн}=1,4$  через 20 с после начала активного демпфирования интенсивность затухания резко уменьшается.

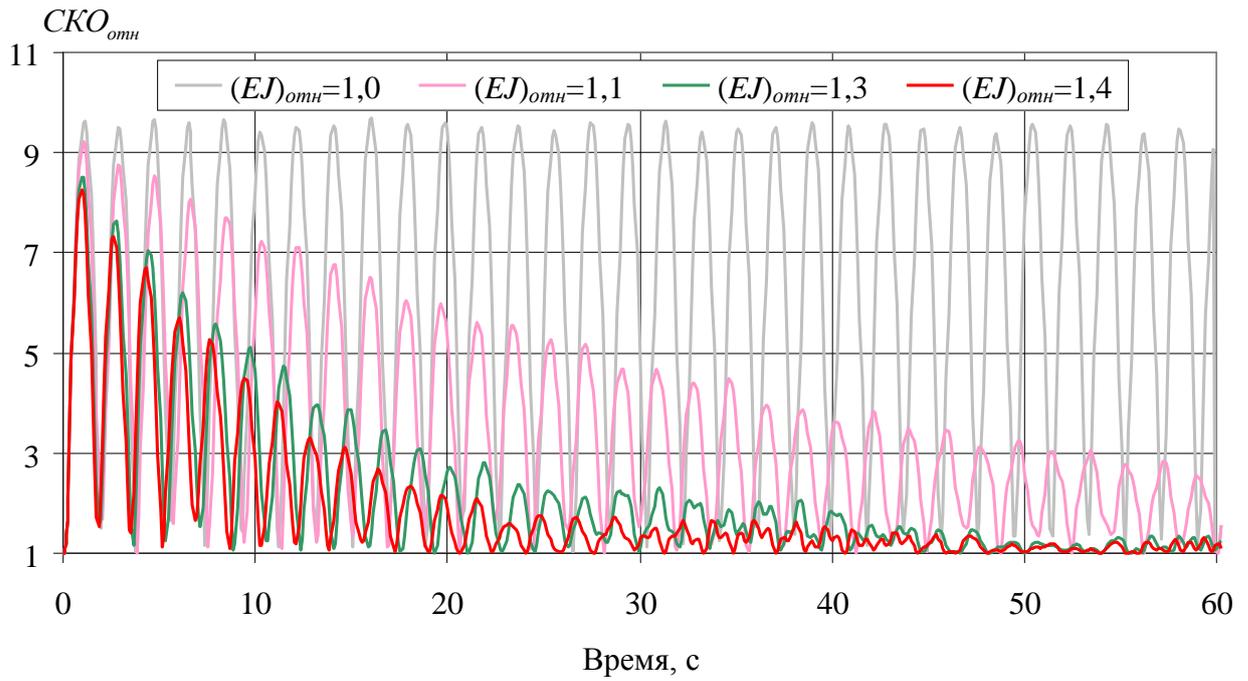


Рисунок 5.5 – Изменение  $СКО_{отн}$  во времени при активном демпфировании колебаний

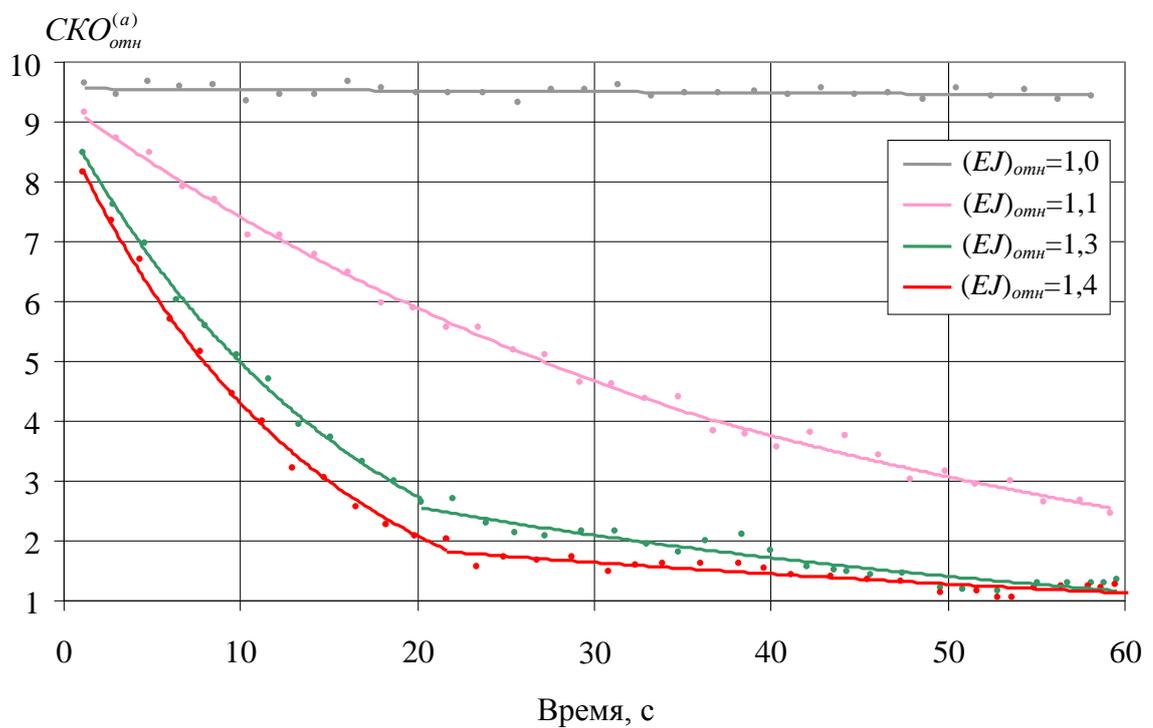


Рисунок 5.6 – Амплитудные значения относительного СКО ( $\bullet$ ) и их аппроксимации ( $\text{—}$ ) функциями вида  $A=A_0e^{-c\alpha}$

В таблице 5.1 приведены декременты затухания колебаний  $CKO_{отн}$  для различных значений  $(EJ)_{отн}$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – начальный и последующий декременты.

Таблица 5.1 – Декременты затухания колебаний  $CKO_{отн}$  при активном демпфировании

$P$ , МПа	$(EJ)_{отн}$	$\alpha_1$ , с <sup>-1</sup>	$\alpha_2$ , с <sup>-1</sup>
0	1,0	0	0
0,037	1,1	0,0230	0,0202
0,104	1,3	0,0569	0,0199
0,134	1,4	0,0724	0,0124

Такое поведение декремента затухания можно объяснить следующим образом. Возмущающий импульс длительностью 0,25 с возбуждает различные формы колебаний космического аппарата. При этом основной вклад в возмущение формы отражающей поверхности рефлектора вносит форма колебаний с периодом  $T=3,85$  с, показанная на рисунке 4.2 а). Важным является то, что в качестве управляющего параметра была выбрана величина изгибающего момента, действующего в среднем сечении штанги. Изгибающий момент отличен от нуля для таких форм колебаний, у которых укладывается нечетное число полуволен на длине штанги. Это верно и для основной формы колебаний. Для остальных форм колебаний изгибающий момент в среднем сечении штанги равен нулю. Поэтому для них процесс активного демпфирования на основе (5.3) будет не эффективен. Это подтверждается результатами, представленными на рисунке 5.5. Для  $(EJ)_{отн}=1,3$  и  $(EJ)_{отн}=1,4$  по мере уменьшения амплитуды основных колебаний начинает появляться модуляция с частотой в два раза большей, чем основная частота.

В таблице 5.2, для сравнения, представлены значения логарифмических декрементов затухания, которые получены как на основе рассматриваемой

численной модели космического аппарата, так и в экспериментах по активному демпфированию колебаний ферменных [132] и балочных конструкций [97]. Физический смысл логарифмического декремента затухания состоит в том, что обратная ему величина равна числу колебаний, за которые амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

В экспериментах рассматривались простейшие конструкции. В работе [132] моделировалось активное демпфирование ферменной балки длиной около 1,7 м, причем один из элементов фермы был заменен пьезоэлементом эквивалентной жесткости. Первая собственная частота колебаний фермы равнялась 8,8 Гц. В этом эксперименте в начале наблюдалось быстрое затухание колебаний с первой собственной частотой. Затем эффективность демпфирования падала. Оставались колебания с более высокими частотами, амплитуды которых были малы. В работе [97] для активного демпфирования колебаний балки использовался гироскопический демпфер. Балка представляла пластину с размерами  $0,5 \times 0,0762 \times 0,00159$  м. Первая собственная частота колебаний составляла 1,03 Гц.

Таблица 5.2 – Логарифмические декременты затухания при активном демпфировании, полученные различными методами, на различных моделях

$(EJ)_{отн}=1,3$	$(EJ)_{отн}=1,4$	Эксперимент [132]	Эксперимент [97]
0,219	0,279	0,566	0,157

Значения логарифмических декрементов затухания  $SKO_{отн}$ , приведенные в таблице 5.2, можно считать физически приемлемыми, так как они находятся в пределах, установленных результатами выше упомянутых экспериментов.

### 5.3. Выводы

Проведенные вычислительные эксперименты с использованием разработанной численной модели космического аппарата с

крупногабаритным зонтичным рефлектором показали:

- возможность численного моделирования работы системы управления с обратной связью на основе предлагаемой конечноэлементной модели;
- принципиальную работоспособность метода активного демпфирования колебаний конструкции космического аппарата, использующего принцип изменения жесткости полый балки при ее нагружении внутренним давлением.

## **Заключение**

В диссертационной работе рассмотрены вопросы математического моделирования динамики зонтичного рефлектора, как части свободно движущегося космического аппарата. Предложенная конечноэлементная модель космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором позволяет решать широкий круг задач, связанных с определением динамического состояния конструкции рефлектора (прежде всего отражающей поверхности) при воздействии возмущений, обусловленных функционированием космического аппарата.

Получены следующие научные и практические результаты:

1. Построена математическая модель движения нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором на основе геометрически нелинейной системы уравнений движения деформируемого твердого тела, с начальными условиями, учитывающими преднапряженное состояние конструкции рефлектора.

2. Построена конечноэлементная модель нежесткого космического аппарата с крупногабаритным зонтичным рефлектором, учитывающая все основные элементы конструкции, включая сетеполотно, формирующее отражающую поверхность рефлектора.

3. Предложен метод получения начальных условий для численного решения задачи движения нежесткого космического аппарата при различных способах связи зонтичного рефлектора с корпусом.

4. На основе разработанной конечноэлементной модели космического аппарата рассмотрена динамика СКО отражающей поверхности при действии возмущения, моделирующего работу системы управления.

5. Из результатов проведенных расчетов получено условие согласования параметров возмущения с собственными частотами нежесткого космического

аппарата, при котором величина динамического отклонения СКО от стационарного значения будет минимальна.

6. Предложен метод активного демпфирования колебаний нежесткого космического аппарата, использующий свойство полой штанги, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата, изменять изгибную жесткость при ее нагружении внутренним давлением.

7. Численно показана принципиальная работоспособность предложенного метода активного демпфирования колебаний нежесткого космического аппарата. Получены коэффициенты затухания колебаний СКО отражающей поверхности зонтичного рефлектора в зависимости от величины внутреннего давления в полой штанге, соединяющей рефлектор с корпусом космического аппарата.

## Список литературы

1. Ачер Дж. С. Высококачественные параболические антенны // Ракетная и космическая техника. – 1980 – Т. 18, №10, октябрь. – С. 179–186.
2. Механика больших космических конструкций / Н. В. Баничук [и др.]. – М. : Факториал, 1997, 317с.
3. Белоножко П.А. Моделирование динамики обособленной меридиональной цепи рефлекторной антенны каркасно-опорного типа / П. А. Белоножко, П. П. Белоножко, А. А. Фоков // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №1. – С. 115–124.
4. Бельков А. В. Компьютерное моделирование трансформируемых космических рефлекторов / А. В. Бельков [и др.]. // Совместный выпуск журналов по материалам Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (10-14 сентября, 2008). Вычислительные технологии. – 2008. – Том 13, С. 284–293. Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия: математика, механика, информатика. – 2008. – №3(58), Ч.1, Алматы-Новосибирск. – С. 284–293.
5. Бельков А. В. Компьютерное моделирование трансформируемых космических рефлекторов / А. В. Бельков [и др.]. // Космические вехи: сборник научных трудов, посвященный 50-летию ОАО "ИСС" им. академика М.Ф.Решетнева. – Красноярск: ИП Суховольская Ю.П., 2009. – С. 317–329.
6. Бужинский В.А., Клишев О.П., Мытарев А.И. Исследование влияния упругих колебаний крупногабаритных элементов конструкции космического аппарата на искажение геометрических характеристик рефлектора / В. А. Бужинский, О. П. Клишев, А. И. Мытарев // Космонавтика и ракетостроение. – 2007. – № 2 (47). – С. 102–108.
7. Бутов В. Г. Моделирование формы поверхности напряженных сетчатых конструкций / В. Г. Бутов [и др.] // Международная

- конференция по математике и механике: Избранные доклады. / Под общ. ред. Н.Р. Щербакова. – Томск: ТГУ, 2003. – С. 215–220.
8. Бутов В. Г. Моделирование формы отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов / В. Г. Бутов [и др.]. // Краевые задачи и математическое моделирование: Сб. тр. 6-ой Всерос. науч. конф. 29 ноября – 1 декабря 2003 г. Краевые задачи и методы их решения / НФИ КемГУ; Под ред. В.О.Каледина. – Новокузнецк, 2003. – С. 175–178
  9. Бутов В.Г. Моделирование формы поверхности напряженных сетчатых конструкций / В. Г. Бутов [и др.]. // Естественные и гуманитарные науки в XXI веке. Материалы региональной конференции. – Томск: Изд-во ТГАСУ, 2003. – С. 215–220.
  10. Бутов В.Г. Динамика трансформируемой конструкции рефлектора / В. Г. Бутов [и др.]. // Материалы IX Международной научной конференции посвященной 45-летию СибГАУ им. ак. М.Ф. Решетнева, Красноярск, 10-12 ноября, 2005, С. 35.
  11. Бутов В.Г. Моделирование динамики космического аппарата с крупногабаритными рефлекторами / Бутов В.Г., Жуков А.П., Пономарев С.В. // Материалы V Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск, 3-5 октября, 2006, С. 218–219.
  12. Бутов В.Г. Вопросы регулирования формы отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов / В. Г. Бутов, С. В. Пономарев, В. А. Солоненко, А. А. Ящук // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: доклады конференции. Томск: Изд-во Том. Ун-та. 2004. – С. 182–183.
  13. Бутов В.Г. Настройка зонтичного рефлектора на земле с учетом влияния силы тяжести на форму отражающей поверхности / В. Г. Бутов [и др.]. // Изв. вузов. Физика, 9/2, т. 50, 2007. – С. 223–224.

14. Бутов В.Г. Моделирование температурных деформаций рефлекторов космических аппаратов / В. Г. Бутов, С.В. Пономарев, В.А. Солоненко, А.А. Ящук // Изв. вузов. Физика. 2004, т. 47, №10, С. 15–18.
15. Бутов В.Г. Тепловая модель антенны с крупногабаритным рефлектором для ИСЗ на геостационарной орбите / В. Г. Бутов, С. В. Пономарев, В. А. Солоненко, А. А. Ящук // Изв. вузов. Физика. 2004, т. 47, №10, С. 10–14.
16. Метод конечных элементов / П. М. Варвак [и др.]. – Киев : Вища школа, 1981, 176 с.
17. Галлагер Р. Методы конечных элементов / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984, 428 с.
18. Глумов В. М. Формирование стратегии управления собираемой на орбите большой космической конструкцией / В. М. Глумов, В. Ю. Рутковский, В. М. Суханов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 12. – С 21–37.
19. Гриневич Д. В. Разработка методики моделирования динамики управляемого космического аппарата с упругой изменяемой конструкцией : дис. ... канд. техн. наук / Д. В. Гриневич. – М., МЭИ, 2014. – 169 с.
20. Гряник М. В. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа / М. В. Гряник, В. И. Ломан. – М. : Радио и связь, 1987. – 72 с.
21. Гуляев В. И. О динамике крупногабаритного разворачивающегося рефлектора / В. И. Гуляев, В. В. Гайдайчук, А. Г. Чернявский, Л. Шалино // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 9. – С. 109–115.
22. Гущин В. Н. Основы устройства и конструирования космических аппаратов: Учеб. пособ. для вузов / В. Н. Гущин, Б. М. Панкратов, А. Д. Родионов. – М. : Машиностроение, 1992. – 256 с.
23. Денисова Л. В. Теоретические и экспериментальные исследования тепловых режимов сетчатых рефлекторов космических антенн / Л. В. Денисова, Д. Ю. Калинин, С. В. Резник // Вестник Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 1(82). – С. 92–105.

24. Джуанг Дж. Н. Оптимальное проектирование пассивного вибропоглотителя для решетчатой балки // *Аэрокосмическая техника*. – 1985. – Т.3, № 6. – С.120–128.
25. Дмитроченко О. Н. Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел : дис. ... канд. физ.-мат. наук / О. Н. Дмитроченко. – М., МГУ, 2003. – 125 с.
26. Евдокимов А. С. Компьютерное моделирование механических и радиотехнических характеристик крупногабаритных космических рефлекторов / А. С. Евдокимов, С. В. Пономарев // *Вестник НГУ. Физика*. – 2007. – Т. 2, Вып. 3. – С. 81–86.
27. Евдокимов А. С. Сопряженное моделирование механических и электродинамических характеристик космического рефлектора / А. С. Евдокимов, С. В. Пономарев // *Изв. вузов. Физика*. – 2007. – Т. 50, № 9/2. – С. 233–238.
28. Евдокимов А. С. Сопряженное механическое и электродинамическое моделирование трансформируемых космических рефлекторов / А. С. Евдокимов, С. В. Пономарев, Н. А. Тестоедов, Д. Б. Усманов // *Вестник Сибирского Государственного Аэрокосмического Университета им. ак. М. Ф. Решетнева*. – 2008. – №1(8). – С.105–109.
29. Жуков А.П. Динамика отражающей поверхности крупногабаритного зонтичного рефлектора космического аппарата / Жуков А.П., Пономарев С.В., Величко А.И., Халиманович В.И. // *Изв. вузов. Физика*. – 2013. – Т. 56, № 7/3. – С. 152–154.
30. Жуков А.П. Динамические характеристики космического аппарата с рефлектором зонтичного типа / Жуков А.П., Пономарев С.В. // *Материалы VII Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики»*, Томск, 12-14 апреля, 2011, С. 305–306.

31. Жуков А. П. Оценка влияния физико-механических свойств сетеполотна на форму отражающей поверхности рефлектора зонтичного типа / А. П. Жуков, С. В. Пономарев // Изв. вузов. Физика. – 2010. – № 12/2. – С. 142–147
32. Жуков А.П. Оценка динамических характеристик космического аппарата / Жуков А.П., Пономарев С.В. // Изв. вузов. Физика. – 2010. – № 12/2. – С. 148–154.
33. Жуков А.П. Реакция отражающей поверхности крупногабаритного рефлектора на действие возмущающего импульса / Жуков А.П. // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика – 2011 – №4(16) – С. 101–109.
34. Жуков А.П. Технология получения начальных условий для задачи динамики крупногабаритного рефлектора / А. П. Жуков, С. В. Пономарев // Изв. вузов. Физика. – 2012. – № 7/2. – С. 72–76.
35. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М : Мир, 1975. – 543 с.
36. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган.– М : Мир, 1986. – 318 с.
37. Зимин В. Н. Расчет раскрытия крупногабаритной космической конструкции ферменного типа / В. Н. Зимин, В. Г. Бойков, Ф. Р. Файзуллин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2012. – Спец. выпуск “Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем”. – С. 5–14
38. Зимин В. Н. Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций / В. Н. Зимин [и др.]. // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. – 2014. – № 10. – С. 179–191. – URL: <http://technomag.bmstu.ru>

39. Зимин В. Н. О расчете раскрытия трансформируемой структурной космической конструкции / В. Н. Зимин, Ф. Р. Файзуллин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 12. – С. 40–44.
40. Клишев О. П. Анализ упругих деформаций космического аппарата на искажение формы отражающих поверхностей крупногабаритных элементов конструкции / О. П. Клишев, В. И. Халиманович // Вестник Сибирского Государственного Аэрокосмического Университета им. акад. М.Ф. Решетнева. – 2008. – Выпуск 1 (18). – С. 115–118.
41. Колубакин В. Система мобильной связи "Садко" // ТелеСпутник. – 8(70). – Сентябрь, 2001 г. – URL : <http://www.telesputnik.ru/archive/70/article/38.html>
42. Космические аппараты АО «ИСС» / АО «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПУТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ» имени академика М.Ф. Решетнёва». – URL : <https://www.iss-reshetnev.ru/spacecraft/>
43. Крылов А. В. Исследование процесса раскрытия антенного контура / А. В. Крылов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2013. – № 12. – С. 45–50
44. Крылов А. В. Моделирование разворачивания многозвенных замкнутых космических конструкций / А. В. Крылов, С. А. Чурилин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2012. – Спец. выпуск “Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем”. – С. 80–91
45. Кузнецов А. С. Экспериментальное определение механических свойств металлического трикотажного сетеполотна / А. С. Кузнецов, С. В. Пономарев, Ю. Н. Сидоренко // Физика и химия высокоэнергетических систем: Сборник материалов конференции. – Томск: ТГУ. – 2003. – С. 95–96

46. Кучумов М. Ю. Моделирование деформационных свойств металлических сетеполотен и вантовых элементов трансформируемых рефлекторов / М. Ю. Кучумов [и др.]. // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Сборник материалов конференции. – Томск: ТГУ. – 2004. – С. 202–203.
47. Кучумов М. Ю. Изучение вязкоупругой деформируемости шнуров вантовых систем крупногабаритных трансформируемых космических рефлекторов / М. Ю. Кучумов, С. В. Пономарев // Физика и химия высокоэнергетических систем: Сборник материалов конференции. – Томск: ТГУ. – 2003. – С. 84–85
48. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2003. – Т. 2 : Теория поля. – 536 с.
49. Марицкий Н. Н. Экспериментальное изучение деформируемости сетеполотна РВС–2 / Н. Н. Марицкий, С. В. Пономарев // Физика и химия высокоэнергетических систем: Сборник материалов конференции. – Томск: ТГУ. – 2003. – С. 99–100.
50. Мешковский В.Е. Влияние температурных деформаций на точность формы отражающей поверхности ферменного рефлектора крупногабаритной космической антенны на орбите // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2014. – № 11. – С. 3–11
51. Мешковский В.Е. Тепловой режим ферменного рефлектора трансформируемой крупногабаритной космической антенны // Инженерный журнал: наука и инновации. Электронное научно-техническое издание – 2013. – вып. 7. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/852.html> .
52. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М : Мир, 1981. – 216 с.
53. Миура К. Конструирование антенны с растянутой фермой / К. Миура, Я. Миязаки // Аэрокосмическая техника. – 1991. – № 1. С. 61–69.

54. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М. : Высшая школа, 1985. – 392 с.
55. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М : Мир, 1976. – 465 с.
56. Пахомов Б. М., Учет взаимной затененности стержней при расчете температурного состояния крупногабаритного трансформируемого рефлектора / Б. М. Пахомов, К. В. Садовсков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Машиностроение”. – 2012. – Спец. выпуск “Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем”. – С. 15–21.
57. Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Киев, Издательство "Сталь", 2002. – 600 с.
58. Подшивалов С. Ф. Исследование деформационных свойств металлического сетеполотна / С. Ф. Подшивалов, С. В. Пономарев, Ю. Н. Сидоренко, В. И. Халиманович. // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады конференции. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 2002. – С. 178–180
59. Пономарев С. В. Моделирование процесса настройки крупногабаритного рефлектора космического аппарата в наземных условиях / С. В. Пономарев, В. А. Солоненко, А. А. Ящук // Изв. вузов. Физика. – 2007. – Т. 50, 9/2. – С. 265–268.
60. Попов В. И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. – 2-е изд., перераб. и доп. / В. И. Попов – М. : Машиностроение, 1986. – 184 с.
61. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.

62. Смердов А. А. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно космических конструкций / А. А. Смердов, И. А. Буянов, И. В. Чуднов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2012. – № 8. – С. 70–77
63. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
64. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Издательство "Наука", 1966. – 724 с.
65. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М : Мир, 1988. – 352 с.
66. Халиманович В. И. Современные проблемы разработок трансформируемых космических конструкций // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Сборник материалов конференции. – Томск: Томский государственный университет. – 2008. – С. 24–26.
67. Хеджпет Д. М. Влияние технологических допусков на точность форм поверхностей больших антенных конструкций // Ракетная техника и космонавтика. – 1982. – Т. 20, №6. – С. 74–81.
68. Хеджпет Д. М. Потенциальные возможности по точности изготовления больших космических рефлекторов с неуправляемой формой конструкции. // Аэрокосмическая техника. – 1983. – Т. 1, №6, С. 127–136.
69. Чен Дж. Ч. Динамика больших космических конструкций с управляемой жесткостью // Аэрокосмическая техника. – 1985. – Т. 3, № 6. – С. 37–43.
70. Эшли Х. О механизмах пассивного демпфирования больших космических конструкций // Аэрокосмическая техника. – 1985. – Т. 3, № 6. – С. 18–28.

71. Ящук А. А. Моделирование, алгоритмы и комплекс программ прогнозирования термомеханического поведения крупногабаритного зонтичного рефлектора : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. А. Ящук. – Томск, ТГУ. – 2005. – 125 с.
72. Angeletti P. Satellite antennas for broadband mobile communications mission / P. Angeletti, M. Lisi, G. Lucchi // 21st AIAA International Communications Satellite Systems Conference and Exhibit, Yokohama, Japan, 15–19 April, 2003. AIAA Paper Number 2003-2222
73. Astromesh<sup>TM</sup> Deployable Reflector / Northrop Grumman. – URL : <http://www.northropgrumman.com/BusinessVentures/AstroAerospace/Products/Documents/pageDocs/DS-409-AstroMeshReflector.pdf>
74. Atlas Centaur SLV-3C / Encyclopedia Astronautica. – URL : <http://www.astronautix.com/lvs/atlslv3c.htm>
75. Bathe K. J. Finite element procedures / K. J. Bathe. – Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1996. – 1050 с.
76. Belvin W. K. 15 meter hoop-column antenna dynamics: test and analysis / W. K. Belvin, H. H. Edighoffer // First NASA/DOD Control/Structures Interaction Technology Conference, Norfolk, Virginia, November 18-21, 1986.
77. Belvin, W. K. Quasistatic shape adjustment of a 15-meter-diameter space antenna / W. K. Belvin, H. H. Edighoffer, C. L. Herstrom // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1989. – Vol. 26, №. 3. – P. 129–136.
78. Boning P. Coordinated control of space robot teams for the on-orbit construction of large flexible space structures / P. Boning, S. Dubowsky // Advanced Robotics. – 2010. – 24(3). – P. 303–323
79. Chodimella<sup>1</sup> S. P. Design evaluation of a large aperture deployable antenna / S. P. Chodimella<sup>1</sup>, J. D. Moore, J. Otto // 47<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Newport, Rhode Island, 1–4 May, 2006. AIAA Paper Number 2006-1603
80. Choon-Foo S. System dynamic simulation of precision segmented reflector / S. Choon-Foo, M. C. Lou // 4<sup>th</sup> NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, Williamsburg, Virginia, 11–13 July, 1990.

81. Datashvili L. High precision large deployable space reflector based on pillow-effect-free technology / L. Datashvili, H. Baier, J. Schimitschek, M. Lang, M. Huber // 48<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Honolulu, Hawaii, 23–26 April 2007. AIAA Paper Number 2007-2186
82. Edberg D. L. Material damping of simple structures in a simulated space environment // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1986. – Vol 23, № 3. P. 288–296.
83. Fager J. A. Large space erectable antenna stiffness requirements // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1980. – Vol. 17, № 2. – P. 86–92.
84. Freeland R. E. Deployable antenna structures technologies / R. E. Freeland, R. G. Helms // Large Space Apertures Workshop – California Institute of Technology, Pasadena, California, November 10-11, 2008. – URL : <http://kiss.caltech.edu/workshops/apertures2008/talks/freeland.pdf>
85. Frisch H. P. Thermally induced vibrations of long thin-walled cylinders of open section // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1970. – Vol. 7, № 8. – P. 879–905.
86. Frisch H. P. Thermally induced response of flexible structures: a method for analysis // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1980. – Vol. 3, № 1. P. 92–94.
87. Gaspar J. L. Structural test and analysis of a hybrid inflatable antenna / J. L. Gaspar, T. Mann, T. Sreekantamurthy, V. Behun // 42<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Honolulu, Hawaii, 23-26 May, 2007. AIAA Paper Number 2007-1832
88. Givoli D. Thermoelastic analysis of space structures in periodic motion / D. Givoli, O. Rand // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1991. – Vol. 28, № 4. – P. 457–446.

89. Gunter's space page: Garuda 1, 2 (ACeS 1, 2). – URL :  
[http://space.skyrocket.de/doc\\_sdat/garuda-1.htm](http://space.skyrocket.de/doc_sdat/garuda-1.htm)
90. Gunter's space page: EuropaSat. – URL : [http://space.skyrocket.de/doc\\_sdat/europasat.htm](http://space.skyrocket.de/doc_sdat/europasat.htm)
91. Hedgepeth J. M. Critical requirements for the design of large space structures / J. M. Hedgepeth. – NASA CR–3484, 1981.
92. Hedgepeth, J. M. Support structures for large infrared telescopes / J. M. Hedgepeth. – NASA CR–3800, 1984.
93. Hedgepeth J. M. Structures for remotely deployable precision antennas / NASA CR–182065, 1989.
94. Hunt D. Dynamic analysis of structures with friction forces at sliding junctures / D. Hunt, W. Adamst, T. Bock // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1984. – Vol 21, № 2. – P. 175–179.
95. Im E. Prospects of large deployable reflector antennas for a new generation of geostationary doppler weather radar satellites/ E. Im, M. Thomson, Houfei Fang // *AIAA SPACE 2007 Conference & Exposition*, Long Beach, California, 18-20 September, 2007. AIAA Paper Number 2007-9917
96. Imbriale W. Spaceborne Antennas for Planetary Exploration / W. Imbriale – NJ.: John Wiley and Sons, 2006. – 592 p.
97. Jian-Feng Shi Control law for active structural damping using a control moment gyro / Jian-Feng Shi, C. J. Damaren // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2005. – Vol 28, № 3. – P. 550–553.
98. Johnston J. D. Thermal response of radiantly heated spinning spacecraft booms / J. D. Johnston, E. A. Thornton // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. – 1996. – Vol. 10, № 1. – P. 60–68.
99. Johnston J. D. Thermally induced attitude dynamics of a spacecraft with a flexible appendage / J. D. Johnston, E. A. Thornton // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1998. – Vol. 21, № 4. – P. 581–587.

100. Johnston J. D. Thermally induced dynamics of satellite solar panels / J. D. Johnston, E. A. Thornton // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2000 – Vol. 37, № 5. – P. 604–613.
101. Jones T.C. Finite element modeling and analysis of large pretensioned space structures / T. C. Jones, H. Bart-Smith, M. Mikulas, J. Watson // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2007. – Vol. 44, № 1. – P. 183–193.
102. Kalyanasundaram S. Effect of degradation of material properties on the dynamic response of large space structures / S. Kalyanasundaram, J. D. Lutz, W. E. Haisler, D. H. Allen // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1986. – Vol. 23, № 3. – P. 297–302.
103. Kammer D. C. Development of test-analysis models for large space structures using substructure representations / D. C. Kammer, C. C. Flanigan // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1991. – Vol. 28, № 2. – P. 244–250.
104. Komatsu K. Experimental modal analysis for dynamic models of spacecraft / K. Komatsu, S. Masaaki, T Kai // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1991. – Vol. 14, № 3. – P. 686–688.
105. Lai C.Y. Shape and stress analysis of symmetric CRTS reflectors / C. Y. Lai, Z. You, S. Pellegrino. – Technical Report CUED/D-STRUCT/TR170 Department of Engineering, University of Cambridge, 15 December, 1997.
106. Lai C.Y. Shape and stress analysis of offset CRTS reflectors / C. Y. Lai, S. Pellegrino. – Technical Report CUED/D-STRUCT/TR177 Department of Engineering, University of Cambridge, 11 January, 1999.
107. Lai C.Y. Feasibility study of a deployable mesh reflector / C. Y. Lai, S. Pellegrino. – Technical Report CUED/D-STRUCT/TR186, Department of Engineering, University of Cambridge, 17 September, 2000.
108. Lai C.Y. Non-linear finite element analysis of CRTS reflectors / C. Y. Lai, S. Pellegrino. – Technical Report CUED/D-STRUCT/TR192 Department of Engineering, University of Cambridge, 16 March, 2001.

109. Lai, C.Y. Umbrella-type furlable reflector based on tension-truss concept / C. Y. Lai, S. Pellegrino // 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 16-19 April 2001, Seattle WA. AIAA Paper Number 2001-1481.
110. Lake M. S. Space structures on the back of an envelop: Jon Hedgepeth's approach to design / M. S. Lake, L. D. Peterson, M. M. Mikulas // 44<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Norfolk, Virginia, 7-10 April 2003. AIAA Paper Number 2003-1448
111. Landis G. A. Photovoltaic power for future NASA mission / G. A. Landis, S. G. Bailey // 40<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, Nevada, 14-17 January 2002. AIAA Paper Number 2002-0718
112. Ley W. Handbook of space technology / W. Ley, K. Wittmann, W. Hallmann. – John Wiley & Sons, Ltd, 2009. – 906 p.
113. Lin Tze Tan Stiffness design of spring back reflectors / Lin Tze Tan, S. Pellegrino // 43<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Denver, CO, 22-25 April 2002. AIAA Paper Number 2002-1498
114. Lin Tze Tan Ultra thin deployable reflector antennas / Lin Tze Tan, S. Pellegrino // 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 19-22 April 2004, Palm Springs, CA. AIAA Paper Number 2004-1730
115. Lin Tze Tan Design & manufacture of stiffened spring-back reflector demonstrator / Lin Tze Tan, Omer Soykasap, S. Pellegrino // 46<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Material Conference, Austin, Texas, 18-21 April, 2005. AIAA Paper Number 2005-2048
116. Lin J. Shape memory rigidizable inflatable (RI) structures for large space systems applications / J. Lin, C. F. Knoll, C. E. Willey // 47<sup>th</sup> AIAA/ASME /ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Newport, Rhode Island, 1-4 May 2006. AIAA Paper Number 2006-1896

117. Lutz J. D. Finite-element model for thermoelastic analysis of large composite space structures / J. D. Lutz, D. H. Allen, W. E. Haisler // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1987. – Vol. 24, № 5. – P. 430–436.
118. Mahaney J. Self-shadowing effect on the thermal-structural response of orbiting trusses / J. Mahaney, E. A. Thornton // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1987. – Vol. 24, № 4. – P. 342–348.
119. Meguro A. Key technologies for high-accuracy large mesh antenna reflector / A. Meguro, S. Harada, M. Watanabe // *Acta Astronautica*. – 2003. – № 53. – P. 899–908.
120. Mikulas M. M. Structural stiffness, strength and dynamic characteristics of large tetrahedral space truss structures / M. M. Mikulas, H. G. Bush, M. F. Card. – NASA TM-X-74001, 1977.
121. Mikulas M.M. Structural efficiency of long lightly loaded truss and isogrid columns for space applications / M. M. Mikulas. – NASA TM-78687, 1978.
122. Mikulas M. M. Preliminary design approach for large high precision segmented reflectors / M. M. Mikulas, T. J. Collins, J. M. Hedgepeth. – NASA TM-102605, 1990.
123. Mikulas M. M. Preliminary design considerations for 10-40 meter-diameter precision truss reflectors / M. M. Mikulas, T. J. Collins, J. M. Hedgepeth // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1991. – Vol. 28, № 4. – P. 439-447.
124. Mitsugi J. Shape control of the tension truss antenna / J. Mitsugi, T. Yasaka, K. Miura // *AIAA Journal*. – 1990. – Vol. 28, № 2. – P. 316–322.
125. Nassehpur S. New concepts in large deployable parabolic reflectors / S. Nassehpur, A. Kwan // 6<sup>th</sup> AECEF Symposium in Vilnius, Lithuania, 28–30 May, 2008.
126. Nayfeh A. H. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structure / A. H. Nayfeh, M. S. Hefzy // *AIAA Journal*. – 1978. – Vol. 16, № 8. – P. 779–788.

127. Nayfeh A. H. Continuum modeling of the mechanical and thermal behavior of discrete large structures / A. H. Nayfeh, M. S. Hefzy // *AIAA Journal*. – 1981. – Vol. 19, № 6. – P. 766–773.
128. Noor A. K. Continuum models for beam- and platelike lattice structures / A. K. Noor, M. S. Anderson, W. H. Greene // *AIAA Journal*. – 1978. – Vol. 16, № 12. – P. 1219–1228.
129. Nurre G. S. Dynamics and control of large space structures / G. S. Nurre, R. S. Ryan, H. N. Scofield, J. L. Sims // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1984. – Vol. 7, № 5. – P. 514–526.
130. Pellegrino S. Membrane structures research at Cambridge University // University of Cambridge. – URL : <http://www.ulb.ac.be/scmero/documents/Research/optic/S.%20Pellegrino%2019%20April%2007.pdf>
131. Preumont A. Active damping of structures with guy cables / A. Preumont, Y. Achkire // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 1997. – Vol 20, № 2. – P. 320–326.
132. Preumont A. Active damping by a local force feedback with piezoelectric actuators / A. Preumont, J. P. Dufour, C. Malekianj // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 1992. – Vol. 15, № 2. – P. 390–395.
133. Qinglei Hu Adaptive variable structure and commanding shaped vibration control of flexible spacecraft / Qinglei Hu, Peng Shi // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2007. – Vol. 30, № 3. – P. 804–815.
134. Robinson S.A. Simplified spacecraft antenna reflector for stowage in confined envelopes. European Patent Application EP0534110A1, 1992.
135. Sakamoto H. Active vibration suppression strategy for a membrane reflector/mirror undergoing slewing maneuvers / H. Sakamoto, K. C. Park // 47<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Newport, Rhode Island, 1–4 May 2006. AIAA Paper Number 2006-1978

136. Shih C.F. Vibration of a large space beam under gravity effect / C. F. Shih, J. C. Chen, J. A. Garba // AIAA Journal. – 1986. Vol. 24, № 7. – P. 1213–1216.
137. Solar System Exploration: Pioneer 10 / National Aeronautics and Space Administration. – URL : <http://solarsystem.nasa.gov/missions/profile.cfm?Sort=Alpha&Alias=Pioneer%2010&Letter=P&Display=ReadMore>
138. Solar System Exploration: Pioneer 10 Construction / National Aeronautics and Space Administration. – URL : [http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?IM\\_ID=1586](http://solarsystem.nasa.gov/multimedia/display.cfm?IM_ID=1586)
139. Spartan 207 / Inflatable Antenna Experiment – Preliminary Mission Report Flown on STS-77. Code 740.1, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, February 14, 1997, 11p.
140. Thornton E.A. Finite-element thermal-structural analyses of a cable-stiffened orbiting antenna / E. A. Thornton, P. Dechaumphai, A. K. Pandey // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1986. – Vol. 23, № 6. – P. 620–624.
141. Thomson M. W. The AstroMesh deployable reflector // 6<sup>th</sup> International Mobile Satellite Conference, Ottawa, June 1999. P. 230–233.
142. Thomson M.W. Astromesh™ deployable reflectors for KU- and KA-band commercial satellites // AIAA Paper Number 2002-2032.
143. Thomson M.W. Mechanical vs. inflatable deployable structures for large apertures or still no simple answers // Large Space Apertures Workshop, California Institute of Technology, Pasadena, California, November 10-11, 2008. – URL : <http://www.kiss.caltech.edu/workshops/apertures2008/talks/thomson.pdf>
144. Thornton E. A. Thermal-structural analysis of large space structure: an assessment of recent advances / E. A. Thornton, D. B. Paul // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1985. – Vol. 22, № 4. – P. 385–393.
145. Thornton E. A. Thermally induced bending vibrations of a flexible rolled-up solar array / E. A. Thornton, Y. A. Kim // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1993. – Vol. 30, № 4. – P. 438–448.

146. Thornton E. A. Thermally induced vibrations of a self-shadowed split-blanket solar array / E. A. Thornton, G. P. Chini, D. W. Gulick // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1995. – Vol. 32, № 2. – P. 302–311.
147. Tibbalds B. Inextensional packaging of thin shell slit reflectors / B. Tibbalds, S. D. Guest, S. Pellegrino // *Technische Mechanik*. – 2004. – 24(3-4). – P. 211–220.
148. Tibert G. Deployable tensegrity structures for space applications. Doctoral thesis / G. Tibert. – Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, Stockholm, Sweden – 2002. – 220 p.
149. Tsuchiya K. Dynamics of a spacecraft during extension of flexible appendages // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 1983. – Vol. 6, No. 2. – P. 100–103.
150. Tuanjie Li Deployment analysis and control of deployable space antenna // *Aerospace Science and Technology*. – 2012. – № 18. – P. 42–47.
151. Yarlagadda S. Fiber contribution to modal damping of polymer matrix composite panels / S. Yarlagadda, G. Lesieutre // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1995. – Vol. 32, № 5. – P. 825–831.
152. Yoshida T. Dynamic characteristic formulations for jointed space structures // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 2006. Vol. 43, № 4. – P. 771–779.
153. Yueyu Wang On shock environment of solar arrays of chinese lunar probing satellite in the stage of phasing orbit / Yueyu Wang, Yaonan Gao, Yong Li // Paper IAC-05-C2.2.10, presented at the 56<sup>th</sup> International Astronautical Congress / The World Space congress-2005, Fukuoka Japan, 17-21 October 2005.
154. Zimbelman D.F. Optimal temperature estimation for modeling the thermal elastic shock disturbance torque / D. F. Zimbelman, R. V. Welch, G. H. Born // *Journal of Spacecraft and Rockets*. – 1991. – Vol. 28, № 4. – P. 448–456.