ОТЗЫВ
официального оппонента, доктора физико-математических наук Козлова Константина Леонидовича на диссертационную работу Сухачевой Елены Сергеевны "ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫЕ НА МОДИФИКАЦИЯХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ",

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации Е. С. Сухачевой исследуются пространства функций в топологии поточечной сходимости, заданные на линейно упорядоченных пространствах с топологиями линейного порядка. Будем говорить что пространства X и Y l-эквивалентны, если их пространства функций $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ линейно гомеоморфны.

Основными результатами являются.

I. Выявлены топологические свойства модификациий $\mathcal{S}_A$ прямой Зоргенфрея $\mathbb{S}$, введенных Т. Е. Хмылевой и соискателем, и пространств Хаттори $H(A)$.

II. Установлено, что пространства $\mathcal{S}_A$ и $\mathbb{S}$ l-эквивалентны в том и только том случае, если пространства $\mathcal{S}_A$ и $\mathbb{S}$ гомеоморфны.

III. Дано описание функций первого класса Бэра на пространствах, являющихся наследственно линделефовыми и наследственно со свойством Бэра. В частности, на модификациях $\mathcal{S}_A$ прямой Зоргенфрея и на пространствах Хаттори $H(A)$.

Вспомогательными результатами являются.

Нахождение условий гомеоморфности прямой Зоргенфрея $\mathbb{S}$ пространствам, являющимися модификациями $\mathcal{S}_A$ прямой Зоргенфрея, и пространствам Хаттори $H(A)$. Нахождение условий гомеоморфности модификаций прямой Зоргенфрея $\mathcal{S}_A$ и $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$, где $\mathbb{Q}$ — рациональные числа.

Вопрос когда пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ непрерывных вещественных функций на пространствах X и Y, соответственно, в топологии поточечной сходимости линейно гомеоморфны родственнен идущей от С. Банаха проблематике, связанной с классификацией банаховых пространств с точностью до линейного гомеоморфизма. Он в явном виде сформулирован А. В. Архангельским [1990] и при его решении естественным образом возникает следуюдающая проблема:

Какие топологические свойства пространства X сохраняются линейными гомеоморфизмами пространства $C_p(X)$?

Приведем некоторые результаты. Если $C_p(X)$ рассматривать как кольца, то изоморфизм колец $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ по теореме Ю. Нагаты [1949] эквивалентен гомеоморфности пространств X и Y. Д. С. Павловский [1982] показал, что из линейной гомеоморфности $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ следует линейная гомеоморфность пространств $C(X)$ и $C(Y)$ в компактно-открытой топологии. В. Г. Пестов [1982] установил равенство лебеговых размерностей l-эквивалентных пространств X и Y. В. В. Успенский [1982] доказал, что пространство, l-эквивалентное компакту, является компактом. При этом С. П. Гулько и Т. Е. Хмылева [1986] установили гомеоморфность (не линейную) $C_p(\mathbb{R})$ и $C_p([0,1])$.

Наложения ограничений на классы рассматриваемых пространств, позволяют рассматривать большее число их l-эквивалентных топологичесих свойств. Так для линейно упорядоченных пространств с топологиями линейного порядка в последнее время получены следующие результаты. С. П. Гулько [2003] установил, что классификация пространств $C_p(X)$ относительно линейных гомеоморфизмов совпадает с классификацией банаховых пространств $C(X)$ для отрезков ординалов X. В. Марцишевским [2008] получены результаты о классификации банаховых пространств функций на компактных подмножествах пространства "две стрелки Александрова". Это семейство компактов содержит все линейно упорядоченные сепарабельные компакты. Н. Н. Трофименко [2016] дала линейную гомеоморфную классификацию пространств непрерывных функций в топологиях поточечной сходимости на "длинных прямых

Зоргенфрея" и на "динных отрезках", являющихся линейно упорядоченными пространствами. Л. В. Гензе, С. П. Гулько, Т. Е. Хмылевой [2018] дана полная топологическая классификация пространств бэровских функций на ординалах в топологии поточечной сходимости.

Во введении диссертации дан обзор результатов, которые предшествовали настоящему исследованию, дается мотивировка проводимых исследований. Формулируются основные результаты автора, места их апробации и приводится список публикаций автора по теме диссертации.

В Главе 1 устанавливаются топологические свойства модификаций прямой Зоргенфрея $\mathcal{S}_A$ и пространств Хаттори $H(A)$. В их числе (наследственные) свойства типа нормальности, наследственная сепарабельность, наследственное выполнение свойства Бэра. Выясняется, когда пространство Хаттори $H(A)$ является польским. Конструкция модификации прямой Зоргенфрея $\mathcal{S}_A$ предложена Т. Е. Хмылевой и соискателем. Исследуемые топологические свойства актуальны, так как часть из них являются l-эквивалентными топологичесими свойствами.

В Главе 2 устанавливается гомеоморфность прямой Зоргенфрея $\mathbb{S}$ пространствам, являющимся ее модификациями $\mathcal{S}_A$, и пространствам Хаттори $H(A)$. Также доказана (не) гомеоморфность различных модификаций $\mathcal{S}_A$ прямой Зоргенфрея. Стоит отметить следующие результаты.

Прямая Зоргенфрея $\mathbb{S}$ гомеоморфна своей модификации $\mathcal{S}_A$ в том и только том случае, если A является множеством типа F_σ и G_δ в $\mathbb{R}$ (Теорема 2.1).

Модификация прямой Зоргенфрея $\mathcal{S}_P$, где P счетное подмножество $\mathbb{R}$, гомеоморфна $\mathcal{S}_\mathbb{Q}$ в том и только том случае, если P счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{R}$ (Теорема 2.5).

Если множества P и $\mathbb{R} \setminus P$ — несчетны в любом интервале $\mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ — не более чем счетно, то пространства $\mathcal{S}_P$ и $\mathcal{S}_D$ не гомеоморфны (Теорема 2.6).

Прямая Зоргенфрея $\mathbb{S}$ гомеоморфна пространству Хаттори $H(A)$ в том и только том случае, если множество A разреженное (Теорема 2.7).

В основной Теореме 3.2 Главы 3 доказывается, что l-эквивалентность пространств $\mathbb{S}$ и $\mathcal{S}_A$ эквивалентна их гомеоморфности.

В основной Теореме 4.4 Главы 4 дано описание функций первого класса Бэра $B_1(X)$ на пространствах X, являющихся наследственно линделефовыми и наследственно со свойством Бэра. Функция $f \in B_1(X)$ в том и только том случае, если для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset X$, ее ограничение $f|_F$ имеет точку непрерывности. Ранее, аналогичная характеризация была известна для польских пространств.

Для метрических пространств хорошо известны теоремы Лебега о том что $f \in B_1(X)$ в том и только том случае, если множество $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ для любого открытого подмножества $U \in \mathbb{R}$, и Бэра о том, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет точку непрывности на любом замкнутом подмножестве $F \subset X$, то $f \in B_1(X)$. Приведенная выше теорема 4.4 дает возможность распространить теоремы Лебега и Бэра на класс наследственно линделефовых пространств.

В Заключении приведен перечень результатов.

Основные результаты диссертации получены лично автором, опубликованы в открытой печати, являются новыми, и автореферат правильно отражает содержание диссертации. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах. Они могут быть использованы в Московском, Санкт-Петербургском, Томском, Уральском и др. университетах, а также в институтах математики Москвы, Санкт-Петербурга, Новосибирска и Екатеринбурга.

Диссертация написан ясным математическим языком и практически в ней нет опечаток. Формулировки основных результатов понятны и естественны. Они отмечены в тексте отзыва и согласуются с мнением самого диссертанта, представленным в автореферате. Их доказательства полны и демонстрируют разнообразие применяемого научного инструментария. К числу замечаний, которые не влияют на качество работы, можно отнести следующие.

1. Заглавие параграфов 3 и 4 диссертации уместно формулировать более конкретно.

2. Целесообразно договориться, что под термином счетное множество в диссертации понимается не более чем счетное множество (§ 1 и 2).

3. Имеются плохо сформулированные предложения (например первое предложение в § 2.2).

4. Для упрощения изложения разумно там, где это возможно, описывать подмножества, как подмножества простых пространств (например в теореме 2.5 достаточно, чтобы P было всюду плотным подмножеством $\mathbb{R}$).

Диссертациия С. Е. Сухачевой на соискание ученой степени кандидата наук является научно-квалификационной работой в области функионального анализа, в которой содержится решение задач, имеющих значение для развития исследований пространств функций. Диссертация удовлетворяет требованиям п. 9-11, 13-14 действующего «Положения о присуждении ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
Профессор кафедры общей топологии и геометрии
механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук, доцент К. Л. Козлов
01.01.04 kkozlov@mech.math.msu.su

Подпись К. Л. Козлова заверяю,
И.о. декана механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Чубариков
+7(495)939-12-44
30.08.19

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»
119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1;
http://www.msu.ru;
info@rector.msu.ru;
+7(495) 939-10-00