

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
"Томский государственный педагогический университет"

На правах рукописи



Мерзликин Борис Сергеевич

**ДВУХПЕТЛЕВОЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ  
ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В ТРЕХМЕРНЫХ ПОЛЕВЫХ  
ТЕОРИЯХ С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ**

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Бухбиндер И.Л

Томск – 2014

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Тепловые ядра пропагаторов в <math>\mathcal{N} = 2</math>, <math>d = 3</math> суперпространстве</b>	<b>13</b>
1.1 $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространство . . . . .	13
1.2 Калибровочная теория в $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространстве . . . . .	14
1.3 Пропагатор параллельного переноса в $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространстве . . . . .	16
1.4 Функция Грина вещественного суперполя и ее тепловое ядро . . . . .	20
1.5 Функция Грина $G_+(z, z')$ и ее тепловое ядро . . . . .	22
1.6 Функция Грина $G_{+-}(z, z')$ и ее тепловое ядро . . . . .	24
1.7 Тепловые ядра $K_+(z, z' s)$ и $K_{+-}(z, z' s)$ при совпадающих грасмановых переменных . . . . .	27
<b>2 Низкоэнергетическое эффективное действие в трехмерной <math>\mathcal{N} = 2</math> и <math>\mathcal{N} = 4</math> суперсимметричной электродинамике</b>	<b>31</b>
2.1 Предварительные замечания . . . . .	31
2.2 Классическое действие $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной электродинамики и метод фонового поля . . . . .	32
2.3 Петлевое разложение и общая структура эффективного действия . . . . .	34
2.4 Двухпетлевое эффективное действие в модели $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной электродинамики . . . . .	36
2.5 Двухпетлевые вклады в метрику пространства модулей . . . . .	40
2.6 Классическое действие и структура двухпетлевого эффективного действия $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной электродинамики . . . . .	44
2.7 Двухпетлевое эффективное действие в модели $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной электродинамики . . . . .	46
<b>3 Ведущие двухпетлевые вклады в эффективное действие трехмерной электродинамики Черна-Саймонса</b>	<b>49</b>
3.1 Предварительные замечания . . . . .	49
3.2 Классическое действие и структура эффективного действия . . . . .	50
3.3 Двухпетлевое эффективное действие . . . . .	52

3.3.1	Независимость двухпетлевого эффективного действия от параметра фиксации калибровки . . . . .	53
3.3.2	Двухпетлевая диаграмма типа А . . . . .	54
3.3.3	Двухпетлевая диаграмма типа В . . . . .	58
3.3.4	Результаты двухпетлевых вычислений . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Двухпетлевые эффективные потенциалы в общей модели <math>\mathcal{N} = 2, d = 3</math> кирального суперполя</b>	<b>61</b>
4.1	Предварительные замечания . . . . .	61
4.2	Эффективный кэлеров потенциал . . . . .	62
4.2.1	Однопетлевые вклады . . . . .	62
4.2.2	Двухпетлевые вклады . . . . .	65
4.2.3	Вычисление двухпетлевого эффективного кэлерова потенциала . . . . .	67
4.3	Эффективный киральный потенциал . . . . .	71
4.3.1	Общие свойства . . . . .	71
4.3.2	Анализ возможных фейнмановских диаграмм, дающих вклад в киральный эффективный потенциал . . . . .	72
4.3.3	Детали двухпетлевых вычислений эффективного кирального потенциала . . . . .	80
4.3.4	Импульсные интегралы . . . . .	86
4.3.5	Результаты вычислений двухпетлевого эффективного кирального потенциала . . . . .	90
4.4	Эффективный потенциал в трехмерной модели Весса-Зумино . . . . .	91
	<b>Заключение</b>	<b>93</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>95</b>

## Введение

Исследования в области суперсимметричной теории поля играют важную роль в современной теоретической физике высоких энергий (см. напр. монографии [1, 2]). Суперсимметрия в теории поля представляет собой расширение группы Пуанкаре, обеспечивающее объединение бозонов и фермионов (см. монографии [1–3]). Такие нетривиальные расширения группы пространственно-временных преобразований были предложены в пионерских работах Гольфанда и Лихтмана [4], а также Волкова и Акулова [5] и получили дальнейшее развитие в работах многих авторов. В частности, хорошо известно суперсимметричное обобщение Стандартной Модели (см., напр., [6]), в рамках которого устраняются некоторые недостатки обычной Стандартной Модели (см., напр., [7–11]), такие как проблема иерархии, проблема времени жизни протона и проблема строгого пересечения бегущих констант связи. Хотя проявлений суперсимметрии в экспериментах пока не удалось обнаружить, экспериментальные исследования суперсимметрии в физике элементарных частиц содержатся в плане работ на Большом Адронном Коллайдере (см., напр., работы [12–18]).

Проблема унификации фундаментальных взаимодействий, включая описание гравитации на квантовом уровне, определяет центральное направление развития теоретической физики высоких энергий. В настоящее время объединение квантовой механики с гравитацией наиболее элегантно и последовательно реализовано в рамках теории суперструн (см., напр., монографию [19] и обзоры [20, 21]). Примечательно, что суперсимметрия в этой модели является неотъемлемым элементом и необходима для ее внутренней согласованности.

Современное развитие теории струн приводит к так называемой М-теории [22], которая, в принципе, должна объединять различные известные струнные модели. В настоящее время нет последовательной однозначной формулировки этой теории, но известно, что в низкоэнергетическом пределе она описывается одиннадцатимерной супергравитацией [23]. Одиннадцатимерная супергравитация допускает два вида BPS-решений [23], сохраняющих половину суперсимметрий теории, а именно, M2 и M5 браны. Оба этих решения являются такими же фундаментальными объектами в М-теории, как и элементарные

частицы в теории поля или струны в теории струн. Поэтому, М-теорию можно понимать как модель, описывающую динамику взаимодействующих М2 и М5 бран. Построение такой теории является открытой актуальной задачей в теоретической физике высоких энергий.

Напомним, что М2-брана — это некоторая мембрана в одиннадцатимерном пространстве, мировой объем которой можно интерпретировать как трехмерное пространство Минковского. Следовательно, в статической калибровке, М2 брана может описываться трехмерной квантовой теорией поля, содержащей восемь скалярных и восемь спиновых степеней свободы на массовой оболочке, причем, взаимодействие этих полей должно иметь специальный вид, такой, чтобы модель обладала максимальной суперсимметрией, т.е.,  $\mathcal{N} = 8$  суперсимметрией. Как объясняется в известной работе Дж. Шварца [24], взаимодействие между разными М2 бранами в данной формулировке может описываться полями вида Черна-Саймонса, а не Янга-Миллса, поскольку добавление последних нарушило бы баланс бозонных и фермионных степеней свободы. Лагранжиан такой трехмерной модели квантовой теории поля вида Черна-Саймонса с полями материи, обладающий  $\mathcal{N} = 8$  суперсимметрией был построен около пяти лет назад в работах Баггера и Ламберта [25–28], а также Густавссона [29, 30]. Такую теорию в настоящее время принято называть моделью Баггера-Ламберта-Густавссона, сокращенно БЛГ.

Уникальной особенностью модели БЛГ является использование новой математической конструкции, известной как 3-алгебра, в качестве алгебры калибровочной симметрии теории. Такая 3-алгебра является частным случаем  $n$ -алгебры Филиппова [31]. Она является в некотором смысле обобщением обычной алгебры Ли, в которой операция умножения определяется скобкой, вовлекающей три, а не два элемента пространства. Это послужило толчком для исследований математических аспектов данной конструкции, см., напр., [32–34]. Однако было замечено [35], что, применительно к модели взаимодействующих М2-бран, такая алгебраическая конструкция не является необходимой, и она может быть выражена в одном из частных случаев через обычную алгебру Ли, соответствующую калибровочной группе  $SU(2) \times SU(2)$ . Следовательно, модель БЛГ описывает низкоэнергетические степени свободы двух М2 бран.

Важным достижением теории струн последних пятнадцати лет являет-

ся открытие соответствия между суперсимметричной конформной теорией поля и теорией суперструн для случая специальной фоновой геометрии [36–38]. Первым и наиболее изученным примером является соответствие десятимерной IIВ-теории замкнутых суперструн, имеющей фоновую геометрию  $AdS_5 \times S^5$ , и четырехмерной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга-Миллса с калибровочной группой  $SU(N)$ .  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричная теория Янга-Миллса представляет собой (супер) конформную теорию поля, в которой отсутствуют ультрафиолетовые расходимости, что делает эту теорию весьма удобной для изучения. Подразумевается также, что калибровочная теория "живет" в плоском четырехмерном пространстве-времени, которое является границей пятимерного пространства анти-де Ситтера. Эта связь калибровочной теории с теорией суперструн получила название АдС/КТП соответствие (см., напр., [39, 40]).

Хорошо известно, что АдС/КТП соответствие применимо для суперконформных калибровочных моделей теории поля в пределе, когда ранг калибровочной группы стремится к бесконечности (см. обзоры [39–41]). Поэтому, для исследования аспектов АдС<sub>4</sub>/КТП<sub>3</sub> соответствия требовалось обобщение модели БЛГ на случай калибровочной группы произвольного ранга. Такое обобщение было построено в работе Аарони, Бергмана, Жафериса и Малдасены (АБЖМ) [42] ценой снижения суперсимметрии до  $\mathcal{N} = 6$ . С точки зрения теории поля, данная модель представляет собой модель Черна-Саймонса с калибровочной группой  $SU(n) \times SU(n)$ , которая содержит также необходимое число скалярных и спинорных полей в бифундаментальном представлении калибровочной группы. Взаимодействие имеет специальный вид, при котором достигается  $\mathcal{N} = 6$  суперсимметрия. В рамках АдС/КТП соответствия данная модель дуальна IIА суперструне на фоне геометрии  $AdS_4 \times CP^3$ . Построение именно этой модели открыло широкие возможности для исследования различных аспектов АдС<sub>4</sub>/КТП<sub>3</sub> соответствия (см. [43] в качестве обзора). В частности, корреляционные функции составных операторов в АБЖМ модели, отвечающих сохраняющимся величинам IIА суперструны изучались в работах [44–48], а основные свойства амплитуд рассеяния были исследованы в [49–52].

Изучение структуры низкоэнергетического эффективного действия в моделях типа АБЖМ и БЛГ сталкивается с рядом трудностей. Одна из основ-

ных проблем в определении эффективного действия в теории АБЖМ связана с разделением тяжелых и легких степеней свободы в окрестности вакуума скалярных полей. В самом деле, было показано [53–58], что механизм Хиггса для таких моделей отличается от стандартного, широко применяемого в моделях суперполей Янга-Миллса, взаимодействующих с полями материи. В результате, сама по себе задача об эффективном действии для легких полей в моделях АБЖМ и БЛГ требует переосмысления. Однако важность изучения такого низкоэнергетического эффективного действия была особенно подчеркнута в недавней работе Шварца [59], в которой обсуждалась связь эффективного действия для АБЖМ модели с динамикой M2 бран. Это требует разработки специальных методов вычисления квантовых поправок к низкоэнергетическим эффективным действиям в различных суперсимметричных трехмерных калибровочных теориях.

Изучение низкоэнергетической квантовой динамики представляет собой одну из центральных задач квантовой теории поля. Основным объектом, в терминах которого формулируется рассматриваемая проблема, является эффективное действие. Важность изучения эффективной динамики в трехмерных теориях с расширенной суперсимметрией уже отмечалась выше [59]. Метод фонового поля представляет [1] собой основной способ изучения эффективного действия. В рамках этого подхода удастся в ряде случаев получить низкоэнергетическое эффективное действие в виде суммы классического действия и квантовых поправок к нему. Изучение петлевых квантовых поправок удобно проводить с помощью метода собственного времени Швингера-ДеВитта [60] или его обобщения [61–63]. Использование описанных выше методов обеспечивает калибровочную инвариантность полученного эффективного действия на каждом этапе вычислений. В суперсимметричных теориях подход суперпространства [1, 2] позволяет сформулировать теорию в терминах суперполей, что обеспечивает явную суперсимметрию в квантовых вычислениях, и, наряду с методом фонового поля, является основным методом изучения низкоэнергетического эффективного действия.

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке методов многопетлевых квантовых вычислений в  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространстве и их применению для исследования структуры низкоэнергетических эффективных действий различных трехмерных моделей теории поля с расширенной

суперсимметрией. В частности, рассматриваются модели трехмерной электродинамики с  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметрией, трехмерные абелевы модели суперполя Черна-Саймонса с материей, обладающие  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрией, а также общая модель кирального  $\mathcal{N} = 2$  суперполя без калибровочных полей. Полученные двухпетлевые квантовые вклады в низкоэнергетические эффективные действия этих теорий не имеют непосредственного применения к моделям типа БЛГ и АБЖМ, но представляют широкий интерес сами по себе, в свете современных исследований свойств суперсимметричных моделей теории поля. Далее, обсудим основные особенности этих моделей.

Трехмерные  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричные модели теории поля Янга-Миллса и Черна-Саймонса обладают рядом замечательных свойств в классической и квантовой областях, такими как зеркальная симметрия [64–69] и дуальности Зайберга [68–74]. Значительная часть информации о квантовой динамике содержится в структуре пространства модулей, которое отражает как пертурбативные, так и непертурбативные эффекты. Пертурбативные квантовые вклады в метрику пространства модулей для трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамики были известны лишь с точностью до первого порядка по постоянной Планка [68, 75]. Однако квантовые поправки от высших петель также представляют интерес и заслуживают детального исследования. Это мотивирует изучение многопетлевых квантовых вкладов в низкоэнергетическое эффективное действие в трехмерных суперсимметричных калибровочных теориях [78–80]. В работе [81] было вычислено двухпетлевое эффективное действие в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамике без топологического слагаемого Черна-Саймонса. Классические действия этих моделей возникают в результате размерной редукции соответствующих четырехмерных  $\mathcal{N} = 1$  и  $\mathcal{N} = 2$  моделей. Двухпетлевое эффективное действие Гейзенберга-Эйлера в четырехмерных суперсимметричных моделях было получено ранее в работах [82, 83] с использованием техники ковариантных пертурбативных многопетлевых вычислений в  $\mathcal{N} = 1$ ,  $d = 4$  суперпространстве [84]. Привлекательная особенность данного метода состоит в его универсальности, общности и возможности явного сохранения суперсимметрии и калибровочной инвариантности на каждом этапе вычисления. В нашей работе [81] рассматривается расширение описанной выше техники на случай трехмерного  $\mathcal{N} = 2$  суперпростран-

ства. В частности, найдены точные выражения для пропагаторов киральных суперполей, зависящих от медленно меняющегося фонового калибровочного суперполя. Полученные выражения для пропагаторов применяются для вычисления двухпетлевого эффективного действия в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамике. Как было показано [81, 85], эффективное действие представляет собой функционал от напряженностей калибровочного суперполя и содержит ряд слагаемых не имеющих аналогов в четырехмерном случае, но играющих важную роль в низкоэнергетической динамике этих моделей.

Опираясь на результаты, полученные в [81], в работе [86] было вычислено двухпетлевое эффективное действие трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной абелевой теории поля Черна-Саймонса, взаимодействующего с материей. Низкоэнергетическое эффективное действие для указанной теории вычислено с точностью до слагаемых четвертой степени по пространственно-временным производным. Стоит отметить, что полученное эффективное действие не зависит от калибровочного параметра [86] и не содержит ультрафиолетовых расходимостей. Разработанные методы и полученные результаты будут полезны при вычислении эффективного действия в моделях типа БЛГ и АБЖМ.

Поля Черна-Саймонса в классическом действии модели АБЖМ делают описание M2 бран очень элегантным, поскольку суперсимметрия, R-симметрии и конформная инвариантность явно прослеживаются [87, 88]. Тем не менее, эти поля могут быть, в принципе, устранены путем фиксации калибровочной симметрии. После того как калибровочная симметрия фиксирована, остается только трехмерная нелинейная суперсимметричная сигма-модель, в которой симметрии M2 бран становятся неявными. Квантовые аспекты такой сигма-модели (в частности, низкоэнергетическое эффективное действие) могут быть исследованы с помощью стандартных методов квантовой теории поля. Учитывая эти мотивации, интерес представляют также исследования низкоэнергетического эффективного действия  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперсимметричных сигма-моделей. Ограничиваясь случаем одного кирального суперполя, было инициировано изучение некоторых аспектов суперполевого квантового эффективного действия в общей трехмерной модели  $\mathcal{N} = 2$  кирального суперполя [89–91]. В общем случае, эффективное действие чрезвычайно слож-

ный нелокальный функционал от фоновых суперполей и для ряда приложений достаточно рассматривать лишь его локальную часть. В работах [89–91] изучалась локальная часть низкоэнергетического эффективного действия в описанной выше модели, которая определяется эффективным кэлеровым и киральный потенциалами.

Эффективные кэлеров и киральный потенциалы для четырехмерных моделей киральных суперполей широко изучались ранее в работах [92–104]. Было показано, что квантовые расходимости появляются лишь в секторе эффективного кэлерова потенциала, а эффективный киральный потенциал конечен. Эти результаты находятся в полном согласии с теоремой о неперенормируемости в четырех измерениях [1, 2], которая также имеет место и для трехмерных моделей. В работе [89], для общей трехмерной модели кирального суперполя было показано, что ультрафиолетовые расходимости появляются только в диаграммах Фейнмана, дающих вклад в эффективный кэлеров потенциал, в то время как эффективный киральный потенциал конечен. Такие конечные квантовые поправки в киральном секторе возникают только в безмассовом случае. Отметим, что эффективный кэлеров потенциал в трехмерной  $\mathcal{N} = 1$  модели скалярного суперполя исследовался в [105–107]. В статье [89] обобщаются некоторые результаты этих работ на случай  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства.

Подводя итог, подчеркнем, что исследование структуры низкоэнергетического эффективного действия различных трехмерных суперсимметричных моделей теории поля с расширенной суперсимметрией является важной актуальной проблемой современной теоретической физики высоких энергий.

### **Целями и задачами работы являются:**

1. Развитие метода ковариантного суперполевого квантования трехмерных  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных калибровочных теорий в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперполей. Получение точных выражений для суперпропагаторов полей материи, зависящих от фонового калибровочного  $\mathcal{N} = 2$  супермультиплета.
2. Исследование структуры низкоэнергетического эффективного действия в трехмерных абелевых калибровочных теориях с  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  расширенной суперсимметрией. Получение петлевых пертурбативных вкладов в метрику пространства модулей трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной

электродинамики.

3. Вычисление двухпетлевого низкоэнергетического действия в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной абелевой калибровочной теории поля Черна-Саймонса, взаимодействующего с суперполями материи.
4. Изучение локальных в суперпространстве вкладов в низкоэнергетическое эффективное действие общей трехмерной модели кирального  $\mathcal{N} = 2$  суперполя.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Глава 1 включает в себя описание трехмерного  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства и характерные особенности калибровочной теории в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве. В этой главе исследуются основные свойства пропагатора параллельного переноса в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве. В виде разложения в ковариантный ряд Тейлора, вычислено действие ковариантных производных на пропагатор параллельного переноса для случая ковариантно-постоянного фонового суперполя. Основным результатом данной главы является точные выражения пропагаторов киральных суперполей [81], зависящих от фонового  $\mathcal{N} = 2$  калибровочного суперполя. Также обсуждается ряд технических деталей, касающихся структуры тепловых ядер для функций Грина суперполей материи в пределе совпадающих суперпространственных точек, которые необходимы для вычисления двухпетлевых квантовых вкладов в эффективное действие.

Глава 2 посвящена выводу двухпетлевого эффективного действия в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамики без слагаемого Черна-Саймонса. Установлено, что двухпетлевые вклады не содержат ультрафиолетовых расходимостей и, в случае  $\mathcal{N} = 2$  электродинамики, включают слагаемые, не имеющие аналогов в четырехмерной случае. На основе полученного эффективного действия для  $\mathcal{N} = 2$  электродинамики вычислена двухпетлевая поправка к метрике пространства модулей данной калибровочной теории [81].

В главе 3, опираясь на результаты предыдущих глав, вычисляется двухпетлевое эффективное действие в абелевой теории поля Черна-Саймонса с материей, с точностью до слагаемых, содержащих четвертую пространственно-временную производную от полей [86]. Обсуждается незави-

симось двухпетлевого эффективного действия от параметра фиксации калибровки. Показано, что двухпетлевое эффективное действие не содержит ультрафиолетовых расходимостей.

Глава 4 посвящена изучению двухпетлевых эффективных кэлерового и кирального потенциалов в трехмерной общей модели  $\mathcal{N} = 2$  кирального суперполя [89–91]. Показано, что, в соответствии с теоремой о неперенормируемости, расходимости возникают только в эффективном кэлеровом потенциале, а эффективный киральный потенциал содержит только конечные квантовые вклады. В частном случае, для модели Весса-Зумино показано, что вычисление кирального эффективного потенциала приводит к конечному сдвигу константы связи в исходном классическом потенциале.

В заключении перечисляются основные результаты работы, выносимые на защиту.

# 1 Тепловые ядра пропагаторов в $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространстве

На протяжении всей работы будем использовать подход  $\mathcal{N} = 2$  суперпространства. Поскольку рассмотрение ведется в трехмерном пространстве-времени, то нет необходимости использования гармонического суперпространства [3]. Различные классические и квантовые аспекты АБЖМ - модели в рамках подхода  $\mathcal{N} = 3$  гармонического суперпространства обсуждались в работах [76, 77].

## 1.1 $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространство

Трехмерное  $\mathcal{N} = 2$  суперпространство [1] параметризуется координатами  $z^A = (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_\alpha)$ ,  $m = 0, 1, 2$ ;  $\alpha = 1, 2$ . Будем следовать обозначениям, принятым в работах [78, 79]. В частности, гамма-матрицы  $(\gamma^0)_\alpha^\beta = -i\sigma_2$ ,  $(\gamma^1)_\alpha^\beta = \sigma_3$ ,  $(\gamma^2)_\alpha^\beta = \sigma_1$  удовлетворяют алгебре Клиффорда вида

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = -2\eta^{mn}, \quad \eta^{mn} = \text{diag}(1, -1, -1), \quad (1.1)$$

и условиям ортогональности и полноты

$$(\gamma^m)_{\alpha\beta}(\gamma^n)^{\alpha\beta} = 2\eta^{mn}, \quad (\gamma^m)_{\alpha\beta}(\gamma^m)^{\rho\sigma} = (\delta_\alpha^\rho\delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma\delta_\beta^\rho). \quad (1.2)$$

Опускание и поднятие спинорных индексов будем осуществлять с помощью  $2 \times 2$  антисимметричного  $\varepsilon$ -тензора, например  $(\gamma_m)_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\sigma}(\gamma_m)^\sigma_\beta$ ,  $\varepsilon_{12} = 1$ .

С использованием гамма-матриц каждый векторный индекс может быть преобразован в пару спинорных индексов по правилам

$$\begin{aligned} x^{\alpha\beta} &= (\gamma_m)^{\alpha\beta} x^m, & x^m &= \frac{1}{2}(\gamma^m)_{\alpha\beta} x^{\alpha\beta}, \\ \partial_{\alpha\beta} &= (\gamma^m)_{\alpha\beta} \partial_m, & \partial_m &= \frac{1}{2}(\gamma_m)^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

С учетом этого, выполняются следующие свойства

$$\partial_m x^n = \delta_m^n, \quad \partial_{\alpha\beta} x^{\rho\sigma} = \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\rho = 2\delta_\alpha^{(\rho} \delta_\beta^{\sigma)}. \quad (1.4)$$

Ковариантные спинорные производные

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\bar{\theta}^\beta \partial_{\alpha\beta}, \quad \bar{D}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} - i\theta^\beta \partial_{\alpha\beta} \quad (1.5)$$

удовлетворяют стандартным антикоммутиационным соотношениям [2]

$$\{D_\alpha, \bar{D}_\beta\} = -2i\partial_{\alpha\beta}. \quad (1.6)$$

Мера интегрирования в полном  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространстве имеет вид:

$$d^7z \equiv d^3x d^4\theta = \frac{1}{16} d^3x D^2 \bar{D}^2, \quad \text{так, что} \quad \int d^3x f(x) = \int d^7z \theta^2 \bar{\theta}^2 f(x), \quad (1.7)$$

для некоторого поля  $f(x)$ . Здесь мы используем следующие соглашения по сокращению записи спинорных индексов

$$D^2 = D^\alpha D_\alpha, \quad \bar{D}^2 = \bar{D}^\alpha \bar{D}_\alpha, \quad \theta^2 = \theta^\alpha \theta_\alpha, \quad \bar{\theta}^2 = \bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}_\alpha. \quad (1.8)$$

Киральное подпространство параметризовано при помощи переменных  $z_+ = (x_+^m, \theta_\alpha)$ , где  $x_\pm^m = x^m \pm i\gamma_{\alpha\beta}^m \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta$ . Мера интегрирования в киральном подпространстве имеет следующий вид  $d^5z \equiv d^3x d^2\theta$ . Она связана с полной суперпространственной мерой (1.7) при помощи соотношения

$$d^7z = -\frac{1}{4} d^5z \bar{D}^2 = -\frac{1}{4} d^5\bar{z} D^2. \quad (1.9)$$

## 1.2 Калибровочная теория в $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространстве

Абелево калибровочное суперполе в  $\mathcal{N} = 2$  суперпространстве может быть введено стандартным геометрическим образом, основанным на добавлении калибровочной связности  $V_A = (V_m, V_\alpha, \bar{V}^\alpha)$  к “плоским” суперпространственным производным (1.5)  $D_A = (\partial_m, D_\alpha, \bar{D}^\alpha)$ ,

$$D_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha = D_\alpha + V_\alpha, \quad \bar{D}_\alpha \rightarrow \bar{\nabla}_\alpha = \bar{D}_\alpha + \bar{V}_\alpha, \quad (1.10)$$

$$\partial_m \rightarrow \nabla_m = \partial_m + V_m. \quad (1.11)$$

Постулируется, что эти калибровочно-ковариантные производные должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениями [108–110],

$$\begin{aligned} \{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_\beta\} &= -2i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \nabla_m + 2i\varepsilon_{\alpha\beta} G, \\ [\nabla_\alpha, \nabla_m] &= -(\gamma_m)_{\alpha\beta} \bar{W}^\beta, \quad [\bar{\nabla}_\alpha, \nabla_m] = (\gamma_m)_{\alpha\beta} W^\beta, \\ [\nabla_m, \nabla_n] &= iF_{mn}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Суперполевые напряженности  $G$ ,  $W_\alpha$ ,  $\bar{W}_\alpha$  и  $F_{mn}$  в этой алгебре удовлетворяют условиям вещественности вида

$$G^* = G, \quad (W^\alpha)^* = \bar{W}^\alpha, \quad (F_{mn})^* = F_{mn}. \quad (1.13)$$

Алгебра (1.12) обладает рядом тождеств Бьянки. В частности, суперполевая напряженность  $G$  представляет собой линейное суперполе

$$D^2 G = \bar{D}^2 G = 0, \quad (1.14)$$

а напряженности  $W_\alpha$  и  $\bar{W}_\alpha$  выражаются через  $G$ ,

$$W_\alpha = \bar{D}_\alpha G, \quad \bar{W}_\alpha = D_\alpha G. \quad (1.15)$$

В силу (1.14) эти напряженности  $W_\alpha$  и  $\bar{W}_\alpha$  являются (анти)киральными,

$$\bar{D}_\alpha W_\beta = 0, \quad D_\alpha \bar{W}_\beta = 0, \quad (1.16)$$

и подчинены стандартному тождеству Бьянки,

$$D^\alpha W_\alpha = \bar{D}^\alpha \bar{W}_\alpha. \quad (1.17)$$

Напряженность  $F_{mn}$  также не является независимой, поскольку она может быть выражена через остальные суперполя [80],

$$F_{mn} = \frac{1}{4} \varepsilon_{mnp} (\gamma^p)^{\alpha\beta} (D_\alpha W_\beta - \bar{D}_\alpha \bar{W}_\beta). \quad (1.18)$$

Имеется также еще одно полезно тождество [80], которое включает пространственно-временную производную от  $G$ ,

$$\partial_m G = \frac{i}{4} \gamma_m^{\alpha\beta} (D_\alpha W_\beta + \bar{D}_\alpha \bar{W}_\beta). \quad (1.19)$$

Алгебра (1.12) инвариантна относительно следующих калибровочных преобразований,

$$\nabla_A \rightarrow e^{i\tau(z)} \nabla_A e^{-i\tau(z)}, \quad \tau^* = \tau, \quad (1.20)$$

где  $\tau(z)$  произвольный вещественный суперполевой параметр.

Введем вещественное калибровочное суперполе,  $V = V^*$ , можно показать [2], что калибровочная связность  $V_A$  выражается через суперполе  $V$  в виде

$$\nabla_\alpha = e^{-2V} D_\alpha e^{2V} = D_\alpha + 2D_\alpha V, \quad \bar{\nabla}_\alpha = \bar{D}_\alpha. \quad (1.21)$$

Алгебра ковариантных производных (1.12) приводит к следующим выражениям для суперполевых напряженностей,

$$G = \frac{i}{2} \bar{D}^\alpha D_\alpha V, \quad W_\alpha = -\frac{i}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V, \quad \bar{W}_\alpha = -\frac{i}{4} D^2 \bar{D}_\alpha V. \quad (1.22)$$

В дальнейшем, при выводе свойств оператора параллельного переноса и при вычислении низкоэнергетического эффективного действия будем использовать следующие ограничения на фоновое калибровочное суперполе:

- (i) фоновое суперполе является решением  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных уравнений Максвелла,

$$D^\alpha W_\alpha = 0, \quad \bar{D}^\alpha \bar{W}_\alpha = 0; \quad (1.23)$$

- (ii) суперполевые напряженности являются константами по отношению к пространственно-временным производным,

$$\partial_m G = 0, \quad \partial_m W_\alpha = 0, \quad \partial_m \bar{W}_\alpha = 0. \quad (1.24)$$

Последнее ограничение означает, что рассматривается медленно меняющееся фоновое калибровочное суперполе.

### 1.3 Пропагатор параллельного переноса в $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ суперпространстве

Хорошо известно, что квантование калибровочных теорий требует фиксации калибровки и, как следствие, все величины, представляющие интерес в квантовой теории поля, вне массовой оболочки оказываются калибровочно зависимыми. Однако эффективное действие может быть сформулировано таким образом, что, будучи калибровочно зависимыми, остается инвариантным относительно классических калибровочных преобразований. Эта формулировка носит название метода фонового поля. Основная идея этого метода состоит в расщеплении калибровочного поля на “фоновое” и “квантовое” и наложения калибровки только на квантовое поле. Такое условие фиксации калибровки обеспечивает инвариантность эффективного действия относительно калибровочных преобразований.

Квантовые петлевые вычисления в рамках метода фонового поля предполагают работу с пропагаторами, зависящими от фонового поля, которые

для произвольного фонового поля не могут быть вычислены в явном виде. Для нахождения низкоэнергетического эффективного действия достаточно представить эти пропагаторы в виде рядов по напряженности поля и ее ковариантных производных. Такие пропагаторы естественно получаются на основе метода собственного времени [?, 60], который позволяет развить явно калибровочно инвариантную процедуру для вычисления однопетлевого эффективного действий. Суперполевой метод собственного времени и его применение для нахождения суперполевого эффективного действий описан, например, в книге [2]. Тем не менее, явно калибровочно инвариантные вычисления многопетлевых вкладов в эффективное действие требуют новых методов по сравнению с однопетлевыми вычислениями. Один из таких методов основан на использовании оператора параллельного переноса. Использование оператора параллельного переноса в квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени было инициировано Де Виттом [60].

Техника многопетлевых квантовых вычислений в  $\mathcal{N} = 1$ ,  $d = 4$  суперпространстве, включающая пропагатор параллельного переноса, была развита в работе [84]. Результативность этого метода была продемонстрирована, в частности, при получении двухпетлевого эффективного действия в четырехмерной  $\mathcal{N} = 1$  и  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамике [82, 83]. Наша цель — расширить эту технику на случай  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперполевых калибровочных теорий. В этом разделе изучаются основные свойства пропагатора параллельного переноса, ассоциированные с алгеброй (1.12). Полученные формулы будут применены в следующем разделе для двухпетлевых квантовых вычислений низкоэнергетического эффективного действия в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамике.

По определению, оператор параллельного переноса  $I(z, z')$  представляет собой двухточечную функцию на суперпространстве, зависящую от калибровочного суперполя, со следующими определяющими свойствами:

- (i) при калибровочных преобразованиях (1.20) он преобразуется по правилу

$$I(z, z') \rightarrow e^{i\tau(z)} I(z, z') e^{-i\tau(z')} ; \quad (1.25)$$

- (ii) удовлетворяет уравнению

$$\zeta^A \nabla_A I(z, z') = \zeta^A (D_A + V_A(z)) I(z, z') = 0 , \quad (1.26)$$

где  $\zeta^A = (\rho^m, \zeta^\alpha, \bar{\zeta}_\alpha) - \mathcal{N} = 2$  суперсимметричный интервал,

$$\begin{aligned}\zeta^\alpha &= (\theta - \theta')^\alpha, & \bar{\zeta}^\alpha &= (\bar{\theta} - \bar{\theta}')^\alpha, \\ \rho^m &= (x - x')^m - i\gamma_{\alpha\beta}^m \zeta^\alpha \bar{\theta}'^\beta + i\gamma_{\alpha\beta}^m \theta'^\alpha \bar{\zeta}^\beta;\end{aligned}\quad (1.27)$$

(iii) при совпадающих аргументах оператор параллельного переноса вырождается в тождественный оператор в калибровочной группе

$$I(z, z) = 1. \quad (1.28)$$

Можно показать, что из (1.25) и (1.28) вытекает тождество

$$I(z, z')I(z', z) = 1. \quad (1.29)$$

Кроме того, для  $I(z, z')$  постулируется правило эрмитова сопряжения

$$(I(z, z'))^\dagger = I(z', z). \quad (1.30)$$

Полезно переписать алгебру калибровочно-ковариантных производных (1.12) в следующей конденсированной форме

$$[\nabla_A, \nabla_B] = \mathbf{T}_{AB}{}^C \nabla_C + i\mathbf{F}_{AB}, \quad (1.31)$$

где  $\mathbf{T}_{AB}{}^C$  – суперкручение и  $\mathbf{F}_{AB}$  – суперкривизна для калибровочной суперполевого связности (1.11). В работе [84] было показано, что, при условии (1.26), действие ковариантной производной  $\nabla_B$  на  $I(z, z')$  может быть выражена через  $\mathbf{T}_{AB}{}^C$ ,  $\mathbf{F}_{AB}$  и их ковариантные производные,

$$\begin{aligned}\nabla_B I(z, z') &= iI(z, z') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[ n\zeta^{A_n} \dots \zeta^{A_1} \nabla'_{A_1} \dots \nabla'_{A_{n-1}} \mathbf{F}_{A_n B}(z') \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)}{2} \zeta^{A_n} \mathbf{T}_{A_n B}{}^C \zeta^{A_{n-1}} \dots \zeta^{A_1} \nabla'_{A_1} \dots \nabla'_{A_{n-2}} \mathbf{F}_{A_{n-1} C}(z') \right].\end{aligned}\quad (1.32)$$

Существует также эквивалентная форма записи этого соотношения, в котором  $I(z, z')$  возникает справа,

$$\begin{aligned}\nabla_B I(z, z') &= i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \left[ -\zeta^{A_n} \dots \zeta^{A_1} \nabla_{A_1} \dots \nabla_{A_{n-1}} \mathbf{F}_{A_n B}(z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)}{2} \zeta^{A_n} \mathbf{T}_{A_n B}{}^C \zeta^{A_{n-1}} \dots \zeta^{A_1} \nabla_{A_1} \dots \nabla_{A_{n-2}} \mathbf{F}_{A_{n-1} C}(z) \right] I(z, z').\end{aligned}\quad (1.33)$$

Напомним, что рассматривается фоновое калибровочное суперполе, удовлетворяющее условиям (1.23) и (1.24). Для такого фона ряды в (1.32) и (1.33) обрываются и мы получаем:

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta I(z, z') &= \left[ -i\bar{\zeta}_\beta G + \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\bar{W}^\alpha - \frac{i}{12}\bar{\zeta}^2 W_\beta + \frac{i}{6}\bar{\zeta}_\beta\zeta^\alpha\bar{W}_\alpha - \frac{i}{3}\bar{\zeta}^\alpha\zeta_\alpha\bar{W}_\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12}\bar{\zeta}^\alpha\rho_{\beta\gamma}\bar{\nabla}_\alpha\bar{W}^\gamma - \frac{1}{12}\bar{\zeta}^\alpha\rho_{\alpha\gamma}\bar{\nabla}^\gamma\bar{W}_\beta - \frac{i}{12}\bar{\zeta}^2\zeta_\beta\bar{\nabla}^\alpha\bar{W}_\alpha \right] I(z, z') \\
&= I(z, z') \left[ -i\bar{\zeta}_\beta G + \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\bar{W}^\alpha - \frac{7i}{12}\bar{\zeta}^2 W_\beta - \frac{5i}{6}\bar{\zeta}_\beta\zeta^\alpha\bar{W}_\alpha \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{3}\bar{\zeta}^\alpha\zeta_\alpha\bar{W}_\beta - \frac{5}{12}\bar{\zeta}^\alpha\rho_{\beta\gamma}\bar{\nabla}_\alpha\bar{W}^\gamma - \frac{1}{12}\bar{\zeta}^\alpha\rho_{\alpha\gamma}\bar{\nabla}^\gamma\bar{W}_\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{3}\bar{\zeta}^2\zeta^\alpha\bar{\nabla}_\beta\bar{W}_\alpha + \frac{i}{12}\bar{\zeta}^2\zeta_\beta\bar{\nabla}^\alpha\bar{W}_\alpha \right], \tag{1.34}
\end{aligned}$$

Аналогично, получаем выражение для действия сопряженной спинорной производной на пропагатор параллельного переноса

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}^\beta I(z, z') &= \left[ -i\zeta^\beta G - \frac{1}{2}\rho_\alpha^\beta W^\alpha + \frac{i}{12}\zeta^2\bar{W}^\beta - \frac{i}{6}\zeta^\beta\bar{\zeta}^\alpha W_\alpha + \frac{i}{3}\zeta^\alpha\bar{\zeta}_\alpha W^\beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12}\zeta_\alpha\rho^{\beta\gamma}\nabla^\alpha W_\gamma - \frac{1}{12}\zeta_\alpha\rho^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma W^\beta - \frac{i}{12}\zeta^2\bar{\zeta}^\beta\nabla^\alpha W_\alpha \right] I(z, z') \\
&= I(z, z') \left[ -i\zeta^\beta G - \frac{1}{2}\rho_\alpha^\beta W^\alpha + \frac{7i}{12}\zeta^2\bar{W}^\beta + \frac{5i}{6}\zeta^\beta\bar{\zeta}^\alpha W_\alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{3}\zeta^\alpha\bar{\zeta}_\alpha W^\beta + \frac{5}{12}\zeta_\alpha\rho^{\beta\gamma}\nabla_\alpha W_\gamma - \frac{1}{12}\zeta_\alpha\rho^{\alpha\gamma}\nabla_\gamma W^\beta \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{3}\zeta^2\bar{\zeta}_\alpha\nabla^\beta W^\alpha + \frac{i}{12}\zeta^2\bar{\zeta}^\beta\nabla^\alpha W_\alpha \right], \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Наконец, действие пространственно-временной ковариантной производной имеет вид

$$\begin{aligned}
\nabla_m I(z, z') &= \left[ \frac{i}{2}\rho^n F_{nm} - \frac{1}{2}(\gamma_m)_{\alpha\beta} \left( \zeta^\alpha\bar{W}^\beta + \bar{\zeta}^\alpha W^\beta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{3}\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\gamma\bar{\nabla}_\gamma\bar{W}^\beta - \frac{1}{3}\bar{\zeta}^\alpha\zeta^\gamma\nabla_\gamma W^\beta \right) \right] I(z, z') \\
&= I(z, z') \left[ \frac{i}{2}\rho^n F_{nm} - (\gamma_m)_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2}\zeta^\alpha\bar{W}^\beta + \frac{1}{2}\bar{\zeta}^\alpha W^\beta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{3}\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\gamma\bar{\nabla}_\gamma\bar{W}^\beta + \frac{1}{3}\bar{\zeta}^\alpha\zeta^\gamma\nabla_\gamma W^\beta \right) \right]. \tag{1.36}
\end{aligned}$$

По сравнению с четырехмерным случаем, выражения (1.34,1.35,1.36)

включают суперполе  $G$ , которое приводит к новым вкладам в эффективное действие, не имеющим четырехмерных аналогов.

#### 1.4 Функция Грина вещественного суперполя и ее тепловое ядро

Существуют три суперполевых обобщения оператора Даламбера, которые возникают в ковариантных суперграфах [78, 79]: (i) даламбериан  $\square_v$ , который действует на пространстве вещественных суперполей; (ii) даламбериан  $\square_+$ , действующий на пространстве киральных полей; и (iii) антикиральный даламбериан  $\square_-$ . Последние два оператора связаны сопряжением, поэтому будем уделять основное внимание операторам  $\square_v$  и  $\square_+$ .

Вещественный суперполевой даламбериан определяется двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned}\square_v &= -\frac{1}{8}\nabla^\alpha\bar{\nabla}^2\nabla_\alpha + \frac{1}{16}\{\nabla^2, \bar{\nabla}^2\} + \frac{i}{2}(\nabla^\alpha W_\alpha) + iW^\alpha\nabla_\alpha \\ &= -\frac{1}{8}\bar{\nabla}^\alpha\nabla^2\bar{\nabla}_\alpha + \frac{1}{16}\{\nabla^2, \bar{\nabla}^2\} - \frac{i}{2}(\bar{\nabla}^\alpha\bar{W}_\alpha) - i\bar{W}^\alpha\bar{\nabla}_\alpha.\end{aligned}\quad (1.37)$$

С использованием перестановочных соотношений (1.12) он может быть представлен в следующей форме,

$$\square_v = \nabla^m\nabla_m + G^2 + iW^\alpha\nabla_\alpha - i\bar{W}^\alpha\bar{\nabla}_\alpha.\quad (1.38)$$

Рассмотрим функцию Грина оператора  $G_v(z, z')$  и соответствующее тепловое ядро  $K_v(z, z'|s)$ ,

$$\begin{aligned}(\square_v + m^2)G_v(z, z') &= -\delta^7(z - z'), \\ G_v(z, z') &= i\int_0^\infty ds K_v(z, z'|s)e^{is(m^2+i\epsilon)},\end{aligned}\quad (1.39)$$

где  $m$  параметр массы и  $\epsilon \rightarrow +0$  задает стандартное граничное условие для пропагатора. В случае, когда фоновое калибровочное суперполе удовлетворяет условиям (1.23, 1.24), точное выражение для  $K_v(z, z'|s)$  было получено в работе [78]

$$K_v(z, z'|s) = \frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} \mathcal{O}(s) e^{isG^2} e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn}\rho^n\rho^m} \zeta^2\bar{\zeta}^2 I(z, z')\quad (1.40)$$

где  $\zeta^2 = \zeta^\alpha\zeta_\alpha$ ,  $\bar{\zeta}^2 = \bar{\zeta}^\alpha\bar{\zeta}_\alpha$  и  $\rho^m$  – компоненты суперсимметричного интервала (1.27). Здесь также использованы следующие обозначения

$$\mathcal{O}(s) = e^{s(\bar{W}^\alpha\bar{\nabla}_\alpha - W^\alpha\nabla_\alpha)},\quad (1.41)$$

$$B^2 = \frac{1}{2}N_\alpha^\beta N_\beta^\alpha, \quad N_{\alpha\beta} = D_{(\alpha}W_{\beta)}, \quad \bar{N}_{\alpha\beta} = \bar{D}_{(\alpha}\bar{W}_{\beta)}. \quad (1.42)$$

Отметим, что пропагатор параллельного переноса  $I(z, z')$  в (1.40) обеспечивает корректное преобразование ядра при калибровочных преобразованиях (1.20). Заметим также, что благодаря (1.19), для случая постоянного фонового суперполя (1.24) объект  $\bar{N}_{\alpha\beta}$  не является независимым и совпадает с  $N_{\alpha\beta}$  с точностью до знака,  $\bar{N}_{\alpha\beta} = -N_{\alpha\beta}$ . Поэтому, в дальнейшем будем использовать только  $N_{\alpha\beta}$ .

Выражение (1.40) содержит оператор  $\mathcal{O}(s)$ , который действует как на суперполя, так и на компоненты суперсимметричного интервала. Необходимо пронести его направо и подействовать им на пропагатор параллельного переноса,

$$K_v(z, z'|s) = \frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \times \\ \times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^n(s) \rho^m(s)} \zeta^2(s) \bar{\zeta}^2(s) I(z, z'|s). \quad (1.43)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$W^\alpha(s) \equiv \mathcal{O}(s)W^\alpha\mathcal{O}(-s) = W^\beta(e^{-sN})_\beta^\alpha, \\ \zeta^\alpha(s) \equiv \mathcal{O}(s)\zeta^\alpha\mathcal{O}(-s) = \zeta^\alpha + W^\beta((e^{-sN} - 1)N^{-1})_\beta^\alpha, \\ \bar{\zeta}^\alpha(s) \equiv \mathcal{O}(s)\bar{\zeta}^\alpha\mathcal{O}(-s) = \bar{\zeta}^\alpha + \bar{W}^\beta((e^{-sN} - 1)N^{-1})_\beta^\alpha, \\ \rho^m(s) \equiv \mathcal{O}(s)\rho^m\mathcal{O}(-s) \\ = \rho^m - i(\gamma^m)^{\alpha\beta} \int_0^s dt (W_\alpha(t)\bar{\zeta}_\beta(t) + \bar{W}_\alpha(t)\zeta_\beta(t)), \quad (1.44)$$

$$I(z, z'|s) \equiv \mathcal{O}(s)I(z, z'). \quad (1.45)$$

С учетом (1.34) и (1.35), выражение для  $I(z, z'|s)$  может быть записано через напряженности калибровочного суперполя и их производных. В самом деле, дифференцируя по собственному времени  $s$ , легко вывести это тождество

$$I(z, z'|s) = \exp \left[ \int_0^s dt \Sigma(z, z'|t) \right] I(z, z'), \quad (1.46)$$

где

$$\Sigma(z, z'|t) = \mathcal{O}(t)\Sigma(z, z')\mathcal{O}(-t). \quad (1.47)$$

Здесь двухточечная функция  $\Sigma(z, z')$  определяется равенством

$$(\bar{W}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha - W^\alpha \nabla_\alpha) I(z, z') = \Sigma(z, z') I(z, z'). \quad (1.48)$$

Применяя (1.34) и (1.35) в уравнении (1.48), можно найти явный вид  $\Sigma(z, z')$ ,

$$\begin{aligned} \Sigma(z, z') = & -i(\bar{W}^\beta \zeta_\beta - W^\beta \bar{\zeta}_\beta)G - \frac{i}{3}\zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta W_\beta \bar{W}_\alpha + \frac{2i}{3}\zeta^\alpha \bar{\zeta}_\alpha W^\beta \bar{W}_\beta \\ & + \frac{i}{12}\zeta^2[\bar{W}^2 - \bar{\zeta}^\alpha \bar{W}_\alpha D^\beta W_\beta] + \frac{i}{12}\bar{\zeta}^2[W^2 + \zeta^\alpha W_\alpha \bar{D}^\beta \bar{W}_\beta] \\ & + \frac{1}{12}(\zeta^\alpha \bar{W}^\beta - \bar{\zeta}^\beta W^\alpha)[\rho_{\alpha\gamma} D^\gamma W_\beta + \rho_{\beta\gamma} \bar{D}^\gamma \bar{W}_\alpha]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Выражение для  $\Sigma(z, z'|s)$  получается из  $\Sigma(z, z')$  с помощью замены всех составляющих функции (1.49) на  $s$ -зависимые величины (1.44).

### 1.5 Функция Грина $G_+(z, z')$ и ее тепловое ядро

Оператор Даламбера, действующий в пространстве (анти)киральных суперполей, имеет вид [78, 79]

$$\begin{aligned} \square_+ &= \nabla^m \nabla_m + G^2 + \frac{i}{2}(\nabla^\alpha W_\alpha) + iW^\alpha \nabla_\alpha, \\ \square_+ \Phi &= \frac{1}{16} \bar{\nabla}^2 \nabla^2 \Phi, \quad \bar{\nabla}_\alpha \Phi = 0, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \square_- &= \nabla^m \nabla_m + G^2 - \frac{i}{2}(\bar{\nabla}^\alpha \bar{W}_\alpha) - i\bar{W}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha, \\ \square_- \bar{\Phi} &= \frac{1}{16} \nabla^2 \bar{\nabla}^2 \bar{\Phi}, \quad \nabla_\alpha \bar{\Phi} = 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Функции Грина этих операторов удовлетворяют уравнениям

$$(\square_+ + m^2)G_+(z, z') = -\delta_+(z, z'), \quad (\square_- + m^2)G_-(z, z') = -\delta_-(z, z'), \quad (1.52)$$

где  $\delta_\pm(z, z')$  – (анти)киральные дельта-функции. Запишем выражение для функций Грина этих операторов через тепловые ядра

$$G_\pm(z, z') = i \int_0^\infty ds K_\pm(z, z'|s) e^{is(m^2 + i\epsilon)}, \quad \epsilon \rightarrow +0. \quad (1.53)$$

Операторы (1.50) и (1.51) сплетаются друг с другом операторами  $\nabla^2$  и  $\bar{\nabla}^2$ :

$$\nabla^2 \square_+ = \square_- \nabla^2, \quad \bar{\nabla}^2 \square_- = \square_+ \bar{\nabla}^2. \quad (1.54)$$

Более того, поскольку фоновое калибровочное суперполе удовлетворяет суперсимметричным уравнениям Максвелла (1.23), эти операторы связаны с оператором  $\square_v$ ,

$$\nabla^2 \square_+ = \nabla^2 \square_v = \square_v \nabla^2, \quad \bar{\nabla}^2 \square_- = \bar{\nabla}^2 \square_v = \square_v \bar{\nabla}^2. \quad (1.55)$$

Как следствие этих тождеств, (анти-)киральные функции Грина могут быть выражены через  $G_v$  в виде

$$G_+(z, z') = -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 G_v(z, z'), \quad G_-(z, z') = -\frac{1}{4}\nabla^2 G_v(z, z'). \quad (1.56)$$

Аналогичные соотношения имеют место для тепловых ядер,

$$K_+(z, z'|s) = -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 K_v(z, z'|s), \quad K_-(z, z'|s) = -\frac{1}{4}\nabla^2 K_v(z, z'|s). \quad (1.57)$$

Чтобы вычислить  $K_+$  следует подействовать на (1.40) ковариантной производной  $\bar{\nabla}^2$ . В силу тождеств (1.55), оператор  $\bar{\nabla}^2$  действует только на произведение  $\bar{\zeta}^2 I(z, z')$ ,

$$K_+(z, z'|s) = \frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} \mathcal{O}(s) e^{isG^2} \times \\ \times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^n \rho^m} \bar{\zeta}^2 \left( -\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 \right) \bar{\zeta}^2 I(z, z'). \quad (1.58)$$

Действие ковариантной производной  $\bar{\nabla}_\alpha$  на  $I(z, z')$  было выведено ранее (1.35). Однако только одно слагаемое из этого выражения остается в разложении в силу очевидного равенства  $\zeta^\alpha \zeta^\beta \zeta^\gamma = 0$  и, в результате, имеем

$$-\frac{1}{4}\bar{\zeta}^2 \bar{\nabla}^2 (\bar{\zeta}^2 I(z, z')) = \zeta^2 e^{-\frac{1}{2}\bar{\zeta}^\alpha \rho_{\alpha\beta} W^\beta} I(z, z'). \quad (1.59)$$

Подставляя (1.59) в (1.58), находим киральное тепловое ядро в следующем виде

$$K_+(z, z'|s) = \frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \mathcal{O}(s) e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^m \rho^n - \frac{1}{2}\bar{\zeta}^\beta \rho_{\beta\gamma} W^\gamma} \bar{\zeta}^2 I(z, z'). \quad (1.60)$$

Используя свойства пропагатора параллельного переноса (1.35), можно проверить, что полученное выражение для  $K_+(z, z'|s)$  кирально по обоим аргументам.

Выражение (1.60) содержит оператор  $\mathcal{O}(s)$  заданный в (1.41). Аналогично, как для теплового ядра  $K_v$ , пронесем этот оператор направо и подействуем на  $I(z, z')$

$$K_+(z, z'|s) = \frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \times \\ \times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^m(s) \rho^n(s) - \frac{1}{2}\bar{\zeta}^\beta(s) \rho_{\beta\gamma}(s) W^\gamma(s)} \bar{\zeta}^2(s) I(z, z'|s) \quad (1.61)$$

Все  $s$ -зависимые объекты были выписаны выше в (1.44) и (1.46).

Вычисление антикирального теплового ядра  $K_-$  проводится по схожей схеме. В результате будем иметь:

$$K_-(z, z'|s) = \frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \times \\ \times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^m(s) \rho^n(s) - \frac{1}{2} \zeta^\beta(s) \rho_{\beta\gamma}(s) \bar{W}^{\gamma}(s) \bar{\zeta}^2} I(z, z'|s). \quad (1.62)$$

Здесь мы использовали уже введенные выше обозначения для  $s$ -зависимых переменных (1.44) и (1.46). Заметим также, что выражения для (анти)киральных тепловых ядер (1.60) и (1.62) очень схожи с аналогичными в четырехмерной суперсимметричной калибровочной теории [82, 84].

## 1.6 Функция Грина $G_{+-}(z, z')$ и ее тепловое ядро

Пусть  $\Phi$  – ковариантно-киральное суперполе  $\bar{\nabla}_\alpha \Phi = 0$ . Функция Грина  $G_+(z, z')$ , рассмотренная в предыдущей части, соответствует пропагатору ковариантно кирального суперполя,

$$i\langle \Phi(z) \Phi(z') \rangle = mG_+(z, z'). \quad (1.63)$$

Необходимо рассмотреть также пропагаторы с различающимися киральностями по суперпространственным аргументам

$$i\langle \Phi(z) \bar{\Phi}(z') \rangle = G_{+-}(z, z'), \quad i\langle \bar{\Phi}(z) \Phi(z') \rangle = G_{-+}(z, z'). \quad (1.64)$$

По определению, эти функции Грина удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{4} \nabla^2 G_{+-}(z, z') + m^2 G_-(z, z') = -\delta_-(z, z'), \\ \frac{1}{4} \bar{\nabla}^2 G_{-+}(z, z') + m^2 G_+(z, z') = -\delta_+(z, z'). \quad (1.65)$$

Рассмотрим также соответствующие тепловые ядра,

$$G_{+-}(z, z') = i \int_0^\infty ds K_{+-}(z, z'|s) e^{is(m^2+i\epsilon)}, \\ G_{-+}(z, z') = i \int_0^\infty ds K_{-+}(z, z'|s) e^{is(m^2+i\epsilon)}. \quad (1.66)$$

Здесь подразумевается, что  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Принимая во внимание определение (анти)киральных даламбертианов (1.50) и (1.51), легко убедиться, что решение уравнений (1.65) может быть выражено через функцию Грина  $G_\pm(z, z')$  в следующем виде

$$G_{+-}(z, z') = \frac{1}{4} \bar{\nabla}^2 G_-(z, z'), \quad G_{-+}(z, z') = \frac{1}{4} \nabla^2 G_+(z, z'), \quad (1.67)$$

здесь  $G_{\pm}(z, z')$  подчинены уравнениям (1.52). Аналогичные соотношения справедливы и для тепловых ядер,

$$K_{+-}(z, z'|s) = \frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 K_-(z, z'|s), \quad K_{-+}(z, z'|s) = \frac{1}{4}\nabla^2 K_+(z, z'|s), \quad (1.68)$$

где  $K_+(z, z'|s)$  и  $K_-(z, z'|s)$  даются выражениями (1.60) и (1.62), соответственно.

В дальнейшем, будем рассматривать только тепловое ядро  $K_{+-}(z, z'|s)$ . Его можно получить из  $K_-(z, z'|s)$  действием на него оператором  $\bar{\nabla}^2$ . В силу тождеств (1.55) этот оператор коммутирует с  $e^{isG^2}\mathcal{O}(s)e^{\frac{i}{4}(F\coth(sF))_{mn}\rho^m\rho^n}$  в (1.60). Поэтому необходимо найти только действие оператора  $\bar{\nabla}^2$  на остальные объекты. Эта процедура включает в себя большое количество дифференцирования компонент суперсимметричного интервала, напряженностей калибровочного суперполя и пропагатора параллельного переноса. Ряд выражений упрощается с учетом тождества (1.35). Результат может быть представлен с помощью функции  $R(z, z')$  в следующем виде

$$-\frac{1}{4}\bar{\nabla}^2 \left( e^{-\frac{1}{2}\zeta^\alpha\rho_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta}\bar{\zeta}^2 I(z, z') \right) = e^{R(z, z')} I(z, z'), \quad (1.69)$$

где введено следующее обозначение

$$\begin{aligned} R(z, z') = & -i\zeta\bar{\zeta}G + \frac{7i}{12}\bar{\zeta}^2\zeta W + \frac{i}{12}\zeta^2\bar{\zeta}\bar{W} - \frac{1}{2}\bar{\zeta}^\alpha\tilde{\rho}_{\alpha\beta}W^\beta - \frac{1}{2}\zeta^\alpha\tilde{\rho}_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta \\ & + \frac{1}{12}\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\beta[\tilde{\rho}_\beta^\gamma D_\alpha W_\gamma - 7\tilde{\rho}_\alpha^\gamma D_\gamma W_\beta]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Здесь  $\tilde{\rho}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^m\tilde{\rho}_m$ , и  $\tilde{\rho}_m$  – обобщение суперсимметричного интервала  $\rho_m$  киральное по первому аргументу и антикиральное по второму

$$\tilde{\rho}^m = \rho^m + i\zeta^\alpha\gamma_{\alpha\beta}^m\bar{\zeta}^\beta, \quad D'_\alpha\tilde{\rho}^m = \bar{D}_\alpha\tilde{\rho}^m = 0. \quad (1.71)$$

Используя введенное обозначение для функции  $R(z, z')$ , получим следующее выражение для теплового ядра  $K_{+-}(z, z'|s)$ ,

$$K_{+-}(z, z'|s) = -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}}\frac{sB}{\sinh(sB)}e^{isG^2}\mathcal{O}(s)e^{\frac{i}{4}(F\coth(sF))_{mn}\tilde{\rho}^m\tilde{\rho}^n+R(z, z')}I(z, z'). \quad (1.72)$$

Пронесем оператор  $\mathcal{O}(s)$  в (1.72) направо и подействуем на  $I(z, z')$ . При этом все объекты становятся зависимыми от  $s$ ,

$$\begin{aligned} K_{+-}(z, z'|s) = & -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}}\frac{sB}{\sinh(sB)}e^{isG^2} \times \\ & \times e^{\frac{i}{4}(F\coth(sF))_{mn}\tilde{\rho}^m(s)\tilde{\rho}^n(s)+R(z, z'|s)+\int_0^s dt\Sigma(t)}I(z, z'), \end{aligned} \quad (1.73)$$

где  $R(z, z'|s) = \mathcal{O}(s)R(z, z')\mathcal{O}(-s)$  и  $\Sigma(t)$  даются выражениями (1.47, 1.49). В свою очередь, ядро (1.73) может быть тождественно переписано следующим образом

$$K_{+-}(z, z'|s) = -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \times \\ \times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \tilde{\rho}^m(s) \tilde{\rho}^n(s) + R(z, z') + \int_0^s dt (R'(t) + \Sigma(t))} I(z, z'). \quad (1.74)$$

С использованием тождества

$$R'(t) = \mathcal{O}(t)[\bar{W}^\alpha \bar{D}_\alpha - W^\alpha D_\alpha, R]\mathcal{O}(-t) \quad (1.75)$$

Выражение для  $R'(t)$  может быть вычислено явно. Нам потребуется это выражение в сумме с  $\Sigma(t)$ , которое имеет вид (1.49),

$$R'(t) + \Sigma(t) = \mathcal{O}(t) \left\{ 2i\bar{\zeta}WG + 2i(\zeta\bar{\zeta}W\bar{W} - \zeta W\bar{\zeta}\bar{W}) \right. \\ \left. + i\bar{\zeta}^2[W^2 - \zeta^\alpha W^\beta D_\alpha W_\beta] \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\bar{\zeta}^\beta W^\alpha [\tilde{\rho}_{\beta\gamma} \bar{D}^\gamma \bar{W}_\beta - \tilde{\rho}_{\alpha\gamma} D^\gamma W_\beta] \right\} \mathcal{O}(-t). \quad (1.76)$$

Представление (1.74) для теплового ядра  $K_{+-}(z, z'|s)$  более удобно для проведения квантовых петлевых вычислений по сравнению с (1.73), поскольку при совпадающих суперпространственных точках, функция  $R(z, z')$  обращается в ноль,  $R(z, z')|_{\zeta \rightarrow 0} = 0$ , и не дает вклада.

Аналогичные вычисления необходимо провести для получения теплового ядра  $K_{-+}(z, z'|s)$ . Опуская подробности вычислений и представим только результат

$$K_{-+}(z, z'|s) = -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \mathcal{O}(s) \times \\ \times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \tilde{\rho}^m \tilde{\rho}^n + \tilde{R}(z, z')} I(z, z'). \quad (1.77)$$

Функция  $\tilde{R}(z, z')$  имеет вид

$$\tilde{R}(z, z') = i\zeta\bar{\zeta}G + \frac{i}{12}\bar{\zeta}^2\zeta W + \frac{7i}{12}\zeta^2\bar{\zeta}\bar{W} - \frac{1}{2}\bar{\zeta}^\alpha \tilde{\rho}_{\alpha\beta} W^\beta - \frac{1}{2}\zeta^\alpha \tilde{\rho}_{\alpha\beta} \bar{W}^\beta \\ + \frac{1}{12}\zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta [7\tilde{\rho}_{\beta\gamma} \bar{D}^\gamma \bar{W}_\alpha - \tilde{\rho}_{\alpha\gamma} \bar{D}_\beta \bar{W}^\gamma]. \quad (1.78)$$

Двухточечная функция  $\hat{\rho}^m$  аналогична объекту (1.71), но обладающей другой киральностью,

$$\hat{\rho}^m = \rho^m - i\zeta^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^m \bar{\zeta}^\beta, \quad \bar{D}'_\alpha \hat{\rho}^m = D_\alpha \hat{\rho}^m = 0. \quad (1.79)$$

Далее, в выражении (1.77) подействуем оператором  $\mathcal{O}(s)$  на слагаемые справа от него в ядре (1.77). В результате, получаем окончательное выражения для теплового ядра  $K_{-+}(z, z'|s)$

$$K_{-+}(z, z'|s) = -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \times \quad (1.80)$$

$$\times e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \tilde{\rho}^m(s) \tilde{\rho}^n(s) + \tilde{R}(z, z') + \int_0^s dt (\tilde{R}'(t) + \Sigma(t))} I(z, z').$$

В этом уравнении все  $s$ -зависимые функции введены выше, см. (1.44). Для суммы функция  $\tilde{R}'(z, z') + \Sigma(z, z')$  можно получить явное выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{R}' + \Sigma = & -2i\zeta \bar{W} G + 2i(\zeta \bar{\zeta} W \bar{W} - \zeta W \bar{\zeta} \bar{W}) + i\zeta^2 [\bar{W}^2 + \bar{\zeta}^\alpha \bar{W}^\beta \bar{D}_\alpha \bar{W}_\beta] \\ & - \frac{1}{2} \zeta^\beta \bar{W}^\alpha [\tilde{\rho}_{\alpha\gamma} \bar{D}^\gamma \bar{W}_\beta + \tilde{\rho}_{\beta\gamma} \bar{D}_\alpha \bar{W}^\gamma]. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо будет вычислить предел совпадающих грассмановых переменных в выражении для ядра  $K_{+-}(z, z'|s)$ .

## 1.7 Тепловые ядра $K_+(z, z'|s)$ и $K_{+-}(z, z'|s)$ при совпадающих грассмановых переменных

Рассмотрим теплое ядро  $K_{+-}(z, z'|s)$  в виде (1.74),<sup>1</sup>

$$K_{+-}(z, z'|s) = -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} e^{\mathcal{F}(s)}, \quad (1.82)$$

здесь введено следующее обозначение для функции  $\mathcal{F}(s)$

$$\mathcal{F}(s) = \frac{i}{4} (F \coth(sF))_{mn} \tilde{\rho}^m(s) \tilde{\rho}^n(s) + R(z, z') + \int_0^s dt (R'(t) + \Sigma(t)). \quad (1.83)$$

Выражение  $R'(t) + \Sigma(t)$  было вычислено ранее (1.76). Очевидно, что задача нахождения теплового ядра  $K_{+-}(z, z'|s)$  в пределе совпадающих грассмановых переменных сводится к задаче нахождения предела от функции  $\mathcal{F}(s)$ .

Прежде всего отметим, что функция  $R(z, z')$  заданная выражением (1.70) обращается в ноль в пределе совпадающих грассмановых аргументов

$$R(z, z') \Big|_{\zeta \rightarrow 0} = 0. \quad (1.84)$$

Поэтому остается найти предел

$$\mathcal{F}(s) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} = \left( \frac{i}{4} (F \coth(sF))_{mn} \tilde{\rho}^m(s) \tilde{\rho}^n(s) + \int_0^s dt (R'(t) + \Sigma(t)) \right) \Big|_{\zeta \rightarrow 0}. \quad (1.85)$$

<sup>1</sup>Для краткости будем опускать в правой части оператор параллельного переноса  $I(z, z')$ .

Рассмотрим объект  $\tilde{\rho}^m(s)$  введенный в (1.71). С использованием (1.44), перепишем его в следующем виде

$$\tilde{\rho}^m(s) = \tilde{\rho}^m - 2i\gamma_{\alpha\beta}^m \int_0^s W^\alpha(t) \bar{\zeta}^\beta(t) dt. \quad (1.86)$$

Подставляя в последнее выражение напряженности  $W^\alpha(s)$  и  $\bar{\zeta}^\beta(s)$  в виде (1.44), вычислим интеграл по переменной  $t$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^m(s)| &= \rho^m + i(\gamma_{\alpha\beta}^m N^{\alpha\beta}) \frac{W^\gamma \bar{W}^\gamma}{B^3} (sB - \sinh sB) \\ &\quad + i\gamma_{\alpha\beta}^m W^\gamma \bar{W}^\delta \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_\gamma^\alpha \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_\delta^\beta. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Здесь использовались следующие тождества

$$(N^{2n})_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta B^{2n}, \quad (N^{2n+1})_\alpha^\beta = N_\alpha^\beta B^{2n}, \quad B^2 \equiv \frac{1}{2} N_\alpha^\beta N_\beta^\alpha. \quad (1.88)$$

Поэтому, для первого слагаемого в правой части выражения (1.85) получаем

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} (F \coth(sF))_{mn} \tilde{\rho}^m(s) \tilde{\rho}^n(s)| &= \frac{i}{4} (F \coth(sF))_{mn} \rho^m \rho^n \\ &\quad - \frac{1}{2} (F \coth(sF))_{mn} \rho^m \gamma_{\alpha\beta}^n \left( N^{\alpha\beta} \frac{W^\gamma \bar{W}^\gamma}{B^3} (sB - \sinh sB) \right. \\ &\quad \left. + W^\gamma \bar{W}^\delta \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_\gamma^\alpha \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_\delta^\beta \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \frac{W^2 \bar{W}^2}{B^4} \left[ (2B \coth sB + \frac{1}{s}) (\cosh sB - 1)^2 - \frac{1}{s} (\sinh sB - sB)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.89)$$

При выводе этого выражения также использовались следующие полезные тождества

$$\begin{aligned} (F \coth sF)_m^m &= 2B \coth sB + \frac{1}{s}, \\ (F \coth sF)_{mn} (N\gamma^m) (N\gamma^n) &= -4 \frac{B^2}{s}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Теперь рассмотрим последнее слагаемое в (1.85). Для вычисления  $\int_0^s dt (R'(t) + \Sigma(t))$  в пределе совпадающих грассмановых переменных, необходимо воспользоваться следующими равенствами

$$W^\alpha(s) W_\alpha(s)| = W^2, \quad W^\alpha(s) \bar{W}_\alpha(s)| = W^\alpha \bar{W}_\alpha, \quad (1.91)$$

$$\zeta^2(s)| = \frac{4W^2}{B^2} \sinh^2\left(\frac{sB}{2}\right), \quad \bar{\zeta}^2(s)| = \frac{4\bar{W}^2}{B^2} \sinh^2\left(\frac{sB}{2}\right), \quad (1.92)$$

$$\zeta^\alpha(s)\bar{W}_\alpha(s)| = -\bar{W}^\alpha W_\alpha \frac{\sinh(sB)}{B} + \frac{W^\alpha \bar{W}^\beta N_{\alpha\beta}}{B^2} 2 \sinh^2 \frac{sB}{2}, \quad (1.93)$$

$$\bar{\zeta}^\alpha(s)W_\alpha(s)| = -\bar{W}^\alpha W_\alpha \frac{\sinh(sB)}{B} - \frac{W^\alpha \bar{W}^\beta N_{\alpha\beta}}{B^2} 2 \sinh^2 \frac{sB}{2}, \quad (1.94)$$

$$\zeta^\alpha(s)W_\alpha(s)| = -W^2 \frac{\sinh(sB)}{B}, \quad (1.95)$$

$$\bar{\zeta}^\alpha(s)\bar{W}_\alpha(s)| = -\bar{W}^2 \frac{\sinh(sB)}{B}, \quad (1.96)$$

$$(\zeta\bar{W})(\bar{\zeta}W)| = -\frac{W^2\bar{W}^2}{B^2}(\sinh^2 sB - \cosh sB + 1), \quad (1.97)$$

$$\begin{aligned} \zeta\bar{\zeta}W\bar{W} - \zeta W\bar{\zeta}\bar{W}| &= -2\zeta W\bar{\zeta}\bar{W} - (\zeta\bar{W})(\bar{\zeta}W) \\ &= \frac{W^2\bar{W}^2}{B^2}(1 - \cosh sB - \sinh^2 sB), \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$2i(\zeta\bar{\zeta}W\bar{W} - \zeta W\bar{\zeta}\bar{W})| + i\zeta^2\bar{W}^2| = -2i\frac{W^2\bar{W}^2}{B^2}\sinh^2 sB. \quad (1.99)$$

Собирая полученные выражения и интегрируя по  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^s dt(R'(t) + \Sigma(t))| &= \frac{2iG^2}{B} W^\alpha (e^{-sN} - 1 + sN)_\alpha{}^\beta \bar{W}_\beta \\ &\quad - i\frac{W^2\bar{W}^2}{B^3}(\sinh sB \cosh sB - sB) \\ &\quad - \frac{1}{2}\rho^m(\cosh sB - 1)\bar{W}^\alpha(e^{-sN})_\alpha{}^\beta ((\gamma_m)^\gamma_\beta N_\gamma^\delta - N_\beta^\gamma(\gamma_m)^\delta_\gamma)W_\delta. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Складывая (1.89) и (1.100) вместе и подставляя это выражение обратно в теплое ядро, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} K_{+-}(z, z'|s)\Big|_{\zeta \rightarrow 0} &= -\frac{1}{8(i\pi s)^{3/2}} \frac{sB}{\sinh(sB)} e^{isG^2} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^m \rho^n - iGW^\alpha f_\alpha{}^\beta(s)\bar{W}_\beta \right. \\ &\quad \left. + W^\alpha \rho_m f_{\alpha\beta}^m(s)\bar{W}^\beta + \frac{i}{2}W^2\bar{W}^2 f(s) \right\}, \end{aligned} \quad (1.101)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_\alpha{}^\beta(s) &= 2B^{-2}(1 - sN - e^{-sN})_\alpha{}^\beta, \\ f(s) &= \frac{1}{sB^4} \left[ (sB)^2 - 4 \sinh^2(sB/2)(1 + sB \tanh(sB/2)) \right], \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^m(s) = & \frac{1}{2}B^{-2}(\cosh(sB) - 1) \left[ (e^{-sN})_{\beta}{}^{\gamma} N_{\alpha}{}^{\delta} (\gamma^m)_{\gamma\delta} + \right. \\
& \left. + (N(e^{-sN}))_{\beta}{}^{\delta} (\gamma^m)_{\alpha\delta} \right] - \frac{1}{2}(F \coth(sF))^m{}_n \gamma_{\gamma\delta}^n \times \\
& \times \left[ \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_{\alpha}{}^{\gamma} \left( \frac{e^{-sN} - 1}{N} \right)_{\beta}{}^{\delta} + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} N^{\gamma\delta}}{B^3} (sB - \sinh(sB)) \right]. \tag{1.103}
\end{aligned}$$

Процедура вычисления предела совпадающих грасмановых переменных от ядра  $K_+(z, z'|s)$  (1.61) существенно проще, приведенной выше. Тепловое ядро  $K_+(z, z'|s)$  ранее было вычислено точно (1.61). Используя тождество (1.92) нетрудно найти предел  $\zeta \rightarrow 0$  в (1.61),

$$K_+(z, z'|s) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} = \frac{1}{4(i\pi s)^{3/2}} \frac{sW^2}{B} \tanh \frac{sB}{2} e^{isG^2} e^{\frac{i}{4}(F \coth(sF))_{mn} \rho^m \rho^n}. \tag{1.104}$$

В самом деле, выражение (1.92) содержит  $W^2$  и это предотвращает возникновение других суперполевых вкладов, которые появляются из экспоненты в (1.61). Антикиральное тепловое ядро  $K_-(z, z'|s)$  в пределе  $\zeta \rightarrow 0$  имеет такую же структуру, что и (1.104), но необходимо заменить  $W^2 \rightarrow \bar{W}^2$ .

Теперь есть все необходимые составляющие для изучения квантовых поправок к эффективному действию трехмерных калибровочных теорий. Явный вид пропагаторов (1.101) и (1.104) будет нам полезен при вычислении двухпетлевых вкладов в низкоэнергетическое эффективное действие  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричных калибровочных теорий.

## 2 Низкоэнергетическое эффективное действие в трехмерной $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной электродинамике

Под эффективным действием в трехмерной суперсимметричной электродинамике мы будем понимать прежде всего действие Гейзенберга-Эйлера (см. обзор [111]). Мы будем вычислять вклады полей материи в эффективное действие легких полей. Метод фонового суперполя позволяет вычислить такие вклады в виде функционала от напряженностей калибровочного поля и его производных. С учетом выбранных нами ограничений (1.23) и (1.24) полученные поправки будут содержать слагаемые, содержащие не выше первой производной от напряженности калибровочного суперполя.

### 2.1 Предварительные замечания

Суперполевое эффективное действие Гейзенберга-Эйлера в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамике может быть представлено в следующей общей форме:

$$\Gamma = \int d^3x d^4\theta \mathcal{L}_{\text{eff}}(G, \Phi\bar{\Phi}, W_\alpha, \bar{W}_\alpha, D_{(\alpha}W_{\beta)}). \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  – эффективный лагранжиан, который зависит от  $\mathcal{N} = 2$  суперполевых напряженностей  $G$ ,  $W_\alpha$  и  $\bar{W}_\alpha$  и киральное суперполе  $\Phi$ , являющиеся частью  $\mathcal{N} = 4$  калибровочного мультиплетта. Случай  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии соответствует фиксированию кирального суперполя  $\Phi = m$ , где  $m$  является  $\mathcal{N} = 2$  комплексным массовым параметром. Предполагается, что суперполевая напряженность калибровочного мультиплетта медленно изменяется в пространстве-времени, так что достаточно рассматривать только первые производные от суперполя  $W_\alpha$ ,  $N_{\alpha\beta} \equiv D_{(\alpha}W_{\beta)}$ .<sup>2</sup> В терминах компонентных полей действие вида (2.1) содержит все степени максвелловской напряженности электромагнитного поля  $F^{2n}$ . Однопетлевое действие Гейзенберга-Эйлера в трехмерной электродинамике было вычислено ранее в работе [78].

Часть эффективного лагранжиана в (2.1), которая зависит только от  $G$  и  $\Phi\bar{\Phi}$ , называется эффективным потенциалом. В  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной

<sup>2</sup>В принципе, можно рассмотреть также  $\bar{N}_{\alpha\beta} \equiv \bar{D}_{(\alpha}\bar{W}_{\beta)}$ , но в отличие от в четырехмерного случая, это выражение не является независимым  $\bar{N}_{\alpha\beta} = -N_{\alpha\beta}$ .

калибровочной теории однопетлевой эффективный потенциал был получен на основе геометрических принципов достаточно давно в работе [108]<sup>3</sup>

$$f(G, \Phi\bar{\Phi}) = \mathcal{L}_{\text{eff}}|_{W_\alpha=\bar{W}_\alpha=0} \propto G \ln(G + \sqrt{G^2 + \Phi\bar{\Phi}}) - \sqrt{G^2 + \Phi\bar{\Phi}}. \quad (2.2)$$

Эффективный потенциал (2.2) отвечает за метрику на пространстве модулей [68, 108]. Стоит отметить, что эффективный потенциал (2.2) в случае  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной калибровочной теории определяется только однопетлевыми вкладами. Однако в  $\mathcal{N} = 2$  теориях он содержит также и многопетлевые квантовые вклады. В настоящей главе вычисляется двухпетлевой эффективный суперпотенциал в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамике и находятся соответствующие двухпетлевые квантовые поправки к метрике пространства модулей. Подчеркнем, что двухпетлевая поправка к метрике пространства модулей для рассматриваемой модели ранее была не известна.

## 2.2 Классическое действие $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной электродинамики и метод фонового поля

Классическое действие  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперсимметричной электродинамики имеет вид

$$S_{\mathcal{N}=2} = \frac{1}{e^2} \int d^7z G^2 - \int d^7z (\bar{Q}_+ e^{2V} Q_+ + \bar{Q}_- e^{-2V} Q_-) - \left( m \int d^5z Q_+ Q_- + c.c. \right), \quad (2.3)$$

где  $Q_\pm$  – киральные суперполя с противоположными по отношению к калибровочному супер полю  $V$  зарядами. Действие (2.3) возникает посредством размерной редукцией из действия  $\mathcal{N} = 1$ ,  $d = 4$  электродинамики [1, 2]. В трехмерном пространстве-времени без нарушения калибровочной инвариантности к (2.3) можно добавить действие Черна-Саймонса  $\int d^7z VG$ , которое нельзя получить размерной редукцией из  $\mathcal{N} = 1$ ,  $d = 4$ . В данной главе ограничимся изучением низкоэнергетического эффективного действия в трехмерной электродинамике без слагаемого Черна-Саймонса. Отметим, что последнее не возникает как результат радиационных поправок, поскольку действие

<sup>3</sup>Это трехмерный аналог  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 4$  суперполевого действия тензорного мультиплетта [112] (см. также [2]).

(2.3) четно относительно преобразований пространственно-временных отражений [69,113,114] (см. также работу [115] для обзора). Трехмерная  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная электродинамика с кинетическим членом Черна-Саймонса будет обсуждаться в следующей главе.

Будем рассматривать часть низкоэнергетического эффективного действия, которая зависит только от калибровочного суперполя,  $\Gamma = \Gamma[V]$ , киральное суперполе  $Q_{\pm}$  является чисто квантовым. Для этой цели удобно использовать метод фонового поля в  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространстве. Представим калибровочное суперполе  $V$  в виде суммы фонового  $V$  и квантового  $v$  полей

$$V \rightarrow V + e v. \quad (2.4)$$

В силу этого расщепления максвелловский кинетический член в (2.3) изменится следующим образом

$$\frac{1}{e^2} \int d^7 z G^2 \rightarrow \frac{1}{e^2} \int d^7 z G^2 + \frac{i}{e} \int d^7 z v D^{\alpha} W_{\alpha} + \frac{1}{8} \int d^7 z v D^{\alpha} \bar{D}^2 D_{\alpha} v. \quad (2.5)$$

Оператор  $D^{\alpha} \bar{D}^2 D_{\alpha}$  в последнем слагаемом вырожден и нуждается в фиксации калибровки. Мы будем использовать действие, отвечающее фиксации калибровки в виде

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{16} \int d^7 z v \{D^2, \bar{D}^2\} v. \quad (2.6)$$

Добавляя это слагаемое к (2.3), получим

$$S_{\text{quantum}} = S_2 + S_{\text{int}}, \quad (2.7)$$

$$S_2 = - \int d^7 z (v \square v + \bar{Q}_+ Q_+ + \bar{Q}_- Q_-) - \left( m \int d^5 z Q_+ Q_- + c.c. \right) \quad (2.8)$$

$$S_{\text{int}} = -2 \int d^7 z [e (\bar{Q}_+ Q_+ - \bar{Q}_- Q_-) v + e^2 (\bar{Q}_+ Q_+ + \bar{Q}_- Q_-) v^2], \quad (2.9)$$

где  $Q_{\pm}$  и  $\bar{Q}_{\pm}$  – ковариантно (анти)киральные суперполя по отношению к фоновому калибровочному супер полю

$$\bar{Q}_+ = \bar{Q}_+ e^{2V}, \quad Q_+ = Q_+, \quad \bar{Q}_- = \bar{Q}_- e^{-2V}, \quad Q_- = Q_-. \quad (2.10)$$

Действие  $S_{\text{int}}$  определяет вершины взаимодействия ( в выражении (2.9) приводятся лишь слагаемыми не выше второй степени по константе взаимо-

действия), а действие  $S_2$  отвечает за пропагаторы,

$$\begin{aligned}
i\langle \mathcal{Q}_+(z)\mathcal{Q}_-(z') \rangle &= -mG_+(z, z'), \\
i\langle \bar{\mathcal{Q}}_+(z)\bar{\mathcal{Q}}_-(z') \rangle &= mG_-(z', z), \\
i\langle \mathcal{Q}_+(z)\bar{\mathcal{Q}}_+(z') \rangle &= G_{+-}(z, z') = G_{-+}(z', z), \\
i\langle \bar{\mathcal{Q}}_-(z)\mathcal{Q}_-(z') \rangle &= G_{-+}(z, z'),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где функции Грина  $G_+$  и  $G_{+-}$  определяются уравнениями (1.52) и (1.65), соответственно. Пропагатор вещественного суперполя  $v$  имеет вид

$$2i\langle v(z)v(z') \rangle = G_0(z, z'), \tag{2.12}$$

где функция Грина  $G_0(z, z')$  выражается через интеграл по собственному времени следующим образом

$$\begin{aligned}
G_0(z, z') &= i \int_0^\infty ds K_0(z, z'|s) e^{-s\epsilon}, \\
K_0(z, z'|s) &= \frac{1}{(4i\pi s)^{3/2}} e^{\frac{i\rho^m \rho_m}{4s}} \zeta^2 \bar{\zeta}^2.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь  $\rho^m$ ,  $\zeta^\alpha$  и  $\bar{\zeta}^{\bar{\alpha}}$  – компоненты суперсимметричного интервала (1.27).

### 2.3 Петлевое разложение и общая структура эффективного действия

Нашей целью является вычисление двухпетлевого эффективного действия в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамике (2.3),

$$\Gamma_{\mathcal{N}=2} = \Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(1)} + \Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(2)}, \tag{2.14}$$

$$\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(1)} = i\text{Tr} \ln(\square_+ + m^2), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(2)} &= -2e^2 \int d^7z d^7z' G_{+-}(z, z') G_{+-}(z', z) G_0(z, z') \\
&\quad + m^2 \int d^7z d^7z' G_+(z, z') G_-(z, z') G_0(z, z').
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь  $\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(1)}$  и  $\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(2)}$  – одно- и двухпетлевые вклады, соответственно. Ковариантный оператор Даламбера  $\square_+$  был описан ранее в (1.50), а функции Грина  $G_{+-}(z, z')$ ,  $G_+(z, z')$  и  $G_0(z, z')$  выражаются через тепловые ядра (1.77), (1.61) и (2.13). Двухпетлевой вклад в эффективное действие  $\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(2)}$  представлен суперграфами на рис. 1. Суперграф типа А и В соответствует двум слагаемым в правой части (2.16). Помимо представленных на рис. 1 есть еще один

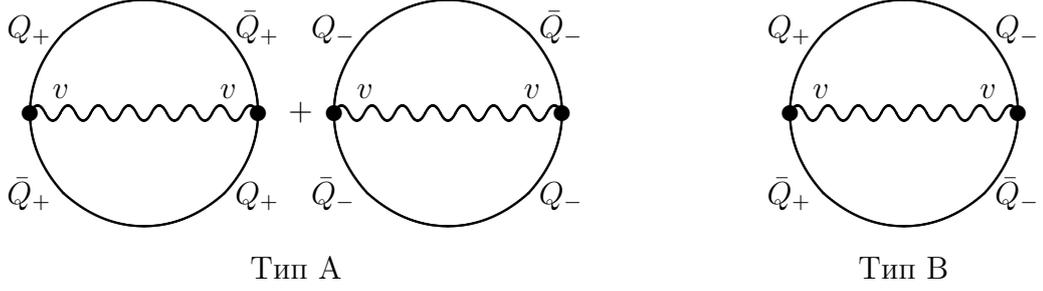


Рис. 1: Двухпетлевые графы в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамике

суперграф с топологией "восьмерки" но этот вклад обращается в ноль в следствии того, что суперпропагатор фотона (2.13) равен нулю при совпадающих суперпространственных точках.

Однопетлевое эффективное действие в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  абелевой калибровочной теории было получено ранее в работе [78] (см. также [80]),

$$\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int d^7z \left[ G \ln(G + \sqrt{G^2 + m^2}) - \sqrt{G^2 + m^2} \right] + \frac{1}{8\pi} \int d^7z \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{i\pi s}} e^{is(G^2+m^2)} \frac{W^2 \bar{W}^2}{B^2} \left( \frac{\tanh(sB/2)}{sB/2} - 1 \right) \quad (2.17)$$

где  $B^2$  определено в (1.42),  $B^2 = \frac{1}{2}D^2W^2$ . Напомним, что рассмотрение ведется для случая ковариантно постоянного калибровочного фона (1.24), удовлетворяющего суперсимметричным уравнениям Максвелла (1.23). Следовательно, низкоэнергетическое эффективное действие представляет собой функционал от суперполевых напряженностей  $G$ ,  $W_\alpha$ ,  $\bar{W}_\alpha$  и только первой производной от  $W_\alpha$ , т.е. от  $N_{\alpha\beta} = D_{(\alpha}W_{\beta)}$ . Все слагаемые с высшими производными от суперполевых напряженностей обращаются в ноль или сводятся к функциям от  $N_{\alpha\beta}$ . Следовательно, двухпетлевой вклад в эффективное действие имеет следующую суперполевую структуру:

$$\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(2)} = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^7z \left[ \mathcal{L}_1(G, B) + W^\alpha \mathcal{L}_2 \alpha^\beta(G, N) \bar{W}_\beta + \mathcal{L}_3(G, B) W^2 \bar{W}^2 \right]. \quad (2.18)$$

Здесь  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2 \alpha^\beta$  и  $\mathcal{L}_3$  – некоторые функции от  $G$  и  $N_{\alpha\beta}$ , которые необходимо найти на основе квантовых вычислений. Отметим, вклады вида  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  не возникают в четырехмерной суперсимметричной калибровочной теории. Будет показано, что эти вклады нетривиальны в двухпетлевом эффективном

действию трехмерной суперсимметричной электродинамики.

## 2.4 Двухпетлевое эффективное действие в модели $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной электродинамики

Двухпетлевые диаграммы типа А на рис. 1 соответствуют следующему вкладу в эффективное действие:

$$\Gamma_A = -2e^2 \int d^7z d^7z' G_{+-}(z, z') G_{+-}(z', z) G_0(z, z'). \quad (2.19)$$

Пропагаторы  $G_{+-}(z, z')$  и  $G_0(z, z')$  выражены через тепловые ядра (1.66) и (2.13). Поэтому,

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= 2ie^2 \int d^7z d^7z' \int_0^\infty ds dt du K_0(z, z'|u) K_{+-}(z, z'|s) K_{+-}(z', z|t) e^{im^2(s+t)} \\ &= 2ie^2 \int d^7z d^3\rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4i\pi u)^{3/2}} e^{i\frac{\rho^m \rho_m}{4u}} e^{im^2(s+t)} \\ &\quad \times K_{+-}(z, z'|s) K_{+-}(z', z|t) \Big|_{\zeta \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь учитываем<sup>4</sup>, что тепловое ядро  $K_0(z, z'|s)$  заданное в (2.13) содержит объект  $\zeta^2 \bar{\zeta}^2$ , который представляет ни что иное как дельта-функцию от грассмановых переменных. Поэтому, выражение (2.20) включает интегрирование по набору грассмановых переменных, и необходимо вычислить тепловое ядро  $K_{+-}(z, z'|s)$  при совпадающих точках,  $\theta = \theta'$ . Вычисление этого предела (1.101) было рассмотрено ранее в первой главе. Отметим, что (2.20) включает также выражение  $K_{+-}(z', z|s)$ , которое имеет аналогичную структуру с (1.101), но с заменой  $z \leftrightarrow z'$ , или  $\rho_m \rightarrow -\rho_m$ . Тогда, подставляя (1.101) в (2.20), находим

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \frac{4ie^2}{(4i\pi)^{9/2}} \int d^7z d^3\rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(stu)^{3/2}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \frac{stB^2}{\sinh(sB) \sinh(tB)} \\ &\quad \times e^{\frac{i}{4}\rho A \rho + \rho_m W^\alpha (f_{\alpha\beta}^m(s) - f_{\alpha\beta}^m(t)) \bar{W}^\beta - 2iGW^\alpha (f_\alpha^\beta(s) + f_\alpha^\beta(t)) \bar{W}_\beta + \frac{i}{2}W^2 \bar{W}^2 (f(s) + f(t))}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$A_{mn}(s, t, u) = (F \coth(sF))_{mn} + (F \coth(tF))_{mn} + \frac{\eta_{mn}}{u} \quad (2.22)$$

<sup>4</sup>Каждое из тепловых ядер  $K_{+-}(z, z'|s)$  в (2.20) содержит пропагатор параллельного переноса  $I(z, z')$ . Эти пропагаторы сокращают друг друга с помощью тождества (1.29) и, в результате, (2.20) зависит только от суперполевых напряженностей их производных. Поэтому будем опускать  $I(z, z')$  в дальнейшем и не писать его непосредственно в выражении для ядра.

представляет собой симметричную  $3 \times 3$  матрицу по лоренцевским индексам. Важно выразить эту матрицу через лоренцевские проекторы  $P^+$  и  $P^-$ ,

$$A_{mn} = P_{mn}^+(a + u^{-1}) + P_{mn}^-(b + u^{-1}), \quad (2.23)$$

здесь введены следующие обозначения

$$a(s, t) = B \coth(sB) + B \coth(tB), \quad b(s, t) = s^{-1} + t^{-1}. \quad (2.24)$$

Явный вид проекторов  $P_{mn}^+$  и  $P_{mn}^-$  записывается в виде

$$\begin{aligned} P_{mn}^+ &= \eta_{mn} + \frac{1}{4B^2} (N_{\alpha\beta} \gamma_m^{\alpha\beta}) (N_{\gamma\delta} \gamma_n^{\gamma\delta}), \\ P_{mn}^- &= -\frac{1}{4B^2} (N_{\alpha\beta} \gamma_m^{\alpha\beta}) (N_{\gamma\delta} \gamma_n^{\gamma\delta}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Эти матрицы удовлетворяют стандартным свойствам проекционных операторов,

$$(P^+)^2 = P^+, \quad (P^-)^2 = P^-, \quad P^+ P^- = 0, \quad P_{mn}^+ + P_{mn}^- = \eta_{mn}. \quad (2.26)$$

Интеграл по  $d^3\rho$  в (2.21) гауссов, и вычисляется стандартным образом

$$\int d^3\rho e^{i\frac{1}{4}\rho_m A^{mn} \rho_n + \rho_m W^\alpha (f_{\alpha\beta}^m(s) - f_{\alpha\beta}^m(t)) \bar{W}^\beta} = -\frac{(4\pi i)^{3/2}}{\sqrt{\det A}} e^{i\frac{1}{2}W^2 \bar{W}^2 \mathcal{F}(s, t, u)}, \quad (2.27)$$

где в результате интегрирования получим в показателе экспоненты следующую функцию

$$\mathcal{F}(s, t, u) = -\frac{1}{2} (f_{\alpha\beta}^m(s) - f_{\alpha\beta}^m(t)) (A^{-1})_m{}^n (f_n^{\alpha\beta}(s) - f_n^{\alpha\beta}(t)). \quad (2.28)$$

Используя представление матрицы  $A_{mn}$  через проекторы (2.23), легко найти ее детерминант и обратную матрицу

$$\frac{1}{\sqrt{\det A}} = \frac{1}{(a + u^{-1})(b + u^{-1})^{1/2}}, \quad (A^{-1})_{mn} = \frac{P_{mn}^+}{a + u^{-1}} + \frac{P_{mn}^-}{b + u^{-1}}. \quad (2.29)$$

Далее, используя явный вид функций  $f_{\alpha\beta}^m$  (1.103) и проекторов  $P^\pm$  (2.25), получим для (2.28) следующее выражение,

$$\mathcal{F}(s, t, u) = \frac{F^+(s, t)}{a + u^{-1}} + \frac{F^-(s, t)}{b + u^{-1}}, \quad (2.30)$$

где введены обозначения для коэффициентов

$$\begin{aligned}
F^-(s, t) &= \frac{1}{B^6} \left[ \left( \frac{\sinh(sB)}{s} - \frac{\sinh(tB)}{t} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\cosh(sB) - 1}{s} - \frac{\cosh(tB) - 1}{t} \right)^2 \right], \\
F^+(s, t) &= -\frac{2}{B^2} \left[ (\cosh(2Bs) + 2) \tanh^2 \left( \frac{Bs}{2} \right) \right. \\
&\quad - 2(\cosh(B(s-t)) + \cosh(2B(s-t))) \\
&\quad + \cosh(B(s+t)) \tanh \left( \frac{Bt}{2} \right) \tanh \left( \frac{Bs}{2} \right) \\
&\quad \left. + (\cosh(2Bt) + 2) \tanh^2 \left( \frac{Bt}{2} \right) \right]. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

В качестве завершающего шага разложим экспоненту во второй строке (2.21) в ряд<sup>5</sup> и вычислим интеграл по  $du$ :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{du}{u^{3/2}(a+u^{-1})(b+u^{-1})^{1/2}} = \frac{2 \operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a-b)}}, \quad (a > b) \tag{2.32} \\
&\int_0^\infty \frac{du}{u^{3/2}(a+u^{-1})(b+u^{-1})^{1/2}} \left[ \frac{F^+}{a+u^{-1}} + \frac{F^-}{b+u^{-1}} \right] \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \frac{2F^-}{b} - \frac{F^+}{a} \right) + \frac{2a(F^+ - F^-) - bF^+}{(a(a-b))^{3/2}} \operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

В результате, вклад в низкоэнергетическое эффективное действие от диаграмм типа А на рис. 1 имеет уже описанную выше структуру (2.18),

$$\Gamma_A = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^7z \left( \mathcal{L}_1 + W^\alpha \mathcal{L}_{2\alpha}{}^\beta \bar{W}_\beta + W^2 \bar{W}^2 \mathcal{L}_3^{(A)} \right), \tag{2.34}$$

---

<sup>5</sup>На самом деле разложение экспоненты содержит только несколько первых членов, в силу грассмано-вой природы суперполевых напряженностей,  $W_\alpha W_\beta W_\gamma \equiv 0$ .

где  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  и  $\mathcal{L}_3$  имеют вид

$$\mathcal{L}_1 = \int_0^\infty \frac{ds dt}{\sqrt{st}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \frac{B^2}{\sinh(sB) \sinh(tB)} \frac{2 \operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a-b)}}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\alpha}^\beta &= -\frac{2iG}{B^2} \int_0^\infty \frac{ds dt}{\sqrt{st}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \frac{B^2}{\sinh(sB) \sinh(tB)} \frac{2 \operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a-b)}} \\ &\quad \times (e^{-sN} - 1 + sN + e^{-tN} - 1 + tN)_\alpha^\beta, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{(A)} &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds dt}{\sqrt{st}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \frac{B^2}{\sinh(sB) \sinh(tB)} \frac{1}{a-b} \left( \frac{2F^-}{b} - \frac{F^+}{a} \right) \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{ds dt}{\sqrt{st}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \frac{B^2}{\sinh sB \sinh tB} \left[ \frac{i}{2} (f(s) + f(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a(F^+ - F^-) - bF^+/2}{a(a-b)} \right] - \frac{G^2}{B^4} ((sB - \sinh sB + tB - \sinh tB)^2 \\ &\quad - (\cosh sB + \cosh tB - 2)^2) \left. \right] \frac{2 \operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a-b)}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Видим, что формулы имеют весьма громоздкий вид. Однако необходимая для дальнейших рассмотрений формула для  $\mathcal{L}_1$  (2.35) наиболее проста.

Рассмотрим теперь диаграмму типа В на рис. 1,

$$\begin{aligned} \Gamma_B &= -2e^2 m^2 \int d^7 z d^7 z' G_+(z, z') G_-(z, z') G_0(z, z') \\ &= 2ie^2 m^2 \int d^7 z d^7 z' \int_0^\infty ds dt du K_+(z, z'|s) K_-(z, z'|t) K_0(z, z'|u) e^{im^2(s+t)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Напомним, что тепловое ядро  $K_0(z, z'|s)$ , имеющее вид (2.13), содержит  $\zeta^2 \bar{\zeta}^2$ , что представляет собой дельта-функцию по грассмановым переменным. Поэтому остается только интегрирование по одному набору грассмановых переменных,

$$\Gamma_B = 2ie^2 m^2 \int d^7 z d^3 \rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4i\pi u)^{3/2}} e^{i\frac{\rho^m \rho_m}{4u}} e^{im^2(s+t)} K_+(z, z'|s) K_-(z', z'|t) \Big|_{\zeta \rightarrow 0}. \quad (2.39)$$

Подставляя (1.104) в (2.39), получим<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_B &= \frac{ie^2 m^2}{64(i\pi)^{9/2}} \int d^7 z \frac{W^2 \bar{W}^2}{B^2} \int_0^\infty \frac{ds dt du}{\sqrt{stu}^{3/2}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \\ &\quad \times \tanh \frac{sB}{2} \tanh \frac{tB}{2} \int d^3 \rho e^{\frac{i}{4} \rho^m A_{mn} \rho^n}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

<sup>6</sup>Операторы параллельного переноса в (2.39) сокращают друг друга в силу тождества (1.29).

где матрица  $A_{mn}$  была определена ранее (2.22). Гауссов интеграл по  $d^3\rho$  в (2.40) вычисляется согласно формуле (2.27),

$$\int d^3\rho e^{i\rho_m A^{mn} \rho_n} = -\frac{(4\pi i)^{3/2}}{(a+u^{-1})(b+u^{-1})^{1/2}}. \quad (2.41)$$

Интеграл по  $du$  был получен ранее (2.32). В результате, вклад в низкоэнергетическое эффективное действие от диаграммы типа В на рис. 1 имеет вид

$$\Gamma_B = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^7z W^2 \bar{W}^2 \mathcal{L}_3^{(B)}, \quad (2.42)$$

где функция  $\mathcal{L}_3^{(B)}$  записывается в форме

$$\mathcal{L}_3^{(B)} = \frac{4m^2}{B^2} \int_0^\infty \frac{ds dt}{\sqrt{st}} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \tanh \frac{sB}{2} \tanh \frac{tB}{2} \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a-b)}}. \quad (2.43)$$

В заключение, суммируя вклады от обоих типов диаграмм, получим двухпетлевой вклад в эффективное действие в  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамике

$$\Gamma_{\mathcal{N}=2}^{(2)} = \Gamma_A + \Gamma_B = \frac{e^2}{16\pi^3} \int d^7z \left[ \mathcal{L}_1 + W^\alpha \mathcal{L}_2 \alpha^\beta \bar{W}_\beta + (\mathcal{L}_3^{(A)} + \mathcal{L}_3^{(B)}) W^2 \bar{W}^2 \right], \quad (2.44)$$

где функции  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3^{(A)}$  и  $\mathcal{L}_3^{(B)}$  имеют вид (2.35), (2.36), (2.37) и (2.43), соответственно. Важно отметить, что все эти функции свободны от ультрафиолетовых расходимостей, поскольку интегрирование по  $s$  и  $t$  не содержит сингулярностей на нижнем пределе. На самом деле это не удивительно, поскольку трехмерная электродинамика без слагаемого Черна-Саймонса суперперенормируема, поскольку константа связи размерна,  $[e^2] = 1$ . Квантовые расходимости могут возникать только в секторе материи, то есть в эффективном кэлеровом потенциале.

## 2.5 Двухпетлевые вклады в метрику пространства модулей

В структуре пространства модулей скалярных полей суперсимметричных калибровочных теорий содержится значительная часть информации о низкоэнергетической динамике. На основе анализа пространства модулей были установлены различные важные свойства трехмерных суперкалибровочных теорий, такие как зеркальная симметрия [64–69] и дуальности сайбер-

говоского типа [68–72] (см. также недавнее обсуждение этих вопросов в работах [73, 74]). Заметим, что пертурбативные квантовые поправки к метрике пространства модулей были известны только в однопетлевом приближении [64, 65, 68]. В данном разделе мы получим двухпетлевые квантовые поправки к данной метрике, которые могут быть извлечены из эффективного действия (2.44).

Пространство модулей в  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперсимметричных калибровочных теориях является кэлеровым многообразием [68]. В рассматриваемом нами случае его вещественная размерность равна двум. Поэтому, оно может быть параметризовано двумя вещественными координатами  $r$  и  $\sigma$ . Координату  $r$  естественно отождествить с вакуумным значением скалярного поля  $\phi$ , входящего в  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  калибровочный мультиплет,  $r = \langle \phi \rangle$ . Этот скаляр является низшей компонентной суперполевой напряженности  $G$ ,

$$G|_{\theta \rightarrow 0} = \phi. \quad (2.45)$$

Второй скаляр  $a$  возникает при дуализации абелева векторного поля  $A_m$ ,

$$\partial_m a \propto \varepsilon_{mnp} F^{np}, \quad (2.46)$$

где  $F_{mn}$  – максвелловская напряженность поля  $A_m$ . Координату  $\sigma$  можно теперь связать с вакуумом этого скаляра,  $\sigma = \langle a \rangle$ . В настоящем разделе мы получим метрику на пространстве модулей этих полей, которая будет параметризована координатами  $r$  и  $\sigma$ ,

$$ds^2 = g_{rr}(r, \sigma) dr^2 + g_{\sigma\sigma}(r, \sigma) d\sigma^2. \quad (2.47)$$

Для получения метрики пространства модулей мы будем следовать процедуре, описанной в [68]. Для этого необходимо рассмотреть часть эффективного действия, которая описывается лагранжианом в полном суперпространстве от суперполевой напряженности  $G$  и не содержит ее производных,

$$S_{\text{low-energy}} = \int d^7 z f(G). \quad (2.48)$$

Классическое действие (2.3) и однопетлевое эффективное действие (2.17) дают следующие вклады в  $f(G)$ :

$$f^{(0)}(G) = \frac{1}{e^2} G^2, \quad (2.49)$$

$$f^{(1)}(G) = \frac{1}{2\pi} \left[ G \ln(G + \sqrt{G^2 + m^2}) - \sqrt{G^2 + m^2} \right]. \quad (2.50)$$

Для нахождения двухпетлевых вкладов в  $f(G)$  необходимо вычислить эффективное действие (2.35) в пределе  $B \rightarrow 0$ . С учетом явного вида функций  $a(s, t)$  и  $b(s, t)$  заданных в (2.24), мы находим

$$\lim_{B \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a-b)}} = \frac{st}{s+t}. \quad (2.51)$$

Подставим это выражение в (2.35) и вычислим интегралы по  $s$  и  $t$ ,

$$\lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{L}_1 = -2\pi \ln(G^2 + m^2). \quad (2.52)$$

Таким образом, получаем двухпетлевой вклад в  $f(G)$ ,

$$f^{(2)}(G) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \ln(G^2 + m^2). \quad (2.53)$$

Просуммируем выражения (2.49), (2.50) и (2.53),

$$f(G) = \frac{1}{e^2} G^2 + \frac{1}{2\pi} [G \ln(G + \sqrt{G^2 + m^2}) - \sqrt{G^2 + m^2} - \frac{e^2}{4\pi} \ln(G^2 + m^2)]. \quad (2.54)$$

Используя функцию  $f(G)$ , необходимо дуализовать суперполе  $G$  в киральное суперполе  $\Phi$  по правилу [108]. Для этого введем киральное и антикиральное суперполя как лагранжевы множители для условия линейности суперполя  $G$ , (1.14),

$$S_{\text{low-energy}} = \int d^7z [f(G) - G(\Phi + \bar{\Phi})]. \quad (2.55)$$

Теперь можно считать, что на суперполе  $G$  не наложены никакие связи. Про-варьируем (2.55) по  $G$ , получим

$$\Phi + \bar{\Phi} = f'(G) = \frac{2}{e^2} G + \frac{1}{2\pi} \ln(G + \sqrt{G^2 + m^2}) - \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{G}{G^2 + m^2}. \quad (2.56)$$

Из данного выражения можно выразить суперполе  $G$  через  $\Phi + \bar{\Phi}$  и подставить обратно в выражение (2.55). Это приводит к действию  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  сигма-модели,

$$S_{\text{low-energy}} = \int d^7z K(\Phi + \bar{\Phi}), \quad (2.57)$$

в которой функция  $K(\Phi + \bar{\Phi})$  полностью определяется уравнением (2.56) как неявная функция. На самом деле, нам не требуется знать явный вид этой функции, а необходимы лишь ее производные, которые определяют кэлерову метрику,

$$ds^2 = K'' d\Phi d\bar{\Phi}. \quad (2.58)$$

Необходимо записать эту метрику в переменных  $r$  и  $\sigma$ , где  $r = \langle G \rangle$ , а  $\sigma$  отождествляется с мнимой частью суперполя  $\Phi$ ,  $\sigma = \text{Im}\Phi$ . Воспользуемся свойством, что обратное преобразование Лежандра получается как повторное преобразование. Тогда находим

$$K'(\Phi + \bar{\Phi}) = r. \quad (2.59)$$

Это уравнение, совместно с (2.56) позволяет нам заключить, что

$$K''(\Phi + \bar{\Phi}) = \left( \frac{\partial(\Phi + \bar{\Phi})}{\partial r} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{g(r)}, \quad (2.60)$$

где

$$g(r) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + m^2}} + \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{r^2 - m^2}{(r^2 + m^2)^2}. \quad (2.61)$$

Наконец, отметим, что из (2.56) следуют равенства

$$d\Phi = g(r)dr + id\sigma, \quad d\bar{\Phi} = g(r)dr - id\sigma. \quad (2.62)$$

Подставляя эти тождества совместно с (2.60) в выражение (2.58), находим метрику пространства модулей в виде

$$ds^2 = \frac{1}{2}g(r)dr^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{g(r)}d\sigma^2. \quad (2.63)$$

Заметим, что в безмассовом пределе функция  $g(r)$  в (2.61) упрощается,

$$ds^2|_{m=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4\pi r} + \frac{e^2}{8\pi^2 r^2} \right) dr^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4\pi r} + \frac{e^2}{8\pi^2 r^2} \right)^{-1} d\sigma^2. \quad (2.64)$$

Уравнение (2.64) показывает, что метрика на пространстве модулей содержит двухпетлевую поправку вида  $\frac{e^2}{8\pi^2 r^2}$ . Можно предположить, что, в общем случае,  $n$ -петлевая поправка к метрике имеет вид  $c_n \frac{1}{e^2} \left(\frac{e^2}{r}\right)^n$ , где  $c_n$  – некоторые коэффициенты. Было бы интересно найти все эти поправки и получить точное непертурбативное выражение для этой метрики, как в абелевой так и в неабелевой  $\mathcal{N} = 2$  суперкалибровочной теории. В этом случае можно было бы изучить поведение данной метрики при малых  $r$ . Эта метрика была впервые получена в работе [108] на основе геометрических принципов и носит название метрики Taub-NUT. Неперенормируемость однопетлевого результата отмечалась ранее в [68].

## 2.6 Классическое действие и структура двухпетлевого эффективного действия $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной электродинамики

Классическое действие  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамики имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{N}=4} &= \frac{1}{e^2} \int d^7z (G^2 - \frac{1}{2} \bar{\Phi} \Phi) + S_Q, \\ S_Q &= - \int d^7z (\bar{\mathcal{Q}}_+ \mathcal{Q}_+ + \bar{\mathcal{Q}}_- \mathcal{Q}_-) - \int d^5z \mathcal{Q}_+ \Phi \mathcal{Q}_- + \int d^5\bar{z} \bar{\mathcal{Q}}_+ \bar{\Phi} \bar{\mathcal{Q}}_-. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ковариантно-киральные суперполя  $\mathcal{Q}_\pm$  выражаются через обычные киральные суперполя  $Q_\pm$  по правилу (2.10). Действие (2.65) явно  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрично, но дополнительно оно инвариантно относительно преобразований “скрытой”  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметрии,

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}^\alpha \bar{\theta}_\alpha \Phi - \epsilon^\alpha \theta_\alpha \bar{\Phi}), \\ \delta \Phi &= i \epsilon^\alpha W_\alpha, \quad \delta \bar{\Phi} = i \bar{\epsilon}^\alpha \bar{W}_\alpha, \\ \delta \mathcal{Q}_+ &= -\frac{1}{4} \bar{\nabla}^2 (\bar{\epsilon}^\alpha \bar{\theta}_\alpha \bar{\mathcal{Q}}_-), \quad \delta \mathcal{Q}_- = \frac{1}{4} \bar{\nabla}^2 (\bar{\epsilon}^\alpha \bar{\theta}_\alpha \bar{\mathcal{Q}}_+), \\ \delta \bar{\mathcal{Q}}_+ &= -\frac{1}{4} \nabla^2 (\epsilon^\alpha \theta_\alpha \mathcal{Q}_-), \quad \delta \bar{\mathcal{Q}}_- = \frac{1}{4} \nabla^2 (\epsilon^\alpha \theta_\alpha \mathcal{Q}_+), \end{aligned} \quad (2.66)$$

где  $\epsilon^\alpha$  и  $\bar{\epsilon}^\alpha$  – параметры преобразований суперсимметрии. Отметим, что выражение (2.65) получается размерной редукцией из действия  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 4$  суперсимметричной электродинамики. Двухпетлевое эффективное действие для последней изучалось в [82].

$\mathcal{N} = 4$  калибровочный мультиплет состоит из пары  $\mathcal{N} = 2$  суперполей  $(V, \Phi)$ . Совершим фоново-квантовое расщепление этих полей,

$$V \rightarrow V + e v, \quad \Phi \rightarrow \Phi + e \phi. \quad (2.67)$$

Суперполя гипермультиплета  $(\mathcal{Q}_+, \mathcal{Q}_-)$  будем считать квантовыми, не имеющими фоновой части. Фоновое суперполе  $V$  удовлетворяет уравнениям (1.23) и (1.24), а киральное суперполе  $\Phi$  будем считать постоянным,

$$D_\alpha \Phi = 0. \quad (2.68)$$

Квантование в калибровке Ферми-Фейнмана (3.11) приводит к следующему

действию для “квантовых” суперполей

$$S_{\text{quantum}} = S_2 + S_{\text{int}}, \quad (2.69)$$

$$S_2 = - \int d^7 z (v \square v + \frac{1}{2} \bar{\phi} \phi + \bar{\mathcal{Q}}_+ \mathcal{Q}_+ + \bar{\mathcal{Q}}_- \mathcal{Q}_-) - \left( \int d^5 z \mathcal{Q}_+ \Phi \mathcal{Q}_- + c.c. \right), \quad (2.70)$$

$$S_{\text{int}} = -2 \int d^7 z \left[ e \left( \bar{\mathcal{Q}}_+ \mathcal{Q}_+ - \bar{\mathcal{Q}}_- \mathcal{Q}_- \right) v + e^2 \left( \bar{\mathcal{Q}}_+ \mathcal{Q}_+ + \bar{\mathcal{Q}}_- \mathcal{Q}_- \right) v^2 \right] - e \int d^5 z \mathcal{Q}_+ \phi \mathcal{Q}_- + e \int d^5 \bar{z} \bar{\mathcal{Q}}_+ \bar{\phi} \bar{\mathcal{Q}}_- + O(e^3). \quad (2.71)$$

Пропагаторы для гипермультиплетов и для калибровочного суперполя  $V$  имеют такой же вид, как в  $\mathcal{N} = 2$  электродинамике (2.11) и (2.12), но параметр  $m$  теперь заменяется на фоновое суперполе  $\Phi$ . Кроме того, необходимо также учитывать пропагатор кирального суперполя  $\phi$ ,

$$\langle \phi(z) \bar{\phi}(z') \rangle = -\frac{i}{8} \bar{D}^2 D^2 G_0(z, z'). \quad (2.72)$$

По сравнению с  $\mathcal{N} = 2$  электродинамикой, имеются также дополнительные вершины с киральным суперполем  $\phi$ , которые соответствуют членам в последней строке в (4.137). С учетом этих пропагаторов и вершин для суперполя  $\phi$ , мы получаем, что двухпетлевое эффективное действие  $\mathcal{N} = 4$  электродинамики содержит дополнительный вклад  $\Gamma_C$  по сравнению с  $\mathcal{N} = 2$  электродинамикой (2.16),

$$\Gamma_{\mathcal{N}=4}^{(2)} = \Gamma_A + \Gamma_B + \Gamma_C, \quad (2.73)$$

$$\Gamma_A = -2e^2 \int d^7 z d^7 z' G_{+-}(z, z') G_{+-}(z', z) G_0(z, z'), \quad (2.74)$$

$$\Gamma_B = -2e^2 \int d^7 z d^7 z' \bar{\Phi} \Phi G_+(z, z') G_-(z, z') G_0(z, z'), \quad (2.75)$$

$$\Gamma_C = 2e^2 \int d^7 z d^7 z' G_{+-}(z, z') G_{+-}(z, z') G_0(z, z'). \quad (2.76)$$

Часть эффективного действия  $\Gamma_A$  представлена диаграммами типа А на рис. 1, которые имеют такую же структуру, как и в  $\mathcal{N} = 2$  электродинамике. Поэтому воспользуемся ранее найденным выражением (2.34) для  $\Gamma_A$ .

Слагаемое  $\Gamma_B$  в (2.73) соответствует диаграмме типа В на рис. 1. Выражение (2.75) может быть получено из (2.38) при замене параметра  $m$  на киральное суперполе  $\Phi$ . Поскольку рассматривается постоянное фоновое киральное

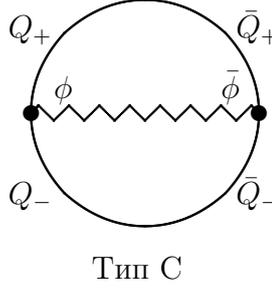


Рис. 2: Двухпетлевой граф в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамике, содержащий пропагатор кирального суперполя  $\langle \phi \bar{\phi} \rangle$ .

суперполе (2.68), результат вычисления диаграммы этого типа будет иметь вид (2.42) с заменой  $m^2 \rightarrow \bar{\Phi}\Phi$ .

Последний член  $\Gamma_C$  в (2.73) является новым по сравнению с  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамикой. Он содержит пропагатор кирального суперполя вида (2.72) и соответствует диаграмме типа С на рис. 2.

Однопетлевое эффективное действие в  $\mathcal{N} = 4$  электродинамике было получено ранее в работе [78]. Оно имеет вид (2.17), где параметр  $m$  необходимо заменить на фоновое суперполе  $\Phi$ ,

$$\Gamma_{\mathcal{N}=4}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int d^7z \left[ G \ln(G + \sqrt{G^2 + \bar{\Phi}\Phi}) - \sqrt{G^2 + \bar{\Phi}\Phi} \right] + \frac{1}{8\pi} \int d^7z \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{i\pi s}} e^{is(G^2 + \bar{\Phi}\Phi)} \frac{W^2 \bar{W}^2}{B^2} \left( \frac{\tanh(sB/2)}{sB/2} - 1 \right). \quad (2.77)$$

Далее мы рассмотрим вычисление двухпетлевых вкладов в эффективное действие.

## 2.7 Двухпетлевое эффективное действие в модели $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной электродинамики

Рассмотрим диаграмму типа С на рис. 2. Соответствующее аналитическое выражение (2.76) очень похоже на (2.19), но аргументы у входящих в него функций Грина имеют другой порядок. При вычислении этой диаграммы мы будем следовать процедуре, описанной в разделе 2.4.

Воспользуемся пропагатором (2.13) и определением теплового ядра

$$K_{+-}(z, z'|s) \quad (1.66),$$

$$\Gamma_C = -2ie^2 \int d^7z d^3\rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4i\pi u)^{3/2}} e^{i\frac{\rho^m \rho_m}{4u}} e^{i\bar{\Phi}\Phi(s+t)} K_{+-}(z, z'|s) K_{+-}(z, z'|t) \Big|_{\zeta \rightarrow 0}. \quad (2.78)$$

Тепловое ядро  $K_{+-}(z, z'|s)$  при совпадающих точках имеет вид (1.101). Подставим это выражение в (2.78),

$$\Gamma_C = -\frac{4ie^2}{(4i\pi)^{9/2}} \int d^7z d^3\rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(stu)^{3/2}} e^{i(s+t)(G^2 + \bar{\Phi}\Phi)} \frac{stB^2}{\sinh(sB) \sinh(tB)} \times e^{i\frac{1}{4}\rho A \rho + \rho_m W^\alpha (f_{\alpha\beta}^m(s) + f_{\alpha\beta}^m(t)) \bar{W}^\beta - 2iGW^\alpha (f_\alpha^\beta(s) + f_\alpha^\beta(t)) \bar{W}_\beta + \frac{i}{2}W^2 \bar{W}^2 (f(s) + f(t))}. \quad (2.79)$$

Здесь матрица  $A$  имеет вид (2.22), а функции  $f(s)$ ,  $f_\alpha^\beta(s)$  и  $f_{\alpha\beta}^m(s)$  выписаны явно в (1.103). Нетрудно заметить, что (2.79) отличается от (2.21) только одним знаком в последней строке. Следовательно, можно ожидать ряд сокращений между вкладками от (2.79) и (2.21).

Вычислим гауссов интеграл по  $d^3\rho$  в выражении (2.79),

$$\int d^3\rho e^{i\frac{1}{4}\rho_m A^{mn} \rho_n + \rho_m W^\alpha (f_{\alpha\beta}^m(s) + f_{\alpha\beta}^m(t)) \bar{W}^\beta} = -\frac{(4\pi i)^{3/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{i}{2}W^2 \bar{W}^2 \tilde{\mathcal{F}}(s,t,u)}, \quad (2.80)$$

где аналогично предыдущему случаю функция в показателе экспоненты появляется в результате вычисления интеграла

$$\tilde{\mathcal{F}}(s, t, u) = -\frac{1}{2} (f_{\alpha\beta}^m(s) + f_{\alpha\beta}^m(t)) (A^{-1})_m{}^n (f_n^{\alpha\beta}(s) + f_n^{\alpha\beta}(t)). \quad (2.81)$$

В части эффективного действия  $\Gamma_A + \Gamma_C$  функция (2.81) входит в комбинации с (2.28),

$$\mathcal{F}(s, t, u) - \tilde{\mathcal{F}}(s, t, u) = 2f_{\alpha\beta}^m(s) (A^{-1})_{mn} f^{m\alpha\beta}(t). \quad (2.82)$$

С учетом явного вида функции  $f_{\alpha\beta}^m$  в (1.103) и обратной матрицы  $A^{-1}$  (2.29), вычислим свертки по индексам в (2.82),

$$\mathcal{F}(s, t, u) - \tilde{\mathcal{F}}(s, t, u) = \frac{\mathcal{F}^+(s, t)}{a + u^{-1}} + \frac{\mathcal{F}^-(s, t)}{b + u^{-1}}, \quad (2.83)$$

где  $a$  и  $b$  определены в (2.24) и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^+(s, t) &= \frac{8}{B^2} \tanh \frac{sB}{2} \tanh \frac{tB}{2} \left[ \cosh(B(s-t)) \right. \\ &\quad \left. + \cosh(2B(s-t)) + \cosh(B(s+t)) \right], \\ \mathcal{F}^-(s, t) &= \frac{4}{stB^4} \left[ (\cosh sB - 1)(\cosh tB - 1) \right. \\ &\quad \left. - (\sinh sB - sB)(\sinh tB - tB) \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Таким образом, для суммы слагаемых  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_C$  мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_A + \Gamma_C &= \frac{i e^2}{32\pi^3} \int d^7 z W^2 \bar{W}^2 \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(stu)^{3/2}} e^{i(s+t)(G^2 + \bar{\Phi}\Phi)} \\ &\times \frac{stB^2}{\sinh sB \sinh tB} \frac{1}{(a + u^{-1})(b + u^{-1})} \left[ \frac{\mathcal{F}^+(s, t)}{a + u^{-1}} + \frac{\mathcal{F}^-(s, t)}{b + u^{-1}} \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Наконец, произведем интегрирование по  $du$  с использованием (2.33),

$$\begin{aligned} \Gamma_A + \Gamma_C &= \frac{i e^2}{32\pi^3} \int d^7 z W^2 \bar{W}^2 \int_0^\infty \frac{ds dt}{(st)^{3/2}} e^{i(s+t)(G^2 + \bar{\Phi}\Phi)} \frac{stB^2}{\sinh sB \sinh tB} \\ &\times \left[ \frac{1}{a - b} \left( \frac{2\mathcal{F}^-}{b} - \frac{\mathcal{F}^+}{a} \right) + \frac{2a(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-) - b\mathcal{F}^+}{(a(a - b))^{3/2}} \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{a}{b}} \right]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Вклад в эффективное действие от диаграммы типа В на рис. 1 может быть легко получен на основе (2.42) и (2.43),

$$\begin{aligned} \Gamma_B &= \frac{e^2}{4\pi^3} \int d^7 z \frac{W^2 \bar{W}^2 \Phi \bar{\Phi}}{B^2} \int_0^\infty \frac{ds dt}{\sqrt{st}} e^{i(s+t)(G^2 + \bar{\Phi}\Phi)} \\ &\times \tanh \frac{sB}{2} \tanh \frac{tB}{2} \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{a/b}}{\sqrt{a(a - b)}}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

В заключении отметим, что двухпетлевой вклад в низкоэнергетическое эффективное действие  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамики имеет вид (2.73), где выражения для  $\Gamma_A + \Gamma_C$  и  $\Gamma_B$  представлены явно в (2.86) и (2.87). В этих выражениях видно, что все двухпетлевые вклады в эффективное действие содержат выражение  $W^2 \bar{W}^2$ , но отсутствуют слагаемые без суперполей  $G$ . Следовательно, в  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной электродинамике отсутствуют двухпетлевые вклады в метрику пространства модулей скалярных полей.

### 3 Ведущие двухпетлевые вклады в эффективное действие трехмерной электродинамики Черна-Саймонса

В этой главе будет рассмотрено построение низкоэнергетического эффективного действия в трехмерной абелевой  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной калибровочной теории, описывающей взаимодействие поля Черна-Саймонса с материей. В предыдущей главе на основе метода фонового поля в  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространстве [78–80] было получено двухпетлевое низкоэнергетическое действие в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  электродинамике с максвелловским кинетическим членом. В настоящей главе рассмотрим схожую теорию, однако теперь в качестве кинетического члена будем рассматривать слагаемое Черна-Саймонса.

#### 3.1 Предварительные замечания

Рассмотрим задачу вычисления двухпетлевого эффективного действия для трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамики с кинетическим членом Черна-Саймонса с точностью до слагаемых с четырьмя пространственно-временными производными от компонентных полей. В таком приближении низкоэнергетическое эффективное действие имеет следующую структуру

$$\Gamma = \int d^7z [f_1(G) + f_2(G)W^\alpha\bar{W}^\beta N_{\alpha\beta} + f_3(G)W^2\bar{W}^2], \quad (3.1)$$

где  $f_i(G)$  – некоторые функции от скалярной напряженности калибровочного суперполя  $G$  и  $N_{\alpha\beta} = D_\alpha W_\beta$  имеет уже описанный ранее вид. В представленной главе будут найдены двухпетлевые поправки к функциям  $f_i(G)$ .

Функция  $f_1(G)$  в (3.1) имеет важную геометрическую интерпретацию: ее вторая производная определяет метрику пространства модулей калибровочной теории в кулоновской фазе [68]. В частности, в предыдущей главе была вычислена двухпетлевая поправка к метрике пространства модулей в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной электродинамике. Однако известно, что кулонова фаза отсутствует в трехмерных калибровочных теориях с действием Черна-Саймонса. В данной главе непосредственными пертурбативными вычислениями будет показано, что функция  $f_1(G)$  не получает двухпетлевых квантовых поправок. Это подтверждает отсутствие кулоновой фазы в теориях Черна-Саймонса с материей. Функции  $f_2(G)$  и  $f_3(G)$  в (2.1) отвечают за

слагаемое пропорциональное  $F^4$ , где  $F_{mn}$  есть максвелловская напряженность калибровочного поля.

Отметим еще один важный момент. В общем случае, эффективное действие калибровочно зависимо вне массовой оболочки и только его часть, остающаяся нетривиальной на уравнениях движения, является калибровочно независимой. В этой главе подразумевается, что фоновое калибровочное суперполе удовлетворяет  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричным уравнениям Максвелла, а не уравнениям движения в теории Черна-Саймонса с материей. При вычислении двухпетлевого эффективного действия используется пропагатор калибровочного суперполя с произвольным параметром фиксации калибровки. Нам необходимо будет явно доказывать, что получаемые вклады в эффективное действие не зависят от данного параметра. Это будет гарантировать калибровочную независимость результатов вычислений.

### 3.2 Классическое действие и структура эффективного действия

Рассмотрим модель с классическим действием вида

$$S = \frac{k}{2\pi} \int d^7z V G - \int d^7z (\bar{Q}_+ e^{2V} Q_+ + \bar{Q}_- e^{-2V} Q_-) - \left( m \int d^5z Q_+ Q_- + c.c. \right), \quad (3.2)$$

где  $V$  – калибровочное суперполе с напряженностью  $G = \frac{i}{2} \bar{D}^\alpha D_\alpha V$  и  $Q_\pm$  – заряженные киральные суперполя материи. Параметр  $m$  представляет собой массу кирального суперполя, а константа  $k$  – уровень Черна-Саймонса. В случае  $m = 0$  изучаемая модель обладает суперконформной инвариантностью. Классическое действие (3.2) описывает  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперсимметричную электродинамику с кинетическим членом Черна-Саймонса

Цель данной главы – изучение низкоэнергетического эффективного действия в модели (3.2) в калибровочном секторе. В общем случае, оно представляет собой функционал от суперполей напряженности  $G$ ,  $W_\alpha$ ,  $\bar{W}_\alpha$  и их производных,  $N_{\alpha\beta} = D_\alpha W_\beta$ ,  $\bar{N}_{\alpha\beta} = \bar{D}_\alpha \bar{W}_\beta$ ,

$$\Gamma = \int d^7z \mathcal{L}(G, W_\alpha, \bar{W}_\alpha, N_{\alpha\beta}, \bar{N}_{\alpha\beta}, \dots), \quad (3.3)$$

точками обозначены высшие производные от суперполевых напряженностей. В общем случае, построить эффективное действие (3.3) с учетом всех произ-

водных полей представляется достаточно сложной задачей. Поэтому, упростим задачу и ограничимся рассмотрением слагаемых, содержащих не более четырех пространственно-временных производных от полей в компонентной формулировке. В суперпространстве такие слагаемые учитываются уже описанными выше вкладами в эффективное действие (3.1). В принципе, можно включить в (3.1) также слагаемые вида  $\int d^7z f(G)W^\alpha\bar{W}_\alpha$ , но они обращаются в ноль на уравнениях движения для фоновых суперполей  $N_\alpha^\alpha = D^\alpha W_\alpha = 0$ ,

$$\begin{aligned}\int d^7z f(G)W^\alpha\bar{W}_\alpha &= -\frac{1}{2}\int d^5z (\bar{D}^\alpha f(G))(\bar{D}_\alpha\bar{W}^\beta)W_\beta \\ &= -\frac{1}{2}\int d^5z W^\alpha N_\alpha^\beta W_\beta f'(G) = 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Рассмотрим задачу о вычислении квантовых поправок к функциям  $f_i$  в (3.1) в двухпетлевом приближении

$$f_i(G) = f_i^{(1)}(G) + f_i^{(2)}(G), \quad (3.5)$$

где  $f_i^{(1)}(G)$  и  $f_i^{(2)}(G)$  отвечают одно- и двухпетлевым вкладам, соответственно. Отметим, что однопетлевые вклады были вычислены ранее в работе [78]:

$$f_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi}(G \ln(G + \sqrt{G^2 + m^2}) - \sqrt{G^2 + m^2}), \quad (3.6)$$

$$f_2^{(1)} = 0, \quad (3.7)$$

$$f_3^{(1)} = \frac{1}{128\pi} \frac{1}{(G^2 + m^2)^{5/2}}. \quad (3.8)$$

Интерес представляет вычисление функций  $f_i^{(2)}$ , которые учитывают двухпетлевые вклады в эффективное действие (3.1).

Следуя методу фонового поля, расщепим калибровочное суперполе  $V$  на фоновое  $V$  и квантовое  $v$ ,

$$V \rightarrow V + v. \quad (3.9)$$

С учетом этого расщепления слагаемое Черна-Саймонса в (3.2) изменится следующим образом

$$\frac{k}{2\pi} \int d^7z VG \rightarrow \frac{k}{2\pi} \int d^7z VG + \frac{k}{\pi} \int d^7z vG + \frac{ik}{4\pi} \int d^7z vD^\alpha\bar{D}_\alpha v. \quad (3.10)$$

Оператор в последнем слагаемом в (3.10) вырожден и требует фиксации калибровки, которая обеспечивается действием

$$S_{\text{gf}} = \frac{ik\alpha}{8\pi} \int d^7z v(D^2 + \bar{D}^2)v, \quad (3.11)$$

где  $\alpha$  – произвольный вещественный параметр. Добавляя (3.11) в (3.2) получим действие для квантового суперполя  $v$ ,

$$S_{\text{quant}} = S_2 + S_{\text{int}}, \quad (3.12)$$

$$S_2 = \int d^7z \left( \frac{ik}{4\pi} v H v - \bar{Q}_+ Q_+ - \bar{Q}_- Q_- \right) - \left( m \int d^5z Q_+ Q_- + c.c. \right), \quad (3.13)$$

$$S_{\text{int}} = -2 \int d^7z \left[ (\bar{Q}_+ Q_+ - \bar{Q}_- Q_-) v + (\bar{Q}_+ Q_+ + \bar{Q}_- Q_-) v^2 \right] + O(v^3), \quad (3.14)$$

Оператор  $H$  представляет собой суперсимметричный дифференциальный оператор второго порядка

$$H = D^\alpha \bar{D}_\alpha + \frac{\alpha}{2} (D^2 + \bar{D}^2). \quad (3.15)$$

В (3.13) и (3.14) использованы обозначения  $Q_\pm$  и  $\bar{Q}_\pm$  для ковариантно (анти)киральных суперполей по отношению к фоновому калибровочному супер полю, которое уже вводилось ранее (2.10) в предыдущей главе.

Рассмотрим пропагатор для суперполя  $v$ ,

$$2i \langle v(z) v(z') \rangle = G_0(z, z'), \quad (3.16)$$

где функция Грина  $G_0(z, z')$  определяется как решение уравнения

$$\frac{ik}{4\pi} H G_0(z, z') = -\delta^7(z - z'). \quad (3.17)$$

Используя явный вид оператора  $H$  (3.15) можно показать, что функция Грина  $G_0(z, z')$  записывается в виде

$$G_0(z, z') = \frac{i\pi}{k} \left( \frac{\bar{D}^\alpha D_\alpha}{\square} + \frac{1}{2\alpha} \frac{D^2 + \bar{D}^2}{\square} \right) \delta^7(z, z'). \quad (3.18)$$

В принципе, можно выбрать калибровочный параметр  $\alpha \rightarrow \infty$  для упрощения вида пропагатора (3.18). Однако в дальнейшем не будем фиксировать значение для  $\alpha$ , считая его произвольным для контроля зависимости эффективного действия от калибровки.

### 3.3 Двухпетлевое эффективное действие

Двухпетлевой вклад в эффективное действие записывается в виде

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma_A + \Gamma_B, \quad (3.19)$$

$$\Gamma_A = -2 \int d^7z d^7z' G_{+-}(z, z') G_{-+}(z, z') G_0(z, z'), \quad (3.20)$$

$$\Gamma_B = -2m^2 \int d^7z d^7z' G_+(z, z') G_-(z, z') G_0(z, z'). \quad (3.21)$$

Слагаемые  $\Gamma_A$  и  $\Gamma_B$  в (3.19) соответствуют фейнмановским графам типа А и В на рис. 1, соответственно.

Функция Грина  $G_0(z, z')$  (3.18) может быть представлена интегралом по собственному времени  $s$ ,

$$G_0(z, z') = -\frac{\pi}{k} \left[ \bar{D}^\alpha D_\alpha + \frac{1}{2\alpha} (D^2 + \bar{D}^2) \right] \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi i s)^{3/2}} e^{\frac{i\rho^2}{4s}} \zeta^2 \bar{\zeta}^2, \quad (3.22)$$

где  $\rho^m$  и  $\zeta$  компоненты суперсимметричного интервала (1.27).

### 3.3.1 Независимость двухпетлевого эффективного действия от параметра фиксации калибровки

Рассмотрим оператор в квадратных скобках в (3.22). Покажем, что часть этого оператора,  $D^2 + \bar{D}^2$ , не дает вклад в (3.19). Для определенности рассмотрим только с  $\bar{D}^2$ , оператор  $D^2$  может быть рассмотрен аналогичным образом. Проинтегрируем по частям в выражении (3.20), после чего оператор  $\bar{D}^2$  будет действовать на функцию Грина  $G_{-+}(z, z')$ . В соответствие с определением (1.65), получим два слагаемых:

$$\frac{1}{4} \bar{\nabla}^2 G_{-+}(z, z') = -\delta_+(z, z') - m^2 G_+(z, z'). \quad (3.23)$$

Дельта-функция в (3.23) дает нулевой вклад в (3.20), поскольку выражение (3.22) уже содержит грассманову дельта-функцию  $\zeta^2 \bar{\zeta}^2 = \delta^2(\theta - \theta') \delta^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}')$ . Рассмотрим вклад в  $\Gamma_A$  от последнего слагаемого в (3.23),

$$\begin{aligned} & \int d^7 z d^7 z' \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4\pi i u)^{3/2}} \zeta^2 \bar{\zeta}^2 e^{\frac{i\rho^2}{4u}} e^{i(s+t)m^2} K_+(z, z'|s) K_{+-}(z, z'|t) \\ &= \int d^7 z d^3 \rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4\pi i u)^{3/2}} e^{\frac{i\rho^2}{4u}} e^{i(s+t)m^2} K_+(z, z'|s) K_{+-}(z, z'|t) \Big\| . \end{aligned} \quad (3.24)$$

В полученном выражении интегрирование проводится по одному набору грассмановых переменных. Символ  $\Big\|$  во второй строке выражения (3.24) означает, что следует рассматривать предел совпадающих грассмановых координат,

$$\Big\| \equiv \Big|_{\theta=\theta', \bar{\theta}=\bar{\theta}'} . \quad (3.25)$$

Отметим, что бозонные координаты  $x_m$  и  $x'_m$  при этом остаются произвольными. Будем использовать обозначение (3.25) на протяжении всего дальнейшего рассмотрения.

Важно отметить, что тепловое ядро  $K_+$  при совпадающих суперпространственных аргументах содержит  $W^2$  (1.104). Поэтому выражение (3.24) может быть представлено в виде

$$\int d^7 z W^2 \mathcal{F}(G, B), \quad (3.26)$$

где  $\mathcal{F}(G, B)$  – некоторая функция. Легко убедиться, что (3.26) обращается в ноль с учетом используемых ограничений на фоновое суперполе (1.23) и (1.24). В самом деле, переходя к киральному подпространству, получим

$$\begin{aligned} \int d^7 z W^2 \mathcal{F}(G, B) &= -\frac{1}{4} \int d^5 z W^2 \bar{D}^2 \mathcal{F}(G, B) \\ &= -\frac{1}{4} \int d^5 z W^2 W^2 \mathcal{F}_{GG}''(G, B) \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Это выражение обращается в ноль в силу того, что напряженность  $W$  имеет грассманову четность равную единице. Поэтому, комбинация  $W^\alpha W^\beta W^\gamma$  тождественно равна нулю.

Если рассмотреть аналогичные вклады в выражении  $\Gamma_B$ , то можно заметить, что они имеют аналогичную структуру (3.24) после интегрирования по частям оператора  $\bar{D}^2$ . Поэтому вклады в  $\Gamma_B$ , содержащие параметр  $\alpha$ , также отсутствуют.

В результате, оператор  $D^2 + \bar{D}^2$  в (3.22) не дает вклад ни в  $\Gamma_A$ , ни в  $\Gamma_B$ . Это доказывает, что низкоэнергетическое эффективное действие (3.1) не зависит от параметра фиксации калибровки  $\alpha$  в пропагаторе калибровочного суперполя (3.18). Поэтому, при петлевых вычислениях будем использовать функцию Грина (3.22) в пределе  $\alpha \rightarrow \infty$ ,

$$G_0(z, z')|_{\alpha \rightarrow \infty} = -\frac{\pi}{k} \bar{D}^\alpha D_\alpha \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi i s)^{3/2}} e^{\frac{i\rho^2}{4s}} \zeta^2 \bar{\zeta}^2. \quad (3.28)$$

### 3.3.2 Двухпетлевая диаграмма типа А

Рассмотрим часть эффективного действия  $\Gamma_A$  (3.20) с пропагатором калибровочного суперполя в виде (3.28) и проинтегрируем по частям производные  $D^\alpha \bar{D}_\alpha$ , которые входят в пропагатор (3.28).

$$\Gamma_A = -\frac{2\pi}{k} \int d^7 z d^3 \rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4\pi i u)^{3/2}} e^{\frac{i\rho^2}{4u}} e^{i(s+t)m^2} \nabla^\alpha K_{+-}(z, z'|s) \bar{\nabla}_\alpha K_{-+}(z, z'|t) \Big| \Big|. \quad (3.29)$$

Для вычисления (3.29) необходимо найти выражения для производных от тепловых ядер  $\nabla_\alpha K_{+-}(z, z'|s)$  и  $\bar{\nabla}_\alpha K_{-+}(z, z'|t)$ . В общем случае это трудная задача, поскольку тепловые ядра сами по себе имеют сложную структуру (1.73). Поэтому будем использовать следующее упрощения:

- При вычислении производной от теплового ядра будем опускать слагаемые, которые обращаются в ноль в пределе совпадающих грассмановых переменных  $\theta = \theta'$ .
- Поскольку представляют интерес вклады в эффективное действие вида (3.1), достаточно рассмотреть только слагаемые, которые зависят от суперполевых напряженностей  $G, W_\alpha, \bar{W}_\alpha$  и содержат  $N_{\alpha\beta}$  не выше, чем в первой степени. Слагаемые с высшими степенями  $N_{\alpha\beta}$  отвечают за слагаемые в эффективном действии, содержащие более четырех производных компонентных полей и, поэтому, не учитываются в рамках данной работы.

Для учета данных упрощений необходимо переписать все известные выражения для ядер с точностью до первого порядка по  $N_{\alpha\beta}$ . Например,  $s$ -зависимые переменные (1.44) с точностью до первого порядка по  $N_{\alpha\beta}$  имеют вид

$$W^\alpha(s) \approx W^\alpha - sN_\beta^\alpha W^\beta, \quad \bar{W}^\alpha(s) \approx \bar{W}^\alpha - sN_\beta^\alpha \bar{W}^\beta, \quad (3.30)$$

$$\zeta^\alpha(s) \approx \zeta^\alpha - sW^\alpha + \frac{1}{2}s^2 N_\beta^\alpha W^\beta, \quad (3.31)$$

$$\bar{\zeta}^\alpha(s) \approx \bar{\zeta}^\alpha - s\bar{W}^\alpha + \frac{1}{2}s^2 N_\beta^\alpha \bar{W}^\beta, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \rho^m(s) \approx & \rho^m - i(\gamma^m)^{\alpha\beta} [s(W_\alpha \bar{\zeta}_\beta + \bar{W}_\alpha \zeta_\beta) - \frac{s^2}{2} N_{\alpha\gamma} (W^\gamma \bar{\zeta}_\beta + \bar{W}^\gamma \zeta_\beta) \\ & + \frac{s^3}{6} N_{\alpha\beta} W \bar{W}]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь и далее символ “ $\approx$ ” означает, что выражение рассматривается в приближении до первого порядка по  $N_{\alpha\beta}$  и все слагаемые порядка  $O(N^2)$  отброшены.

Для вычисления выражения (3.29) необходимо найти  $\nabla_\alpha K_{+-}(z, z'|s)$  и  $\bar{\nabla}_\alpha K_{-+}(z, z'|t)$ . Используя (1.73), эти объекты могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha K_{+-}(z, z'|s) &= M_\alpha(s) \cdot K_{+-}(z, z'|s), \\ \bar{\nabla}_\alpha K_{-+}(z, z'|t) &= \tilde{M}_\alpha(t) \cdot K_{-+}(z, z'|t), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
M_\alpha(s) &= \left[ 2isG\bar{W}_\alpha + \frac{i}{2}(F \coth(sF))_{mn}\rho^m(s)\nabla_\alpha\rho^n(s) + \nabla_\alpha R(z, z') \right. \\
&\quad \left. + \nabla_\alpha I(z, z') + \int_0^s dt \nabla_\alpha (R'(t) + \Sigma(t)) \right] \Big\|, \\
\tilde{M}_\alpha(t) &= \left[ 2itGW_\alpha + \frac{i}{2}(F \coth(tF))_{mn}\tilde{\rho}^m(t)\bar{\nabla}_\alpha\tilde{\rho}^n(t) + \bar{\nabla}_\alpha\tilde{R}(z, z') \right. \\
&\quad \left. + \bar{\nabla}_\alpha I(z, z') + \int_0^s dt \bar{\nabla}_\alpha (\tilde{R}'(t) + \Sigma(t)) \right] \Big\|. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Используя точное выражение для (3.33), (1.34), (1.70) и (1.78) будем иметь

$$\nabla_\alpha\rho^n(s) \Big\| \approx is^2\gamma_{\beta\gamma}^m N_\alpha^\beta \bar{W}^\gamma, \tag{3.36}$$

$$\nabla_\alpha R(z, z') \Big\| \approx -\frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta, \tag{3.37}$$

$$\nabla_\alpha I(z, z') \Big\| \approx \frac{1}{2}\rho_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta, \tag{3.38}$$

$$\int_0^s dt \nabla_\alpha (R'(t) + \Sigma(t)) \Big\| \approx is^2GN_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta + 2is^2\bar{W}^2W_\alpha. \tag{3.39}$$

Таким образом для  $M_\alpha(s)$  получим

$$\begin{aligned}
M_\alpha(s) &\approx 2isG\bar{W}_\alpha + is^2GN_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta + 2is^2\bar{W}^2W_\alpha \\
&\quad - \frac{s}{2}\rho_m\gamma_{\beta\gamma}^m N_\alpha^\beta \bar{W}^\gamma - \frac{3i}{4}s^3\bar{W}^2N_{\alpha\beta}W^\beta, \\
\tilde{M}_\alpha(t) &\approx 2itGW_\alpha + it^2GN_{\alpha\beta}W^\beta - 2it^2W^2\bar{W}_\alpha \\
&\quad + \frac{t}{2}\rho_m\gamma_{\beta\gamma}^m N_\alpha^\gamma W^\beta + \frac{3i}{4}t^3W^2N_{\alpha\beta}\bar{W}^\beta. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Выражение (3.34) включает тепловое ядро  $K_{+-}(z, z'|s)$  при совпадающих грассмановых переменных (1.101). Для вычисления части эффективного действия  $\Gamma_A$  необходимо разложить (1.101) до первого порядка по  $N_{\alpha\beta}$ . В частности, функции (1.103) в этом приближении имеют вид

$$f_\alpha^\beta(s) \approx -s^2\delta_\alpha^\beta + \frac{1}{3}s^3N_\alpha^\beta, \tag{3.41}$$

$$f(s) \approx -\frac{7}{12}s^3, \tag{3.42}$$

$$f_{\alpha\beta}^m(s) \approx -\frac{s}{2}\gamma_{\alpha\beta}^m + \frac{1}{12}s^2\varepsilon_{\alpha\beta}(\gamma_{\rho\sigma}^m N^{\rho\sigma}) + \frac{3}{4}s^2(\gamma_{\beta\gamma}^m N_\alpha^\gamma + \gamma_{\alpha\gamma}^m N_\beta^\gamma). \tag{3.43}$$

Подставляя последние соотношения в выражение (1.101), получим

$$K_{+-}(z, z'|s) \Big\| \approx -\frac{1}{(4i\pi s)^{3/2}} e^{\frac{i}{4s}\rho^2 + isG^2} e^{X(\rho^m, s)}, \tag{3.44}$$

где введено следующее обозначение

$$\begin{aligned}
X(\rho^m, s) = & is^2 GW^\alpha \bar{W}_\alpha - \frac{i}{3} s^3 GW^\alpha N_\alpha^\beta \bar{W}_\beta - \frac{s}{2} \rho_m \gamma_{\alpha\beta}^m W^\alpha \bar{W}^\beta \\
& + \frac{1}{12} s^2 \rho_m (\gamma^m N) W^\alpha \bar{W}_\alpha + \frac{3}{2} s^2 \rho_m \gamma_{\gamma(\alpha}^m N_{\beta)}^\gamma W^\alpha \bar{W}^\beta - \frac{7i}{24} s^3 W^2 \bar{W}^2.
\end{aligned} \quad (3.45)$$

Используя полученные функции, перепишем часть эффективного действия (3.29) в следующем виде

$$\begin{aligned}
\Gamma_A = & -\frac{2\pi}{k(4\pi i)^{9/2}} \int d^7 z d^3 \rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(stu)^{3/2}} e^{\frac{ip^2}{4}(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u})} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \\
& \times M^\alpha(s) \tilde{M}_\alpha(t) e^{X(\rho^m, s) + X(-\rho^m, t)}.
\end{aligned} \quad (3.46)$$

С учетом (3.40) и (3.45) получаем

$$\begin{aligned}
M^\alpha(s) \tilde{M}_\alpha(t) e^{X(\rho^m, s) + X(-\rho^m, t)} = & -4stG^2 W^\alpha \bar{W}_\alpha + 2stG^2 (s-t) \bar{W}^\alpha W^\beta N_{\alpha\beta} \\
& + 4st(t-s) GW^2 \bar{W}^2 + 2ist(s^2 + t^2) G^3 W^2 \bar{W}^2 \\
& + istG \rho_m \gamma_{\rho\sigma}^m N_\alpha^\sigma (\bar{W}^\alpha W^\rho + \bar{W}^\rho W^\alpha) \\
& + st \left[ \frac{i}{2}(s+t) + \frac{G^2}{12}(s-t)(5s-t) \right] \rho_m (\gamma^m N) W^2 \bar{W}^2.
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Слагаемые в последних двух строках в (3.47) содержат бозонный интервал  $\rho^m$  в первой степени. Эти слагаемые не дают вклад в эффективное действие в силу очевидного свойства гауссова интеграла

$$\int d^3 \rho \rho_m e^{\frac{ip^2}{4}(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u})} = 0. \quad (3.48)$$

Вычислим гауссовы интегралы по  $d^3 \rho$  в первых двух строках выражения (3.47) с помощью известной формулы

$$\int d^3 \rho e^{\frac{i}{4} a \rho^2} = - \left( \frac{4i\pi}{a} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad a = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u}. \quad (3.49)$$

Поэтому, после интегрирования по  $du$ , эффективное действие (3.46) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
\Gamma_A = & \frac{i}{16\pi^2 k} \int d^7 z \int_0^\infty ds dt \frac{\sqrt{st}}{s+t} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} \left[ -4G^2 \bar{W}^\alpha W_\alpha \right. \\
& \left. + 2(s-t)G^2 \bar{W}^\alpha W^\beta N_{\alpha\beta} - 4(s-t)GW^2 \bar{W}^2 + 2i(s^2 + t^2)G^3 W^2 \bar{W}^2 \right].
\end{aligned} \quad (3.50)$$

Выражение (3.50) содержит слагаемое с  $W^\alpha \bar{W}_\alpha$ . Оно обращается в ноль на массовой оболочке вследствие (3.4). Кроме того, имеются два слагаемых

в (3.50), содержащие разность параметров собственного времени  $(s - t)$ . Эти слагаемые обращаются в ноль в силу того, что они нечетны относительно замены переменных интегрирования  $s \leftrightarrow t$ . Таким образом, только последнее слагаемое в (3.50) дает нетривиальный вклад для рассматриваемого калибровочного фона (1.23) и (1.24). Вычисляя интеграл по переменным  $s$  и  $t$  в (3.50), получим окончательный результат для  $\Gamma_A$  в виде

$$\Gamma_A = -\frac{15}{256\pi k} \int d^7z \frac{G^3 W^2 \bar{W}^2}{(G^2 + m^2)^4}. \quad (3.51)$$

Заметим, что данный ответ не содержит квантовых расходимостей и не требует регуляризации.

### 3.3.3 Двухпетлевая диаграмма типа В

Теперь рассмотрим часть эффективного действия (3.21) с пропагатором калибровочного суперполя (3.28),

$$\Gamma_B = -\frac{2\pi m^2}{k} \int d^7z d^3\rho \int_0^\infty \frac{ds dt du}{(4\pi i u)^{3/2}} e^{\frac{ip^2}{4u}} e^{i(s+t)m^2} \nabla^\alpha K_+(z, z'|s) \bar{\nabla}_\alpha K_-(z, z'|t) \Big\| . \quad (3.52)$$

Для вычисления этой части эффективного действия необходимо найти производные от тепловых ядер  $K_+(z, z'|s)$  (1.61) и  $K_-(z, z'|s)$  (1.62) в пределе совпадающих грасмановых переменных,

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha K_+(z, z'|s) \Big\| &= \frac{1}{(4\pi i s)^{3/2}} P_\alpha(s) \exp \left[ isG^2 + \frac{i}{4} (F \coth(sF))_{mn} \rho^m(s) \rho^n(s) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \bar{\zeta}^\beta(s) \rho_{\beta\gamma}(s) W^\gamma(s) + \int_0^s dt \Sigma(z, z'|t) \right] I(z, z') \Big\| , \quad (3.53) \end{aligned}$$

где через  $P_\alpha(s)$  обозначено следующее выражение

$$\begin{aligned} P_\alpha(s) &= \left\{ \nabla_\alpha \zeta^2(s) + \left[ 2isG\bar{W}_\alpha + \frac{i}{4} (F \coth(sF))_{mn} \rho^m(s) \nabla_\alpha \rho^n(s) + \nabla_\alpha I(z, z') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \nabla_\alpha (\bar{\zeta}^\beta(s) \rho_{\beta\gamma}(s) W^\gamma(s)) + \int_0^s \nabla_\alpha \Sigma(z, z'|t) dt \right] \zeta^2(s) \right\} \Big\| . \quad (3.54) \end{aligned}$$

Необходимо вычислить все объекты в (3.54) до первого порядка по  $N_{\alpha\beta}$ ,

$$\nabla_\alpha \rho^m(s) \parallel \approx \rho^m - \frac{i}{6} s^3 (\gamma^m N) W^\alpha \bar{W}_\alpha, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla_\alpha (\bar{\zeta}^\beta(s) \rho_{\beta\gamma}(s) W^\gamma(s)) \parallel &\approx -\frac{s}{2} \bar{W}^\beta \rho_m \gamma_{\beta\gamma}^m N_\alpha^\gamma \\ &+ \frac{3i}{4} (s^2 \bar{W}^2 W_\alpha - s^3 \bar{W}^2 N_{\alpha\beta} W^\beta), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \int_0^s dt \nabla_\alpha \Sigma(z, z'|t) \parallel &\approx -is G \bar{W}_\alpha + \frac{is^2}{2} G N_{\alpha\beta} \bar{W}^\beta \\ &- \frac{is^3}{6} W^2 N_{\alpha\beta} W^\beta - \frac{s}{12} \rho_m (\gamma^m N) \bar{W}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\nabla_\alpha \zeta^2(s) \parallel \approx -2s W_\alpha - s^2 N_{\alpha\beta} W^\beta. \quad (3.58)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.54) и удерживая слагаемые не выше первого порядка по  $N_{\alpha\beta}$ , получим

$$\nabla_\alpha K_+(z, z'|s) \parallel \approx \frac{1}{(4\pi is)^{3/2}} P_\alpha(s) e^{isG^2} e^{\frac{i}{4s}\rho^2}, \quad (3.59)$$

где окончательно для функции  $P_\alpha(s)$  будем иметь

$$P_\alpha(s) = -2s W_\alpha - s^2 N_{\alpha\beta} W^\beta + is^3 G W^2 \bar{W}_\alpha. \quad (3.60)$$

Аналогичным способом можно получить выражение для  $\bar{\nabla}_\alpha K_-(z, z'|s)$  в пределе совпадающих грассмановых переменных

$$\bar{\nabla}_\alpha K_-(z, z'|s) \parallel \approx \frac{1}{(4\pi is)^{3/2}} \tilde{P}_\alpha(s) e^{isG^2} e^{\frac{i}{4s}\rho^2}, \quad (3.61)$$

$$\tilde{P}_\alpha(s) = 2s \bar{W}_\alpha + s^2 N_{\alpha\beta} \bar{W}^\beta - is^3 G \bar{W}^2 W_\alpha. \quad (3.62)$$

Подставляя полученные выражения (3.59)–(3.62) обратно в соотношение (3.52) и интегрируя по  $d^3\rho$  используя (3.49), находим

$$\begin{aligned} \Gamma_B &= \frac{im^2}{16\pi^2 k} \int d^7z \int_0^\infty \frac{ds dt \sqrt{st}}{(s+t)} e^{i(s+t)(G^2+m^2)} [-4W^\alpha \bar{W}_\alpha \\ &+ 2(s-t)W^\alpha N_{\alpha\beta} \bar{W}^\beta + 2i(s^2+t^2)GW^2 \bar{W}^2]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Заметим, что слагаемое, содержащее  $W^\alpha \bar{W}_\alpha$  в (3.63) не дает вклад в эффективное действие согласно (3.4). Первое слагаемое во второй строке в выражении (3.63) также обращается в ноль, правда в силу других причин. Это слагаемое является нечетным относительно замены переменных интегрирования  $s$  и  $t$ . Остается только последнее слагаемое в (3.63), которое после

вычисления интегралов по  $s$  и  $t$  запишется в виде

$$\Gamma_B = -\frac{15m^2}{256\pi k} \int d^7z \frac{G W^2 \bar{W}^2}{(G^2 + m^2)^4}. \quad (3.64)$$

Как и в случае диаграммы типа А, полученное выражение конечно.

### 3.3.4 Результаты двухпетлевых вычислений

Двухпетлевой вклад в эффективное действие определяется суммой двух вкладов от диаграмм А (3.51) и В (3.64),

$$\Gamma^{(2)} = -\frac{15}{256\pi k} \int d^7z \frac{G W^2 \bar{W}^2}{(G^2 + m^2)^3}. \quad (3.65)$$

В заключении отметим, что функции  $f_1(G)$  и  $f_2(G)$  в выражении (3.1) не дают двухпетлевых квантовых вкладов в эффективное действие

$$f_1^{(2)}(G) = f_2^{(2)}(G) = 0. \quad (3.66)$$

$\Gamma_B^{(2)}$  (3.65) соответствует следующему двухпетлевому вкладу в функцию  $f_3(G)$ :

$$f_3^{(2)}(G) = -\frac{15}{256\pi k} \frac{G}{(G^2 + m^2)^3}. \quad (3.67)$$

Однопетлевое эффективное действие в рассматриваемой теории, как отмечалось выше, было получено ранее в работе [78]. Стоит отметить, что однопетлевые вклады (3.6) и (3.8) совпадают с аналогичными результатами для трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  электродинамике с максвелловским кинетическим членом. Поэтому для обнаружения различий между этими теориями на квантовом уровне нам потребовалось исследование двухпетлевых вкладов в эффективное действие. Полученный результат показывает, что ведущие вклады в двухпетлевое эффективное действие не содержат ультрафиолетовых расходимостей. Задача о нахождении двухпетлевых вкладов, содержащих все степени напряженностей  $G$ ,  $W$  и  $\bar{W}$  или, что аналогично, все степени  $N_{\alpha\beta}$ , гораздо сложнее и содержит ряд технических трудностей.

## 4 Двухпетлевые эффективные потенциалы в общей модели $\mathcal{N} = 2$ , $d = 3$ кирального суперполя

В настоящей главе будут вычислены одно- и двухпетлевые квантовые поправки к классическим кэлерову и киральному потенциалам в общей трехмерной модели  $\mathcal{N} = 2$  кирального суперполя. Также будет обсуждаться применение полученных результатов к трехмерной модели Весса-Зумино. В частности, будет вычислен эффективный скалярный потенциал в модели Весса-Зумино.

### 4.1 Предварительные замечания

Общая трехмерная  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная модель с одним киральным суперполем  $\Phi$  описывается следующим действием

$$S = - \int d^3x d^4\theta K(\Phi, \bar{\Phi}) - \left( \int d^3x d^2\theta W(\Phi) + c.c. \right). \quad (4.1)$$

Здесь  $K(\Phi, \bar{\Phi})$  – кэлеров потенциал и  $W(\Phi)$  – киральный потенциал. Случай сигма-модели соответствует  $W = 0$ , но мы сохраним произвольный киральный потенциал для общности рассмотрения. Другой частный

$$K_{\text{WZ}} = \Phi\bar{\Phi}, \quad W_{\text{WZ}} = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{6}\Phi^3 + \frac{g}{24}\Phi^4, \quad (4.2)$$

соответствующий классическому действию  $\mathcal{N} = 2$  трехмерной модели Весса-Зумино.

Целью данной главы является нахождение суперполевого квантового эффективного действия в модели (4.1). В общем случае эффективное действие является нелокальным функционалом от фоновых суперполей. Мы будем интересоваться локальной частью квантового эффективного действия в модели (4.1), которая описывается эффективным кэлеровым и киральными потенциалами

$$\Gamma = - \int d^3x d^4\theta K_{\text{eff}}(\Phi, \bar{\Phi}) - \left( \int d^3x d^2\theta W_{\text{eff}}(\Phi) + c.c. \right). \quad (4.3)$$

Все нелокальные слагаемые или слагаемые с производными фоновых суперполей остаются за пределами данного приближения и будут систематически отбрасываться на всех этапах квантовых вычислений.

## 4.2 Эффективный кэлеров потенциал

В соответствии с петлевым разложением эффективного действия, эффективный кэлеров потенциал может быть представлен в виде ряда

$$K_{\text{eff}} = K + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots, \quad (4.4)$$

где  $K$  представляет собой классический кэлеров потенциал, а  $K^{(1)}$  и  $K^{(2)}$  соответствуют одно- и двух-петлевым вкладам. Многоточие в этом выражение подразумевает наличие квантовых вкладов от высших петель, которые не учитываются в рамках нашего рассмотрения.

### 4.2.1 Однопетлевые вклады

Разделим суперполе  $\Phi$  на “фоновое”  $\bar{\Phi}$  и “квантовое”  $\phi$  следующим образом:  $\Phi \rightarrow \bar{\Phi} + \phi$ . Для вычисления однопетлевого эффективного действия достаточно разложить классическое действие (4.1) в ряд до второго порядка по квантовым полям

$$\begin{aligned} S[\bar{\Phi}, \bar{\Phi}] = & - \int d^3x d^4\theta \left[ \frac{1}{2} \phi^2 K''_{\Phi\Phi} + \frac{1}{2} \bar{\phi}^2 K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} + \phi \bar{\phi} K''_{\Phi\bar{\Phi}} \right] \\ & - \left( \int d^3x d^2\theta \frac{1}{2} \phi^2 W''(\bar{\Phi}) + c.c. \right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где многоточие означает слагаемые более высокого порядка по квантовым полям. Для вычисления  $K_{\text{eff}}(\bar{\Phi}, \bar{\Phi})$  достаточно рассмотреть постоянные фоновые поля

$$D_\alpha \bar{\Phi} = 0, \quad \bar{D}_\alpha \bar{\Phi} = 0. \quad (4.6)$$

В этом случае слагаемые, включающие  $K''_{\Phi\Phi}$  и  $K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}$  в (4.5), отсутствуют.

Однопетлевое эффективное действие имеет вид

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln H, \quad (4.7)$$

где  $H$  представляет собой оператор, который определяет часть действия, квадратичного по фоновым суперполям,

$$H = \begin{pmatrix} -W'' & \frac{1}{4} K''_{\Phi\bar{\Phi}} \bar{D}^2 \\ \frac{1}{4} K''_{\bar{\Phi}\Phi} D^2 & \bar{W}'' \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Представим этот оператор в виде суммы двух слагаемых

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}K''_{\Phi\bar{\Phi}}\bar{D}^2 \\ \frac{1}{4}K''_{\Phi\bar{\Phi}}D^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} -W'' & 0 \\ 0 & \bar{W}'' \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

и разложим логарифм в (4.7) в ряд

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2}\text{Tr} \ln H_0 + \frac{i}{2}\text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (H_0^{-1}H_1)^n. \quad (4.10)$$

Для случая постоянных фоновых полей первое слагаемое в правой части (4.10) имеет вид

$$\frac{i}{2}\text{Tr} \ln H_0 = \frac{i}{4}\text{Tr} \ln H_0^2 = \frac{i}{4}\text{Tr}_+ \ln((K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2\Box) + c.c. \quad (4.11)$$

Здесь  $\text{Tr}_+$  означает функциональный след оператора, действующего в пространстве киральных суперполей. Оператор Даламбера в правой части (4.11) возникает из тождества

$$\frac{1}{16}\bar{D}^2 D^2 \Phi = \Box \Phi, \quad (4.12)$$

которое справедливо для всех киральных суперполей  $\Phi$  и следует из антикоммутационных соотношений для грассмановых производных,  $\{D_\alpha, \bar{D}_\beta\} = -2i\delta_{\alpha\beta}$ .

Используя обратный оператор

$$H_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\frac{\bar{D}^2}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}\Box} \\ \frac{1}{4}\frac{D^2}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}\Box} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

для второго слагаемого в правой части (4.10) получим

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2}\text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}\frac{\bar{W}''\bar{D}^2}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}\Box} \\ \frac{1}{4}\frac{W''D^2}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}\Box} & 0 \end{pmatrix}^n = \\ & = \frac{i}{4}\text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \begin{pmatrix} \left|\frac{W''}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}}\right|^2 \frac{1}{\Box} & 0 \\ 0 & \left|\frac{W''}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}}\right|^2 \frac{1}{\Box} \end{pmatrix}^n \\ & = \frac{i}{4}\text{Tr}_+ \ln \left( 1 + \left|\frac{W''}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}}\right|^2 \frac{1}{\Box} \right) + c.c. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Собирая вместе (4.11) и (4.14) получим следующее формальное выражение для однопетлевого эффективного действия

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{4} \text{Tr}_+ \ln(\square + M^2) + c.c., \quad (4.15)$$

где эффективный квадрат массы имеет следующий вид

$$M^2 = \left| \frac{W''}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}} \right|^2. \quad (4.16)$$

Функциональный след по киральным суперполям в (4.15) может быть записан в явном виде

$$\text{Tr}_+ \ln(\square + M^2) = \int d^5 z_1 d^5 z_2 \delta_+(z_2, z_1) \ln(\square + M^2) \delta_+(z_1, z_2). \quad (4.17)$$

Чтобы вычислить это выражение применим следующее тождество для киральных дельта-функций

$$\delta_+(z_2, z_1) = \frac{1}{16} \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta_+(z_2, z_1), \quad \delta_+(z_1, z_2) = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \delta^7(z_1 - z_2). \quad (4.18)$$

Затем, восстановим полную меру  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространства, используя дополнительный оператор  $\bar{D}^2$ ,

$$d^7 z = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 d^5 z, \quad (4.19)$$

и проинтегрируем по частям оператор  $D^2$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_+ \ln(\square + M^2) &= \int d^5 z_1 d^5 z_2 \left(-\frac{1}{4} \bar{D}_{(2)}^2\right) \left(-\frac{1}{4} \bar{D}_{(1)}^2\right) \left(-\frac{1}{4} D_{(1)}^2\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\square} \delta^7(z_2 - z_1) \ln(\square + M^2) \delta_+(z_1, z_2) \\ &= \int d^7 z_1 d^7 z_2 \left(-\frac{1}{4} D_{(1)}^2\right) \frac{1}{\square} \delta^7(z_2 - z_1) \ln(\square + M^2) \delta_+(z_1, z_2) \\ &= \int d^7 z_1 d^7 z_2 \delta^7(z_2 - z_1) \ln(\square + M^2) \left(-\frac{1}{4} D_{(1)}^2\right) \left(-\frac{1}{4} \bar{D}_{(1)}^2\right) \frac{1}{\square} \delta^7(z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Теперь, используя стандартное тождество

$$\delta^4(\theta_1 - \theta_2) \frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \delta^7(z_1 - z_2) = \delta^7(z_1 - z_2), \quad (4.21)$$

проинтегрируем по одному набору грассмановых переменных

$$\text{Tr}_+ \ln(\square + M^2) = \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^4 \theta \delta^3(x_1 - x_2) \ln(\square + M^2) \frac{1}{\square} \delta^3(x_2 - x_1). \quad (4.22)$$

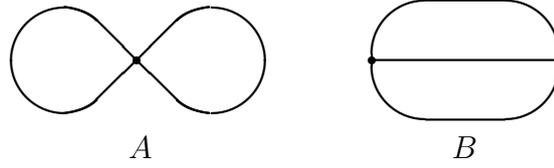


Рис. 3: Топологии двухпетлевых Фейнмановских диаграмм.

Переходя к импульсному представлению, вычислим интеграл по импульсам,

$$-\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{M^2}{p^2} \right) = \frac{i}{2\pi} |M|. \quad (4.23)$$

В результате, получим следующий ответ для однопетлевого вклада в кэлеров потенциал

$$K^{(1)}(\Phi, \bar{\Phi}) = \frac{1}{4\pi} |M| = \frac{1}{4\pi} \frac{|W''|}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}}. \quad (4.24)$$

Однопетлевой вклад в эффективный кэлеров потенциал (4.24) конечен, что не является неожиданностью, поскольку в трехмерных теориях поля ультрафиолетовые расходимости (в рамках размерной регуляризации) могут возникать только в диаграммах с четным количеством петель.

#### 4.2.2 Двухпетлевые вклады

Двухпетлевые диаграммы Фейнмана содержат трех- и четырехточечные вершины ( см. рис. 3). Поэтому, достаточно разложить классическое действие вплоть до четвертого порядка по квантовым суперполям.

$$S = S_2 + S_{\text{int}} + \dots, \quad (4.25)$$

$$S_2 = -\int d^3x d^4\theta K''_{\Phi\bar{\Phi}} \phi \bar{\phi} - \left( \int d^3x d^2\theta \frac{1}{2} W'' \phi^2 + c.c. \right), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} = & -\frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta \left( K_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)} \phi^2 \bar{\phi} + K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)} \bar{\phi}^2 \phi \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)} \phi^2 \bar{\phi}^2 + \frac{1}{3} K_{\Phi^3\bar{\Phi}}^{(4)} \phi^3 \bar{\phi} + \frac{1}{3} K_{\bar{\Phi}^3\Phi}^{(4)} \bar{\phi}^3 \phi \right) \\ & - \left( \frac{1}{6} \int d^3x d^2\theta [W''' \phi^3 + \frac{1}{4} W^{(4)} \phi^4] + c.c. \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

В разложении (4.27) предполагается, что фоновые поля постоянны (4.6). В (4.27) опущены слагаемые, включающие  $K_{\Phi^n}^{(n)}$  и  $K_{\bar{\Phi}^n}^{(n)}$ , поскольку они обращаются в ноль в силу киральности полей  $\phi$ :  $\int d^7z \phi^n = 0$ .

Квадратичное действие (4.26) определяет пропагатор, который может быть вычислен точно для случая постоянного фона

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_{++}(z_1, z_2) & G_{+-}(z_1, z_2) \\ G_{-+}(z_1, z_2) & G_{--}(z_1, z_2) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} \frac{1}{\square+M^2} \delta_+(z_1, z_2) & -\frac{1}{4K''_{\Phi\bar{\Phi}}} \frac{1}{\square+M^2} \bar{D}^2 \delta_-(z_1, z_2) \\ -\frac{1}{4K''_{\Phi\bar{\Phi}}} \frac{1}{\square+M^2} D^2 \delta_+(z_1, z_2) & -\frac{\bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} \frac{1}{\square+M^2} \delta_-(z_1, z_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Вершины взаимодействия определяются из (4.27).

Будем следовать стандартной процедуре вычисления двухпетлевых Фейнмановских диаграмм в суперсимметричных полевых теориях [2]. Каждая линия на рис. 3 соответствует одному из элементов матричного суперпропагатора (4.28). Каждая вершина может быть либо киральной или антикиральной, например

$$S'''_{\Phi^3}(z_1, z_2, z_3) \equiv \frac{\delta^3 S}{\delta\Phi(z_1)\delta\Phi(z_2)\delta\Phi(z_3)} = -W'''(z_3)\delta_+(z_1, z_2)\delta_+(z_2, z_3), \quad (4.29)$$

либо некиральной, например

$$\begin{aligned} S'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_1, z_2, z_3) &\equiv \frac{\delta^3 S}{\delta\Phi(z_1)\delta\Phi(z_2)\delta\bar{\Phi}(z_3)} \\ &= \frac{1}{4}D^2_{(3)}[K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_3)\delta_+(z_2, z_3)]\delta_+(z_1, z_2), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} S'''_{\Phi\bar{\Phi}^2}(z_1, z_2, z_3) &\equiv \frac{\delta^3 S}{\delta\Phi(z_1)\delta\bar{\Phi}(z_2)\delta\bar{\Phi}(z_3)} \\ &= \frac{1}{4}D^2_{(2)}[K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2}(z_2)\delta_+(z_1, z_2)]\delta_-(z_2, z_3). \end{aligned} \quad (4.31)$$

В сравнении с киральными вершинами каждая некиральная вершина имеет в своем составе дополнительные операторы  $D^2$  или  $\bar{D}^2$ . Имеется множество комбинаторных комбинаций этих пропагаторов и вершин для построения двухпетлевых диаграмм, приведенных на рис. 3. Однако не все эти диаграммы дают вклад в эффективный кэлеров потенциал. Нужно учитывать только те диаграммы, которые имеют определенное количество  $D^2$  и  $\bar{D}^2$  операторов, необходимых для восстановления полной меры суперпространства в каждой вершине, используя (4.19) и затем применяя тождество (4.21) для каждой петли. Анализируя диаграммы топологии  $A$  на рис. 3, можно убедиться, что только одна такая диаграмма дает вклад в эффективный кэлеров потенциал

$$\Gamma_A = -\frac{1}{2} \int d^5 z_1 d^5 \bar{z}_2 d^5 z_3 d^5 \bar{z}_4 S^{(4)}_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}(z_1, z_2, z_3, z_4) G_{+-}(z_1, z_2) G_{+-}(z_3, z_4). \quad (4.32)$$

Здесь  $S^{(4)}$  представляет собой четвертую вариационную производную классического действия, записанную в явном виде в (4.38). Из всех диаграмм топологии  $B$  лишь следующие дают вклад в эффективный кэлеров потенциал

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_1} &= -\frac{1}{2} \int d^5 z_1 d^5 \bar{z}_2 d^5 \bar{z}_3 d^5 z_4 d^5 z_5 d^5 z_6 S_{\Phi\bar{\Phi}^2}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) S_{\Phi^3}^{(3)}(z_4, z_5, z_6) \\ &\quad \times G_{++}(z_1, z_4) G_{-+}(z_2, z_5) G_{-+}(z_3, z_6), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_2} &= -\frac{1}{6} \int d^5 \bar{z}_1 d^5 \bar{z}_2 d^5 \bar{z}_3 d^5 z_4 d^5 z_5 d^5 z_6 S_{\bar{\Phi}^3}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) S_{\Phi^3}^{(3)}(z_4, z_5, z_6) \\ &\quad \times G_{-+}(z_1, z_4) G_{-+}(z_2, z_5) G_{-+}(z_3, z_6), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_3} &= -\int d^5 z_1 d^5 \bar{z}_2 d^5 \bar{z}_3 d^5 z_4 d^5 z_5 d^5 \bar{z}_6 S_{\Phi\bar{\Phi}^2}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) S_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}(z_4, z_5, z_6) \\ &\quad \times G_{++}(z_1, z_4) G_{-+}(z_2, z_5) G_{--}(z_3, z_6), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_4} &= -\frac{1}{2} \int d^5 z_1 d^5 \bar{z}_2 d^5 \bar{z}_3 d^5 z_4 d^5 z_5 d^5 \bar{z}_6 S_{\Phi\bar{\Phi}^2}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) S_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}(z_4, z_5, z_6) \\ &\quad \times G_{+-}(z_1, z_6) G_{-+}(z_2, z_5) G_{-+}(z_3, z_4), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_5} &= -\frac{1}{2} \int d^5 \bar{z}_1 d^5 \bar{z}_2 d^5 \bar{z}_3 d^5 z_4 d^5 z_5 d^5 \bar{z}_6 S_{\bar{\Phi}^3}^{(3)}(z_1, z_2, z_3) S_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}(z_4, z_5, z_6) \\ &\quad \times G_{-+}(z_1, z_4) G_{-+}(z_2, z_5) G_{--}(z_3, z_6). \end{aligned} \quad (4.37)$$

#### 4.2.3 Вычисление двухпетлевого эффективного кэлерова потенциала

Рассмотрим выражение (4.32), которое возникает из диаграммы топологии  $A$  на рис. 3. Оно включает четвертую производную классического действия,

$$\frac{\delta^4 S}{\delta\Phi(z_1)\delta\Phi(z_2)\delta\bar{\Phi}(z_3)\delta\bar{\Phi}(z_4)} = \frac{1}{4} D_{(3)}^2 [K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)}(z_3)\delta_+(z_2, z_3)]\delta_-(z_3, z_4)\delta_+(z_1, z_2). \quad (4.38)$$

Используя эти дельта-функции, произведем интегрирование по  $z_1$  и  $z_2$  в (4.32),

$$\Gamma_A = -\frac{1}{8} \int d^5 \bar{z}_2 d^5 z_3 D_{(2)}^2 [K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)}(z_2)\delta_+(z_2, z_3)] G_{+-}(z_3, z_2) G_{+-}(z_3, z_2). \quad (4.39)$$

Теперь восстановим полную меру суперпространства используя (4.19) и проинтегрируем по  $z_3$ ,

$$\Gamma_A = \frac{1}{2} \int d^7 z K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)} G_{+-}(z, z) G_{+-}(z, z). \quad (4.40)$$

Пропагатор  $G_{+-}$  задан в (4.28). При совпадающих точках воспользуемся тождеством  $D^2\bar{D}^2\delta^4(\theta_1 - \theta_2)|_{\theta_1=\theta_2} = 16$  и вычислим импульсный интеграл,

$$\begin{aligned} G_{+-}(z, z) &= \frac{1}{K''_{\Phi\bar{\Phi}} \square + M^2} \delta^3(x_1 - x_2)|_{x_1=x_2} \\ &= -\frac{1}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 - M^2} = -\frac{i}{4\pi} \frac{|M|}{K''_{\Phi\bar{\Phi}}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Напомним, что  $M^2 = |W''|^2 / (K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2$ . В результате,

$$\Gamma_A = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^7z \frac{K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)} |W''|^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4}. \quad (4.42)$$

Рассмотрим теперь выражение (4.33), которое получается из диаграммы топологии  $B$  на рис. 3. Вершины на диаграмме даны в (4.29) и (4.31). Интегрируем четыре дельта-функции в этих вершинах и восстанавливаем полную меру интегрирования по суперпространству (4.19),

$$\Gamma_{B_1} = -\frac{1}{2} \int d^7z_2 d^5z_4 K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2}(z_2) W'''(z_4) G_{++}(z_2, z_4) G_{-+}(z_2, z_4) G_{-+}(z_2, z_4). \quad (4.43)$$

Отметим, что вследствие определения киральной  $\delta$ -функции  $\delta_+(z_1, z_1) = -\frac{1}{4}\bar{D}^2\delta^7(z_1 - z_2)$ , пропагатор  $G_{+-}(z, z')$  эффективно содержит четыре грасмановы производные, а пропагатор  $G_{++}$  только две. Используем две грасмановы производные для восстановления полной меры для того, чтобы применить тождество (4.21) дважды,

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_1} &= -\frac{1}{2} \int d^4\theta d^3x_1 d^3x_2 \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} W''' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} \left[ \frac{1}{\square + M^2} \delta^3(x_1 - x_2) \right]^3 \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^6} \int d^4\theta d^3p_1 d^3p_2 \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} W''' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} \frac{1}{p_1^2 - M^2} \frac{1}{p_2^2 - M^2} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - M^2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Вычисляя импульсный интеграл с использованием размерной регуляризации

$$\int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{p_1^2 - M^2} \frac{1}{p_2^2 - M^2} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} = \frac{\Gamma(\epsilon)}{32\pi^2 M^{2\epsilon}}, \quad (4.45)$$

получим

$$\Gamma_{B_1} = \frac{1}{64\pi^2} \int d^7z \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} W''' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} \frac{\Gamma(\epsilon)}{M^{2\epsilon}}. \quad (4.46)$$

В выражении (4.34) содержатся вариационные производные классического действия (4.29) и им сопряженные. Интегрируя все дельта-функции в этих

вершинах, получим

$$\Gamma_{B_2} = \frac{1}{6} \int d^5 \bar{z}_1 d^5 z_4 \bar{W}''' W''' G_{-+}^3(z_1, z_4). \quad (4.47)$$

Восстанавливая полную меру интегрирования и применяя тождество (4.21), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_2} &= \frac{1}{6} \int d^7 z_1 d^7 z_2 \frac{\bar{W}''' W'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^3} \frac{1}{\square + M^2} \delta^7(z_1 - z_2) \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{\square + M^2} \frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \delta^7(z_1 - z_2) \right]^2 \\ &= \frac{1}{6} \int d^4 \theta d^3 x_1 d^3 x_2 \frac{\bar{W}''' W'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^3} \left[ \frac{1}{\square + M^2} \delta^3(x_1 - x_2) \right]^3. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Вычисляя импульсный интеграл (4.45), находим

$$\Gamma_{B_2} = -\frac{1}{192\pi^2} \int d^7 z \frac{\bar{W}''' W'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^3} \frac{\Gamma(\epsilon)}{M^{2\epsilon}}. \quad (4.49)$$

Часть эффективного действия (4.35) включает вариационные производные классического действия (4.31) и им сопряженные. После интегрирования всех дельта-функций, идущих от вершин, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_3} &= - \int d^7 z_1 d^7 z_2 K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2}(z_1) K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_2) \\ &\quad \times G_{++}(z_1, z_2) G_{-+}(z_1, z_2) G_{--}(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Учитывая явный вид пропагаторов (4.28), применим тождество (4.21) и учтем импульсный интеграл (4.45),

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_3} &= \int d^4 \theta d^3 x_1 d^3 x_2 K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} \frac{W'' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \left[ \frac{1}{\square + M^2} \delta^3(x_1 - x_2) \right]^3 \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \int d^7 z K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} \frac{W'' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \frac{\Gamma(\epsilon)}{M^{2\epsilon}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Выражение (4.36) также включает вершину (4.31) и ей сопряженную. После интегрирования в этих вершинах, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{B_4} &= -\frac{1}{2} \int d^7 z_1 d^7 z_2 K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2}(z_1) K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_2) \\ &\quad \times G_{+-}(z_1, z_2) G_{-+}(z_1, z_2) G_{-+}(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Пропагаторы в этом выражении содержат три оператора  $D^2$  и три  $\bar{D}^2$ . Можем сократить две пары  $D^2\bar{D}^2$  применяя тождество (4.21) и заменяя  $\bar{D}^2D^2$  на оператор Даламбера, используя тождество(4.12). В результате, находим

$$\Gamma_{B_4} = -\frac{1}{2} \int d^4\theta d^3x_1 d^3x_2 \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^3} \frac{\square}{\square + M^2} \delta^3(x_1 - x_2) \times \left( \frac{1}{\square + M^2} \delta^3(x_1 - x_2) \right)^2. \quad (4.53)$$

Соответствующий импульсный интеграл имеет вид

$$\int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{p_1^2 - M^2} \frac{1}{p_2^2 - M^2} \frac{(p_1 + p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2 - M^2} = -\frac{M^2}{16\pi^2} + \frac{M^2 \Gamma(\epsilon)}{32\pi^2 M^{2\epsilon}}. \quad (4.54)$$

В результате, получаем выражением

$$\Gamma_{B_4} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^7z \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} W'' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} - \frac{1}{64\pi^2} \int d^7z \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} W'' \bar{W}''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \frac{\Gamma(\epsilon)}{M^{2\epsilon}}. \quad (4.55)$$

Заметим, что выражение (4.37) комплексно сопряжено (4.33),

$$\Gamma_{B_5} = (\Gamma_{B_1})^* = \frac{1}{64\pi^2} \int d^7z \frac{W'' \bar{W}''' K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} \frac{\Gamma(\epsilon)}{M^{2\epsilon}}. \quad (4.56)$$

Расходящиеся и конечные части во всех полученных выше выражениях могут быть разделены с помощью тождества

$$\frac{\Gamma(\epsilon)}{M^{2\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln M^2 + O(\epsilon), \quad (4.57)$$

где  $\gamma$  – константа Эйлера. Суммируя все полученные выражения (4.42), (4.46), (4.49), (4.51), (4.55) и (4.56), находим двухпетлевой вклад в кэлеров потенциал

$$\Gamma_K^{(2)} = \Gamma_{\text{div}} + \Gamma_{\text{fin}}, \quad (4.58)$$

$$\Gamma_{\text{div}} = \frac{1}{64\pi^2 \epsilon} \int d^7z \left[ \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} W''' \bar{W}'' + K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} W'' \bar{W}'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} - 3 \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} |W''|^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \right] - \frac{1}{192\pi^2 \epsilon} \int d^7z \frac{|W''''|^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^3}, \quad (4.59)$$

$$\Gamma_{\text{fin}} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^7z \left[ -\frac{K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)} |W''|^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} + \frac{1}{6} (\gamma + \ln \frac{M^2}{\mu^2}) \frac{|W''''|^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^3} - \frac{1}{2} (\gamma + \ln \frac{M^2}{\mu^2}) \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} W''' \bar{W}'' + K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} W'' \bar{W}'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4} + (1 + \frac{3}{2} \gamma + \frac{3}{2} \ln \frac{M^2}{\mu^2}) \frac{K'''_{\Phi\bar{\Phi}^2} K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}} |W''|^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \right]. \quad (4.60)$$

Параметр  $\mu^2$  в этом выражении представляет собой произвольный массовый масштаб, а  $\epsilon$  – параметр размерной регуляризации,  $d = 3 - 2\epsilon$ .

### 4.3 Эффективный киральный потенциал

#### 4.3.1 Общие свойства

Для четырехмерных  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных теорий поля теорема о неперенормируемости утверждает, что все вклады в эффективное действие могут быть представлены выражением в полной суперпространства (см., напр., [1, 2]),

$$\int d^4\theta f(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (4.61)$$

где  $f(\Phi, \bar{\Phi})$  – некоторая функция суперполей, которая может содержать производные. Легко проверить, что все шаги доказательства этой теоремы и общий вывод остается верным также для  $\mathcal{N} = 2, d = 3$  моделей.

Можно предположить, что (4.61) запрещает любые квантовые вклады в эффективный киральный потенциал  $W_{\text{eff}}$ , но для модели четырехмерного кирального суперполя [95–100] хорошо известно, что эффективное действие в полном суперпространстве приобретает конечные квантовые поправки вида

$$\int d^4\theta f(\Phi) \left( -\frac{D^2}{4\Box} \right) g(\Phi), \quad (4.62)$$

которые не находятся в противоречии с теоремой о неперенормируемости. Здесь  $f$  и  $g$  – некоторые функции. В этом разделе будет показано, что для трехмерной модели кирального суперполя двухпетлевые фейнмановские диаграммы также содержат слагаемые вида (4.62), которые дают вклад в киральный эффективный потенциал

$$\int d^3x d^4\theta f(\Phi) \left( -\frac{D^2}{4\Box} \right) g(\Phi) = \int d^3x d^2\theta f(\Phi) g(\Phi). \quad (4.63)$$

Важно отметить, что слагаемые в эффективном действии типа (4.62) могут появиться только в безмассовом случае. В самом деле, пропагатор в массивной модели включает в себя оператор  $(\Box + m^2)^{-1}$  вместо  $\Box^{-1}$ . Как следствие, в массивной модели соотношения (4.63) изменяется следующим образом

$$\int d^3x d^4\theta f(\Phi) \left( -\frac{D^2}{4(\Box + m^2)} \right) g(\Phi) = \int d^3x d^2\theta f(\Phi) \left( \frac{\Box}{\Box + m^2} \right) g(\Phi), \quad (4.64)$$

но это выражение обращается в нуль в пределе медленно меняющихся полей, за исключением случая  $m = 0$ . Следовательно, нетривиальный эффективный киральный потенциал может присутствовать только в безмассовой теории. Этот вывод полностью аналогичен случаю четырехмерной  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной модели кирального суперполя [97–100]. Таким образом, в этом разделе мы предполагаем, что киральный потенциал  $W(\Phi)$  в классическом действии (4.1) удовлетворяет условию

$$W''|_{\Phi=0} = 0. \quad (4.65)$$

Важно отметить, что для получения таких слагаемых, как (4.62), невозможно использовать приближение постоянного поля.<sup>7</sup> Фоновое киральное суперполе  $\Phi$  должно быть произвольным на протяжении всех расчетов, в то время как антикиральные суперполе можно положить равным нулю,

$$\bar{\Phi} = 0, \quad \Phi - \text{произвольно}. \quad (4.66)$$

Только после вычисления всех интегралов по импульсам и переходя к киральному подпространству используя (4.63), можно применить приближение постоянного поля для того чтобы выделить вклады в киральный эффективный потенциал.

### 4.3.2 Анализ возможных фейнмановских диаграмм, дающих вклад в киральный эффективный потенциал

Соотношение (4.63) показывает, что только те диаграммы Фейнмана дают вклад в киральной эффективной потенциал, которые содержат один  $D^2$  оператор на внешних линиях после выполнения всех операций  $D$ -алгебры и один оператор  $\square^{-1}$  после вычисления интегралов по импульсам. Прежде всего заметим, что однопетлевые диаграммы не могут дать вклад в эффективный киральный потенциал, поскольку соответствующий импульсный интеграл дает только нечетные степени внешнего импульса [116],  $|p| = \sqrt{p^m p_m}$ ,

$$\int d^3k \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^{2n}} \propto \frac{1}{|p|^{2n-1}}. \quad (4.67)$$

Вследствие (4.12),  $D$ -алгебра дает только четные степени импульса,  $p^{2n}$ . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только двухпетлевые диаграммы.

<sup>7</sup>Напомним, что пропагатор (4.28) был получен в приближении постоянного фонового суперполя.

Как и в предыдущей части, разделим киральное поле  $\Phi$  на “фоновое”  $\bar{\Phi}$  и “квантовое”  $\phi$ ,  $\Phi \rightarrow \bar{\Phi} + \phi$ , и рассмотрим разложение классического действия (4.1) до четвертого порядка по квантовым суперполям (см. (4.25)–(4.27))

$$S = S_2 + S_{\text{int},1} + S_{\text{int},2} + S_{\text{int},3} + \dots, \quad (4.68)$$

$$S_2 = - \int d^3x d^4\theta K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \phi \bar{\phi}, \quad (4.69)$$

$$S_{\text{int},1} = -\frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta \left( K_{\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}}^{(3)} \phi^2 \bar{\phi} + K_{\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}}^{(3)} \bar{\phi}^2 \phi + \frac{1}{2} K_{\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}^2}^{(4)} \phi^2 \bar{\phi}^2 + \frac{1}{3} K_{\bar{\Phi}^3\bar{\Phi}}^{(4)} \phi^3 \bar{\phi} + \frac{1}{3} K_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}^3}^{(4)} \bar{\phi}^3 \phi \right), \quad (4.70)$$

$$S_{\text{int},2} = -\frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \left( \phi^2 \left( -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \right) K''_{\bar{\Phi}^2} + \frac{1}{3} \phi^3 \left( -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \right) K'''_{\bar{\Phi}^3} + \frac{1}{12} \phi^4 \left( -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \right) K^{(4)}_{\bar{\Phi}^4} \right) - \frac{1}{2} \int d^3x d^2\bar{\theta} \left( \bar{\phi}^2 \left( -\frac{1}{4} D^2 \right) K''_{\bar{\Phi}^2} + \frac{1}{3} \bar{\phi}^3 \left( -\frac{1}{4} D^2 \right) K'''_{\bar{\Phi}^3} + \frac{1}{12} \bar{\phi}^4 \left( -\frac{1}{4} D^2 \right) K^{(4)}_{\bar{\Phi}^4} \right), \quad (4.71)$$

$$S_{\text{int},3} = -\frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \left( \phi^2 W'' + \frac{1}{3} \phi^3 W''' + \frac{1}{12} \phi^4 W^{(4)} \right) + c.c. \quad (4.72)$$

Отметим, что благодаря (4.66), все производные от  $K$  и  $W$ ,  $\bar{W}$  в этом разложении рассматриваются при нулевом антикиральном фоновом суперполе  $\bar{\Phi}$ . Поэтому все такие сомножители киральны.

Действие  $S_2$  отвечает за пропагатор

$$\langle \phi(z) \bar{\phi}(z') \rangle \equiv G_0(z, z') = -\frac{1}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}} \frac{D^2}{4\Box} \delta_+(z, z') = \frac{1}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}} \frac{D^2 \bar{D}^2}{16\Box} \delta^7(z - z'). \quad (4.73)$$

Отметим, что этот пропагатор содержит четыре грассмановы производные действующие на дельта-функцию, в то время как пропагаторы  $\langle \phi\phi \rangle$  и  $\langle \bar{\phi}\bar{\phi} \rangle$  заменены на соответствующие вершины.<sup>8</sup> Это обстоятельство ограничивает количество возможных диаграмм с этими операторами.

Действия (4.70), (4.71) и (4.72) отвечают за вершины, которые присутствуют в двухпетлевых фейнмановским диаграммах. Мы используем графические представления этих вершин в соответствии с Таблицей 1. Удобно различать эти вершин по отношению к типу суперпространства, по которому

<sup>8</sup>Слагаемые в действиях (4.71), (4.72), содержащие  $\phi^2$  и  $\bar{\phi}^2$  трактуются как вершины, а не пропагаторы для квантовых полей.

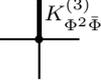
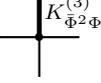
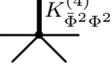
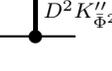
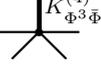
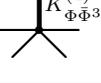
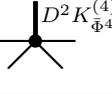
Полное суперпространство		Антикиральные вершины		Киральные вершины	
$K_{\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}}^{(3)}\phi^2\bar{\phi}$		$\bar{W}''' \bar{\phi}^3$		$W'' \phi^2$	
$K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)}\bar{\phi}^2\phi$		$\bar{W}^{(4)} \bar{\phi}^4$		$W''' \phi^3$	
$K_{\bar{\Phi}^2\Phi^2}^{(4)}\bar{\phi}^2\phi^2$		$(-\frac{1}{4}D^2K_{\bar{\Phi}^2}''\bar{\phi}^2$		$W^{(4)}\phi^4$	
$K_{\Phi^3\bar{\Phi}}^{(4)}\phi^3\bar{\phi}$		$(-\frac{1}{4}D^2K_{\bar{\Phi}^3}'''\bar{\phi}^3$			
$K_{\Phi\bar{\Phi}^3}^{(4)}\phi\bar{\phi}^3$		$(-\frac{1}{4}D^2K_{\bar{\Phi}^4}^{(4)}\bar{\phi}^4$			

Таблица 1: Графическое представление вершин, используемых в двухпетлевых вычислениях. Жирными линиями обозначены выражения зависящие от фоновых суперполей, а тонкими линиями обозначены квантовые суперполя.

ведется интегрирование (киральному, антикиральному или полному  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространству). Прокомментируем каждый из этих типов более подробно.

Действие  $S_{\text{int},1}$  отвечает за вершины в полном суперпространстве:  $K_{\bar{\Phi}^2\bar{\Phi}}^{(3)}\phi^2\bar{\phi}$ ,  $K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)}\bar{\phi}^2\phi$ ,  $K_{\bar{\Phi}^2\Phi^2}^{(4)}\bar{\phi}^2\phi^2$ ,  $\frac{1}{3}K_{\Phi^3\bar{\Phi}}^{(4)}\phi^3\bar{\phi}$  и  $\frac{1}{3}K_{\Phi\bar{\Phi}^3}^{(4)}\phi\bar{\phi}^3$ . Такие вершины несут дополнительные  $D^2$  или  $\bar{D}^2$  факторы по сравнению с (анти)киральными вершинами (см., напр., (4.30) и (4.31)). Эти  $D^2$ -операторы могут попасть как на внешние, так и на внутренние линии в диаграмме. Как только они попали на внешние линии, они больше не влияют на петлевой импульсный интеграл. Следовательно, необходимо рассматривать только те диаграммы, у которых есть только один оператор  $D^2$  на внешних линиях, необходимый для киральных вкладов в силу (4.63). Если эти операторы попадают на внутренние линии, они могут быть использованы либо для восстановления полной меры суперпространства (4.19), либо для увеличения степени расходимости диаграммы благодаря использованию  $D$ -алгебры (4.12). В дальнейшем, переменной  $n_1$  обозначим число вершин в диаграмме Фейнмана, соответствующее действию  $S_{\text{int},1}$ .

Действие  $S_{\text{int},2}$  содержит киральные и антикиральные вершины. Обратим

внимание, что киральные вершины содержат операторы  $\bar{D}^2$  на внешних линиях, но для применения тождества (4.63) необходим  $D^2$  оператор. Следовательно, мы можем пренебречь всеми слагаемыми в (4.71), содержащими оператор  $\bar{D}^2$  и будем рассматривать только антикиральные вершины, содержащие  $D^2$ . Переменной  $n_2$  обозначим число вершин в диаграммах Фейнмана, соответствующих второй строке (4.71). Очевидно, что диаграммы дающие вклад в эффективный киральный потенциал должны содержать не более одной такой вершиной,  $n_2 = 0$  или  $n_2 = 1$ .

Действие  $S_{\text{int},3}$  ответственно за (анти)киральные вершины без  $D^2$  или  $\bar{D}^2$  операторов. Обозначим число таких вершин переменной  $n_3$ .

Наша цель заключается в нахождении всех двухпетлевых диаграмм, дающих вклад в эффективный киральный потенциал. Это эквивалентно нахождению допустимых значений целочисленных переменных  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ . Стратегия дальнейших рассуждений выглядит следующим образом:

- нарисовать все допустимые двухпетлевые диаграммы с пропагатором (4.73) и с вершинами приведенными в Таблице 1;
- восстановить полную меру суперпространства во всех (анти)киральных вершинах с помощью грассмановых производных от пропагаторов;
- оставшиеся грассмановые производные могут быть проинтегрированы по частям, при этом появиться целый ряд различных слагаемых, но важны для рассмотрения только те из них, которые содержат ровно две производных  $D_\alpha$  на внешних линиях;
- два оператора  $\bar{D}^2 D^2$  “уничтожаются” при помощи тождества (4.21) (по одному для каждой петли);
- оставшиеся грассмановы производные генерируют внутренние импульсы, что увеличивает степень расходимости диаграмм;
- только те диаграммы приемлемы, в которых петлевые импульсные интегралы дают определенную степень внешних импульсов,  $p^{-2}$ . Тогда, применяя тождество (4.63), такая диаграмма может давать вклад в эффективный киральный потенциал.

**Диаграммы топологии A.** Диаграммы топологии  $A$  на рис. 3 имеют следующие четвертичные вершины:  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)}\phi^2\bar{\phi}^2$ ,  $\frac{1}{3}K_{\Phi^3\bar{\Phi}}^{(4)}\phi^3\bar{\phi}$ ,  $\frac{1}{3}K_{\bar{\Phi}^3\Phi}^{(4)}\bar{\phi}^3\phi$ ,  $\bar{\phi}^4(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^4}^{(4)}$ ,  $\phi^4W^{(4)}$  или  $\bar{\phi}^4\bar{W}^{(4)}$ . Рассмотрим фейнмановские графы этой топологии, которые содержат  $n_2$  вершин с  $\bar{\phi}^2(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^2}''$  и  $n_3$  вершин с  $\phi^2W''$ . Очевидно, такие диаграммы должны содержать  $n_2 + n_3 + 2$  пропагаторов (4.73), каждый из которых несет оператор  $D^2\bar{D}^2\Box^{-1}$ . Напомним, что нет антикиральных вершин, поскольку они равны нулю при рассматриваемом фоне (4.66) в безмассовой теории.

Некиральные вершины  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)}\phi^2\bar{\phi}^2$ ,  $\frac{1}{3}K_{\Phi^3\bar{\Phi}}^{(4)}\phi^3\bar{\phi}$ ,  $\frac{1}{3}K_{\bar{\Phi}^3\Phi}^{(4)}\bar{\phi}^3\phi$  интегрируются по всему суперпространству. Таким образом, мы должны восстановить полную меру суперпространства только для  $n_2$  антикиральных вершин с  $\bar{\phi}^2(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^2}''$  и  $n_3$  киральных вершин с  $\phi^2W''$  с помощью  $D$ -операторов, присутствующих в пропагаторах. Кроме того, интегрируя по частям необходимо собрать  $1 - n_2$  операторов  $D^2$  на внешних линиях, которые необходимы для тождества (4.63). Для каждой петли следует применить тождество (4.21), которое убирает оператор  $D^2\bar{D}^2$ . В результате остается  $(n_3 + n_2 - 1)$  операторов  $D^2$  и  $n_2$  операторов  $\bar{D}^2$ . Чтобы получить киральный эффективный потенциал, нельзя больше действовать грассмановыми производными на внешние линии. Следовательно, все эти грассмановы производные должны рекомбинировать во внутренние импульсы, это означает, что количество операторов  $D^2$  и  $\bar{D}^2$  должно быть равно, поэтому  $n_3 + n_2 - 1 = n_2$ . В результате, подходящие диаграммы имеют только  $n_3 = 1$  вершин  $\phi^2W''$ . Тогда для числа  $n_2$  единственная возможность  $n_2 = 1$  поскольку при  $n_2 = 0$  двухпетлевая диаграмма содержит только внешние линии и равна нулю автоматически. После использования всех  $D$ -операторов из пропагаторов остались один  $D^2$  и один  $\bar{D}^2$ , которые дают один  $\Box$  оператор в числителе, а четыре оператора  $\Box$  стоят в знаменателе четырех пропагаторов. В результате импульсный интеграл имеет следующую структуру

$$\int \frac{d^3k_1 d^3k_2 k_1^2}{k_1^2 k_2^2 (k_1 + p)^2 (k_2 + p)^2} \propto p^0, \quad (4.74)$$

но для нас необходимо  $p^{-2} \rightarrow \Box^{-1}$ , чтобы применить тождество (4.63). Следовательно диаграммы с вершинами  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}^2}^{(4)}\phi^2\bar{\phi}^2$ ,  $\frac{1}{3}K_{\Phi^3\bar{\Phi}}^{(4)}\phi^3\bar{\phi}$ ,  $\frac{1}{3}K_{\bar{\Phi}^3\Phi}^{(4)}\bar{\phi}^3\phi$  не дают вклада в эффективный киральный потенциал.

Рассмотрим диаграмму с вершиной  $\bar{\phi}^4(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^4}^{(4)}$ , которая интегрирует-

ся по антикиральному подпространству. Здесь уже есть один  $D^2$  на внешней линии, следовательно, нет вершин с  $\bar{\phi}^2(-\frac{1}{4}D^2)K''_{\bar{\phi}^2}$  и возможно  $n_2 = 0$ . Поскольку у нас есть только пропагаторы  $\langle\phi\bar{\phi}\rangle$ , но нет пропагаторов  $\langle\phi\phi\rangle$  и  $\langle\bar{\phi}\bar{\phi}\rangle$ , единственная возможность построить диаграмму топологии  $A$  это присоединить одну вершину  $\phi^2W''$  для каждой петли, т.е. сделав  $n_3 = 2$ . Из четырех пропагаторов возьмем один оператор  $D^2$  и два оператора  $\bar{D}^2$  для восстановления полной меры суперпространства в каждой вершине, при этом остается несбалансированное количество таких операторов, ведущих к нулевому вкладу в эффективный киральный потенциал.

Рассмотрим теперь диаграмму с четвертичной вершиной  $\phi^4W^{(4)}$ . Легко видеть, что такая диаграмма должна иметь по меньшей мере две  $\bar{\phi}^2(-\frac{1}{4}D^2)K''_{\bar{\phi}^2}$  вершины, потому что есть только пропагатор  $\langle\phi\bar{\phi}\rangle$ . Однако это приведет к двум операторам  $D^2$  на внешних линиях, а нужен только один оператор, чтобы применить тождество (4.63). Следовательно, такие диаграммы не дают вклад в эффективный киральный потенциал.

Наконец, необходимо рассмотреть диаграмму с четвертичной вершиной  $\bar{\phi}^4\bar{W}^{(4)}$ . Предположим, что она включает в себя также  $n_2$  вершин с  $\bar{\phi}^2(-\frac{1}{4}D^2)K''_{\bar{\phi}^2}$  и  $n_3$  вершин с  $\phi^2W''$ . Очевидно, что существует  $n_2 + n_3 + 2$  пропагаторов, каждый из которых несет оператор  $\square^{-1}D^2\bar{D}^2$ . Следует перенести на внешние линии  $1 - n_2$  операторов  $D^2$ , чтобы воспользоваться тождеством (4.63). Для восстановления полной меры суперпространства, необходимо также  $n_2 + 1$  операторов  $D^2$  и  $n_3$  операторов  $\bar{D}^2$ . Один оператор  $D^2\bar{D}^2$  расходуется при использовании тождества (4.21). В результате осталось  $n_2 + n_3 - 2$  операторов  $D^2$  и  $n_3$  операторов  $\bar{D}^2$ . Эти числа должны быть равны, так как мы не можем подействовать этими производными на внешние линии,  $n_2 + n_3 - 2 = n_3$ . Таким образом, единственно возможной является диаграмма с  $n_2 = 0$  and  $n_3 = 2$ . Соответствующий импульсный интеграл имеет правильную степень внешнего импульса для применения тождества (4.63)

$$\int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{k_1^2 k_2^2 (p+k_1)^2 (p+k_2)^2} = \frac{\pi^6}{p^2}. \quad (4.75)$$

В результате, диаграмма на Рис. 2а может дать вклад в эффективный киральный потенциал.

**Диаграмма топологии  $B$ .** Существуют две некиральные вершины  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}\phi^2\bar{\phi}$  и  $K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)}\bar{\phi}^2\phi$ , две киральные вершины  $\phi^3W'''$ ,  $\phi^3(-\frac{1}{4}\bar{D}^2)K_{\Phi^3}'''$  и две антикиральные,  $\bar{\phi}^3\bar{W}'''$ ,  $\bar{\phi}^3(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^3}'''$ , которые необходимо проинтегрировать в полном суперпространстве. Однако существует множество способов построить двухпетлевые диаграммы топологии  $B$  с этими вершинами. Давайте проанализируем все из них.

Рассмотрим диаграмму с двумя вершинами  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}\phi^2\bar{\phi}$  или  $K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)}\bar{\phi}^2\phi$  в полном суперпространстве, обладающую также  $n_2$  вершинами вида  $\bar{\phi}^2(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^2}''$  и  $n_3$  вершинами  $\phi^2W''$ . Из пропагаторов приходят  $3 + n_2 + n_3$  операторов  $\square^{-1}D^2\bar{D}^2$  сверх этого есть  $n_2$  операторов  $D^2$  и  $n_3$  операторов  $\bar{D}^2$  для восстановления полной меры суперпространства. Два оператора  $D^2\bar{D}^2$  пропадают в следствие тождества (4.21). Также необходимо подействовать  $1 - n_2$  операторами  $D^2$  на внешние линии чтобы можно было применить тождество (4.63). В результате, остаются  $n_2 + n_3$  операторов  $D^2$  и  $n_2 + 1$  операторов  $\bar{D}^2$ . Для получения внутреннего импульса в нужной степени, количество операторов  $D^2$  и  $\bar{D}^2$  должно совпадать,  $n_2 + n_3 = n_2 + 1$ . Следовательно,  $n_3 = 1$ , а число  $n_2$  равно 0, либо 1. Для обоих значений  $n_2$ , импульсный интеграл содержит такую же степень внешнего импульса, что и интеграл (4.74). Однако для применения тождества (4.63) после интегрирования по всем петлевым импульсам, необходим только один оператор  $\square^{-1}$ , но диаграмма только с кубическими вершинами в полном суперпространстве не может дать вклад в эффективный киральный потенциал.

Рассмотрим диаграмму с одной кубической вершиной  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}\phi^2\bar{\phi}$  или  $K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)}\bar{\phi}^2\phi$  в полном суперпространстве и одной киральной кубической вершиной  $\phi^3W'''$ . Как было отмечено в предыдущем случае, один оператор  $\bar{D}^2$  используется для восстановления полной меры суперпространства в киральной вершине, при этом остается еще  $n_2 + n_3$  операторов  $D^2$  и  $n_2$  операторов  $\bar{D}^2$ . Поэтому число  $n_3 = 0$ , а  $n_2$  равно либо 0, либо 1. Для обоих значений  $n_2$  импульсный интеграл содержит недостаточную степень импульса в знаменателе для получения оператора  $\square^{-1}$ , который необходим для тождества (4.63). Кубическая киральная вершина  $\phi^3(-\frac{1}{4}\bar{D}^2)K_{\Phi^3}'''$  может быть рассмотрена аналогичным образом с тем же негативным результатом.

Рассмотрим диаграмму с одной вершиной  $K_{\Phi^2\bar{\Phi}}^{(3)}\phi^2\bar{\phi}$  или  $K_{\bar{\Phi}^2\Phi}^{(3)}\bar{\phi}^2\phi$  в полном суперпространстве и с одной киральной вершиной  $\bar{\phi}^3\bar{W}'''$ . В противополо-

ложность предыдущему случаю, для восстановления полной меры суперпространства необходим оператор  $\bar{D}^2$  вместо  $D^2$ . Поэтому, останется  $n_2 + n_3 - 1$  операторов  $D^2$  и  $n_2 + 1$  операторов  $\bar{D}^2$ . Из уравнения  $n_2 + n_3 - 1 = n_2 + 1$  получим, что  $n_3 = 2$  и  $n_2 = 0$  или  $n_2 = 1$ . Возьмем, для примера,  $n_2 = 0$ , после чего получим пять операторов  $\square$  в знаменателе и один  $\square$  в числителе. Результирующий импульсный интеграл дает в точности оператор  $\square^{-1}$ , действующий на внешнюю линию, который необходим для тождества (4.63). Импульсный интеграл дает такую же степень внешнего импульса для случая  $n_2 = 1$ . Поэтому обе эти диаграммы  $b_1$  и  $b_3$  на Рис. 4 могут дать вклад в эффективный киральный потенциал. Их вычисления будут представлены в следующей части. Отметим, что схожая диаграмма с антикиральной кубической вершиной  $\bar{\phi}^3(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^3}'''$  не дает вклад в потенциал.

Проанализируем диаграммы с чистыми киральными или антикиральными кубическими вершинами. Возьмем диаграмму с двумя кубическими вершинами  $\phi^3 W'''$ . Теперь необходимо использовать лишние операторы  $\bar{D}^2$  для восстановления полной меры суперпространства в этих вершинах. В результате, остается  $n_2 + n_3$  операторов  $D^2$  и  $n_2 - 1$  операторов  $\bar{D}^2$ . Сравнивая эти числа, получим недопустимое значение  $n_3 = -1$ . Поэтому, такие диаграммы не дают вклад в эффективный киральный потенциал.

Возьмем диаграмму с одной киральной кубической вершиной  $\phi^3 W'''$  и одной антикиральной вершиной  $\bar{\phi}^3 \bar{W}'''$ . Поле восстановления полной меры суперпространства в этих вершинах останется  $n_3 + n_2 - 1$  операторов  $D^2$  и  $n_2$  операторов  $\bar{D}^2$ . Сравнивая эти числа, получим  $n_3 = 1$  и  $n_2 = 1$ . При этом импульсный интеграл дает нужную степень внешнего импульса  $p^{-2}$ , и поэтому эта диаграмма может дать вклад в эффективный киральный потенциал. Такая диаграмма представлена на Рис. 4  $b_2$ . Однако аналогичная диаграмма с вершиной  $\bar{\phi}^3(-\frac{1}{4}D^2)K_{\bar{\Phi}^3}'''$  не дает вклада в эффективный потенциал.

Рассмотрим диаграмму с двумя антикиральными вершинами  $\bar{\phi}^3 \bar{W}'''$ , которые требуют два дополнительных оператора  $D^2$  для восстановления полной меры интегрирования. Остается  $n_2 + n_3 - 2$  операторов  $D^2$  и  $n_2 + 1$  операторов  $\bar{D}^2$ . Сравнивая эти числа, получим  $n_3 = 3$  и  $n_2 = 0$ . Однако от шести пропагаторов получим шесть операторов  $\square^{-1}$ , но только один оператор  $\square$  приходит от  $D$ -алгебры. Результирующий импульсный интеграл дает  $\square^{-2}$  вместо  $\square^{-1}$ , который необходим для применения тождества (4.63). Поэтому, эта диа-

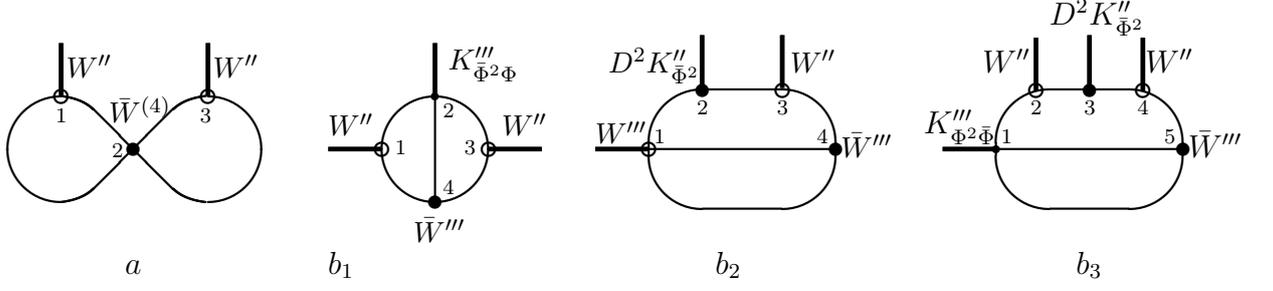


Рис. 4: Диаграммы, дающие вклад в эффективный киральный потенциал

грамма не дает вклада в эффективный киральный потенциал. Отметим, что аналогичная диаграмма с одной вершиной  $\bar{\phi}^3(-\frac{1}{4}D^2)K'''_{\bar{\Phi}^2\Phi}$  вместо  $\bar{\phi}^3\bar{W}'''$  так же не дает вклада в эффективный киральный потенциал.

В результате, для того чтобы найти вклады в эффективный киральный потенциал, необходимо вычислить диаграммы изображенные на Рис. 4.

#### 4.3.3 Детали двухпетлевых вычислений эффективного кирального потенциала

**Диаграмма a** Рассмотрим вычисление двухпетлевой фейнмановской диаграммы изображенной на Рис. 4а, которая содержит одну антикиральную вершину  $\bar{\phi}^4\bar{W}^{(4)}$  и одну киральную вершину  $\phi^2W''$  в каждой петле

$$\Gamma_a = -\frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 d^5 z_3 W''(z_1) W''(z_2) \bar{W}^{(4)}(z_3) \times G_0(z_1, z_3) G_0(z_1, z_3) G_0(z_2, z_3) G_0(z_2, z_3), \quad (4.76)$$

где пропагатор  $G_0$  был описан ранее (4.73). От этих пропагаторов используем два оператора  $\bar{D}^2$  и один  $D^2$  для восстановления полной меры и переносим один оператор  $D^2$  на внешнюю линию,

$$\Gamma_a = \frac{1}{32} \frac{1}{16^2} \int d^7 z_1 d^7 z_2 d^7 z_3 (D^2 \frac{W''(z_1)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}}(z_1))^2}) \frac{W''(z_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}}(z_2))^2} \bar{W}^{(4)} \times \frac{1}{\square} \delta^7(z_1 - z_3) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_3) \frac{1}{\square} \delta^7(z_2 - z_3) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_2 - z_3). \quad (4.77)$$

Применяем тождество (4.21) дважды и переходим к импульсному представлению,

$$\Gamma_a = \frac{1}{32} \int d^4 \theta \frac{d^3 p d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^9} (D^2 \frac{W''(p)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}}(p))^2}) \frac{W''(-p)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}}(-p))^2} \bar{W}^{(4)} \times \frac{1}{k_1^2 (k_1 + p)^2} \frac{1}{k_2^2 (k_2 - p)^2}. \quad (4.78)$$

Вычисляя импульсный интеграл,

$$\int \frac{d^3 k}{k^2(p+k)^2} = \frac{\pi^3}{|p|}, \quad (4.79)$$

и переходя обратно к координатному представлению, находим в локальном пределе окончательное выражения для диаграммы 4а

$$\Gamma_a = -\frac{1}{32} \frac{1}{64} \int d^7 z \frac{W'' \bar{W}^{(4)} D^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2 \square} \frac{W''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2}. \quad (4.80)$$

В результате, соответствующий вклад в эффективный киральный потенциал имеет вид

$$\Gamma_a = \frac{1}{512} \int d^5 z \frac{\bar{W}^{(4)} (W'')^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4}. \quad (4.81)$$

Отметим, что  $\bar{W}^{(4)}$  здесь величина постоянная, а  $K''_{\Phi\bar{\Phi}}$  рассматривается при  $\bar{\Phi} = 0$  и, следовательно, представляет некоторую функцию от киральных суперполей.

**Диаграмма  $b_1$**  В диаграмме  $b_1$  вершины “1” и “3” киральные, “4”- антикиральная и “2” - вершина в полном суперпространстве. Поэтому, этой диаграмме соответствует следующее выражение

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_1} = & \frac{1}{2} \int d^5 z_1 d^7 z_2 d^5 z_3 d^5 z_4 K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_2) W''(z_1) W''(z_3) \bar{W}''' \\ & \times G_0(z_1, z_2) G_0(z_1, z_4) G_0(z_3, z_2) G_0(z_3, z_4) G_0(z_2, z_4). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Используя один оператор  $D^2$  и два  $\bar{D}^2$  из пропагаторов для восстановления полной меры, интегрируем по частям оставшиеся  $D^2$  операторы,

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_1} = & -\frac{1}{8 \cdot 16^3} \int d^7 z_1 \dots d^7 z_4 K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_2) \bar{W}''' \\ & \times \frac{1}{\square} \delta^7(z_1 - z_2) \frac{1}{\square} \delta^7(z_3 - z_2) \frac{\bar{D}^2}{K''_{\Phi\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_2 - z_4) \\ & \times D^2 \left( \frac{W''(z_1) \bar{D}^2 D^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2 \square} \delta^7(z_1 - z_4) \right) D^2 \left( \frac{W''(z_3) \bar{D}^2 D^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2 \square} \delta^7(z_3 - z_4) \right). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Используя дельта-функции, интегрируем по грассмановым переменным  $\theta_1$  и  $\theta_3$  и подставляем операторы  $D$  во вторую строчку в (4.83) оставляя только слагаемые, содержащие не более двух производных  $D_\alpha$  на внешних линиях

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_1} = & -\frac{1}{8 \cdot 16^2} \int d^3 x_1 d^7 z_2 d^3 x_3 d^7 z_4 K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(z_2) \bar{W}''' \frac{1}{\square} \delta^3(x_1 - x_2) \frac{1}{\square} \delta^3(x_3 - x_2) \\ & \times \frac{\bar{D}^2}{K''_{\Phi\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_2 - z_4) [T_1 + T_2 + T_2], \end{aligned} \quad (4.84)$$

где были введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
T_1 &= D^2 \left( \frac{W''(x_1, \theta_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} \right) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} (\delta^3(x_1 - x_4) \delta^4(\theta_2 - \theta_4)) \\
&\quad \times \frac{W''(x_3, \theta_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} D^2 (\delta^3(x_3 - x_4) \delta^4(\theta_2 - \theta_4)) , \\
T_2 &= \frac{W''(x_1, \theta_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} D^2 (\delta^3(x_1 - x_4) \delta^4(\theta_2 - \theta_4)) \\
&\quad \times D^2 \left( \frac{W''(x_3, \theta_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} \right) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} (\delta^3(x_3 - x_4) \delta^4(\theta_2 - \theta_4)) , \\
T_3 &= -4D^\alpha \left( \frac{W''(x_1, \theta_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} \right) \frac{\partial_{\alpha\beta} \bar{D}^\beta D^2}{\square} \delta^3(x_1 - x_2) \delta^4(\theta_2 - \theta_4) \\
&\quad \times D^\gamma \left( \frac{W''(x_3, \theta_2)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^2} \right) \frac{\partial_{\gamma\delta} \bar{D}^\delta D^2}{\square} \delta^3(x_3 - x_4) \delta^4(\theta_2 - \theta_4) . \quad (4.85)
\end{aligned}$$

Далее, проинтегрируем по частям оператор  $\bar{D}^2$  в первой строчке (4.84) и применим тождество (4.21) дважды. Затем берем оператор  $\bar{D}^2$  из полной меры, который может подействовать только на внешние линии, и переходим к импульсному представлению

$$\Gamma_{b_1} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^2 \theta}{(2\pi)^6} \frac{W''(p_1, \theta) W''(p_2, \theta) K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(-p_1 - p_2, \theta) \bar{W}''''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} S_1(p_1, p_2) , \quad (4.86)$$

где мы ввели следующее обозначение для импульсного интеграла

$$\begin{aligned}
S_1(p_1, p_2) &= \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \\
&\quad \times \frac{p_1^2 k_2^2 + k_1^2 p_2^2 - 2(p_1 p_2)(k_1 k_2) + 2(p_1 k_2)(p_2 k_1) - 2(p_1 k_1)(p_2 k_2)}{k_1^2 k_2^2 (p_1 + k_1)^2 (p_2 + k_2)^2 (k_1 + k_2)^2} . \quad (4.87)
\end{aligned}$$

Нас интересует локальные вклады в эффективное действие. Для взятия локального предела, сделаем обратное преобразование Фурье для суперполей,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{b_1} &= -\frac{1}{2} \int d^2 \theta d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 \frac{W''(x_1, \theta) W''(x_2, \theta) K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(x_3, \theta) \bar{W}''''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \\
&\quad \times \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} S_1(p_1, p_2) e^{ix_1 p_1} e^{ix_2 p_2} e^{-ix_3 (p_1 + p_2)} , \quad (4.88)
\end{aligned}$$

и учтем, что суперполя медленно меняются в пространстве Минковского

$$W''(x_1, \theta) W''(x_2, \theta) K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(x_3, \theta) \simeq W''(x_1, \theta) W''(x_1, \theta) K'''_{\Phi^2\bar{\Phi}}(x_1, \theta) . \quad (4.89)$$

Интегрирование по  $d^3x_2$  и  $d^3x_3$  в (4.88) дает две дельта-функции,  $(2\pi)^3\delta^3(p_2)$  и  $(2\pi)^3\delta^3(p_1 + p_2)$ , следовательно необходимо вычислить предел

$$S_1 = \lim_{p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow 0} S_1(p_1, p_2). \quad (4.90)$$

В части 4.3.4 будет показано, что значение  $S_1$  существенно зависит от пути интегрирования, и, следовательно, этот предел не существует. Поэтому диаграмма  $b_1$  на Рис. 4  $b_1$  не будет давать локального вклада в киральный сектор.

**Диаграмма  $b_2$**  У этой диаграммы есть киральные вершины “1”, “3” и антикиральные “4”, “2”. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_2} = & -\frac{1}{2} \int d^5z_1 d^5\bar{z}_2 d^5z_3 d^5\bar{z}_4 W'''(z_1) \left(\frac{1}{4} D^2 K''_{\bar{\Phi}^2}(z_2)\right) W''(z_3) \bar{W}''' \\ & \times G_0(z_1, z_2) G_0(z_3, z_2) G_0(z_3, z_4) G_0(z_1, z_4) G_0(z_1, z_4). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Восстановим полную меру суперпространства, используя операторы  $D^2$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_2} = & -\frac{1}{2 \cdot 16^3} \int d^7z_1 d^7z_2 d^7z_3 d^7z_4 W'''(z_1) \left(\frac{1}{4} D^2 K''_{\bar{\Phi}^2}(z_2)\right) W''(z_3) \bar{W}''' \\ & \times \frac{1}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_1 - z_2) \frac{\bar{D}^2 D^2}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_3 - z_2) \frac{1}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_3 - z_4) \\ & \times \frac{\bar{D}^2 D^2}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_1 - z_4) \frac{\bar{D}^2 D^2}{K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \square} \delta^7(z_1 - z_4). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Отметим, что в первой строчке этого выражения есть оператор  $D^2$ , действующий на внешнюю линию  $K''_{\bar{\Phi}^2}$ , и поэтому все другие слагаемые с производными на внешних линиях могут быть отброшены. Это означает, что, с точностью до интегрирования по частям, грассманы производные не действуют на внешние линии. Оператор  $\bar{D}^2 D^2$ , действующий на дельта-функции  $\delta^7(z_3 - z_2)$  во второй строчке (4.92), может быть переброшен на дельта-функцию  $\delta^7(z_1 - z_4)$  и затем дать оператор Д'Аламбера с помощью тождества (4.12),

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_2} = & -\frac{1}{2 \cdot 16^2} \int d^7z_1 d^7z_2 d^7z_3 d^7z_4 W'''(z_1) \left(\frac{1}{4} D^2 K''_{\bar{\Phi}^2}(z_2)\right) \\ & \times W''(z_3) \bar{W}''' \frac{1}{(K''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^5 \square} \delta^7(z_1 - z_2) \frac{1}{\square} \delta^7(z_3 - z_2) \frac{1}{\square} \delta^7(z_3 - z_4) \\ & \times \square \left( \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_4) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_4) \right). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Далее, проинтегрируем по всем, кроме одной, грассмановым переменным и применим тождество (4.21) дважды,

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_2} &= -\frac{1}{2} \int d^4\theta d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 \frac{W'''(x_1, \theta)}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \\ &\quad \times \left( \frac{1}{4} D^2 K''_{\bar{\Phi}^2}(x_2, \theta) \right) W''(x_3, \theta) \bar{W}''' \frac{1}{\square} \delta^3(x_1 - x_2) \frac{1}{\square} \delta^3(x_2 - x_3) \\ &\quad \times \frac{1}{\square} \delta^3(x_3 - x_4) \square \left( \frac{1}{\square} \delta^3(x_1 - x_4) \frac{1}{\square} \delta^3(x_1 - x_4) \right). \end{aligned} \quad (4.94)$$

В этом выражении, для начала перейдем к киральному подпространству для грассмановых переменных, а затем к импульсному представлению, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_2} &= -\frac{1}{2} \int d^2\theta \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} \\ &\quad \times \frac{W'''(-p_1 - p_2, \theta) K''_{\bar{\Phi}^2}(p_1, \theta) W''(p_2, \theta) \bar{W}'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} S_2(p_1, p_2), \end{aligned} \quad (4.95)$$

где введено следующее обозначение для импульсного интеграла

$$S_2(p_1, p_2) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} \frac{p_1^2}{(p_1 + p_2 + k_1)^2 (p_2 + k_1)^2 (k_1 + k_2)^2 k_2^2}. \quad (4.96)$$

В выражении (4.96), после интегрирования по  $k_2$  с использованием (4.79), будем иметь

$$S_2(p_1, p_2) = \int \frac{d^3k}{(4\pi)^3} \frac{p_1^2}{(p_1 + p_2 + k)^2 (p_2 + k)^2 |k|}. \quad (4.97)$$

В принципе, этот импульсный интеграл может быть вычислен для произвольного значения внешнего импульса, но для вкладов в эффективный киральный потенциал необходимо найти только локальные вклады. Сделаем обратное преобразование Фурье для суперполей в (4.95),

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_2} &= -\frac{1}{2} \int d^2\theta d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 \frac{W'''(x_1, \theta) K''_{\bar{\Phi}^2}(x_2, \theta) W''(x_3, \theta) \bar{W}'''}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^5} \\ &\quad \times \int \frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} e^{-ix_1(p_1+p_2)} e^{ix_2p_1} e^{ix_3p_2} S_2(p_1, p_2), \end{aligned} \quad (4.98)$$

и рассмотрим медленно меняющиеся поля,

$$W'''(x_1, \theta) K''_{\bar{\Phi}^2}(x_2, \theta) W''(x_3, \theta) \simeq W'''(x_3, \theta) K''_{\bar{\Phi}^2}(x_3, \theta) W''(x_3, \theta). \quad (4.99)$$

Интегрирование по  $d^3x_1$  и  $d^3x_2$  даст две дельта-функции,  $(2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2)$  и  $(2\pi)^3 \delta^3(p_2)$ , следовательно опять необходимо вычислить предел

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow 0} S_2(p_1, p_2). \quad (4.100)$$

В части 4.3.4, будет показано, что такой предел не существует, и, следовательно, фейнмановская диаграмма на Рис. 4  $b_2$  не дает вклад в эффективный киральный потенциал.

**Диаграмма  $b_3$**  Эта диаграмма содержит вершину “1” в полном суперпространстве, вершины “2” и “4” в киральном подпространстве и вершины “3” и “5” в антикиральном подпространстве. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$\Gamma_{b_3} = \frac{1}{2} \int d^7 z_1 d^5 z_2 d^5 \bar{z}_3 d^5 z_4 d^5 \bar{z}_5 K_{\Phi^2 \bar{\Phi}}'''(z_1) W''(z_2) \left( \frac{1}{4} D^2 K_{\bar{\Phi}^2}''(z_3) \right) W''(z_4) \bar{W}''' \times G_0(z_2, z_1) G_0(z_2, z_3) G_0(z_4, z_3) G_0(z_4, z_5) G_0(z_1, z_5) G_0(z_1, z_5). \quad (4.101)$$

В качестве первого шага восстановим полную меру в (4.101), взяв грассмановы производные из пропагаторов

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_3} &= \frac{1}{2} \frac{1}{16^4} \int d^7 z_1 d^7 z_2 d^7 z_3 d^7 z_4 d^7 z_5 K_{\Phi^2 \bar{\Phi}}'''(z_1) W''(z_2) \\ &\times \left( \frac{1}{4} D^2 K_{\bar{\Phi}^2}''(z_3) \right) W''(z_4) \bar{W}''' \frac{\bar{D}^2 D^2}{K_{\Phi \bar{\Phi}}'' \square} \delta^7(z_2 - z_1) \frac{1}{K_{\Phi \bar{\Phi}}'' \square} \delta^7(z_2 - z_3) \\ &\times \frac{\bar{D}^2 D^2}{K_{\Phi \bar{\Phi}}'' \square} \delta^7(z_4 - z_3) \frac{1}{K_{\Phi \bar{\Phi}}'' \square} \delta^7(z_4 - z_5) \\ &\times \frac{\bar{D}^2 D^2}{K_{\Phi \bar{\Phi}}'' \square} \delta^7(z_1 - z_5) \frac{\bar{D}^2 D^2}{K_{\Phi \bar{\Phi}}'' \square} \delta^7(z_1 - z_5). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Во второй строке (4.102) находится выражение  $\frac{1}{4} D^2 K_{\bar{\Phi}^2}''$ , которое обеспечивает достаточное количество грассмановых производных на внешних линиях для применения тождества (4.63). Поэтому, с точностью до интегрирования по частям грассмановых производных, можно опустить все слагаемые, в которых эти производные действуют на внешние линии. Например, во второй строчке (4.102) проинтегрируем по частям производные  $\bar{D}^2 D^2$ , действующие на  $\delta^7(z_4 - z_3)$ , так, чтобы они действовали на  $\delta^7(z_2 - z_1)$ , при этом становится

на один оператор Д'Аламбера меньше

$$\begin{aligned}
\Gamma_{b_3} &= \frac{1}{2} \frac{1}{16^3} \int d^7 z_1 d^7 z_2 d^7 z_3 d^7 z_4 d^7 z_5 K'''_{\Phi^2 \bar{\Phi}}(z_1) W''(z_2) \\
&\times \left( \frac{1}{4} D^2 K''_{\bar{\Phi}^2}(z_3) \right) W''(z_4) \bar{W}''' \frac{1}{(K''_{\Phi \bar{\Phi}})^6} \\
&\times \bar{D}^2 D^2 \delta^7(z_2 - z_1) \frac{1}{\square} \delta^7(z_2 - z_3) \frac{1}{\square} \delta^7(z_4 - z_3) \frac{1}{\square} \delta^7(z_4 - z_5) \\
&\times \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_5) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_5). \tag{4.103}
\end{aligned}$$

Далее, интегрируем по частям производные  $\bar{D}^2 D^2$  во второй строчке (4.103) так, чтоб они действовали на  $\delta^7(z_1 - z_5)$ , при этом уходит еще один оператор Д'Аламбера

$$\begin{aligned}
\Gamma_{b_3} &= \frac{1}{2} \frac{1}{16^2} \int d^7 z_1 d^7 z_2 d^7 z_3 d^7 z_4 K'''_{\Phi^2 \bar{\Phi}}(z_1) W''(z_1) \\
&\times \left( \frac{1}{4} D^2 K''_{\bar{\Phi}^2}(z_2) \right) W''(z_3) \bar{W}''' \frac{1}{(K''_{\Phi \bar{\Phi}})^6} \\
&\times \frac{1}{\square} \delta^7(z_1 - z_2) \frac{1}{\square} \delta^7(z_3 - z_2) \frac{1}{\square} \delta^7(z_3 - z_4) \\
&\times \square \left( \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_4) \frac{\bar{D}^2 D^2}{\square} \delta^7(z_1 - z_4) \right). \tag{4.104}
\end{aligned}$$

Теперь, применяя тождество (4.21) два дважды, интегрируем по всем, кроме одной, грассмановым переменным и переходим к импульсному представлению

$$\begin{aligned}
\Gamma_{b_3} &= \frac{1}{2} \int d^2 \theta \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \frac{K'''_{\Phi^2 \bar{\Phi}}(-p_1 - p_2, \theta)}{(K''_{\Phi \bar{\Phi}})^6} \\
&\times W''(-p_1 - p_2, \theta) K''_{\bar{\Phi}^2}(p_1, \theta) W''(p_2, \theta) \bar{W}''' \cdot S_2(p_1, p_2), \tag{4.105}
\end{aligned}$$

где функция  $S_2(p_1, p_2)$  представляет собой импульсный интеграл (4.97). В части 4.3.4, будет показано, что такой предел не существует, и, следовательно, фейнмановская диаграмма на Рис. 4  $b_2$  не дает вклад в эффективный киральный потенциал.

#### 4.3.4 Импульсные интегралы

**Локальный предел импульсных интегралов (4.96)** Представляет некоторую сложность вычислить интеграл (4.96) для произвольных значений внешних импульсов  $p_1$  и  $p_2$ . Фактически же этого и не требуется, достаточно вычислить

только предел (4.100) для этих интегралов. Покажем, что функция  $S_2(p_1, p_2)$  не имеет локального предела и, поэтому, диаграмма с таким импульсным интегралом не дает вклад в эффективный киральный потенциал

Можно показать, что предел (4.100) существенно зависит от пути вычисления в пространстве  $(p_1, p_2)$ . Выбирая различные пути вычисления этого предела, выражение (4.100) будет давать различные значения, включая ноль и бесконечность. Вычислим (4.96) для  $p_2 = tp_1 \equiv tp$ , где  $t$  - вещественный параметр, и покажем, что импульсный интеграл (4.96) принимает различные значения при различных значениях  $t$ , для произвольного малого  $p$ .

Представим (4.96) в следующем удобном для дальнейшего анализа виде

$$S_2(p_1, p_2) = p_1^2 S(p_1, p_2), \quad (4.106)$$

вводя уже знакомое обозначение для импульсного интеграла

$$S(p_1, p_2) = \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(p_1 + p_2 + k_1)^2 (p_2 + k_1)^2 (k_1 + k_2)^2 k_2^2}. \quad (4.107)$$

Используя (4.79) проинтегрируем по импульсу  $k_2$ ,

$$S(p_1, p_2) = \int \frac{d^3 k}{(4\pi)^3} \frac{1}{(p_1 + p_2 + k)^2 (p_2 + k)^2 |k|}. \quad (4.108)$$

Вводя фейнмановскую параметризацию, перепишем импульсный интеграл (4.108) в виде

$$\begin{aligned} S(p_1, p_2) &= \frac{3}{4} \int \frac{d^3 k}{(4\pi)^3} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{1-\alpha} d\beta \\ &\quad \times \frac{1}{[\alpha k^2 + \beta(p_1 + p_2 + k)^2 + (1 - \alpha - \beta)(p_2 + k)^2]^{5/2}} \\ &= \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{1-\alpha} d\beta \int \frac{d^3 k}{(4\pi)^3} \frac{1}{P^{5/2}}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

где введено следующее обозначение

$$P(p_1, p_2) = k^2 + 2k(\beta(p_1 + p_2) + (1 - \alpha - \beta)p_2) + \beta(p_1 + p_2)^2 + (1 - \alpha - \beta)p_2^2. \quad (4.110)$$

Используя общую формулу [116]

$$\int \frac{d^3 k}{(k^2 + 2k \cdot Q - M^2)^\alpha} = \frac{i\pi^{3/2} (-1)^{-\alpha} \Gamma(\alpha - 3/2)}{\Gamma(\alpha) (M^2 + Q^2)^{\alpha - 3/2}}, \quad (4.111)$$

вычислим интеграл по импульсу  $k$

$$S(p_1, p_2) = \frac{1}{64\pi^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{1-\alpha} d\beta \quad (4.112)$$

$$\times \frac{1}{\beta(\beta-1)p_1^2 + \alpha(\alpha-1)p_2^2 - 2\alpha\beta(p_1 \cdot p_2)}.$$

Проинтегрируем по параметру  $\beta$

$$S(p_1, p_2) = \frac{1}{64\pi^2 p_1^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{2M} \quad (4.113)$$

$$\times \ln \left| \frac{M - 1/2 + \alpha Y + \alpha M - 1/2 - \alpha Y}{M + 1/2 - \alpha Y - \alpha M + 1/2 + \alpha Y} \right|,$$

где  $X(p_1, p_2)$ ,  $Y(p_1, p_2)$  и  $M(p_1, p_2)$  функции от внешних импульсов  $p_1$  и  $p_2$

$$X = \frac{p_2^2}{p_1^2}, \quad Y = \frac{(p_1 \cdot p_2)}{p_1^2}, \quad M = \sqrt{(1/2 + \alpha Y)^2 + \alpha(1 - \alpha)X}. \quad (4.114)$$

Интеграл по оставшемуся параметру  $\alpha$  довольно сложен. Чтобы его упростить, рассмотрим коллинеарные импульсы  $p_2 = tp_1 \equiv tp$ . В этом случае  $X = t^2$ ,  $Y = t$ ,  $M^2 = \frac{1}{4} + \alpha t(t+1)$ , и интеграл (4.113) упрощается,

$$S_2(p, tp) = \frac{1}{32\pi^2 \sqrt{t(t+1)}} \int_{1/2}^{t+1/2} \frac{dM}{\sqrt{M-1/2}\sqrt{M+1/2}} \ln \frac{M-1/2}{M+1/2}. \quad (4.115)$$

Значение этого интеграла может быть выражено с помощью дигамма-функции Эйлера,

$$S_2(t) \equiv S_2(p, tp) = \quad (4.116)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2 \sqrt{t(t+1)}} \left[ \text{Li}_2 \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{t}}{\sqrt{1+t} + \sqrt{t}} - \text{Li}_2 \left( -\frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{t}}{\sqrt{1+t} + \sqrt{t}} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right].$$

Функция  $S_2(t)$  хорошо определена для  $0 < t < \infty$ . Видно, что все импульсы  $p$  исчезли и оставшаяся функция зависит только от параметра  $t$ , который связан с импульсами. Поэтому, значения функции  $S_2(p, tp)$  остались теми же для малых импульсов  $p \rightarrow 0$  и зависят только от  $t$ . В результате, вдоль пути  $p_2 = tp_1$  предел (4.100) зависит только от  $t$  и может принимать произвольное значение, входящее в область определения функции (4.116). Таким образом, это доказывает, что предел от функции  $S_2(p_1, p_2)$  не существует при малых значениях импульса

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow 0} S_2(p_1, p_2) \text{ не существует.} \quad (4.117)$$

Следовательно, все диаграммы, содержащие данный импульсный интеграл, не дают вклад в эффективный киральный потенциал.

**Локальный предел для импульсного интеграла (4.87)** Аналогично предыдущему случаю, докажем, что предел не существует

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0, p_2 \rightarrow 0} S_1(p_1, p_2) \text{ не существует.} \quad (4.118)$$

Для доказательства, достаточно вычислить (4.87) в случае коллинеарных внешних импульсов,  $p_1 = tp_2 \equiv tp$ ,

$$\begin{aligned} S_1(tp, p) &= p^2 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \frac{t^2 k_2^2 + k_1^2 - 2t(k_1 k_2)}{k_1^2 k_2^2 (tp + k_1)^2 (p + k_2)^2 (k_1 + k_2)^2} \\ &= I_1(p) + I_2(p) + I_3(p), \end{aligned} \quad (4.119)$$

где в качестве  $I_i(p)$  выступают следующие интегралы от внешних импульсов

$$I_1 = p^2 t(t+1) \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{k_1^2 (tp + k_1)^2 (p + k_2)^2 (k_1 + k_2)^2}, \quad (4.120)$$

$$I_2 = p^2 (t+1) \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{k_2^2 (tp + k_1)^2 (p + k_2)^2 (k_1 + k_2)^2}, \quad (4.121)$$

$$I_3 = -tp^2 \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 (tp + k_1)^2 (p + k_2)^2}. \quad (4.122)$$

Нетрудно видеть, что, с учетом выражения (4.79), последний интеграл равен константе

$$I_3 = -\frac{1}{64}, \quad (4.123)$$

Проинтегрировав по одному из импульсов  $k_{1,2}$  получим

$$I_1(t) = p^2 t(t+1) \int \frac{d^3 k}{(4\pi)^3} \frac{1}{|k| (p+k)^2 (k+p(t+1))^2}, \quad (4.124)$$

$$I_2(t) = p^2 (t+1) \int \frac{d^3 k}{(4\pi)^3} \frac{1}{|k| (tp+k)^2 (k+p(t+1))^2} = I_1(1/t). \quad (4.125)$$

Полученные интегралы могут быть вычислены с использованием формул (4.113) и (4.116),

$$I_1 = \frac{\sqrt{t(t+1)}}{16\pi^2} \left[ \text{Li}_2 \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{t}}{\sqrt{1+t} + \sqrt{t}} - \text{Li}_2 \left( -\frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{t}}{\sqrt{1+t} + \sqrt{t}} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right] \quad (4.126)$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{t+1}}{16\pi^2 t} \left[ \text{Li}_2 \frac{\sqrt{1+t} - 1}{\sqrt{1+t} + 1} - \text{Li}_2 \left( -\frac{\sqrt{1+t} - 1}{\sqrt{1+t} + 1} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right]. \quad (4.127)$$

В результате, интеграл (4.119) представляет собой сумму (4.123), (4.126) и (4.127). Поскольку интеграл (4.119) зависит только от параметра  $t$  и не зависит от импульса  $p$ , то его значение имеет различные значения при изменении параметра  $t$ . Следовательно, интеграл не имеет локального предела при  $p \rightarrow 0$ , что доказывает сделанное утверждение (4.118).

### 4.3.5 Результаты вычислений двухпетлевого эффективного кирального потенциала

Подведем итог вычисления эффективного кэлерова потенциала. Рассмотрим вклады в эффективный киральный потенциал от суперграфов представленных на рис. 4,

$$W_{\text{eff}}^{(2)} = W_a + W_{b_1} + W_{b_2} + W_{b_3}. \quad (4.128)$$

Индексы в правой части отвечают вкладам от соответствующей диаграммы. При вычислении вкладов от каждой диаграммы мы использовали стандартные методы суперсимметричной квантовой теории поля [2]. В общем, такие диаграммы дают нелокальные вклады в эффективное действие. В рамках нашего рассмотрения, необходимо извлечь из них только локальные части в киральном секторе, которые имеют отношение к эффективному киральному потенциалу. Процедуру извлечения локальных частей из диаграмм Фейнмана, как правило, называют локальным пределом [97–100]. При этом все внешние импульсы диаграммы берутся равными нулю. Отметим, что только те диаграммы Фейнмана дают вклад в эффективный киральный потенциал, которые в локальном пределе являются конечными и для которых этот предел является единственным. Всеми диаграммами, которые являются сингулярными в локальном пределе, следует систематически пренебрегать. Как было показано (4.79), только диаграмма  $a$  на рис. 4 обладает единственным и хорошо определенным локальным пределом и только она дает вклад в эффективный киральный потенциал следующего вида

$$W_a = -\frac{1}{512} \frac{\bar{W}^{(4)}(W'')^2}{(K''_{\Phi\bar{\Phi}})^4}. \quad (4.129)$$

Диаграммы  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  не имеют однозначного локального предела и, следовательно, вклад от этих диаграмм в эффективный киральный потенциал равен нулю

$$W_{b_1} = W_{b_2} = W_{b_3} = 0. \quad (4.130)$$

Отметим также, что для модели Весса-Зумино (4.2) все вклад в эффективный киральный потенциал от диаграмм  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  на рис. 4 тождественно равны нулю, поскольку в этом случае  $K''_{\Phi^2} = K'''_{\Phi^2\Phi} = 0$ .

#### 4.4 Эффективный потенциал в трехмерной модели Весса-Зумино

В предыдущем разделе было представлено вычисление эффективного кэлерова и кирального потенциалов для произвольного классического кэлерова и кирального потенциалов (4.1). Рассмотрим применение этих результатов для трехмерной модели Весса-Зумино с классическими потенциалами  $K$  и  $W$ , заданными в виде (4.2). Для простоты ограничим рассмотрение на случай

$$m = 0, \quad \lambda = 0, \quad (4.131)$$

который соответствует масштабной инвариантности классического действия.

Рассмотрим одо-(4.24) и двухпетлевые (4.60) вклады в эффективный кэлеров потенциал в модели Весса-Зумино

$$K_{\text{eff}} = \Phi \bar{\Phi} \left( 1 + \frac{g}{8\pi} - \frac{g^2 \gamma}{192\pi^2} - \frac{g^2}{96\pi^2} \ln \frac{g\Phi \bar{\Phi}}{2\mu} \right). \quad (4.132)$$

Параметр  $\mu$  может быть фиксирован из условий

$$\left. \frac{\partial^2 K_{\text{eff}}}{\partial \Phi \partial \bar{\Phi}} \right|_{\Phi=\Phi_0, \bar{\Phi}=\bar{\Phi}_0} = 1, \quad (4.133)$$

что приводит к уравнению для определения  $\mu$  вида

$$-\frac{g}{8\pi} + \frac{g^2(\gamma + 4)}{192\pi^2} + \frac{g^2}{192\pi^2} \ln \frac{g\Phi_0 \bar{\Phi}_0}{2\mu} = 0. \quad (4.134)$$

Выражая параметр  $\mu$  из этого уравнения и подставляя его обратно в (4.132) получим

$$K_{\text{eff}} = \Phi \bar{\Phi} + \frac{g^2}{96\pi^2} \Phi \bar{\Phi} \left( 2 - \ln \frac{\Phi \bar{\Phi}}{\Phi_0 \bar{\Phi}_0} \right). \quad (4.135)$$

Для модели Весса-Зумино производные классического кэлерова потенциала  $K''_{\bar{\Phi}^2} = 0$ ,  $K'''_{\bar{\Phi}^2\Phi} = 0$  равны нулю, следовательно только (4.129) дает вклад в эффективный киральный потенциал

$$W_{\text{eff}} = \frac{g}{24} \Phi^4 - \frac{g^3}{2048} \Phi^4. \quad (4.136)$$

Отметим, что этот вклад конечен, аналогично четырехмерному случаю [95–98]. Полученная квантовая поправка определяет конечную перенормировку константы связи

$$g \rightarrow g' = g \left( 1 - \frac{3}{256} g^2 \right). \quad (4.137)$$

На протяжении этого раздела, для краткости, будем обозначать за  $g$  перенормированную константу связи  $g'$ .

Рассмотрим эффективный скалярный потенциал, индуцированный квантовыми поправками (4.135). Будем считать скалярное  $\varphi$  и вспомогательное  $F$  поля постоянными,

$$\Phi = \varphi + \theta^2 F, \quad \bar{\Phi} = \bar{\varphi} - \bar{\theta}^2 \bar{F}. \quad (4.138)$$

Исключение вспомогательных полей из классической модели Весса-Зумино даст масштабно-инвариантный скалярный потенциал

$$V_{\text{class}} = \frac{g^2}{36} (\varphi \bar{\varphi})^3. \quad (4.139)$$

Аналогично, исключение вспомогательных полей в эффективном действии с эффективным кэлеровым потенциалом (4.135) дает эффективный скалярный потенциал

$$V_{\text{eff}} = \frac{g^2}{36} (\varphi \bar{\varphi})^3 \left( 1 + \frac{g^2}{96\pi^2} \ln \frac{\varphi \bar{\varphi}}{\varphi_0 \bar{\varphi}_0} + \text{многопетлевые поправки} \right). \quad (4.140)$$

Таким образом видим, что квантовая поправка к эффективному скалярному потенциалу (4.140) имеет аналогичную структуру, что и в четырехмерной модели Весса-Зумино [2].

## Заключение

В заключении перечислим основные результаты работы:

1. Развита  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная и калибровочно-ковариантная процедура для изучения низкоэнергетического эффективного действия в трехмерных суперсимметричных калибровочных теориях за пределами однопетлевого приближения. Введен оператор параллельного переноса калибровочно-ковариантных объектов в  $\mathcal{N} = 2$ ,  $d = 3$  суперпространстве и изучены его основные свойства. Получены точные выражения для пропагаторов киральных суперполей, зависящих от ковариантно постоянного фонового векторного мультиплетта.
2. Вычислено двухпетлевое низкоэнергетическое эффективное действие типа Гейзенберга-Эйлера в трехмерных  $\mathcal{N} = 2$  и  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричных моделях квантовой электродинамики. Показано, что полученные эффективные действия содержат ряд слагаемых, не имеющих аналогов в четырехмерных теориях. В частности, в  $\mathcal{N} = 2$  электродинамике вычислены двухпетлевые вклады эффективное действие и показано, что эти вклады отвечают за новые вклады в метрику пространства модулей скалярных полей теории. Для  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной модели квантовой электродинамики доказано отсутствие двухпетлевых квантовых вкладов в метрику пространства модулей скалярных полей.
3. Построено двухпетлевое низкоэнергетическое действие в трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной абелевой калибровочной теории поля Черна-Саймонса, взаимодействующего с суперполями материи, с точностью до вкладов четвертого порядка по пространственно-временным производным от компонентных полей. Показано, что полученное двухпетлевое эффективное действие не зависит от параметров фиксации калибровки и не содержит ультрафиолетовых расходимостей.
4. Получены выражения для двухпетлевого эффективного кэлера и кирального потенциалов в трехмерной модели общего  $\mathcal{N} = 2$  кирального суперполя. Установлено, что нетривиальные вклады в эффективный киральный потенциал в данной модели возможны, как и для аналогичной четырехмерной модели, только в безмассовом случае. Доказано, что

эффективный киральный потенциал не содержит квантовых расходимостей, что полностью согласуется с теоремой о неперенормируемости. В частном случае, для трехмерной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной модели Весса-Зумино найдены двухпетлевые квантовые поправки к скалярному потенциалу.

**Благодарности.** Автор глубоко признателен научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору И.Л. Бухбиндеру за научное руководство и помощь в работе над диссертацией и соавтору - доктору физико-математических наук И.Б. Самсонову за плодотворное сотрудничество.

## Список литературы

1. Gates, S.J. Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry / S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček, W. Siegel // *Frontiers of Physics*. 1983. — Vol. 58. — P. 1-548.
2. Buchbinder, I.L. Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace / I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko. — Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1998. — 656 p.
3. Galperin, A.S. Harmonic Superspace /A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, E. S. Sokatchev //Cambridge University Press. 2001. — 306 p.
4. Гольфанд, Ю.А. Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение Р-инвариантности / Ю.А. Гольфанд, Е.П. Лихтман // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1971. — Т. 13. — No. 8. — С. 452-455.
5. Волков, Д.В. О возможном универсальном взаимодействии нейтрино / Д.В. Волков, В.П. Акулов // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1972. — Т. 16. — No. 11. — С. 621-624.
6. Weinberg, S. The Quantum Theory of Fields: Supersymmetry, Vol. 3 / S. Weinberg. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 419 p.
7. Вайнберг, С. Идеиные основы единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий / С. Вайнберг // Успехи Физических Наук. — 1980. — Т. 132. — С. 201-217.
8. Салам, А. Калибровочное объединения фундаментальных сил / А. Салам // Успехи Физических Наук. — 1980. — Т. 132. — С. 229-253.
9. Mann, R. An introduction to particle physics and the Standard Model / R. Mann. — New York: CRT Press, 2010. — 592 p.
10. Shifman, M. Understanding confinement in QCD: elements of big picture / M. Shifman // *International Journal of Modern Physics A*. 2010. — Vol. 25. — P. 4015-4031.

11. Lesgourgues, J. Massive neutrinos and cosmology / J. Lesgourgues, S. Pastor // *Physics Reports*. 2006. — Vol. 429. — P. 307-379.
12. Aad, G. Search for supersymmetry in events with photons, bottom quarks, and missing transverse momentum in proton-proton collisions at a centre-of-mass energy of 7 TeV with the ATLAS detector / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Physics Letters B*. 2013. — Vol. 719. — P. 261-279.
13. Aad, G. Search for supersymmetry in events with large missing transverse momentum, jets, and at least one tau lepton in 7 TeV proton-proton collision data with the ATLAS detector / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *The European Physical Journal C*. 2012. — Vol. 72. — No. 2215. — P. 1-22.
14. Aad, G. Search for supersymmetry in events with large missing transverse momentum, jets, and at least one tau lepton in 7 TeV proton-proton collision data with the ATLAS detector / G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *Journal of High Energy Physics*. 2012. — Vol. 12. — No. 124. — P. 1-35.
15. Chatrchyan, S. Search for gluino mediated bottom- and top-squark production in multijet final states in pp collisions at 8 TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *Physics Letters B*. 2013. — Vol. 725. — P. 243-270.
16. Chatrchyan, S. Search for supersymmetry in hadronic final states with missing transverse energy using the variables  $\alpha_T$  and  $b$ -quark multiplicity in pp collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *The European Physical Journal C* . 2013. — Vol. 73. — No. 2568. — P. 1-31.
17. Chatrchyan, S. Search for physics beyond the standard model in events with  $\tau$  leptons, jets, and large transverse momentum imbalance in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV / S. Chatrchyan, V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. // *The European Physical Journal C* . 2013. — Vol. 73. — No. 2493. — P. 1-26 .

18. Feng, J. Searches for Supersymmetry at High-Energy Colliders / J. Feng, J.-F. Grivaz, J. Nachtman // Review of Modern Physics. 2010. — Vol. 82. — P. 699-727.
19. Грин, М. Теория суперструн: в 2 т / М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. — Москва: Мир, 1990. — Т. 1-2.
20. Морозов, А.Ю. Теория струн — что это такое / А.Ю.Морозов // Успехи Физических Наук. 1992. — Т. 162. — С. 83-175.
21. Маршаков, А.В. Теория струн или теория поля? / А.В. Маршаков // Успехи Физических Наук. 2002. — Т.172. — С. 977-1020.
22. Becker, K. String theory and M-theory: A modern introduction / K. Becker, M.Becker, J. Schwarz. — New York: Cambridge University Press, 2007. — 756 p.
23. Freedman, D. Z. Supergravity / D. Z. Freedman, A. Van Proeyen.— New York: Cambridge University Press, 2012. — 607 p.
24. Schwarz, J.H. Superconformal Chern-Simons theories / J.H. Schwarz // Journal of High Energy Physics. 2004. — Vol. 11. — No. 078. — P. 1-14.
25. Bagger, J. Modeling multiple M2's / J. Bagger, N. Lambert // Physical Review D. 2007. — Vol.75. — No. 045020. — P. 1-7.
26. Bagger, J. Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes / J. Bagger, N. Lambert // Physical Review D. 2007. — Vol. 77. — No. 065008. — P. 1-6.
27. Bagger, J. Comments on multiple M2-branes / J. Bagger and N. Lambert // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 02. — No. 105. — P. 1-15.
28. Bagger, J. Three-algebras and  $\mathcal{N} = 6$  Chern-Simons gauge theories / J. Bagger, N. Lambert // Physical Review D. 2009. — Vol. 79. — No. 025002. — P. 1-8.
29. Gustavsson, A. Algebraic structures on parallel M2-branes / A. Gustavsson // Nuclear Physics B. 2009. — Vol. 811. — P. 66-76.

30. Gustavsson, A. Selfdual strings and loop space Nahm equations / A. Gustavsson // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 04. — No. 083. — P. 1-26.
31. Filippov, V.T., n-Lie algebras / V.T. Filippov // Siberian Mathematical Journal. 1985. — Vol. 26. — P. 126-140.
32. de Azcarraga, J. A. n-ary algebras: A Review with applications / J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo // Journal of Physics A. 2010. — Vol. 43. — No. 293001. — P. 1-117.
33. de Azcarraga, J. A. Contractions of Filippov algebras / J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo, M. Picon // Journal of Mathematical Physics. 2011. — Vol. 52. — No. 013516. — P. 1-24.
34. de Azcarraga, J. A. On a class of n-Leibniz deformations of the simple Filippov algebras / J. A. de Azcarraga, J. M. Izquierdo // Journal of Mathematical Physics. 2011. — Vol. 52. — No. 023521. — P. 1-13.
35. Van Raamsdonk, M. Comments on the Bagger-Lambert theory and multiple M2-branes / M. Van Raamsdonk // Journal of High Energy Physics. 2008. — V. 05. — No. 105. — P. 1-10.
36. Maldacena, J. M. The large N limit of superconformal field theories and supergravity / J. M. Maldacena // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 1998. — Vol. 2.— P. 231-252.
37. Gubser, S.S. Gauge theory correlators from noncritical string theory / S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov // Physics Letters B. 1998. — Vol. 428. — P. 105-114.
38. Witten, E. Anti-de Sitter space and holography / E. Witten // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 1998. — Vol. 2. — P. 253-291.
39. Aharony, O. Large N field theories, string theory and gravity / O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz // Physics Reports. 2000. — Vol. 323. — P. 183-386.

40. Beisert, N. Review of AdS/CFT Integrability: An Overview / N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday et al. // Letters in Mathematical Physics. 2012. — Vol. 99. — P. 3-32.
41. Klose, T. Review of AdS/CFT Integrability, Chapter IV.3: N=6 Chern-Simons and Strings on  $AdS_4 \times CP_3$  / T. Klose // Letters in Mathematical Physics. 2012. — Vol. 99. — P. 401-423.
42. Aharony, O.  $\mathcal{N} = 6$  superconformal Chern-Simons-matter theories M2-branes and their gravity duals / O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jefferis, J. Maldacena // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 10. — No. 091. — P. 1-38.
43. Benna, M. Superconformal Chern-Simons theories and AdS(4)/CFT(3) correspondence / M. Benna, I. Klebanov, T. Klose, M. Smedback // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 09. — No. 072. — P. 1-21.
44. Gromov, N. The all loop AdS4/CFT3 Bethe ansatz / N. Gromov, P. Vieira // Journal of High Energy Physics. 2009. — Vol. 01. — No. 016. — P. 1-27.
45. Bak, D. Integrable spin chain in superconformal Chern-Simons theory / D. Bak, S.-J. Rey // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 10. — No. 053. — P. 1-39.
46. Minahan, J. A. Two loop integrability for Chern-Simons theories with N=6 supersymmetry / J. A. Minahan, W. Schulgin, K. Zarembo // Journal of High Energy Physics. 2009. — Vol. 03. — No. 057. — P. 1-25.
47. Zwiebel, B. I. Two-loop integrability of planar N=6 superconformal Chern-Simons theory / B. I. Zwiebel // Journal of Physics A. 2009. — Vol. 42. — No. 495402. — P. 1-45.
48. Bianchi, M. S. From correlators to Wilson loops in Chern-Simons matter theories / M. S. Bianchi, M. Leoni, A. Mauri, S. Penati et al. // Journal of High Energy Physics. 2011. — Vol. 06. — No. 118. — P. 1-27.
49. Agarwal, A. Scattering in mass-deformed  $\mathcal{N} \geq 4$  Chern-Simons models / A. Agarwal, N. Beisert, T. McLoughlin // Journal of High Energy Physics. 2009. — Vol. 06. — No. 045. — P. 1-67.

50. Henn, J. M., Plefka J., Wiegandt K. Light-like polygonal Wilson loops in 3d Chern-Simons and ABJM theory / J. M. Henn, J. Plefka, K. Wiegandt // Journal of High Energy Physics. 2010. — Vol. 08. — No. 032. — P. 1-35.
51. Bianchi, M. S. Scattering amplitudes/Wilson loop duality In ABJM theory / M. S. Bianchi, M. Leoni, A. Mauri, S. Penati et al. // Journal of High Energy Physics. 2012. — Vol. 01. — No. 056. — P. 1-16.
52. Bianchi, M. S. Scattering in ABJ theories / M. S. Bianchi, M. Leoni, A. Mauri, S. Penati et al. // Journal of High Energy Physics. 2011. — Vol. 12. — No. 073. — P. 1-44.
53. Mukhi, S. M2 to D2 / S. Mukhi and C. Papageorgakis // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 05. — No. 085. — P. 1-15.
54. Gran, U. On relating multiple M2 and D2-branes / U. Gran, B.E.W. Nilsson, C. Petersson // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 10. — No. 067. — P. 1-9.
55. Ho, P.-M. M2 to D2 revisited / P.-M. Ho, Y. Imamura, Y. Matsuo // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 07. — No. 003. — P. 1-17.
56. Pang, Y. N M2-branes to N D2-branes / Y. Pang, T. Wang // Physical Review D. 2008. — Vol. 78. — No. 125007. — P. 1-6.
57. Ezhuthachan, B. D2 to D2 / B. Ezhuthachan, S. Mukhi, C. Papageorgakis // Journal of High Energy Physics. 2008. — Vol. 07. — No. 041. — P. 1-12.
58. Ezhuthachan, B. The Power of the Higgs Mechanism: Higher-Derivative BLG Theories / B. Ezhuthachan, S. Mukhi, C. Papageorgakis // Journal of High Energy Physics. 2009. — Vol. 04. — No. 101. — P. 1-32.
59. Schwarz, J. H. Highly Effective Actions [Электронный ресурс] / J. H. Schwarz // Архив препринтов. — 2013. — No. 1311.0305. — Режим доступа: URL: <http://arxiv.org/abs/arXiv:1311.0305>.
60. ДеВитт, Б.С. Динамическая теория групп и полей / Б.С. ДеВитт. — Москва: Наука, 1987. — 288 с.

61. Barvinsky, A.O. The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity / A.O. Barvinsky, G.A. Vilkovisky // Physics Reports. 1985. — Vol. 119. — P. 1-74.
62. Barvinsky, A.O. Beyond the Schwinger-DeWitt technique: Converting loops into trees and in-in currents / A.O. Barvinsky, G.A. Vilkovisky // Nuclear Physics B. 1987. — Vol. 282. — P. 163-188.
63. Barvinsky, A.O. Covariant perturbation theory (II): Second order in the curvature. General algorithms / A.O. Barvinsky, G.A. Vilkovisky // Nuclear Physics B. 1990. — Vol. 333. — P. 471-511.
64. Intriligator, K.A. Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories / K. A. Intriligator, N. Seiberg // Physics Letters B. 1996. — Vol. 387. — P. 513-519.
65. de Boer, J. Mirror symmetry in threedimensional gauge theories, quivers and D-branes / K. Hori, H. Ooguri, Y. Oz // Nuclear Physics B. 1997. — Vol. 493. — P. 101-147.
66. de Boer, J. Mirror symmetry in three-dimensional theories,  $SL(2,Z)$  and D-brane moduli spaces / K. Hori, H. Ooguri, Y. Oz et al. // Nuclear Physics B. 1997. — Vol. 493. — P. 148-176.
67. de Boer, J. Branes and mirror symmetry in  $N=2$  supersymmetric gauge theories in threedimensions / K. Hori, H. Ooguri, Y. Oz, Z. Yin // Nuclear Physics B. 1997. — Vol. 502. — P. 107-124.
68. de Boer, J. Dynamics of  $N=2$  supersymmetric gauge theories in three-dimensions / J. de Boer, K. Hori, Y. Oz // Nuclear Physics B. 1997. — Vol. 500. — P. 163-191.
69. Aharony, O. Aspects of  $N=2$  supersymmetric gauge theories in three-dimensions / O. Aharony, A. Hanany, K. A. Intriligator, N. Seiberg et al. // Nuclear Physics B. 1997. — Vol. 499. — P. 67-99.
70. Aharony, O. IR duality in  $d=3$   $N=2$  supersymmetric  $USp(2N(c))$  and  $U(N(c))$  gauge theories / O. Aharony // Physics Letters B. 1997. — Vol. 404. — P. 71-76.

71. Karch, A. Seiberg duality in three-dimensions / A. Karch // Physics Letters B. 1997. — Vol. 405. — P. 79-84.
72. Giveon, A. Seiberg duality in Chern-Simons theory / A. Giveon, D. Kutasov, // Nuclear Physics B. 2009. — Vol. 812. — P. 1-11.
73. Intriligator, K. Aspects of 3d  $N=2$  Chern-Simons-matter theories / K. Intriligator, N. Seiberg // Journal of High Energy Physics. 2013. — Vol. 07. — No. 079. — P. 1-76.
74. Aharony, O. 3d dualities from 4d dualities / O. Aharony, S. S. Razamat, N. Seiberg, B. Willett // Journal of High Energy Physics. 2013. — Vol. 07. — No. 149. — P. 1-85.
75. Seiberg, N. Gauge dynamics and compactification to three-dimensions [Электронный ресурс] / N. Seiberg, E. Witten // Архив препринтов. — 1996. — No. 9607163. — Режим доступа: URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9607163>.
76. Buchbinder, I.L. ABJM models in  $\mathcal{N} = 3$  harmonic superspace / I.L. Buchbinder, E.A. Ivanov, O. Lechtenfeld, N.G. Pletnev et. // Journal of High Energy Physics. 2009. — Vol. 03. — No. 096. — P. 1-33.
77. Buchbinder, I.L. Quantum  $\mathcal{N} = 3$  Chern-Simons matter theories in harmonic superspace / I.L. Buchbinder, E.A. Ivanov, O. Lechtenfeld, N.G. Pletnev et. // Journal of High Energy Physics. 2009. — Vol. 10. — No. 075. — P. 1-37.
78. Buchbinder, I.L. Effective action of three-dimensional extended supersymmetric matter on gauge superfield background / I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov // Journal of High Energy Physics. 2010. — Vol. 04. — No. 124. — P. 1-26.
79. Buchbinder, I.L. Low-energy effective actions in three-dimensional extended SYM theories / I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov // Journal of High Energy Physics. 2011. — Vol. 01. — No. 121. — P. 1-39.
80. Buchbinder, I.L. Background field formalism and construction of effective action for  $\mathcal{N} = 2, d = 3$  supersymmetric gauge theories / I. L. Buchbinder,

- N. G. Pletnev, I. B. Samsonov // *Physics of Particles and Nuclei*. 2013. — Vol. 44. — No. 2. — P. 234-249.
81. Buchbinder, I.L. Two-loop low-energy effective actions in  $\mathcal{N} = 2$  and  $\mathcal{N} = 4$  three-dimensional SQED / I.L. Buchbinder, B.S. Merzlikin, I.B. Samsonov // *Journal of High Energy Physics*. 2013. — Vol. 07. — No. 012. — P. 1-32.
82. Kuzenko, S.M. Low-energy dynamics in N=2 super QED: Two loop approximation / S. M. Kuzenko, I. N. McArthur // *Journal of High Energy Physics*. 2003. — Vol. 10. — No. 029. — P. 1-28.
83. Kuzenko, S.M. Supersymmetric Euler-Heisenberg effective action: Two-loop results/ S. M. Kuzenko and S. J. Tyler // *Journal of High Energy Physics*. 2007. — Vol. 05. — No. 081. — P. 1-27.
84. Kuzenko, S.M. On the background field method beyond one loop: A manifestly covariant derivative expansion in super Yang-Mills theories / S. M. Kuzenko, I. N. McArthur // *Journal of High Energy Physics*. 2003. — Vol. 05. — No. 015. — P. 1-30.
85. Buchbinder, I.L. On low-energy effective action in three-dimensional  $\mathcal{N} = 2$  and  $\mathcal{N} = 4$  supersymmetric electrodynamics / I.L. Buchbinder, B.S. Merzlikin, I.B. Samsonov // *Journal of Physics: Conference Series*. 2013. — Vol. 474. — No. 012012. — P. 1-11.
86. Buchbinder, I.L. Two-loop low-energy effective action in Abelian supersymmetric Chern-Simons matter models [Электронный ресурс] / I.L. Buchbinder, B.S. Merzlikin, I.B. Samsonov // *Архив препринтов*. — 2013. — No. 1311.5001. — Режим доступа: URL: <http://arxiv.org/abs/arXiv:1311.5001>.
87. Bandres, M.A. N = 8 Superconformal Chern-Simons Theories / M. A. Bandres, A. E. Lipstein, J. H. Schwarz // *Journal of High Energy Physics*. 2008. — Vol. 05. — No. 025. — P. 1-13.
88. Bandres, M.A. Studies of the ABJM Theory in a Formulation with Manifest SU(4) R-Symmetry / M. A. Bandres, A. E. Lipstein, J. H. Schwarz // *Journal of High Energy Physics*. 2008. — Vol. 09. — No. 027. — P. 1-24.

89. Buchbinder, I.L. Two-loop effective potentials in general  $N=2$ ,  $d=3$  chiral superfield model / I. L. Buchbinder, B. S. Merzlikin, I. B. Samsonov // Nuclear Physics B. 2012. – Vol. 860. – P. 87-114.
90. Merzlikin, B.S. Two-loop effective action in three-dimensional Wess-Zumino model / B.S. Merzlikin, I.B. Samsonov // Gravitation and Cosmology. 2012. – Vol. 18. – No. 1. – P. 84-87.
91. Merzlikin, B.S. One-loop effective action in three-dimensional general chiral superfield model / B.S. Merzlikin // Physics of Particles and Nuclei. 2012. – Vol. 43. – No. 5. – P. 714-716.
92. Buchbinder, I.L. Supersymmetric effective potential: Superfield approach / I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. Y. Petrov // Nuclear Physics B. 1994. – Vol. 411. – P. 665-692.
93. Pickering, A. The one loop effective superpotential and nonholomorphicity / A. Pickering, P. C. West // Physics Letters B. 1996. – Vol. 383. – P. 54-62.
94. Grisaru, M.T. Effective Kähler potentials / M. T. Grisaru, M. Rocek, R. von Unge // Physics Letters B. 1996. – Vol. 383. – P. 415-421.
95. West, P. C. Quantum corrections in the supersymmetric effective superpotential and resulting modification of patterns of symmetry breaking / P. C. West // Physics Letters B. 1991. – Vol. 261. – P. 396-398.
96. Jack, I. Not the no - renormalization theorem? / I. Jack, D. R. T. Jones, P. C. West // Physics Letters B. 1991. – Vol. 258. – P. 382-385.
97. Buchbinder, I.L. Superfield chiral effective potential / I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. Y. Petrov // Physics Letters B. 1994. – Vol. 321. – P. 372-377.
98. Buchbinder, I.L. Superfield effective potential in the two loop approximation / I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. Y. Petrov // Physics Atomic Nuclei. 1996. – Vol. 59. – P. 148-153.
99. Buchbinder, I.L. Holomorphic effective potential in general chiral superfield model / I. L. Buchbinder, A. Y. Petrov // Physics Letters B. 1999. – Vol. 461. – P. 209-217.

100. Buchbinder, I.L. Superfield effective action within the general chiral superfield model / I. L. Buchbinder, A. Y. Petrov // Physics Atomic Nuclei. 2000. – Vol. 63. – P. 1657-1670.
101. Buchbinder, I.L. I. L. Buchbinder, M. Cvetič and A. Y. Petrov, Implications of decoupling effects for one loop corrected effective actions from superstring theory / I. L. Buchbinder, M. Cvetič, A. Y. Petrov // Modern Physics Letters A. 2000. – Vol. 15. – P. 783-790.
102. Buchbinder, I.L. One loop effective potential of  $N=1$  supersymmetric theory and decoupling effects / I. L. Buchbinder, M. Cvetič, A. Y. Petrov // Nuclear Physics B. 2000. – Vol. 571. – P. 358-418.
103. Brignole, A. One-loop Kähler potential in non-renormalizable theories / A. Brignole // Nuclear Physics B. 2000. – Vol. 579. – P. 101-116.
104. Nibbelink, S. G. Two-loop effective Kähler potential of (non-)renormalizable supersymmetric models/ S. G. Nibbelink, T. S. Nyawelo // Journal of High Energy Physics. 2006. – Vol. 01. – No. 034. – P. 1-27.
105. A. C. Lehum, Dynamical generation of mass in the  $D = (2+1)$  Wess-Zumino model / A. C. Lehum // Physical Review D. 2008. – Vol. 77. – No. 067701. – P. 1-4.
106. Ferrari, A. F. On the superfield effective potential in three dimensions / A. F. Ferrari, M. Gomes, A. C. Lehum, J. R. Nascimento et al. // Physics Letters B. 2009. – Vol. 678. – P. 500-503.
107. Lehum, A. C.  $D=(2+1)$   $O(N)$  Wess-Zumino model in a large  $N$  limit / A. C. Lehum // Physical Review D. 2011. – Vol. 84. – No. 107701. – P. 1-4.
108. Hitchin, N.J. Hyperkahler metrics and supersymmetry / N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček // Communication in Mathematical Physics. 1987. – Vol. 108. – P. 535-589.
109. Zupnik, B. M. Superfield formulation of the simplest three-dimensional gauge theories and conformal supergravities / B. M. Zupnik, D. G. Pak // Theoretical and Mathematical Physics. 1988. – Vol. 77. – P. 1070-1076.

110. Gates, S. J. Jr. Remarks on N=2 supersymmetric Chern-Simons theories / S. J. Gates Jr. and H. Nishino // Physics Letters B. 1992. — Vol. 281. — P. 72-80.
111. Dunne, G. V. Heisenberg-Euler Effective Lagrangians: Basics and Extensions [Электронный ресурс] / G. V. Dunne // Архив препринтов. — 2004. — No. 0406216. — Режим доступа: URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/0406216>.
112. Lindström, U. Scalar tensor duality and N=1,2 nonlinear  $\sigma$ -models / U. Lindström, M. Roček // Nuclear Physics B. 1983. — 222. — P. 285-308.
113. Redlich, A. N. Gauge noninvariance and parity violation of threedimensional fermions / A. N. Redlich // Physics Review Letters. 1984. — Vol. 52. — P. 18-21.
114. Redlich, A. N. Parity violation and gauge noninvariance of the effective gauge field action in three dimensions / A. N. Redlich // Physics Review D. 1984. — Vol. 29. — P. 2366-2374.
115. Dunne, G. V. Aspects of Chern-Simons theory [Электронный ресурс] / G. V. Dunne // Архив препринтов. — 1999. — No. 9902115. — Режим доступа: URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9902115>.
116. Frampton, P.H. Gauge Field Theories: Third Revised and Improved Edition / P. H. Frampton. — Weinheim: Wiley-VCH, 2008. — 353 p.