Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Университет Руана

На правах рукописи

Сухачева Елена Сергеевна

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ,
ЗАДАННЫЕ НА МОДИФИКАЦИЯХ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

кандидат физико-математических наук,
доцент Хмылева Татьяна Евгеньевна

Habilitation à diriger des recherches,
Professeur des Universités Бузиад Ахмед

Томск – Руан – 2019

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена изучению пространств непрерывных функций, заданных на линейно упорядоченных пространствах. Пространство функций наделено топологией поточечной сходимости, а топология в линейно упорядоченных пространствах определяется с помощью порядка. Решается вопрос о линейной гомеоморфности пространств функций, заданных на линейно упорядоченных пространствах. Также в работе дается характеризация функций первого класса Бэра, заданных на линейно упорядоченных пространствах.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Классическим примером топологического пространства с порядковой топологией является вещественная прямая, наделенная евклидовой топологией или, что тоже самое, порядковой топологией. Но с помощью естественного порядка во множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно задать и другие топологии. Естественный способ определить топологию в линейно упорядоченном пространстве это задать базу окрестностей точек с помощью интервалов (a, b), левых и правых полуинтервалов $(a, b]$ и $[a, b)$ или объявить точки изолированными. Исследования свойств таких пространств можно встретить, например, в работе 1974 года М.Дж.Фабера [31]. Хорошо известным примером такого пространства является пространство $\mathbb{S}$, где $\mathbb{S}$ – это числовая прямая с топологией, базу которой образуют все полуинтервалы вида $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Это пространство впервые было рассмотрено в работе Р. Зоргенфрея в 1947 году [42] в качестве контрпримера, показывающего, что квадрат паракомпакта может быть не нормальным. Впоследствии пространство $\mathbb{S}$ назвали прямой Зоргенфрея или «стрелкой». Но это пространство встречается в книге «Мемуар о компактных топологических пространствах» П.С. Александрова и П.С. Урысона в 1929 году [2]. В этой книге авторы рассматривают топологическое пространство «двойная стрелка Александрова» или, как его еще называют, «две стрелки», которое служит примером сепарабельного совершенного компакта с первой аксиомой счетности, но без второй аксиомы счетности. При этом пространство «две стрелки» является объединением двух своих всюду плотных подпространств, каждое из которых в индуцированной топологии гомеоморфно прямой Зоргенфрея.

За последние 70 лет вышло много статей, касающихся свойств этого пространства. Отметим следующие из них: прямая Зоргенфрея является сепарабельным, совершенно нормальным, наследственно линделефовым, с первой аксиомой счетности, без второй аксиомы счетности, с несчетным сетевым весом, тотально несовершенным пространством (т.е. каждое компактное подпространство является счетным). Приведем некоторые результаты о свойствах прямой Зоргенфрея.

В 1971 году Р. Хис и Е. Майкл доказали [33], что любая конечная и счетная степени прямой Зоргенфрея являются совершенным пространством.

В 1977 году А. Емерик и В. Кульпа доказали [30], что прямая Зоргенфрея не имеет связной компактификации, т.е. любой компакт, который содержит $\mathbb{S}$ в качестве плотного подпространства, несвязен. Затем в 1981 году Дж. Пелант доказал [41], что любое несчетное подмножество прямой Зоргенфрея не имеет связной компактификации.

В 1979 году Э. ван Дауэн [29] показал, что прямая Зоргенфрея является примером сильно ретрактифицируемого, наследственно ретрактифицируемого, но при этом не наследственно сильно ретрафиктифицируемого пространства. (Сильная) ретрактифицируемость пространства X означает, что для его любого непустого замкнутого подмножества F существует (замкнутая) ретракция X на F.

В 1998 году Д. Бурке и Дж. Мур опубликовали статью о прямой Зоргенфрея [25]. В частности, в ней они дали характеристику всем подмножествам прямой Зоргенфрея, гомеоморфным ей самой – это одновременно F_σ и G_δ множества без изолированных точек. Из этой характеристики, в частности, следует, что $\mathbb{S}$ вкладывается в пространство иррациональных точек в топологии прямой Зоргенфрея $\mathbb{T}$, и что канторово совершенное множество без правых концов дополнительных интервалов в топологии прямой Зоргенфрея гомеоморфно ей самой. В этой же работе была дана характеристика F_σ-подмножествам $\mathbb{S}$ как непрерывным образам из $\mathbb{S}$ в $\mathbb{S}$.

На данный момент прямая Зоргенфрея достаточно хорошо изучена и в последние годы появились работы о различных естественных модификациях топологий, задаваемых с помощью порядка. В настоящей работе рассматриваются модификации прямой Зоргенфрея и пространства Хаттори. Для произвольного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ модификация прямой Зоргенфрея S_A представляет собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой окрестностей, состоящей из правых полуинтервалов $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ для точек $x \in A$ и состоящей из левых полуинтервалов $(c, d]$, $c, d \in \mathbb{R}$ для точек $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Для произвольного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство Хаттори $H(A)$ является топологическим пространством, в котором база окрестностей точек $x \in A$ совпадает с базой окрестностей евклидовой топологии, а база окрестностей точек $x \in \mathbb{R} \setminus A$ определяется левыми полуинтервалами $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Пространства Хаттори или, как их еще называют, H-пространства были введены японским математиком У. Хаттори [32] в 2010г. и изучались в работах В.А. Чатырко, У. Хаттори [27], Ф.Г. Мухамадиева, Н.К. Мамадалиева [38], Дж. Кулесы[35].

Свойства топологического пространства X тесно связано со свойствами пространства непрерывных функций $C(X)$. Одним из важнейших является вопрос о линейной (топологической) гомеоморфности пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ для различных X и Y. Аналогичный вопрос возникает и для пространств функций первого класса Бэра $B_1(X)$. Тот факт, что пространства $B_1(\mathbb{R})$ и $B_1(\mathbb{S})$ не гомеоморфны в виду того, что $B_1(\mathbb{R})$ секвенциально сепарабельно, а $B_1(\mathbb{S})$ – нет, был доказан в работе 2017 года А.В. Осиповым и Е.Г. Пыткеевым [40]. Пространства $C_p(\mathbb{S})$ и $C_p(\mathbb{R})$ также не являются гомеоморфными, поскольку $\mathbb{R}$ – σ-компактно, а $\mathbb{S}$ не является σ-компактным [3, стр.112]. В данной работе показано, что условие линейной гомеоморфности пространств $C_p(\mathbb{S})$ и $C_p(S_A)$

является очень сильным: оно влечет гомеоморфность пространств $\mathbb{S}$ и S_A. Эта теорема доказана в третьей главе данной работы.

Хорошо известны критерий Лебега и критерий Бэра о характеризации функций первого класса Бэра, заданных на польских пространствах [5]. В данной работе показано, что аналоги этих критериев верны и для топологических пространств, которые являются одновременно наследственно бэровскими и наследственно линделефовыми. Поскольку рассматриваемые пространства S_A и $H(A)$ являются примерами таких пространств, то получена характеризация функций первого класса Бэра, заданных на этих пространствах.

Рассматриваемая в данной работе тематика является широко известной и актуальной.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является изучение пространств непрерывных функций, заданных на линейно упорядоченных пространствах и наделенных топологией поточечной сходимости, а также функций первого класса Бэра, заданных на этих пространствах. К основным задачам данной диссертационной работы относятся следующие:

— исследовать свойства модификаций прямой Зоргенфрея: совершенная нормальность, наследственная линделефовость, наследственная сепарабельность, наследственная бэровость, полнота по Чеху, локальная компактность, тотальная несовершенность (т.е. любой компакт является счетным или конечным);

— исследовать свойства пространств Хаттори: совершенная нормальность, наследственная линделефовость, наследственная сепарабельность, наследственная бэровость, полнота по Чеху, локальная компактность, тотальная несовершенность; получить условия, при которых пространства Хаттори обладают счетной базой, являются польскими пространствами; — получить необходимые и достаточные условия гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификации S_A;

— получить необходимые и достаточные условия гомеоморфности прямой Зор-

генфрея и пространства Хаттори $H(A)$;
— получить необходимые и достаточные условия гомеоморфности модификации прямой Зоргенфрея S_A и $S_{\mathbb{Q}}$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
— получить необходимые и достаточные условия l-эквивалентности пространств непрерывных функций, заданных на прямой Зоргенфрея и ее модификации S_A;
— описать функции первого класса Бэра, заданные на прямой Зоргенфрея, ее модификациях S_A и пространствах Хаттори $H(A)$.

Научная новизна

В данной работе рассматриваются некоторые классические задачи о существовании гомеоморфизма между линейно упорядоченными пространствами с топологией, определяемой порядком. В частности, определяется пространство S_A — модификация прямой Зоргенфрея, ранее в литературе не рассматриваемое. Получен критерий гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификации S_A.

В работе [32] У. Хаттори определил модификацию евклидовой прямой $H(A)$, которую называют H-пространством или пространством Хаттори. В данной работе независимо от работы [35] Дж. Кулеса, другим методом, с использованием концепции Е.В. Щепина о ёмкости [22], было получено необходимое условие гомеоморфности пространств Хаттори и прямой Зоргенфрея. Доказана теорема о необходимом и достаточном условии существования линейного гомеоморфизма между пространствами непрерывных функций, заданных на прямой Зоргенфрея и ее модификациях, и наделенных топологией поточечной сходимости. Получена характеристика функций первого класса Бэра, заданных на пространствах, одновременно являющихся наследственно бэровскими и наследственно линделефовыми. В частности, получена характеристика функций первого класса Бэра, заданных на прямой Зоргенфрея, ее модификациях и пространствах Хаттори.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация вносит вклад в изучение свойств линейно упорядоченных пространств, пространств функций, заданных на них.

Полученные результаты могут использоваться в научных исследованиях и спецкурсах для студентов и аспирантов механико-математических факультетов, специализирующихся по топологии и функциональному анализу.

Методология и методы исследования

В работе используются методы топологии и функционального анализа: метод трансфинитной индукции, арифметика порядковых чисел, метод перехода к сопряженным пространствам при установлении l-эквивалентности, вычеты множества (введенные Хаусдорфом), метод разбиения линейно упорядоченного пространства на замкнутые подмножества, на которых функция монотонна.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты и выводы исследования:

• свойства модификаций прямой Зоргенфрея: модификация прямой Зоргенфрея S_A для любого $A \subset \mathbb{R}$ является совершенно нормальным, наследственно линделефовым, не удовлетворяющим второй аксиоме счетности, наследственно сепарабельным, тотально несовершенным, наследственно бэровским, не полным по Чеху, не локально компактным пространством;

• свойства пространств Хаттори: пространство Хаттори $H(A)$ для любого $A \subset \mathbb{R}$ является совершенно нормальным, наследственно линделефовым, наследственно сепарабельным, наследственно бэровским и является удовлетворяющим второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда $|\mathbb{R} \setminus A| \leq \aleph_0$, тотально несовершенным тогда и только тогда, когда $A \subset \mathbb{R}$ тотально несовершенно, слабо отделенным тогда и только тогда, когда $A \subset \mathbb{R}$ разреженное в топологии «левой стрелки» $\mathbb{S}$, полным по Чеху тогда и только тогда, тогда $\mathbb{R} \setminus A$ счетно, польским тогда и только тогда, тогда $\mathbb{R} \setminus A$ счетно, локально компактным тогда и только тогда, когда $\mathbb{R} \setminus A$ замкнуто в $\mathbb{R}$ и дискретно в $\mathbb{S}$.

• необходимое условие гомеоморфности прямой Зоргенфрея и пространств Хаттори;

• критерий гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификаций;

• критерий гомеоморфности модификаций прямой Зоргенфрея S_A, когда множество $A \subset \mathbb{R}$ – счетно, и модификации прямой Зоргенфрея на множестве рациональных точек $S_{\mathbb{Q}}$;

• критерий l-эквивалентности пространств непрерывных функций, заданных на прямой Зоргенфрея и ее модификациях;

• характеристика функций первого класса Бэра, заданных на прямой Зоргенфрея, ее модификациях и пространствах Хатгори.

Степень достоверности

Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое обоснование в форме теорем.

Апробация результатов исследования

Основные результаты диссертации обсуждались на научном семинаре кафедры математического анализа и теории функций ММФ ТГУ (руководитель профессор С.П. Гулько) и докладывались на научных конференциях:

1. Научная конференция механико-математического факультета ТГУ. Томск, 24-30 апреля 2014 г.

2. IV Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики». Томск, 17-19 ноября 2014 г.

3. 53-я Международная научная студенческая конференция МНСК-2015. Новосибирск 11-17 апреля 2015 г.

4. Молодежная научная конференция "Все грани математики и механики". Томск 24-30 апреля 2015 г.

5. Международная (47-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений». Екатеринбург, 31 января — 06 февраля 2016 г.

6. 54-я Международная научная студенческая конференция МНСК-2016. Новосибирск, 16-20 апреля 2016 г.

7. Международная научная конференция "Александровские чтения-2016". Москва, 22-26 мая 2016 г.

8. 12th Symposium on General Topology and ils Relations to Modern Analysis and Algebra TOPOSYM 2016. Prague, Czech Republic, 25-29 july 2016.

9. 55-я Международная научная студенческая конференция МНСК-2017. Новосибирск, 17-20 апреля 2017 г.

10. Journee de la Federation de Recherche Normandie Mathematiques. Madrillet, Universite de Rouen, Saint-Etienne-du-Rouvray, France, 13 juin 2017.

11. International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Lviv, Ukraine, 18-23 September 2017.

12. 56-я Международная научная студенческая конференция МНСК-2018. Новосибирск, 22-27 апреля 2018 г.

13. Международная конференция «Топологическая алгебра и теоретико-множетвенная топология» посвященная 80-летию профессора А.В. Архангельского. Москва, 23-28 августа 2018 г.

14. Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 140-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета. Томск, 2-4 октября 2018 г.

Результаты дисертационного исследования получены в том числе при выполнении поддержанных шрантами проектов, в которых автор является соисполнителем: грант РФФИ проект № 17-51-18051 Болг а «Взаимосвязь топологии и теории баноховых пространств» (2017-2019 гг.).

Публикации

Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в восемнадцати печатных работах [6]–[20], [26], [34], [43], в том числе пять работ [6]–[9], [26] в журналах, рекомендованных ВАК. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Работы [6]–[8] по теме диссертации выполнены совместно с научным руководителем Т.Е. Хмылевой, а работа [26] – совместно с научным руководителем А. Бузиадом.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы, содержащей 45 наименования. Работа изложена на 82 страницах.

Содержание работы

Во введении раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор известных результатов, формулируется цель и излагается содержание работы, обосновывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В 1-ой главе устанавливаются свойства модификаций прямой Зоргенфрея и пространств Хаттори.

Получено, что модификация прямой Зоргенфрея S_A для любого $A \subset \mathbb{R}$ является совершенно нормальным, наследственно линделефовым, не удовлетворяющим второй аксиоме счетности, наследственно сепарабельным, тотально несовершенным (т.е. любой компакт является счетным или конечным), наследственно бэровским, не полным по Чеху, не локально компактным пространством.

Получено, что пространство Хаттори $H(A)$ для любого $A \subset \mathbb{R}$ является совершенно нормальным, наследственно линделефовым, наследственно сепарабельным, наследственно бэровским и является удовлетворяющим второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда $|\mathbb{R} \setminus A| \leq \aleph_0$, тотально несовершенным тогда и только тогда, когда $A \subset \mathbb{R}$ тотально несовершенно, слабо отделенным тогда и только тогда, когда $A \subset \mathbb{R}$ леворазреженное, полным по Чеху тогда и только тогда, тогда $\mathbb{R} \setminus A$ счетно (следовательно, $H(A)$ является польским), локально компактным тогда и только тогда, когда $\mathbb{R} \setminus A$ замкнуто в $\mathbb{R}$ и дискретно в $\mathbb{S}$.

Во 2-ой главе доказана теорема о гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификаций, прямой Зоргенфрея и пространством Хаттори и некоторые частные случаи гомеоморфности различных модификаций прямой Зоргенфрея.

Основным результатом параграфа 2.1 является критерий гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификаций:

Теорема 2.1 *Пусть A – некоторое подмножество вещественной прямой. Следующие условия эквивалентны:*

(1) пространства S_A и $\mathbb{S}$ гомеоморфны;

(2) не существует подмножества $\emptyset \neq V \subset A$, замкнутого в A и такого, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$;

(3) множество A является множеством типа F_σ и G_δ в $\mathbb{R}$.

В параграфе 2.2 обсуждается вопрос о гомеоморфности пространств S_A и $S_\mathbb{Q}$. Для счетных множеств $A \subset \mathbb{R}$ получены необходимое и достаточное условия гомеоморфности пространств S_A и $S_\mathbb{Q}$.

Теорема 2.5 *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ счетное множество. Пространство S_A гомеоморфно пространству $S_\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда подмножество $A \subset \mathbb{R}$ всюду плотно в $\mathbb{S}$.*

Теорема 2.6 *Пусть A и его дополнение $\mathbb{S} \setminus A$ – несчетные в любом интервале (a, b) в $\mathbb{S}$, а подмножество $D \subset \mathbb{S}$ – счетно. Тогда пространства S_A и S_D не гомеоморфны.*

Основным результатом параграфа 2.3 является доказательство необходимого условия гомеоморфности пространств Хаттори и прямой Зоргенфрея с использованием концепции Е.В. Щепина о ёмкости.

Предложение 2.11 *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что пространства $H(A)$ и $\mathbb{S}$ гомеоморфны. Тогда A – разреженное.*

В 3-ей главе получено необходимое и достаточное условие линейной гомеоморфности пространств непрерывных функций, заданных на прямой Зоргенфрея и ее модификациях.

Теорема 3.2 *Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Следующие условия равносильны:*

(i) пространства $\mathbb{S}$ и S_A гомеоморфны;

(ii) пространства $C_p(\mathbb{S})$ и $C_p(S_A)$ линейно гомеоморфны.

В 4-ой главе получена характеристика функций первого класса Бэра на некотором классе неметризуемых пространств, а именно, доказаны аналоги критериев Лебега и Бэра для функций первого класса Бэра, заданных на пространствах, являющихся одновременно наследственно линделефовыми и наследственно бэровскими пространствами.

Теорема 4.4 *Пусть пространство X наследственно линделефово и наследственно бэровское. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ принадлежит $B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.* Из этой теоремы получена характеристика функций первого класса Бэра, заданных на прямой Зоргенфрея, ее модификациях и пространствах Хаттори.

Теорема 4.5 *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – произвольное подмножество и $E = S_A$ или $E = H(A)$. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ принадлежит $B_1(E)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset E$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.*

В заключении формулируются основные результаты диссертации.

Автор выражает благодарность научным руководителям кандидату физико-математических наук, доценту Хмылевой Татьяне Евгеньевне и профессору Ахмеду Бузиаду за помощь и поддержку на всех этапах выполнения диссертационной работы.

1. Определение и свойства пространств S_A и $H(A)$

Символом $\mathbb{S}$ обозначим *прямую Зоргенфрея* (или «стрелку», или «левую стрелку»), представляющую собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой

$$\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Топологию пространства $\mathbb{S}$ будем обозначать τ_0 или $\tau_{\leftarrow}$. Символом $\mathbb{S}_{\rightarrow}$ обозначается множество вещественных чисел, наделенное топологией, порожденной базой

$$\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{S}$ гомеоморфно $\mathbb{S}_{\rightarrow}$. Топологическое пространство $\mathbb{S}_{\rightarrow}$, в отличие от $\mathbb{S}$ будем называть «правой стрелкой», а топологию этого пространства обозначать $\tau_{\rightarrow}$ или τ_S.

Пусть множества $X, Y \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset X$. Символом X_Y обозначим топологическое пространство, в котором база окрестностей точки x определяется следующим образом:

$$B_x = \{(x-\varepsilon, x] \cap X : \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in X \setminus Y;$$

$$B_x = \{[x, x+\varepsilon) \cap X : \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in Y.$$

Если $X = \mathbb{S}$, а $Y = A$, то получаем пространство S_A, в котором на множестве A задана топология «правой стрелки». Это пространтво S_A будем называть *модификацией прямой Зоргенфрея*, а топологию в этом пространстве будем обозначать τ_A. Свойства пространства S_A аналогичны свойствам прямой Зоргенрея $\mathbb{S}$.

Пусть множетво $A \subset \mathbb{R}$. Символом $H(A)$ обозначим топологическое протранство, в котором база окрестности точки x определяется следующим образом:

$$B_x = \{(x-\varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus A;$$

$$B_x = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}, \text{ если } x \in A.$$

Пространство $H(A)$ называется *пространством Хаттори*, а топология этого пространства обозначается $\tau(A)$. Это пространство было введено в работе Y.Hattori [32], а в работах [27] и [38] были получены некоторые его свойства. В частности, для любого $A \subset \mathbb{R}$ пространство $H(A)$ регулярное, наследственно линделефовое (следовательно нормальное), наследственно сепарабельное, бэровское пространство.

Заметим, что

$$\tau_E = \tau(\mathbb{R}) \subset \tau(A) \subset \tau_A$$

для любого множества $A \subset \mathbb{R}$. В частности, $S_\emptyset = \mathbb{S} = H(\emptyset)$.

Семейство $\mathfrak{N} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ подмножеств топологического пространства X называется *сетью* пространства X, если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x найдется такое $\alpha \in I$, что $x \in M_\alpha \subset U$. *Сетевым весом* пространства X называется кардинал $nw(X) = \min\{|\mathfrak{N}|, \mathfrak{N}\text{–сеть пространства } X\}$. Известно, что для каждого топологического пространства X выполняются соотношения $nw(X) \leq \omega(X)$, $nw(X) \leq |X|$ и $d(X) \leq nw(X)$. Следующее предложение является аналогом теоремы 3.10 в работе Дж. Ван Милла [36].

Теорема 1.1. *Пусть $X \subset S_A$. Тогда $nw(X) = |X|$.*

Доказательство. В случае конечного множества X утверждение теоремы очевидно. Пусть $|X| \geq \aleph_0$ и $\mathfrak{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – сеть пространства X. Поскольку

$$X = (X \setminus A) \sqcup (X \cap A),$$

то хотя бы одно из множеств $X_1 = (X \setminus A)$ или $X_2 = (X \cap A)$ имеет мощность, равную X. Предположим, что $|X_1| = |X|$. Для каждого $x \in X_1$ выберем элемент $B_{\alpha(x)}$ такой, что

$$x \in B_{\alpha(x)} \subset (x-1, x].$$

Следовательно, $x = \max\{y : y \in B_{\alpha(x)}\}$ и значит, если $x \neq x_1$ и $x, x_1 \in X_1$, то $B_{\alpha(x)} \neq B_{\alpha(x_1)}$. Отсюда получаем, что

$$nw(X) \geq nw(X_1) \geq |X_1| = |X|.$$

Случай, когда $|X_2| = |X|$, доказывается аналогично.

$\square$

Следствие 1.1. *Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A не удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Нетрудно видеть, что для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A является наследственно сепарабельным.

Если $|\mathbb{R} \setminus A| \leq \aleph_0$, то пространство $H(A)$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. Также, как для S_A, можно доказать следующее

Предложение 1.1. *Пусть $X \subset H(A)$. Если $|X \setminus A| \geq \aleph_0$, то $nw(X) = |X \setminus A|$.*

В частности, что если $|\mathbb{R} \setminus A| > \aleph_0$ пространство $H(A)$ не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Пространство X называется *вполне несовершенным* (totally imperfect), если каждое компактное подпространство пространства X счетно. Хорошо известно, что $\mathbb{S}$ вполне несовершенна.

Предложение 1.2. *Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A является вполне несовершенным.*

Доказательство. Предположим, что компакт $K \subset S_A$ не является счетным. Тогда одно из множеств $K \cap A$ или $K \setminus A$ является несчетным. Предположим, что множество $K \cap A$ является несчетным.

Тогда для каждой точки $k \in K \cap A$ найдется интервал вида $(k - \varepsilon_k, k)$, где $\varepsilon_k > 0$ такой, что

$$(k - \varepsilon_k, k) \cap K = \emptyset.$$

Действительно, если такого иинтервала не существует, то рассмотрим возрастающую последовательность $\{k_n \in K : n \in \mathbb{N}\}$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, сходящуюся к точке k в $\mathbb{R}$. Пусть U_n – окрестность точки k_n такая, что $U_n \cap K = \{k_n\}$. Тогда из покрытия

$$\{(-\infty, k_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{[k, +\infty)\}$$

нельзя извлечь конечное подпокрытие, что противоречит компактности K. Таким образом, существует интервал вида $(k - \varepsilon_k, k)$ такой, что $(k - \varepsilon_k, k) \cap K = \emptyset$. Ясно, что

$$(k' - \varepsilon_{k'}, k') \cap (k'' - \varepsilon_{k''}, k'') = \emptyset$$

для $k' \neq k''$, где $k', k'' \in K$. По предположению имеем несчетное число непересекающихся интервалов вида $(k - \varepsilon_k, k)$, где $k \in K$. Но это невозможно, в силу сепарабельности S_A.

Случай, когда множество $K \setminus A$ является несчетным доказывается аналогично. □

Для ответа на вопрос при каких условиях на множество $A \subset \mathbb{R}$ пространства Хаттори $H(A)$ являются вполне несовершенными нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 1.3. *Пусть $X \subset H(A)$ — произвольное подпространство и $f : X \to H(B)$ — непрерывная функция. Тогда множество $f(X \cap A) \setminus B$ счетно.*

Доказательство. Поскольку подпространство $X \cap A$ пространства $H(A)$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то множество $f(X \cap A)$ имеет счетную сеть, а следоательно, и множество $f(X \cap A) \setminus B$ имеет счетную сеть. Заметим, что $H(B)$ и $\mathbb{S}$ индуцируют одинаковую топологию на $f(X \cap A) \setminus B$. В силу теоремы 1.1 каждое подпространство $\mathbb{S}$, которое имеет счетную сеть – счетно.

□

Из предложения 1.3 следует, что если $H(A)$ гомеоморфно $\mathbb{S}$, то множество A счетно. В самом деле, поскольку $\mathbb{S} = H(\emptyset)$ и если $f : H(A) \to \mathbb{S}$ — гомеоморфизм, то $f(A)$ счетно, следовательно, и множество A счетно.

Предложение 1.4. *Каждое польское, вполне несовершенное пространство счетно.*

Доказательство. Действительно, предположим, что пространство X – несчетное польское пространство. Поскольку пространство X имеет счетную базу, то $X = M \sqcup P$, где M – совершенное множество (т.е. замкнутое и без изолированных точек), P – счетное [1, стр.160]. В силу того, что M несчетное полное метризуемое пространство, в M можно вложить канторово множество C [23, 4.5.5]. Тогда $C \cap M$ – несчетный компакт в X, что невозможно, поскольку пространство X вполне несовершенное.

$\square$

Предложение 1.5. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Пространство $H(A)$ – вполне несовершенное тогда и только тогда, когда A вполне несовершенное.*

Доказательство. Предположим, что пространство A – вполне несовершенное. Пусть K компактное подпространство $H(A)$. Тождественное отображение $id\colon H(A) \to \mathbb{R}$ непрерывно. Следовательно

$$id : (K, \tau(A)) \to (K, \tau_E)$$

гомеоморфизм. Поскольку отображение

$$id|_K\colon (K, \tau_E) \to H(A)$$

непрерывное, то в силу предложения 1.3 для $X = K \subset H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ множество

$$id|_K(K \cap \mathbb{R}) \setminus A = K \setminus A$$

счетно. Следовательно, множество $K \cap A$ имеет тип G_δ в K и по теореме [23, 4.3.23] является польским пространством. Поскольку A вполне несовершенное, то $K \cap A$ вполне несовершенное и в силу предложения 1.4 – счетное. Таким образом,

$$K = (K \setminus A) \sqcup (K \cap A)$$

– счетно.

Обратная импликация очевидна.

□

Совершенным пространством называется пространство, в котором любое замкнутое множество имеет тип G_δ (или, что тоже самое, любое открытое множество имеет тип F_σ). Нетрудно видеть, что в пространствах S_A и $H(A)$ открытые множества являются счетным объединением промежутков вида $(a_1, b_1]$, $[a_2, b_2)$, (a_3, b_3), $[a_4, b_4]$ (доказательство этого факта повторяет доказательство аналогичного утверждения для вещественной прямой (см. например [5, стр. 47])), а каждый из этих промежутков имеют тип F_σ. Таким образом, пространства S_A и $H(A)$ являются совершенными для любого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Предложение 1.6. *Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A — линделефово.*

Доказательство. Пусть $\{U_m\}_{m\in M}$ — покрытие S_A. Положим $V_m = \operatorname{int}_{\mathbb{R}} U_m$. Множества V_m открыты в $\mathbb{R}$ для любого $m \in M$. Покажем, что множество

$$L = S_A \setminus \left(\bigcup_{m\in M} V_m \right)$$

— счетно. Для каждой точки $x \in L \cap A$ найдутся номер $m(x)$ и число $\varepsilon_x > 0$ такие, что $x \in [x, x+\varepsilon_x) \subset U_{m(x)}$. Для каждой точки $x \in L \setminus A$ найдутся номер $m(x)$ и число $\varepsilon_x > 0$ такие, что $x \in (x-\varepsilon_x, x] \subset U_{m(x)}$. Покажем, что полуинтервалы семейства

$$\{[x, x+\frac{\varepsilon_x}{3}) : x \in A \cap L\} \cup \{(x-\frac{\varepsilon_x}{3}, x] : x \in L \setminus A\}$$

попарно не пересекаются. Пусть $x, y \in L$, $x < y$. Возможны следующие четыре случая:

1. $x, y \in L \cap A$. Если $[x, x+\frac{\varepsilon_x}{3}) \cap [y, y+\frac{\varepsilon_y}{3}) \neq \emptyset$, то $x < y \leq x + \frac{\varepsilon_x}{3} < x + \varepsilon_x$ и, следовательно, $y \in (x, x+\varepsilon_x) \in V_{m(x)}$, что невозможно, т.к. $y \in L$. Таким образом, $[x, x+\frac{\varepsilon_x}{3}) \cap [y, y+\frac{\varepsilon_y}{3}) = \emptyset$.

2. $x, y \in L \setminus A$. Если $(x - \frac{\varepsilon_x}{3}, x] \cap (y - \frac{\varepsilon_y}{3}, y] \neq \emptyset$, то $y > x \geq y - \frac{\varepsilon_y}{3} > y - \varepsilon_y$ и, следовательно, $x \in (y - \varepsilon_y, y) \in V_{m(y)}$, что невозможно, т.к. $x \in L$. Таким образом, $(x - \frac{\varepsilon_x}{3}, x] \cap (y - \frac{\varepsilon_y}{3}, y] = \emptyset$.

3. $x \in L \setminus A$ и $y \in L \cap A$. Тогда $(x - \frac{\varepsilon_x}{3}, x] \cap [y, y + \frac{\varepsilon_y}{3}) = \emptyset$.

4. $x \in L \cap A$ и $y \in L \setminus A$. Поскольку $x \in L$ и $x < y$, то $x \leq y - \varepsilon_y$, что равносильно $y - x \geq \varepsilon_y$. Поскольку $y \in L$ и $y > x$, то $y \geq x + \varepsilon_x$, а значит $y - x \geq \varepsilon_x$. Тогда, $2y - 2x \geq \varepsilon_x + \varepsilon_y$ и следовательно, $y - \frac{1}{2}\varepsilon_y \geq x + \frac{1}{2}\varepsilon_x$. Таким образом, $[x, x + \frac{\varepsilon_x}{3}) \cap (y - \frac{\varepsilon_y}{3}, y] = \emptyset$.

В силу того, что мощность каждого семейства попарно непересекающихся интервалов не превосходит $\aleph_0$, имеем $|L| \leq \aleph_0$.

Множество $S_A \setminus L$ с топологией вещественной прямой имеет счетную базу. Значит, покрытие $\{V_m\}_{m \in M}$ множества $S_A \setminus L$ содержит счетное подпокрытие $\{V_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ этого множества. Ясно, что $\{U_{m(x)}\}_{x \in L} \cup \{U_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное подпокрытие покрытия $\{U_m\}_{m \in M}$. Таким образом, пространство S_A — линделефово.

$\square$

В случае, когда $|\mathbb{R} \setminus A| \leq \aleph_0$, пространство $H(A)$ регулярное и имеет счетную базу, а следовательно, является линделефовым [23, 3.8.1]. Аналогичный результат верен и для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}$.

Предложение 1.7. *Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ пространство $H(A)$ — линделефово.*

Доказательство. Поскольку топология на S_A тоньше, чем топология пространства $H(A)$, то тождественное отображение $f\colon S_A \to H(A)$ непрерывно. В силу того, что $H(A)$ — регулярное пространство и пространство S_A является линделефовым (предложение 1.6), то по теореме [23, 3.8.6] пространство $H(A)$ является линделефовым.

$\square$

Тот факт, что пространства S_A и $H(A)$ являются линделефовыми влечет, что эти пространства нормальны для всех $A \subset \mathbb{R}$ [23, 3.8.2]. Отсюда и из того, что эти пространства совершенны, следует, что пространства S_A и $H(A)$ наследственно линделефовы для всех $A \subset \mathbb{R}$ [23, 3.8.A.(a)].

Множеством первой категории в топологическом пространстве называется множество, представимое в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. *Множеством второй категории* в топологическом пространстве называется множество, не являющееся множеством первой категории. Топологическое пространство X называется *бэровским*, если для любой последовательности открытых всюду плотных подмножеств $G_n \subset X$ пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ всюду плотно в X. Топологическое пространство X называется *наследственно бэровским*, если каждое замкнутое подмножество $F \subset X$ является бэровским пространством. Следующее предложение можно найти в [21].

Предложение 1.8. *Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$, пространство S_A является бэровским.*

Поскольку открытые подмножества, а также всюду плотные G_δ-подмножества в бэровском пространстве являются бэровскими пространствами [45, стр.228], то получаем

Следствие 1.2. *Верны следующие утверждения:*

1. *Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}$ и всюду плотного G_δ-подмножества $T \subset S_A$, пространство (T, τ_A) является бэровским. В частности, множество иррациональных точек (J, τ_A) бэровское.*

2. *Если G – открытое подмножество в пространстве S_A, то (G, τ_A) бэровское.*

Предложение 1.9. *Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$, пространство S_A наследственно бэровское.*

Доказательство. Поскольку пространство S_A регулярное и с первой аксиомой счетности, то для доказательства того, что оно является наследственно бэровским достаточно показать, что пространство S_A не имеет счетного замкнуто подпространства без изолированных точек [28]. Пусть множество F замкнуто в S_A и без изолированных точек. Тогда замыкание множества F в евклидовой топологии прямой $\overline{F}$ также не содержит изолированных точек. Это означает [1], что множество F несчетно. Поскольку множество $\overline{F} \setminus F$ счетно, то F является несчетным.

□

Предложение 1.10. *Для любого $A \subset \mathbb{R}$, пространство $H(A)$ наследственно бэровское.*

Доказательство. Аналогично предыдущему предложению, в силу [28], покажем, что каждое счетное замкнутое подпространство $H(A)$ имеет изолированную точку, т.е. является разреженным в $\tau(A)$. Пусть F – замкнутое счетное подпространство $H(A)$. Множество $\mathbb{R} \setminus F$ – открыто в $H(A)$, а значит и в $\mathbb{S}$ (т.к. топология на $\mathbb{S}$ сильнее топологии $H(A)$). В силу того, что $\mathbb{R} \setminus F$ – это дизъюнктное объединение интервалов вида (a, b) или $(a, b]$, то $\mathbb{R} \setminus F$ – множество типа F_σ в $\mathbb{R}$. Следовательно множество F счетно и имеет тип G_δ в $\mathbb{R}$, т.е. оно полно по Чеху, а значит оно бэровское, и, следовательно, оно второй категории. Действительно, если в F нет изолированных точек, то [23, 6.2.A d] F гомеоморно множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$, но $\mathbb{Q}$ — первой категории. Следовательно, множество F разреженное в $\mathbb{R}$, а значит оно разреженное и в $H(A)$. □

Напомним следующие определения. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. *Указатель* $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$ в X это набор подмножеств X (необязательно относящихся к τ) такой, что для каждого $x \in X$, $x \in V_x$. *Окрестностным указателем* пространства X называется набор множеств $(V_x)_{x \in X}$ такой, что каждое множество V_x являетя окрестностью (необязательно открытой) точки x

в X. В работе [44] хаусдорфово пространство X называется *слабо отделенным* (weakly separated), если существует окрестностный указатель $(V_x)_{x\in X}$ пространства X такой, что для любых точек $x, y \in X$ выполняется импликация: если $x \in V_y$ и $y \in V_x$, то $x = y$. Стандартным примером слабо отделенного пространства является прямая Зоргенфрея. Нетрудно видеть, что пространство S_A слабо отделенное, если существует такая точка $x_0 \in \mathbb{R}$, что $A = [x_0, +\infty)$. Мы покажем в теореме 1.2, что для каждого плотного подмножества $A \in \mathbb{R}$, пространство Хаттори $H(A)$ не является слабо отделенным. Из этого следует, что такое пространство не гомеоморфно пространству $\mathbb{S}$.

Предложение 1.11. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — произвольное подмножество, $B \subset H(A)$ — подпространство второй категории и X — слабо отделенное пространство. Тогда для каждой непрерывной функции $f\colon B \to X$ существуют непустое открытое подмножество $W \subset B$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для каждой точки $x \in W \cap A$ выполняется $f([x, x+\varepsilon) \cap B) \subset \{f(x)\}$.*

Доказательство. Пусть $(V_x)_{x\in X}$ — окресностный указатель пространства X, удовлетворяющий определению слабо отделенного пространства. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, положим

$$F_n = \left\{ y \in B : f(y - \frac{1}{n}, y] \cap B \subset V_{f(y)} \right\}.$$

Поскольку отображение f непрерывно, то $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. В силу того, что пространство B второй категории, существуют $n \in \mathbb{N}$ и непустое открытое подмножество $W \subset B$ такие, что $W \subset \overline{F_n}^B$. Пусть $x \in W \cap A$. Так как отображение f непрерывно и W открыто в B, то существует $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{n}$ такое, что

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B \subset W \text{ и } f((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B) \subset V_{f(x)}.$$

Пусть $y \in [x, x+\varepsilon) \cap F_n \subset [x, x+\varepsilon) \cap B$. Тогда

$$y - \frac{1}{n} < y - \varepsilon < x \le y < x + \varepsilon,$$

и следовательно, $f(x) \in V_{f(y)}$ (по определению F_n) и $f(y) \subset V_{f(x)}$ (т.к. $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B$). Поскольку пространство X слабо отделенное, то $f(x) = f(y)$, а значит и $f([x, x+\varepsilon) \cap F_n) \subset \{f(x)\}$. Так как $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B \subset W$, то

$$(x, x+\varepsilon) \cap B \subset (x, x+\varepsilon) \cap W \subset (x, x+\varepsilon) \cap \overline{F_n}^B \subset \overline{(x, x+\varepsilon) \cap F_n}^B.$$

Таким образом,

$$f((x, x+\varepsilon) \cap B) \subset f(\overline{(x, x+\varepsilon) \cap F_n}^B) \subset \overline{f((x, x+\varepsilon) \cap F_n)}^X \subset \overline{\{f(x)\}}^X = \{f(x)\}.$$

$\square$

Рассмотрим еще следующие понятия. Пусть $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$ – указатель в X. Подпространство $A \subset (X, \tau)$ называется *$\mathcal{V}$-разреженным*, если для каждого непустого подмножества $F \subset A$ существуют $x \in F$ и открытое множество $U \subset X$ такие, что $x \in U \cap F \subset V_x$. *$\mathcal{V}$-производная* множеста A определяется с помощью трансфинитной индукции следующим образом: $A^0 = A$; если β – непредельный ординал, то $A^{\beta+1}$ есть множество $x \in A^\beta$ таких, что для каждой окрестности U точки x в (X, τ) верно $U \cup A^\beta \not\subset V_x$; если α — предельный ординал, то $A^\alpha = \bigcap\limits_{\beta < \alpha} A^\beta$. Как для производных Кантора-Бендиксона, A является $\mathcal{V}$-разряженым тогда и только тогда, когда существует ординал $rk_{\mathcal{V}}(A)$ (или $rk(A)$) такой, что $A^{rk(A)} = \emptyset$ и для каждого $\beta < \gamma < rk(A)$ $A^\beta \setminus A^\gamma \neq \emptyset$. Более того, если A – $\mathcal{V}$-разреженное, то для каждой точки $x \in A$ существует ординал γ такой, что $x \notin A^\gamma$. Нетрудно видеть, что $\gamma_0 = \min\{\gamma \leq rk(A) \colon x \notin A^\gamma\}$ не является предельным и, значит, существует наибольший ординал α_x такой, что $x \in A^{\alpha_x} \setminus A^{\alpha_x+1}$. Ординал α_x будем называть *рангом точки x*. Из определения A^{α_x+1} следует, что для некоторой окрестности U_x точки x в пространстве (X, τ) выполнено условие $x \in U_x \cap A^{\alpha_x} \subset V_x$.

В следующей лемме χ_A – это характеристическая функция множества $A \subset X$.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in X}$ указатель в пространстве X и множество $A \subset X$ такое, что подпространства A и $X \setminus A$ в X $\mathcal{V}$-разреженные. Тогда* *существует окрестностный указатель $(W_x)_{x\in X}$ пространтва X такой, что если $(x,y)\in W_y\times W_x$ и $\chi_A(x)\neq\chi_A(y)$, то $(x,y)\in\overline{V_y}\times\overline{V_x}$.*

Доказательство. Положим $B = X\setminus A$ и пусть $(A^\alpha)_{\alpha<rk(A)}$ и $(B^\alpha)_{\alpha<rk(B)}$ последовательности $\mathcal{V}$-производных для множеств A и B соответственно. Мы хотим определить W_x для всех точек $x\in X$. Пусть $x\in A$ и α_x – ранг точки x. Выберем открытую окрестнсть U_x точки x в X такую, что $x\in U_x\cap A^{\alpha_x}\subset V_x$. Если $x\in\bigcap\limits_{\alpha<rk(B)}\overline{B^\alpha}$, то положим $W_x=U_x$. Если же $x\notin\bigcap\limits_{\alpha<rk(B)}\overline{B^\alpha}$, то обозначим $\beta_x=\min\{\alpha<rk(B):x\notin\overline{B^{\alpha_x}}\}$ и положим $W_x=U_x\setminus\overline{B^{\beta_x}}$. Аналогично, для точки $y\in B$ выберем окрестность U_y такую, что $y\in U_y\cap B^{\alpha_y}\subset V_y$ и пусть $W_y=U_y$, если $y\in\bigcap\limits_{\beta<rk(A)}\overline{A^\beta}$ и $W_y=U_y\setminus\overline{A^{\beta_y}}$, если $y\notin\bigcap\limits_{\beta<rk(A)}\overline{A^\beta}$ и $\beta_y=\min\{\beta\colon y\notin\overline{A^\beta}\}$.

Пусть $(x,y)\in W_y\times W_x$ такие, что $\chi_A(x)\neq\chi_A(y)$. Для определеноости, пусть $x\in A$ и $y\notin A$. Тогда $x\in W_y\cap A^{\alpha_x}$ и следовательно, $y\in\overline{A^{\alpha_x}}$, т.к. иначе β_y было бы определено и удовлетворяло $\beta_y\leq\alpha_x$. Таким образом,

$$W_y\cap A^{\alpha_x}\subset W_y\cap A^{\beta_y}=\emptyset,$$

что невозможно. Поскольку $U_x\cap A^{\alpha_x}\subset V_x$ и $y\in U_x$, то

$$y\in U_x\cap\overline{A^{\alpha_x}}\subset\overline{U_x\cap A^{\alpha_x}}\subset\overline{V_x}.$$

Аналогично, $x\in\overline{V_y}$.

□

Предложение 1.12. *Пусть пространство (X,τ) слабо отделенное окрестноостным указателем $\mathcal{V}=(V_x)_{x\in X}$ пространства (X,τ). Пусть топология τ_1 на множестве X такая, что каждое V_x τ_1-замкнутое множество и предположим, что существует $A\subset X$ такое, что подпространства A и $X\setminus A$ пространства (X,τ_1) $\mathcal{V}$-разреженные и слабо отделенные. Тогда (X,τ_1) слабо отделенное.*

Доказательство. Поскольку подпространства A и $X \setminus A$ пространства (X, τ_1) слабо отделенные, то существует окрестностный указатель $(U_x)_{x \in X}$ пространства (X, τ_1) такой, что $x = y$, когда $(x, y) \in U_y \times U_x$ и $\chi_A(x) = \chi_A(y)$. По лемме 1.1 существует также окрестностный указатель $(W_x)_{x \in X}$ пространства (X, τ_1) такой, что

$$(x, y) \in \overline{V_y} \times \overline{V_x} = V_y \times V_x,$$

когда $(x, y) \in W_y \times W_x$ и $\chi_A(x) \neq \chi_A(y)$. Тогда $(U_x \cap W_x)_{x \in X}$ — окрестностный указатель пространства (X, τ_1) удовлетворяющий $x = y$, когда

$$(x, y) \in (U_y \cap W_y) \times (U_x \cap W_x).$$

$\square$

Теперь мы готовы определить для каких подмножеств $A \subset \mathbb{R}$ пространства Хаттори $H(A)$ слабо отделены. Напомним, что топологическое пространство X называется *разреженным*, если любое непустое подпространство $Y \subset X$ содержит точку $y \in Y$, изолированную в Y. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *лево-разреженным*, если A разреженное как подпространство «левой» прямой Зоргенфрея $\mathbb{S}$. *Право-разреженные* множества определяются аналогично. Нетрудно видеть, что каждое лево-разреженное (право-разреженное) множество – счетно.

Заметим, что каждое множество $X \subset \mathbb{R}$, одновременно и лево- и право-разреженное, является разреженным как подпространство в $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Действительно, предположим, что (X, τ_E) не разреженное, т.е. существует подмножество $Y \subset (X, \tau_E)$, которое не имеет изолированных точек. Пусть

$$A = \{x \in Y : x \quad \text{– изолированная в } \ (Y, \tau_{\leftarrow})\}$$

и

$$B = \{x \in Y : x \quad \text{– изолированная в } \ (Y, \tau_{\rightarrow})\}.$$

Поскольку X и лево- и право-разреженное, то из условия $Y \cap (a, b) \neq \emptyset$, следует, что $Y \cap (a, b) \cap A \neq \emptyset$ и $Y \cap (a, b) \cap B \neq \emptyset$. Это означает, что множества A и B

плотны в (Y, τ_E). Заметим, что $A \cap B = \emptyset$, так как в (Y, τ_E) нет изолированных точек. Для любой точки $a \in A$ и любого $\varepsilon > 0$

$$(a, a + \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset,$$

а так как A плотно в (Y, τ_E), то и

$$(a, a + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Следовательно, подмножество $A \subset Y \subset X$ не имеет изолированных точек в топологии $\tau_{\to}$, что невозможно, т.к. X – право-разреженное.

Теорема 1.2. *Пространство $H(A)$ слабо отделенное тогда и только тогда, когда A — праворазреженное.*

Доказательство. Предположим, что $H(A)$ слабо отделенное. Пусть $E \subset A$ — непустое подмножество. Поскольку $H(A)$ наледсвенное бэровское в силу предложения 1.10, то применяя предложение 1.11 ко множеству $B = \overline{E}$ (Замыкание берется в $H(A)$) и к тождественной функции $x \in B \to x \in H(A)$ существуют открытое множество $W \subset B$ такое, что $W \cap E \neq \emptyset$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $[x, x + \varepsilon) \cap E = \{x\}$ для каждого $x \in W \cap E$. Тогда каждая точка $x \in W \cap E$ $\tau_{\to}$-изолированная в E.

Предположим, что A — праворазреженное. Мы хотим показать, что $H(A)$ слабо отделенное используя предожение 1.12. Пусть $X = \mathbb{R}$, τ — топологи прямой Зоргенфрея и τ_1 — топология $H(A)$. Положим $V_x = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. Пространство (X, τ) слабо отделенное окретностным указателем $\mathcal{V} = (V_x)_{x \in \mathbb{R}}$ и каждая окрестность V_x замкнута в (X, τ_1). Нетрудно видеть, что подпространство $\mathbb{R} \setminus A$ пространства (X, τ_1) $\mathcal{V}$-разреженное и слабо отделенное. Более того, подпространство A пространства (X, τ_1) $\mathcal{V}$-разреженное тогда и только тогда, когда для каждого непустого подпространства $B \subset A$ существуют точка $x \in B$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap B \subset (-\infty, x]$. Это означает, что A праворазреженное как и предпологалось. В заключении, поскольку $H(A)$ является T_1 пространством и A счетно (т.к. праворазреженное), то подпространство $A \subset H(A)$ слабо отделенное. Из предложения 1.12 следует, что $H(A)$ слабо отделенное.

$\square$

Предложение 1.13. *Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}$ такие, что каждое леводискретное подмножество $A \setminus B$ праворазреженое. Тогда каждое открытое множество $O \subset H(B)$ имеет тип G_δ и F_σ в $H(A)$.*

Доказательство. Пусть $O \subset H(B)$ — открытое множество. Поскольку O открыто в $\mathbb{S}$, то оно имеет тип F_σ в $\mathbb{R}$, а следовательно имеет тип F_σ и в $H(A)$. Покажем, что множество O имеет тип G_δ в $H(A)$. Для каждого $x \in (O \cap A) \setminus B$ существует $\varepsilon_x > 0$ такой, что $(x - \varepsilon_x, x] \subset O$. Множество

$$F = \left(\bigcup_{x \in (O \cap A) \setminus B} (x - \varepsilon_x, x] \right) \setminus \left(\bigcup_{x \in (O \cap A) \setminus B} (x - \varepsilon_x, x) \right)$$

леводискретное подмножество $A \setminus B$, и по условию праворазреженное. Следовательно, F разреженное в $\mathbb{R}$ и, тогда, множество F имеет тип G_δ в $\mathbb{R}$, а значит и в $H(A)$. Пусть $W = \operatorname{int}_{H(A)} O$. Тогда $O \setminus F \subset W$. В самом деле, пусть $x_0 \in O \setminus F$. Если $x_0 \in B$, то O – окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}$ и, следовательно, окрестность точки x_0 в $H(A)$. Если $x_0 \notin A$, то O – окрестность точки x_0 в $\mathbb{S}$ и, следовательно, O – окрестность точки x_0 в $H(A)$. Если $x_0 \in A \setminus B$, то $x_0 \in \bigcup_{x \in (O \cap A) \setminus B} (x - \varepsilon_x, x]$. Поскольку $x_0 \notin F$, то $x_0 \in \bigcup_{x \in (O \cap A) \setminus B} (x - \varepsilon_x, x)$ и, следовательно, существует точка $x \in (O \cap A) \setminus B$ такая, что $x_0 \in (x - \varepsilon_x, x) \subset O$.

Таким образом,

$$O = (O \setminus F) \sqcup (O \cap F) = W \cup (O \cap F) = W \cup F.$$

Поскольку W открыто в $H(A)$, а множество F имеет тип G_δ в $H(A)$, то множество O имеет тип G_δ в $H(A)$.

$\square$

Следствие 1.3. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – лево-разреженное множество. Тогда каждое открытое подмножество $O \subset \mathbb{S}$ одновременно имеет тип G_δ и F_σ в $H(A)$.*

Доказательство следует из предложения 1.13, если положить $B = \emptyset$.

Рассмотрим теперь условия, при которых пространство $H(A)$ является полным по Чеху. Сущетвует несколько эквивалентных определений полного по Чеху пространства. Напомним, что тихоновское пространство X называется *полным по Чеху*, если существует компактификация cX пространства X, такая, что нарост $cX \setminus c(X)$ является F_σ-множеством в X.

Предложение 1.14. *Если множество $\mathbb{R} \setminus A$ счетно, то $H(A)$ — польское пространство.*

Доказательство. Для каждой точки $a_n \in \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{R}\setminus A$ положим $(\mathbb{R}, \tau(\{a_n\})) = (-\infty, a_n] \oplus (a_n, +\infty)$, где каждая из компонент топологической суммы наделена евклидовой топологией. Тогда $(\mathbb{R}, \tau(\{a_n\}))$ — польское пространство, т.к. является топологической суммой двух польских пространств. Нетрудно видеть, что полная метрика $\rho_n \colon \mathbb{R} \to \left[0, \dfrac{1}{2^n}\right]$, заданная правилом

$$\rho_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & \text{если} \quad x \le a_n < y; \\ \min\left(\dfrac{1}{2^n}, |x - y|\right), & \text{иначе}; \end{cases}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$ определяет топологию $\tau(\{a_n\})$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Определим метрику $\rho \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ так, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ $\rho(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n(x, y)$. Нетрудно видеть, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\tau(\{a_n\}) \subset \tau(A)$, где $\tau(A)$ есть топологи пространства $H(A)$. Покажем, что метрика ρ определяет топологию $\tau(A)$. Для этого покажем, что последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится по метрике ρ к точке x_0 тогда и только тогда, когда эта последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится в топологии $\tau(A)$ к точке x_0. Пусть $x_k \xrightarrow{\rho} x_0$. Для точки $x_0 \in H(A)$ и ее окресности $U(x_0) \in \tau(A)$ найдется номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $U(x_0) \in \tau(\{a_n\})$. Поскольку $x_k \xrightarrow{\rho} x_0$ и $\rho_n(x_k, x_0) \le \rho(x_k, x_0)$, то $x_k \xrightarrow{\rho_n} x_0$.

Тогда существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n \geq n_0$ $x_n \in U(x_0)$. Таким образом, последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится в топологии $\tau(A)$. Пусть $x_k \xrightarrow{\tau(A)} x_0$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_k \xrightarrow{\tau(\{a_n\})} x_0$ и следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_k \xrightarrow{\rho_n} x_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для каждого $1 \leq i \leq m$ найдется номер n_i такой, что $\rho_i(x_k, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2m}$ при $k \geq n_i$. Положим $n_0 = \max\limits_{1\leq i\leq m} n_i$. Следовательно, при $k \geq n_0$ $\rho(x_k, x_0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \rho_n(x_k, x_0) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \rho_n(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2m} \cdot m + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится по метрике ρ.

Тот факт, что метрика ρ полная в пространстве $H(A)$ доказывается аналогично.

$\square$

Используя следующий факт получим альтернативное доказательство, что $H(A)$ является польским пространством.

Факт 1.1. *Для любого множества $A \subset \mathbb{R}$ существует компактификация $K(A)$ пространства $H(A)$ такая, что $K(A) \setminus H(A)$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R} \setminus A$ наделенному топологией, индуцированной правой прямой Зоргенфрея $\mathbb{S}_{\to}$.*

Пространство $D = C_0 \cup C_1 \subset \mathbb{R}^2$, где $C_0 = \{(x, 0)\colon 0 < x \leq 1\}$ и $C_1 = \{(x, 1)\colon 0 \leq x < 1\}$ с топологией, порожденной базой, состоящей из множеств вида $\{(x, i) \in X\colon x_0 - \dfrac{1}{k} < x < x_0 \text{ и } i = \overline{0, 1}\} \cup \{(x_0, 0)\}$, где $0 < x_0 \leq 1$ и $k \in \mathbb{N}$, а также из множеств вида $\{(x, i) \in X\colon x_0 < x < x_0 + \dfrac{1}{k} \text{ и } i = \overline{0, 1}\} \cup \{(x_0, 1)\}$, где $0 \leq x_0 < 1$ и $k \in \mathbb{N}$, называют *двойная стрелка Александрова*. Пространство $K(A)$ определяется аналогично двойной стрелке Александрова D. Гомеоморфно отобразим $\mathbb{R}$ на интервал $(0, 1)$ и рассмотрим $A \subset (0, 1)$. Положим $B = (0, 1) \setminus A$ и $K(A) = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$. Определим базу окрестностей точки $(x, i) \in K(A)$ следующим образом:

$$\{(((x, y)) \times \{0\}) \cup (([x, y) \cap B) \times \{1\}), y > x\}, \text{ если } x \in B,\ i = 1;$$

$$\{(((y,x]) \times \{0\}) \cup (((y,x) \cap B) \times \{1\}), y < x\}, \text{ если } x \in B,\ i = 0;$$

$$\{(V \times \{0\}) \cup ((V \cap B) \times \{1\}), V - \text{евклидова окрестность точки } x \text{ в } [0,1]\}, \text{ если } x \in A \cup \{0,1\}.$$

Заметим, что $H(A)$ гомеоморфно подпространству $(0,1) \times \{0\}$ пространства $K(A)$ и подпространство $B \times \{1\}$ пространства $K(A)$ гомеоморфно пространству B с топологией правой прямой Зоргенфрея $\mathbb{S}_{\rightarrow}$.

Нетрудно видеть, что подпространство $(0,1) \times \{0\} \subset K(A)$ открыто в $K(A)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. Для любого $x \in A$ существует $\varepsilon > 0$ такой, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap B = \emptyset$, т.е. B замкнуто в $\mathbb{R}$.

2. Для каждого $x \in B$ существует точка $y < x$ такая, что $(y,x) \cap B = \emptyset$, т.е. B дискретное подмножество в $\mathbb{S}$.

Также нетрудно проверить, что для каждого $x \in H(A)$ простанство $H(A)$ локально связное в точке x тогда и только тогда, когда $H(A)$ локально компактное в точке x и тогда и только тогда, когда существует окрестность V точки $x \in H(A)$ такая, что $V \cap (\mathbb{R} \setminus A) \subset \{x\}$.

Лемма 1.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Пространство $K(A)$ — компакт.*

Доказательство. Поскольку топология двойной стрелки Александрова D тоньше, чем топология на $K(A)$, то тождественное отображение $id\colon K(A) \subset D \to K(A)$ является непрерывным. В силу того, что пространство $K(A)$ является регулярным и пространство D является линделефовым, $K(A)$ является линделефовым пространством [23, 3.8.6]. Для того, чтобы доказать, что $K(A)$ является компактом, достаточно показать, что $K(A)$ счетно компактно. Пусть $((x_n, \varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K(A)$. Мы можем предположить, что $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в τ_E к некоторой точке $x \in [0,1]$. Если $x \in A \cup \{0,1\}$, то $((x_n, \varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в $K(A)$ к точке $(x,0)$. Если $x \in B$ и $((x_n, \varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится точке $(x,0)$ в $K(A)$, то

$x_n > x$ для бесконечного числа числа $n \in \mathbb{N}$, следовательно, некоторая подпоследовательность последовательности $((x_n, \varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в $K(A)$ к точке $(x, 1)$. $\square$

Заметим, что подпространство $H(A) \subset K(A)$ является всюду плотным в $K(A)$.

Предложение 1.15. *Пространство $H(A)$ является полным по Чеху тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{R} \setminus A$ счетно.*

Доказательство. Гомеоморфно отобразим $\mathbb{R}$ на интервал $(0, 1)$ и рассмотрим компактификацию $K(A)$ пространства $H(A)$. Предположим, что множество $(0, 1) \setminus A$ счетно. Поскольку $B \times \{1\} = [0, 1] \setminus A$ счетно в $K(A)$, то $H(A)$ является множеством типа G_δ в $K(A)$. В силу леммы 1.2 и теоремы [23, 3.9.1] пространство $H(A)$ является полным по Чеху.

Обратно, пусть $H(A)$ – полно по Чеху. Следовательно, подпространство G_δ в $K(A)$, т.е. $B \times \{1\}$ – F_σ в $K(A)$. Так как $B \times \{1\}$ – подмножество в $\mathbb{S}_{\rightarrow}$, то оно является тотально несовершенным. Получаем, что $B \times \{1\}$ счетно.

$\square$

Доказательство следующего утверждения проводится аналогично доказательству леммы 1.2.

Предложение 1.16. *Для любого $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A не полно по Чеху.*

Доказательство. Предположим, что S_A полно по Чеху. Так как двойная стрлека Александрова D является компактификацией пространства S_A, то $D \setminus S_A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в D. В силу того, что пространство D компактно, множества F_n компактны для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как нарост $D \setminus S_A = S_{\mathbb{R}\setminus A} \cup \{(0, 1); (1, 0)\}$ и $S_{\mathbb{R}\setminus A}$ вполне несовершенное постранство (преложение 1.2), то множества F_n счетные для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, множество $D \setminus S_A$ счетно, что невозможно.

$\square$

Предложение 1.17. *Для любого $A \subset \mathbb{R}$ пространство S_A не имеет компактификаций со счетным наростом.*

Доказательство. Предположим, что существует компактификация cS_A модификации прямой Зоргенфрея такая, что множество $cS_A \setminus S_A$ счетно. Тогда нарост $cS_A \setminus S_A$ имеет тип F_σ и следовательно, S_A — полно по Чеху, что противоречит предложению 1.16.

□

Предложение 1.18. *Пространство $H(A)$ — локально компактно тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{R} \setminus A$ замкнуто в $\mathbb{R}$ и дискретно в $\mathbb{S}$.*

Доказательство. Гомеоморфно отобразим $\mathbb{R}$ на интервал $(0,1)$. Рассмотрим $H(A)$ в $K(A)$. Так как $K(A)$ – локально компактное пространство (лемма 1.2), то $H(A)$ локально компактно тогда и только тогда, когда $H(A) = F \cap U$, где F замкнутое, а U открытое множество в $K(A)$ [23, 3.3.10]. Заметим, что $\overline{H(A)} = K(A) = F$. Так как $H(A) = H(A) \cap K(A)$, то для завершения доказательства заметим, что $H(A)$ открыто в $K(A)$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{R} \setminus A$ открыто в $\mathbb{R}$ и дискретно в $\mathbb{S}$ (в силу комментария после определения $K(A)$).

□

Заметим, что для любого $A \subset \mathbb{R}$, пространство S_A не являетя локально компактным, т.к. S_A – тотально несовершенное пространство (предложение 1.2).

Закончим этот параграф следующими примерами, которые относятся к вопросу: для какиих множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ пространства $H(A)$ и $H(B)$ гомеоморфны.

Пример 1.1. *Пусть*

$$A = \mathbb{R} \setminus \left(\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \right)$$

и

$$B = \mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \right).$$

Множество $\mathbb{R}\setminus B$ компактно (а следовательно, замкнуто), а $\mathbb{R}\setminus A$ не замкнуто в $\mathbb{R}$, но пространства $H(A)$ и $H(B)$ гомеоморфны.

Доказательство. Рассмотрим линейные функции g_n и h_n такие, что

$$g_n\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] = \left(-\frac{1}{2n-1}, -\frac{1}{2n}\right],$$

$$h_n\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] = \left(-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n+1}\right],$$

и определим отображение $f\colon H(A) \to H(B)$ по формуле

$$f(x) = \begin{cases} x, \quad \text{если} \quad x \in (-\infty, -1]; \\ g_n(x), \quad \text{если} \quad x \in \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right], n \in \mathbb{N}; \\ 0, \quad \text{если} \quad x = 0; \\ h_n(x), \quad \text{если} \quad x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}; \\ x-1, \quad \text{если} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что f – гомеоморфизм $H(A) \to H(B)$.

$\square$

Пример 1.2. *Пространства $H(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$ и $H(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^-)$ не гомеоморфны, где $\mathbb{N}^- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $h\colon H(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^-) \to H(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$. Тогда для связной компоненты $(-1, +\infty)$ найдется $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $h((-1, +\infty)) = (n, n+1]$, что невозможно, т.к. $((-1, +\infty), \tau(A)) = ((-1, +\infty), \tau_E)$ и $((n, n+1], \tau(B)) = ((n, n+1], \tau_E)$.

$\square$

Заметим, что для различных $m, n \in \mathbb{N}$ пространства $H(\mathbb{R}\setminus\{1, \cdots, n\})$ и $H(\mathbb{R}\setminus\{1, \cdots, m\})$ не гомеоморфны. Следовательно существует $\aleph_0$ не гомеоморфных локально компактных пространств $H(A)$ и $H(B)$, где $A, B \subset \mathbb{R}$.

2. О гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификацций

В параграфе 2.1 данной главы рассмаривается вопрос о гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификаций, а в параграфе 2.3 о гомеоморфности прямой Зоргенфрея и пространств Хаттори. В параграфе 2.2 рассматривается вопрос о гомеоморфности модификаций прямой Зоргенфрея S_A и S_B для различных подмножеств прямой A и B. Получено необходимое и достаточное условия, при котором пространство S_A гомеоморфно пространству $S_{\mathbb{Q}}$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел.

Результаты этой главы опубликованы в работах [6]–[8],[26].

2.1. Гомеоморфность пространств S_P и $\mathbb{S}$

В этом параграфе мы доказываем теорему о необходимом и достаточном условиях, при которых пространство S_P гомеоморфно пространству $\mathbb{S}$. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть P – некоторое подмножество вещественной прямой. Следующие условия эквивалентны:*
(1) пространства S_P и $\mathbb{S}$ гомеоморфны;
(2) не существует подмножества $\emptyset \neq V \subset P$, замкнутого в P и такого, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$;
(3) множество P является множеством типа F_σ и G_δ в $\mathbb{R}$.

Существование множества $V \subset P$, о котором говорится в теореме, зависит от поведения вычетов множества $A = P \setminus \operatorname{int} P$. Определение вычетов порядка α можно найти в [4, стр. 107]. Заметим, что множества $P \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию (2), это в точности множества, которые К. Куратовским названы разложимыми [4, стр.102]. С учетом этого факта, доказательство эквивалентности условий (2) и (3) можно найти в [4, стр.428]. Здесь мы получим эквивалентность этих условий, опираясь на доказательство эквивалентности условий (1) и (2).

2.1.1. Доказательство теоремы: (1)⇒ (2)

Пусть α – произвольный ординал и A – подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$. Для произвольного ординала α определим множества A_α, B_α и C_α следующим образом:

$$A_0 = A, A_1 = \overline{\overline{A} \setminus A} \cap A, B_1 = A \setminus A_1, C_1 = \overline{\overline{A} \setminus A},$$

$$A_\alpha = \overline{\overline{A_{\alpha-1}} \setminus A_{\alpha-1}} \cap A_{\alpha-1}, B_\alpha = A_{\alpha-1} \setminus A_\alpha, C_\alpha = \overline{\overline{A_{\alpha-1}} \setminus A_{\alpha-1}},$$

если α – непредельный ординал, и

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta, B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta, C_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta,$$

если α – предельный ординал. Множества A_α называются *вычетами* множества A порядка α. Очевидно, что множество A_α замкнуто в пространстве $A_{\alpha-1}$ и $\overline{A_\alpha} \subset C_\alpha$ для любого ординала α.

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства этих множеств:

1. Для любого ординала α верно, что $(A_\alpha)_1 = A_{\alpha+1}$.

2. Для любого ординала α верно, что $B_\alpha \cap C_\alpha = \emptyset$.

Действительно, если α – непредельный ординал и $x \in B_\alpha = A_{\alpha-1} \setminus A_\alpha$, то $x \notin A_\alpha = C_\alpha \cap A_{\alpha-1}$. Следовательно, $x \notin C_\alpha$.

Пусть теперь α – предельный ординал и $B_\beta \cap C_\beta = \emptyset$ для всех $\beta < \alpha$. Если $x \in B_\alpha = \bigsqcup_{\beta<\alpha} B_\beta$, то $x \in B_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Следовательно, по предположению, $x \notin C_\beta$, а, значит, $x \notin C_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta$.

3. Если $\beta < \alpha$, то $A_\alpha \subset A_\beta$ и $C_\alpha \subset C_\beta$.

Первое включение очевидно из определения множеств A_α. Для доказательства второго включения достаточно заметить, что $C_{\alpha+1} = \overline{\overline{A_\alpha} \setminus A_\alpha} \subset \overline{A_\alpha} \subset C_\alpha$.

4. Если α – непредельный ординал и $\beta < \alpha$, то $B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$; если α – предельный ординал и $\beta < \alpha$, то $B_\alpha \supset B_\beta$.

Первое следует из $A_\beta \cap B_\beta = \emptyset$ и $B_\alpha \subset A_{\alpha-1} \subset A_\beta$; второе очевидно.

5. Если α – предельный ординал, то

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_{\beta+1},\ C_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} C_{\beta+1},\ B_\alpha = \bigsqcup_{\beta<\alpha} B_{\beta+1} = A \setminus A_\alpha.$$

Доказательство вытекает из свойст 3,4 и определения множеств A_α, B_α и C_α.

6. Если интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ и концы интервала не принадлежат множеству $\overline{A}$, то

$$(A \cap (a,b))_\alpha = A_\alpha \cap (a,b)$$

для любого ординала α.

Для доказательства заметим, что $\overline{M \cap (a,b)} = \overline{M} \cap (a,b)$, если $M \subset \mathbb{R}$ и $\overline{M}$ не содержит концов интервала (a,b). Отсюда, для $\alpha = 1$ имеем

$$\begin{aligned}(A \cap (a,b))_1 &= \overline{\overline{A \cap (a,b)} \setminus (A \cap (a,b))} \cap (A \cap (a,b)) = \\ &= \overline{(\overline{A} \cap (a,b)) \setminus (A \cap (a,b))} \cap (A \cap (a,b)) = \\ &= \overline{(\overline{A} \setminus A) \cap (a,b)} \cap (A \cap (a,b)) = \overline{\overline{A} \setminus A} \cap (a,b) \cap A = A_1 \cap (a,b)\end{aligned}$$

Предположим теперь, что утверждение выполнено для всех $\beta < \alpha$ и α – непредельный ординал. Тогда

$$(A \cap (a,b))_\alpha = ((A \cap (a,b))_{\alpha-1})_1 = (A_{\alpha-1} \cap (a,b))_1 = A_\alpha \cap (a,b).$$

Последнее равенствно верно, т.к. концы интервала (a,b) не принадлежат множеству $\overline{A_{\alpha-1}}$.

Если α – предельный ординал, то

$$(A \cap (a,b))_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} (A \cap (a,b))_\beta = \bigcap_{\beta<\alpha} (A_\beta \cap (a,b)) = A_\alpha \cap (a,b).$$

7. Для любого ординала α верно равенство $A \setminus A_\alpha = A \setminus C_\alpha$ и, следовательно, для любого ординала $\beta < \alpha$ верно, что $A_\beta \setminus A_\alpha = A_\beta \setminus C_\alpha$.

Пусть $x \in A \setminus A_\alpha$. Тогда найдется наименьший ординал $\beta_0 \le \alpha$ такой, что $x \notin A_{\beta_0}$. Из определения множества A_{β_0} следует, что β_0 – непредельный ординал и $x \in A_{\beta_0-1}$. Учитывая, что $A_{\beta_0} = C_{\beta_0} \cap A_{\beta_0-1}$ получаем, что $x \notin C_{\beta_0}$, т.е. $A \setminus A_\alpha \subset A \setminus C_\alpha$. Обратное включение очевидно.

8. Для любого ординала α множество $B_{\alpha+1}$ замкнуто в $\mathbb{R} \setminus C_{\alpha+1}$.

Пусть $x \in \overline{B_{\alpha+1}} \cap (\mathbb{R} \setminus C_{\alpha+1})$. Отсюда следует, что $x \notin A_{\alpha+1}$ и $x \in \overline{B_{\alpha+1}} \subset \overline{A_\alpha}$. Если предположим, что $x \notin B_{\alpha+1}$, то получаем, что

$$x \in \overline{A_\alpha} \setminus (A_{\alpha+1} \sqcup B_{\alpha+1}) = \overline{A_\alpha} \setminus A_\alpha \subset C_{\alpha+1},$$

что невозможно, т.к. $x \in \mathbb{R} \setminus C_{\alpha+1}$.

Следующее предложение будет использоваться для доказательства непрерывности строящихся гомеоморфизмов.

Предложение 2.1. *Пусть $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность непересекающихся интервалов, $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $M \subset \mathbb{R}$, $G \cap M = \emptyset$, $F \subset G$ и отображение $\varphi : S_{M \cup F} \to S_M$ удовлетворяет следующим условиям:*
(a) $\varphi(G_n) = G_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
(b) для любого $n \in \mathbb{N}$ $\varphi|_{G_n}$ – гомеоморфизм;
(c) $\varphi(t) = t$ при $t \in S_{M \cup F} \setminus G$;
(d) если $x_0 \notin G$, $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset G_n$ такова, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k^n = x_0$ в пространстве $S_{M \cup F}$, то $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(x_k^n) = x_0$ в пространстве S_M;
(e) если $y_0 \notin G$, $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{y_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset G_n$ такова, что $\lim\limits_{k \to \infty} (y_k^n) = y_0$ в пространстве S_M, то $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi^{-1}(y_k^n) = y_0$ в пространстве $S_{M \cup F}$.
Тогда отображение $\varphi : S_{M \cup F} \to S_M$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Поскольку все интервалы (a_n, b_n) открыты в $(\mathbb{R}, \tau_E)$ и, следовательно, открыты в $S_{M \cup F}$, то в силу условия (b) непрерывность отображения $\varphi : S_{M \cup F} \to S_M$ достаточно доказать в точках $x \notin G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$.

Пусть $x_0 \notin G$. Возможны следующие случаи.

Случай 1. $x_0 \in M$ и $x_0 = a_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Если последовательность x_k сходится к x_0 при $k \to \infty$ в пространстве $S_{M \cup F}$, то для достаточно больших k имеем $x_k \in (a_n, b_n) = G_n$, так как окрестность точки x_0 имеет вид $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. По условию (c) и (d) $\varphi(x_k) \to x_0 = \varphi(x_0)$ в пространстве S_M и, значит, отображение φ непрерывно в точке x_0.

Случай 2. $x_0 \in M$ и $x_0 \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ в пространстве $S_{M\cup F}$. Не теряя общности, можно считать, что $x_0 < x_k$ и либо $x_k \notin G$ для любого $k \in \mathbb{N}$, либо $x_k \in G$ для любого $k \in \mathbb{N}$. В первом случае по свойству (c) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ в пространстве S_M. Во втором случае для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполняется условие $x_k \in (a_{n_k}, b_{n_k})$ и $x_0 < a_{n_k} < x_k$ и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = x_0$. Поскольку различные интервалы (a_{n_k}, b_{n_k}) попарно непересекающиеся, то и $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = x_0$. По свойству (a) имеем $\varphi(x_k) \in (a_{n_k}, b_{n_k})$ и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = x_0 = \varphi(x_0)$. Непрерывность отображения φ в точке x_0 доказана.

Случай 3. $x_0 \notin M$ и $x_0 = b_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Как и в случае 1, непрерывность отображения φ в точке x_0 следует из условий (c) и (d).

Случай 4. Пусть $x_0 \notin M$ и $x_0 \notin \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Непреывность отображения φ в точке x_0 доказывается так же, как в случае 2. Если в данном доказательстве заменить отображение φ на φ^{-1} и использовать условие (e) вместо условия (d), то получим непрерывность отображения φ^{-1}.

$\square$

Далее, в предложениях 2.2-2.4 используя предложение 2.1 мы построим гомеоморфизм $\varphi\colon S_{M\cup F} \to S_M$ для некоторых конкретных множеств $F \subset G$.

Предложение 2.2. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}$, *интервал* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *и* $M \cap (a, b) = \emptyset$. *Тогда существует гомеоморфизм* $\varphi : S_{M\cup(a,b)} \to S_M$ *такой, что* $\varphi(x) = x$ *при* $x \notin (a, b)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{d_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset (a, b)$ такую, что $\inf\limits_n d_n = a$, $\sup\limits_n d_n = b$ и $d_n < d_{n+1}$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что

$\bigsqcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}[d_n, d_{n+1}) = (a, b)$. Определим отображение $\varphi : S_{M\cup(a,b)} \to S_M$ по формуле

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x + d_n + d_{n+1}, & \text{если} \quad x \in [d_n, d_{n+1}); \\ x, \quad \text{если} \quad x \notin (a, b). \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi([d_n, d_{n+1})) = (d_n, d_{n+1}]$, и $\varphi(x) = x$, если $x \notin (a, b)$. Докажем непрывность отображения φ. Поскольку полуинтервалы $[d_n, d_{n+1})$ и $(d_n, d_{n+1}]$ являются открыто-замкнутыми множествами в $S_{M\cap(a,b)}$ и S_M соответсвенно, и на каждом полуинтервале $[d_n, d_{n+1})$ отображение φ является гомеоморфизмом, то непрерывность отображения φ и φ^{-1} остается проверить в точках $x \notin (a, b)$. Пусть $x_0 \notin (a, b)$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ в пространстве $S_{M\cap(a,b)}$. Не нарушая общности, можно считать, что либо $x_k \notin (a, b)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, либо $x_k \in (a, b)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В первом случае, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 = \varphi(x_0)$, то есть отображение φ непрерывно в точке x_0. Пусть теперь $x_k \in (a, b)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В этом случае либо $x_0 = a$ и $a \in M$, либо $x_0 = b$ и $b \notin M$. Так как для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем $x_k \in [d_{n_k}, d_{n_{k+1}})$ и $\lim\limits_{k\to\infty}(d_{n+1} - d_{n_k}) = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} d_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} d_{n_{k+1}} = x_0$. Поскольку $\varphi(x_k) \in (d_{n_k}, d_{n_{k+1}}]$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = x_0 = \varphi(x_0)$, то есть отображение φ непрерывно в точке x_0. Непрерывность отображения φ^{-1} доказывается аналогично.

$\square$

Предложение 2.3. *Для произвольного подмножества $P \subset \mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $\varphi : S_P \to S_{P\setminus \operatorname{int} P}$ такой, что $\varphi(x) = x$ при $x \notin \operatorname{int} P$.*

Доказательство. Представим открытое в $\mathbb{R}$ множество $\operatorname{int} P$ в виде объединения $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. По предложению 2.2 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует гомеоморфизм $\varphi_n \colon S_{(a_n,b_n)} \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi_n(x) = x$, если $x \notin (a_n, b_n)$. Определим отображение $\varphi\colon S_P \to S_P \setminus \operatorname{int} P$ по формуле

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_n(t), & \text{если} \quad t \in (a_n, b_n), \\ t, \quad \text{если} \quad t \notin \operatorname{int} P. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что отображение φ удовлетворяет всем условиям предложения 2.1 и, значит, является гомеоморфизмом.

$\square$

Предложение 2.4. *Пусть F – замкнутое подмножество интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi\colon S_F \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi(x) = x$ при $x \notin (a,b)$.*

Доказательство. Поскольку множество F замкнуто в интервале (a,b), то $(a,b) \setminus F = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в силу предложения 2.2 существует гомеоморфизм $\varphi_n\colon S_F \to S_{F\cup(a_n,b_n)}$, такой, что $\varphi_n(x) = x$ при $x \notin (a_n, b_n)$. Отображение $\varphi_0\colon S_F \to S_{(a,b)}$, заданное формулой

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \varphi_n(t), & \text{если} \quad t \in (a_n, b_n); \\ t, & \text{если} \quad t \notin \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям предложения 2.1 и, следовательно, является гомеоморфизмом. По предложению 2.2 существует гомеоморфизм $\varphi_1\colon S_{(a,b)} \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi(x) = x$, если $x \notin (a,b)$. Тогда $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$ является требуемым гомеоморфизмом S_F на $\mathbb{S}$.

$\square$

Предложение 2.5. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ таково, что $\operatorname{int} A = \emptyset$ и не существует подмножества $\emptyset \neq V \subset A$, замкнутого в A и такого, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Тогда $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$, то есть множество A является нигде не плотным в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. найдется отрезок $[a,b] \subset \overline{A}$. Положим $V = [a,b] \cap A$ и покажем, что $\overline{V} = [a,b]$. Действительно, если $x \in (a,b) \subset \overline{A}$, то найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) \cap A$, сходящаяся к точке x. Тогда $x \in \overline{(a,b) \cap A} \subset \overline{[a,b] \cap A} = \overline{V}$ и, следовательно, $[a,b] \subset \overline{V}$. Обратное включение очевидно и, значит, $\overline{V} = [a,b]$.

Покажем теперь, что $\overline{\overline{V} \setminus V} = [a,b]$. Поскольку $\operatorname{int} A = \emptyset$, то для любой точки $x \in (a,b) \subset \overline{A}$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset (a,b) \setminus A$, сходящаяся к точке x. Учитывая, что $[a,b] \setminus A = [a,b] \setminus V$ и $\overline{V} = [a,b]$ получаем $x \in \overline{(a,b) \setminus A} \subset \overline{[a,b] \setminus A} = \overline{[a,b] \setminus V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Отсюда следует, что $[a,b] \subset \overline{\overline{V} \setminus V}$. С другой стороны, $\overline{\overline{V} \setminus V} \subset \overline{V} = [a,b]$ и, значит $\overline{\overline{V} \setminus V} = [a,b]$. Таким образом, нашлось замкнутое в A множество V, для которого $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$, что противоречит условию теоремы.

□

Теорема 2.2. *Пусть A – нигде не плотное подмножество прямой $\mathbb{R}$ и $A \subset I = (a,b)$. Если для некоторого счетного ординала α множество $A_\alpha = \emptyset$, то существует гомеоморфизм $\varphi_A \colon S_A \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi_A(t) = t$ при $t \notin I$.*

Доказательство. Доказательство проведем, используя метод трансфинитной индукции по ординалу α.

Пусть $\alpha = 1$, т.е. $A_1 = \emptyset$. Тогда $A = A_1 \sqcup B_1 = B_1$. Представим открытое множество $I \setminus C_1$ в виде объединения непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n)$. По свойству 8 множество B_1 замкнуто в $\mathbb{R} \setminus C_1$ и, следовательно, множество $B_1 \cap I_n$ замкнуто в I_n для любого $n \in \mathbb{N}$. По предложению 2.4 существует гомеоморфизм $\varphi_n \colon S_{A \cap I_n} \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi_n(t) = t$ при $t \notin I_n$. Тогда по предложению 2.1 отображение $\varphi_{A,I}$, действующее по правилу

$$\varphi_{A,I}(t) = \begin{cases} \varphi_n(t), & \text{если} \quad t \in I_n; \\ t, & \text{если} \quad t \notin \bigsqcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n \end{cases}$$

является гомеоморфизмом S_A на $\mathbb{S}$.

Предположим, что утверждене теоремы справедливо для всех $\beta < \alpha$, т.е. если $A \subset I$ и $A_\beta = \emptyset$, то существует гомеоморфизм $\varphi_{A,I} \colon S_A \to \mathbb{S}$, такой, что $\varphi_{A,I}(t) = t$, когда $t \notin I$.

Докажем, что утверждение теоремы верно для ординала α. Возможны два случая.

Случай 1. $\alpha = \beta+1$, т.е. α не является предельным ординалом. Тогда $A_\beta = A_\alpha \sqcup B_\alpha = B_\alpha$. Представим открытое множество $I \setminus C_\beta$ в виде объединения непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n)$. Так как множество A нигде не плотно, найдется последовательность непересекающихся интервалов $I_n^k = \left(a_n^k, b_n^k\right) \subset I_n$ такая, что $\overline{A} \cap I_n \subset \bigsqcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left(a_n^k, b_n^k\right)$, $\inf\limits_k a_n^k = a_n$, $\sup\limits_k b_n^k = b_n$ и $a_n^k < b_n^k < a_n^{k+1} < b_n^{k+1}$ при любом $k \in \mathbb{Z}$. Для каждого интервала I_n^k точки a_n^k и b_n^k не принадежат $\overline{A}$ и, следовательно, по свойству 6 имеем $\left(A \cap I_n^k\right)_\beta = A_\beta \cap I_n^k \subset A_\beta \cap I_n \subset C_\beta \cap I_n = \emptyset$. По предположению индукции существует гомеоморфизм $\varphi_{A,I_n^k}\colon S_{A\cap I_n^k} \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi_{A,I_n^k}(t) = t$ при $t \notin I_n^k$. Определим отображение $\varphi_{A\setminus A_\beta} : S_A \to S_{A_\beta}$ формулой

$$\varphi_{A\setminus A_\beta}(t) = \begin{cases} \varphi_{A,I_n^k}(t), & \text{если} \quad t \in I_n^k; \\ t, \quad \text{если} \quad t \notin \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} I_n^k. \end{cases}$$

По предложению 2.1 это отображение является гомеоморфизмом. Далее, поскольку $\left(A_\beta\right)_1 = A_{\beta+1} = \emptyset$, применяем утверждение теоремы для множества A_β при $\alpha = 1$. Получаем, что существует гомеоморфизм $\varphi_{A_\beta}\colon S_{A_\beta} \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi_{A_\beta}(t) = t$, когда $t \notin I$. Таким образом, отображение $\varphi_A = \varphi_{A_\beta} \circ \varphi_{A\setminus A_\beta}\colon S_A \to \mathbb{S}$ — искомый гомеоморфизм.

Случай 2. α — предельный ординал. Тогда $A_\alpha = \emptyset$ и $A_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ (если $C_\alpha = \emptyset$, то $I \setminus C_\alpha = (a, b)$). Пусть $I \setminus C_\alpha = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Так же, как в случае 1, для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим последовательность интервалов $I_n^k = (a_n^k, b_n^k) \subset (a_n, b_n) = I_n$, так чтобы $\overline{A} \cap I_n \subset \bigsqcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} (a_n^k, b_n^k) \subset (a_n, b_n) \subset I \setminus C_\alpha$. Для фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим систему замкнутых подмножеств $\{[a_n^k, b_n^k] \cap C_\beta\}_{\beta<\alpha}$. Если при любом $\beta < \alpha$ $[a_n^k, b_n^k] \cap C_\beta \neq \emptyset$, то по свойству 3 эта система является центрированной в компакте $[a_n^k, b_n^k]$. Следовательно, $[a_n^k, b_n^k] \cap C_\alpha = [a_n^k, b_n^k] \cap (\bigcap\limits_{\beta<\alpha} C_\beta) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha}([a_n^k, b_n^k] \cap C_\beta) \neq \emptyset$. Но это невозможно, так как $[a_n^k, b_n^k] \cap C_\alpha = \emptyset$. Таким образом, для каждого интервала $[a_n^k, b_n^k]$ существует ординал $\beta_{n_k} < \alpha$ такой, что $[a_n^k, b_n^k] \cap C_{\beta_{n_k}} = \emptyset$. Так как концы интервала $[a_n^k, b_n^k]$ не принадлежат множеству $\overline{A}$, то по свойству 6 $((a_n^k, b_n^k) \cap A)_{\beta_{n_k}} = (a_n^k, b_n^k) \cap A_{\beta_{n_k}} \subset [a_n^k, b_n^k] \cap C_{\beta_{n_k}} = \emptyset$. По предположению индукции существует гомеоморфизм $\varphi_{A,I_n^k}\colon S_{A\cap I_n^k} \to \mathbb{S}$ такой, что $\varphi_{A,I_n^k}(t) = t$ при $t \notin I_n^k$. По предложению 2.1 отображение

$$\varphi_A(t) = \begin{cases} \varphi_{A,I_n^k}, & \text{если} \quad t \in I_n^k; \\ t, & \text{если} \quad t \notin \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} I_n^k \end{cases}$$

является искомым гомеоморфизмом.

$\square$

Теорема 2.3. *Пусть подмножество $P \subset \mathbb{R}$. Если не существует подмножества $\emptyset \neq V \subset P$, замкнутого в P и такого, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$, то пространства S_P и S гомеоморфны.*

Доказательство. По предложению 2.3 пространство S_P гомеоморфно пространству $S_{P\setminus intP}$. Положим $A = P \setminus \operatorname{int} P$. Так как A замкнуто в P, не существует подмножества $V \subset A$, замкнутого в A, такого, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. По предложению 2.5 имеем $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

Рассмотрим систему замкнутых множеств $\{C_\alpha; \alpha < \omega_1\}$ определенную для множества A. По свойству 3 эта система является убывающей и, значит, по теореме Бэра–Хаусдорфа [1, стр. 162] найдется ординал $\alpha_0 < \omega_1$ такой, что $C_{\alpha_0} = C_{\alpha_0+1} = \ldots$. Если предположить, что $C_{\alpha_0} \neq \emptyset$, то из соотношения $C_{\alpha_0} = C_{\alpha_0+1} = \overline{\overline{A_{\alpha_0}} \setminus A_{\alpha_0}} \subset \overline{A_{\alpha_0}} \subset C_{\alpha_0}$ следует, что $\overline{\overline{A_{\alpha_0}} \setminus A_{\alpha_0}} = \overline{A_{\alpha_0}} \neq \emptyset$. Поскольку A_{α_0} замкнуто в A, а значит и в P, то, полагая $V = A_{\alpha_0}$, получаем противоречие с условием теоремы. Таким образом, $C_{\alpha_0} = \emptyset$, а значит, и $A_{\alpha_0} = \emptyset$. Поскольку множество A нигде не плотное в $\mathbb{R}$, существует последовательность точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ такая, что $\inf\limits_n x_n = -\infty$, $\sup\limits_n x_n = +\infty$, $x_n < x_{n+1}$, $x_n \neq \overline{A}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. По свойству 6 имеем $(A \cap (x_n, x_{n+1}))_\alpha = A_\alpha \cap (x_n, x_{n+1}) = \emptyset$. Тогда по теореме 2.2 для всех $n \in \mathbb{Z}$ существует гомеоморфизм $\varphi_n\colon S_{A\cap(x_n,x_{n+1})} \to \mathbb{S}$

такой, что $\varphi_n(t) = t$, когда $t \notin I_n$. Поскольку $S_A = \bigsqcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} (x_n, x_{n+1}]$ и для каждого $n \in \mathbb{Z}$ полуинтервалы $(x_n, x_{n+1}]$ являются открыто-замкнутыми подмножествами в пространстве S_A, то отображение $\varphi\colon S_A \to \mathbb{S}$, определенное формулой $\varphi(t) = \varphi_n(t)$ при $t \in (x_n, x_{n+1}]$, является гомеоморфизмом.

$\square$

2.1.2. Доказательство теоремы: (2)⇒ (1)

Предложение 2.6. *Пусть X_1 и X_2 подмножества топологического пространства X. Если X – бэровское и $X = X_1 \sqcup X_2$, то хотя бы одно из подпространств X_1 или X_2 второй категории.*

Доказательство. Предположим, что оба пространства X_1 и X_2 первой категории, т.е. $X_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $X_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где A_n и B_n нигде не плотны в X_1 и X_2 соответственно для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, множества A_n и B_n нигде не плотны и в $X = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \sqcup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$. А это означает, что X – множество первой категории, что невозможно, т.к. X – бэровское.

$\square$

Идею доказательства следующей леммы можно найти в работе [29].

Лемма 2.1. *Пусть X – подмножество в S_P такое, что $X \subset P$ или $X \subset S_P \setminus P$ и $\varphi\colon X \to \mathbb{S}$ – гомеоморфизм. Тогда X можно представить в виде счетного объединения замкнутых в X подмножеств, на каждом из которых отображение φ является убывающим или возрастающим соответственно.*

Доказательство. Пусть $X \subset P$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим

$$F_n = \left\{ x \in X : x < y < x + \frac{1}{n} \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(x) \right\}.$$

Докажем, что множество F_n замкнуто в X. Действительно, если $x_0 \in X$ – предельная точка для множства F_n, то существует последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset$

F_n такая, что $x_{i+1} < x_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_0$. Для любой точки $y \in \left(x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$ найдется номер $i_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $x_i < y$ для всех $i > i_0$. Поскольку $x_i \in F_n$ и $x_i < y < x_0 + \dfrac{1}{n} < x_i + \dfrac{1}{n}$, то получаем $\varphi(y) < \varphi(x_i)$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $\varphi(y) \leq \varphi(x_0)$. Так как отображение φ – гомеоморфизм, то $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ и, значит, $x_0 \in F_n$. Замкнутость множества F_n в X доказана. Нетрудно видеть, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Пусть теперь $\left\{I_n^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – счетное семейство замкнутых интервалов, длины меньше $\dfrac{1}{n}$, образующих покрытие множества F_n. Тогда $F_n^k = F_n \cap I_n^k$ – замкнутые подмножества в X и $X = \bigcup\limits_{n,k\in\mathbb{N}} F_n^k$. Покажем, что на каждом множестве F_n^k отображение φ является убывающим. Пусть $x, y \in F_n^k$ и $x < y$. Поскольку $x, y \in I_n^k$, то $x < y < x + \dfrac{1}{n}$. Так как $x \in F_n$, то $\varphi(y) < \varphi(x)$.

В случае $X \subset S_P \setminus P$ определим подмножества

$$F_n = \{x \in X : x - \frac{1}{n} < y < x \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(x)\}$$

множества X и так же, как и в предыдущем случае, доказываем, что отображение φ является возрастающим на множествах F_n^k.

$\square$

Предложение 2.7. *Пусть V – подмножество вещественной прямой такое, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Тогда верны следующие утверждения:*

a) $\overline{V}$ – совершенное множество, т.е. замкнутое без изолированных точек;

b) Все точки множества $\overline{V}$ есть точки конденсации, т.е. любая окрестность точки $x \in \overline{V}$ содержит несчетное число точек множества $\overline{V}$;

c) Если $\overline{V} \cap (a, b) \neq \emptyset$, то $V \cap (a, b)$ и $\overline{V} \setminus V \cap (a, b)$ – всюду плотное подмножество в $\overline{V} \cap (a, b)$;

d) Если $\mathbb{R} \setminus \overline{V} = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ и $D = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, то $\overline{V} \setminus D$ – всюду плотное подмножество в $\overline{V}$ и для любого интервала (a, b) множество $(\overline{V} \setminus D) \cap (a, b)$ – всюду плотное подмножество в $\overline{V} \cap (a, b)$.

Доказательство. Свойство a) следует из равенства $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Доказательство свойства b) можно найти в [1, стр. 147]. Свойство c) легко проверить, а свойство d) вытекает из b) и c).

□

Рассмотрим теперь совершенное множество $F \subset \mathbb{R}$ и обозначим через D множество концов всех смежных к F интервалов, т.е. $D = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) = \mathbb{R} \setminus F$. Заметим, что точки множества D и только они могут быть изолированными в (F, τ_0) или в (F, τ_S).

Предложение 2.8. *Пусть множество F – совершенное, нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$ и множество D – множество концов всех смежных к F интервалов. Тогда существует отображение подобия φ между множеством $F \setminus D$ и множеством всех иррациональных чисел $J \subset \mathbb{R}$ и выполнены следующие утверждения:*

1. *отображение $\varphi : (F \setminus D, \tau_E) \to (J, \tau_E)$ является гомеоморфизмом,*
2. *отображение $\varphi : (F \setminus D, \tau_P) \to (J, \tau_{\varphi(P \cap (F \setminus D))})$ является гомеоморфизмом для любого множества $P \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Хорошо известно [1, стр. 147], что множество $F \setminus D$ подобно множеству всех иррациональных точек, т.е. существует отображение φ: $F \setminus D \to J$ такое, что $\varphi(x) < \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда $x < y$. Отсюда и из того, что топологии τ_E, τ_0 и τ_S определяются с помощью естественного порядка вещественной прямой и во множестве $F \setminus D$ нет изолированных точек ни в одной из этих топологий, следует справедливость утверждений *1.* и *2.*

□

Из этого предложения и следствия 1.2 получаем

Следствие 2.1. *Пусть F – совершенное, нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$. Для любого подмножества $P \subset \mathbb{R}$ пространство $(F \setminus D, \tau_P)$ является бэровским и плотным в себе пространством.*

В следующей теореме используются следующие обозначения: если подмножество $W \subset \mathbb{R}$, то (W, τ_E) - это подпространство топологического простанства $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Запись (W, τ_S), (W, τ_0), (W, τ_P) означает, что W рассматривается как подпространство $\mathbb{S}_{\to}$, $\mathbb{S}$, S_P соответственно.

Предложение 2.9. *Пусть $P \subset \mathbb{R}$ – произвольное подмножество и $V \subset P$ замкнутое в P подмножество такое, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Тогда найдется интервал (a, b) (возможно бесконечный), в котором либо существует подмножество $W_1 \subset V \cap (a, b)$, всюду плотное в $(\overline{V} \cap (a, b), \tau_E)$ и такое, что (W_1, τ_P) – плотное в себе пространство второй категории, либо существует подмножество $W_2 \subset (\overline{V} \setminus V) \cap (a, b)$, всюду плотное в $(\overline{V} \cap (a, b), \tau_E)$ и такое, что (W_2, τ_P) – плотное в себе пространство второй категории.*

Доказательство. Рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. Множество $\overline{V}$ не является нигде не плотным подмножеством в $\mathbb{R}$. Это означает, что существует интервал $(a, b) \subset \overline{V}$. Т.к. интервал (a, b) - открытое подмножество в S_P, то по следствию 1.2 пространство $((a, b), \tau_P)$ является бэровским, а т.к. $(a, b) \cap \overline{V} = ((a, b) \cap V) \sqcup ((a, b) \cap \overline{V} \setminus V)$, то по предложению 2.6 одно из множеств $W_1 = V \cap (a, b)$ или $W_2 = (\overline{V} \setminus V) \cap (a, b)$ является множеством второй категории в топологии τ_P. Очевидно, что множества W_1 и W_2 – всюду плотные подмножества а $\overline{V} \cap (a, b)$ в топологии τ_E. Покажем, что эти множества являются плотными в себе в топологии τ_P. Действительно, пусть $x_0 \in W_1$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$. Так как $(a, b) \subset \overline{V}$, интервал $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ содержит точки множества V, а это означает, что W_1 плотно в себе в топологии τ_P. Аналогично, пусть $x_0 \in W_2$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset (a, b)$. Так как $(a, b) \subset \overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ содержит точки множства $\overline{V} \setminus V$, а это означает, что множество W_2 плотно в себе в топологии τ_P.

Случай 2. Множество $\overline{V}$ – нигде не плотное подмножество в $\mathbb{R}$ и оба множества $V \setminus D$ и $(\overline{V} \setminus V) \setminus D$ являются всюду плотными подмножествами в $(\overline{V} \setminus D, \tau_P)$, где D – множество концов всех смежных к $\overline{V}$ интервалов. Заметим, что пространство $(\overline{V} \setminus D, \tau_P)$ плотно в себе и, следовательно, подпространства $V \setminus D$ и $(\overline{V} \setminus V) \setminus D$ также плотны в себе. По следствию 2.1 пространство $(\overline{V} \setminus D, \tau_P)$ является бэровским, а значит, по предложению 2.6 либо множество $W_1 = V \setminus D$, либо $W_2 = (\overline{V} \setminus V) \setminus D$ является пространством второй категории в топологии τ_P. Поскольку по условию W_1 и W_2 – всюду плотные подмножества $\overline{V} \setminus D$ и в топологии τ_E, то, по предложению 2.7(d) W_1 и W_2 – всюду плотные подмножества $\overline{V}$ в топологии τ_E.

Случай 3. Множество $\overline{V}$ нигде не плотное подмножество в $\mathbb{R}$, и хотя бы одно из множеств $V \setminus D$ или $(\overline{V} \setminus V) \setminus D$ не является всюду плотным подмножеством в $(\overline{V} \setminus D, \tau_P)$, где D – множество концов всех смежных к $\overline{V}$ интервалов.

Предположим, что множество $(\overline{V} \setminus V) \setminus D$ не является всюду плотным подмножеством в $(\overline{V} \setminus D, \tau_P)$. Это означает, что существуют точка $x_0 \in V \setminus D$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$[x_0, x_0 + \varepsilon) \cap ((\overline{V} \setminus V) \setminus D) = \emptyset. \tag{$*$}$$

Положим $W_1 = (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap (V \setminus D) = (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap (\overline{V} \setminus D)$. Так как по следствию 2.1 $((\overline{V} \setminus D), \tau_P)$ – бэровское плотное в себе пространство, то и открытое подмножество $W_1 \subset ((\overline{V} \setminus D), \tau_P)$ также является бэровским (следствие 1.2) и плотным в себе пространством.

Покажем, что W_1 является всюду плотным подмножеством в $\overline{V} \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ в топологии τ_E. Пусть $x \in \overline{V} \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$. По предложению 2.7(d), найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\overline{V} \setminus D) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ такая, что $x_n \to x$ в τ_E. Так как

$$(\overline{V} \setminus D) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon) = (V \setminus D) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon) \sqcup (((\overline{V} \setminus V) \setminus D) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)),$$

то в силу $(*)$ получаем, что $x_n = (V \setminus D) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon) = W_1$ и значит W_1 всюду плотное подмножество в $(\overline{V} \cap (x_0, x_0 + \varepsilon), \tau_E)$.

Если $V \setminus D$ не является всюду плотным подмножеством в $(\overline{V} \setminus D, \tau_P)$, то существует точка $x_0 \in (\overline{V} \setminus V) \setminus D$ такая, что $[x_0, x_0 + \varepsilon) \cap (V \setminus D) = \emptyset$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Аналогично доказываем, что множество $W_2 = (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap ((\overline{V} \setminus V) \setminus D) = (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap (\overline{V} \setminus D)$ удовлетворяет условиям теоремы. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $P \subset \mathbb{R}$. Если существует подмножество $\emptyset \neq V \subset P$, замкнутое в P и такое, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$, то пространства S_P и $\mathbb{S}$ негомеоморфны.*

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : S_P \to \mathbb{S}$. В силу предложения 2.9 доказательство теоремы можно разбить на 2 случая.

Случай 1. Существует подмножество $W_1 \subset V \cap (a, b)$, удовлетворяющее всем условиям предложения 2.9. По лемме 2.1 существуют замкнутые подмножества $F_n \subset W_1$ такие, что $W_1 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ и отображение $\varphi|_{F_n}$ – убывающее для любого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку пространство (W_1, τ_P) второй категории, то для некоторого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n не является нигде не плотным. Следовательно, существует точка $x_0 \in F_n$ такая, что $W_1 \cap [x_0, x_0 + \varepsilon) \subset F_n$ и, значит, отображение φ на множестве $W_1 \cap [x_0, x_0 + \varepsilon)$ является убывающим. Так как множество (W_1, τ_P) плотно в себе, то существуют точки $x_1, x_2 \in W_1 \cap [x_0, x_0 + \varepsilon)$ такие, что $x_0 \neq x_1 < x_2$. В силу равенства $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$ найдутся точки $y_1, y_2 \in (\overline{V} \setminus V) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$, $y_1 \neq y_2$ и $y_1 < y_2$. Заметим, что точки $y_1, y_2 \notin P$, поскольку множество V замкнуто в P. Так как множество W_1 всюду плотно в $\overline{V} \cap (a, b)$ в τ_E, то существуют последовательности $\{y_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset W_1 \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ такие, что $y_n^i \to y_i$ в τ_E, где $i = \overline{1, 2}$. Не нарушая общности (переходя к подпоследовательностям), можно считать, что последовательности $\{y_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ монотонны и удовлетворяют условию $y_n^1 < y_k^2$ для любых $n, k \in \mathbb{N}$.

Если одна из последовательностей $\{y_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью, т.е. сходится к соответствующему y_i в τ_P, то в силу непрерывности отображения $\varphi : S_P \to \mathbb{S}$ последовательность $\{\varphi(y_n^i)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\varphi(y_i)$ в топологии τ_0. С другой стороны, т.к. отображение φ на множестве $W_1 \cap [x_0, x_0 + \varepsilon)$ является убывающим, последовательность $\{\varphi(y_n^i)\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая и, следовательно, является расходящейся в пространстве (S, τ_0). Но это противоречит непрерывности отображения φ.

Предположим теперь, что обе последовательности $\{y_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ являются убывающими, т.е. расходящимися в S_P. Поскольку φ – гомеоморфизм, то последовательности $\{\varphi(y_n^1)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi(y_n^2)\}_{n=1}^{\infty}$ являются расходящимися в $\mathbb{S}$. С другой стороны, отображение φ на множестве $W_1 \cap [x_0, x_0 + \varepsilon)$ является убывающим, следовательно, последовательности $\{\varphi(y_n^1)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi(y_n^2)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающие и $\varphi(y_n^2) < \varphi(y_n^1)$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Получаем противоречие с тем, что возрастающая и ограниченная сверху последовательность $\{\varphi(y_n^2)\}_{n=1}^{\infty}$ является расходящейся в $(\mathbb{R}, \tau_0)$.

Случай 2. Существует подмножество $W_2 \subset (\overline{V} \setminus V) \cap (a, b)$ удовлетворяющее всем условиям предложения 2.9. Доказательство проводится аналогично случаю 1.

$\square$

2.1.3. Доказательство теоремы: (2)$\Leftrightarrow$ (3)

(3)$\Rightarrow$(2). Пусть P является множеством типа F_σ и G_δ в $\mathbb{R}$. Предположим, что существует замкнутое в P множество $\emptyset \neq V \subset P$ такое, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Следовательно, множество V является множеством типа F_σ и G_δ в $\mathbb{R}$. Так как множество V типа F_σ, то $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества $F_n \subset \mathbb{R}$ замкнуты в $\mathbb{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку множество V типа G_δ, то оно метризуемо полной метрикой, а значит найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $\operatorname{int}_V F_n \neq \emptyset$, т.е. найдется точка $x_0 \in F_n$ такая, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap V \subset F_n$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Получаем, что множество

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap F_n = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap V \cap F_n = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap V$$

является компактом. Пусть $y_0 \in (\overline{V} \setminus V) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Тогда существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $y_n \in V \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n =$

y_0. Поскольку $y_0 \notin V$, то получаем противоречие с компактностью множества $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap V$.

(2)⇒(3). Поскольку множество $A = P \setminus \operatorname{int} P$ замкнуто в P, то и в A нет подмножеств $V \neq \emptyset$, замкнутых в A, удовлетворяющих условию $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. В теореме 2.3 доказано, что в этом случае существует ординал $\alpha < \omega_1$ такой, что $C_\alpha = \emptyset$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{0 \leqslant \beta < \alpha} (A_\beta \setminus A_{\beta+1}) = \bigsqcup\limits_{0 \leqslant \beta < \alpha} B_{\beta+1}$. По свойству 8 множество $B_{\beta+1}$ замкнуто в $\mathbb{R} \setminus C_{\beta+1}$ для каждого ординала β и, следовательно, является множством типа F_σ в $\mathbb{R}$. Так как счетное объединение множеств типа F_σ является множеством типа F_σ, то множество A, а следовательно, и множество P, также типа F_σ в $\mathbb{R}$.

Покажем, что множество A имеет тип G_δ. Так как $A = (A \setminus C_\gamma) \sqcup C_\gamma$, то достаточно показать, что для любого ординала γ множество $A \setminus C_\gamma$ имеет тип G_δ. Докажем это используя метод трансфинитной индукции.

Если $\gamma = 1$, то множество $A \setminus C_1 = A \setminus A_1 = B_1$ – замкнутое подмножество в $\mathbb{R} \setminus C_1$ и, следовательно, имеет тип G_δ.

Предположим, что для всех $\beta < \gamma$ множество $A \setminus C_\beta$ имеет тип G_δ.

Если γ – непредельный ординал , то по свойству 7 множество $A \setminus C_\gamma = (A \setminus A_{\gamma-1}) \cup (A_{\gamma-1} \setminus A_\gamma) = (A \setminus C_{\gamma-1}) \cup B_\gamma$ имеет тип G_δ, поскольку по предположению индукции множество $A \setminus C_{\gamma-1}$ имеет тип G_δ, а множество B_γ замкнуто в $\mathbb{R} \setminus C_\gamma$ и, следовательно, имеет тип G_δ.

Пусть теперь γ – предельный ординал. Известно, что в сепарабельном метрическом пространстве множество имеет тип G_δ, если оно имеет тип G_δ в каждой своей точке [4, стр. 366]. Пусть $x \in A \setminus C_\gamma$. Поскольку $A \setminus C_\gamma = A \setminus A_\gamma = \bigsqcup\limits_{0 \leqslant \beta < \gamma} B_{\beta+1}$, то $x \in B_{\beta_0+1}$ для некоторого $\beta_0 < \gamma$. Так как $B_{\beta_0+1} \cap C_{\beta_0+1} = \emptyset$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap C_{\beta_0+1} = \emptyset$. При $\beta \geqslant \beta_0 + 1$ имеем $B_{\beta+1} \subset A_\beta \subset C_\beta \subset C_{\beta_0+1}$ и, следовательно, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\bigsqcup\limits_{\beta_0+1 \leq \beta < \gamma} B_{\beta+1}) = \emptyset$. Отсюда

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A \setminus C_\gamma) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (\bigsqcup\limits_{\beta_0+1 \leqslant \beta < \gamma} B_{\beta+1}) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A \setminus C_{\beta_0+1}).$$

По предположению индукции множество $A \setminus C_{\beta_0+1}$, а следовательно, множество $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (A \setminus C_{\beta_0+1})$ типа G_δ в $\mathbb{R}$. Таким образом множество $A \setminus C_\gamma$ имеет тип G_δ в каждой своей точке в $\mathbb{R}$.

$\square$

В работе [25] доказано, что подмножества $X \subset \mathbb{S}$ гомеомрфны $\mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда X является плотным в себе F_σ и G_δ в $\mathbb{S}$. Отсюда получаем

Следствие 2.2. *Пусть подмножество $P \subset \mathbb{R}$ таково, что пространства S_P и $\mathbb{S}$ гомеомрфны. Тогда*

1. *если P плотное в себе подмножество в $(\mathbb{R}, \tau_S)$, то P и $\mathbb{S}$ гомеоморфны;*
2. *если $\mathbb{S} \setminus P$ плотное в себе подмножество в $\mathbb{S}$, то $\mathbb{S} \setminus P$ и $\mathbb{S}$ гомеоморфны.*

2.2. О гомеоморфности пространств S_P и S_Q

В предыдущем параграфе мы показали, что пространства $\mathbb{S}$ и S_Q не гомеоморфны (теорема 2.1) и, следовательно, теореме 2.1 $S_\mathbb{P}$ не гомеоморфно $S_\mathbb{Q}$, если множество P является множеством типа и F_σ и G_δ подмножеством в $\mathbb{R}$. В данном параграфе обсуждается вопрос о гомеоморфности пространств S_P и $S_\mathbb{Q}$. Для счетных множеств $P \subset \mathbb{R}$ получены необходимое и достаточное условия гомеоморфности пространств S_P и $S_\mathbb{Q}$.

Теорема 2.5. *Пусть $P \subset \mathbb{R}$ счетное множество. Пространство S_P гомеоморфно пространству $S_\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда подмножество $P \subset \mathbb{R}$ всюду плотно в $\mathbb{S}$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Так как P плотно в $\mathbb{S}$, то P плотно в $\mathbb{R}$. Известно [23, 4.3H], что для счетного плотного подпространства $P \subset \mathbb{R}$ существует гомеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $\varphi(P) = \mathbb{Q}$ и условие $a_i < a_j$ равносильно $\varphi(a_i) < \varphi(a_j)$ для любых a_i и a_j из множества P, т.е. отображение $\varphi|_P$ является монотонно возрастающим. Поскольку подмножество P всюду плотно на прямой, то $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является монотонно возрастающей функцией. Следовательно, отображение $\varphi\colon S_A \to S_{\mathbb{Q}}$ – гомеоморфизм.

($\Rightarrow$) Пусть $\varphi\colon S_P \to S_{\mathbb{Q}}$ – гомеоморфизм. Предположим, что множество P не является всюду плотным в $\mathbb{S}$, т.е. $\overline{P} \neq \mathbb{S}$. Рассмотрим интервал $(a,b) \subset S_P \setminus \overline{P}$ и положим $J = (a,b) \setminus \varphi^{-1}(\mathbb{Q})$. По лемме 2.1 $J = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в J и такие, что $\varphi|_{F_n}$ – возрастающая функция для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку интервал (a,b) гомеоморфен $\mathbb{S}$ и, значит, является бэровским пространством, а множество J – всюду плотное и типа G_δ в интервале (a,b), то J – бэровское пространство (следствие 1.2). Это означает, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (c,d) такой, что $J \cap (c,d) = (c,d) \setminus \varphi^{-1}(\mathbb{Q}) \subset F_n$. Так как множество $\varphi^{-1}(\mathbb{Q})$ всюду плотно в S_P, то существует точка $q_0 \in \mathbb{Q}$ такая, что $\varphi^{-1}(q_0) \in (c,d)$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J \cap (c,d)$, сходящуюся к точке $\varphi^{-1}(q_0)$ в пространстве S_A. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей. Так как $\varphi|_{J\cap(c,d)}$ – возрастающее отображение, то $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью. В силу непрерывности отображения φ эта последовательность сходится к точке q_0 возрастая, что невозможно, так как монотонно возрастающие последовательности в $S_{\mathbb{Q}}$ могут сходиться только к точкам из множества $S_{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$.

$\square$

Заметим, что подмножество $P \subset \mathbb{S}$ счетно и не всюду плотно в $\mathbb{S}$, но существует интервал I такой, что $P \cap I$ – всюду плотное подмножество в I, то мы получаем попарно негомеоморфные пространства $\mathbb{S}$, S_P, $S_{\mathbb{Q}}$. Действительно, по теореме 2.5 пространство S_P не гомеоморфно пространству $S_{\mathbb{Q}}$, а по теореме 2.1 пространство S_P не гомеоморфно и пространству $\mathbb{S}$.

Теорема 2.6. *Пусть P и его дополнение $\mathbb{S} \setminus P$ – несчетные в любом интервале (a,b) в $\mathbb{S}$, а подмножество $D \subset \mathbb{S}$ – счетно. Тогда пространства S_A и S_D не гомеоморфны.*

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi\colon S_P \to S_D$. Поскольку подмножество $S_P \setminus \varphi^{-1}(D)$ всюду плотное и типа G_δ в S_P, то оно является бэровским пространством (следствие 1.2). Тогда по предположению одно из пространств $\tilde{P} = P \setminus \varphi^{-1}(D)$ или $\tilde{B} = (\mathbb{S} \setminus P) \setminus \varphi^{-1}(D)$ является пространством второй категории. Для определенности, пусть $\tilde{P}$ – пространство второй категории. Заметим, что $\varphi(\tilde{P}) \subset \mathbb{S} \setminus D \subset \mathbb{S}$. Тогда по лемме 2.1 множество $\tilde{P} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n замкнуты в $\tilde{P}$ и отображение $\varphi|_{F_n}$ является убывающим для каждого $n \in \mathbb{N}$. Так как пространство $\tilde{P}$ второй категории, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (a, b) такой, что $(a, b) \cap \tilde{P} \subset F_n$. По условию теоремы существует точка $x_0 \in (a, b) \cap (\mathbb{S} \setminus P) \setminus \varphi^{-1}(D)$. Рассмотрим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (a, b) \cap \tilde{P}$, сходящуюся к точке $x_0 \in (a, b) \cap \tilde{P}$ в пространстве S_P. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей. Так как $\varphi|_{\tilde{P} \cap (a,b)}$ – убывающее отображение, то $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является убывающей последовательностью. В силу непрерывности отображения φ эта последовательность сходится к точке $\varphi(x_0)$ справа, что невозможно, так как монотонно убывающие последовательности в S_D могут сходиться только к точкам из множества D, а $x_0 \notin \varphi^{-1}(D)$.

$\square$

Заметим, что гомеоморфизм множеств A и B не влечет гомеоморфизм пространств S_A и S_B. Например, пространства $S_{\mathbb{Q}}$ и $S_{\mathbb{Q} \cap (0,1)}$ не гомеоморфны, хотя множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ являются гомеоморфными. С другой стороны, пространства $S_{(0,1)}$ и $S_{[0,1]}$ гомеоморфны, так как гомеоморфны $\mathbb{S}$ (по теореме 2.1).

В работе [25] дан критерий гомеоморфности подмножеств $\mathbb{S}$ всему пространству $\mathbb{S}$. В частности доказано, что если $X \subset \mathbb{S}$ замкнутое, плотное в себе подмножество, то X гомеоморфно $\mathbb{S}$. Очевидно, что подобное утверждение для пространства $S_{\mathbb{Q}}$ неверно, поскольку существуют замкнутые и плотные в себе подмножества $X \subset S_{\mathbb{Q}}$ такие, что $X \subset S_{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$ и, значит, X гомеоморфно $\mathbb{S}$.

Нетрудно видеть, что необходимым условием гомеоморфности подмножества $X \subset S_{\mathbb{Q}}$ и $S_{\mathbb{Q}}$ является условие $\overline{X \cap \mathbb{Q}}^X = X$. Следующий пример показывает, что это условие не является достаточным.

Пример 2.1. *Пусть C – ограниченное, совершенное, нигде не плотное подмножество на прямой $\mathbb{R}$, $B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – правые концы смежных интервалов множества C и $C \cap \mathbb{Q} = B$. Тогда подмножество $C \subset S_{\mathbb{Q}}$ не гомеоморфно $S_{\mathbb{Q}}$.*

Доказательство. Действительно, предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi\colon S_{\mathbb{Q}} \to C$. Рассмотрим множество $J = S_{\mathbb{Q}} \setminus (\mathbb{Q} \cup \varphi^{-1}(B)) \subset \mathbb{S}$. Поскольку $\varphi(J) \subset C \setminus B \subset \mathbb{S}$, то по лемме 2.1 $J = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты в J и такие, что $\varphi|_{F_n}$ – возрастающая функция для каждого $n \in \mathbb{N}$. Так как $S_{\mathbb{Q}}$ – бэровское пространство, а J – всюду плотное подмножество типа G_δ в $S_{\mathbb{Q}}$, то пространство J – бэровское по следствию 1.2. Это означает, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n содержит внутреннюю точку, т.е. существует интервал (a, b) такой, что $J \cap (a, b) \subset F_n$. Рассмотрим точку $x_0 \in J \cap (a, b)$ и возрастающую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset J \cap (a, b)$, сходящаяся к точке $r_0 < x_0$ в пространстве $\mathbb{R}$. Это означает, что в пространстве $S_{\mathbb{Q}}$ последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет предельных точек. Так как $\varphi|_{F_n}$ – монотонно возрастающее отображение, то последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является возрастающей и ограниченной сверху числом $\varphi(x_0)$. Следовательно, последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке $y_0 \leq \varphi(x_0)$ в евклидовой топологии прямой $\mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что $y_0 \in C \setminus B$ и, значит, последовательность $\{\varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке y_0 в топологии пространства $S_{\mathbb{Q}}$. Полученное противоречие доказывает, что не существует гомеоморфизма между C и $S_{\mathbb{Q}}$.

$\square$

2.3. Гомеоморфность пространств $H(A)$

В работе В. Четыро и У. Хаттори [27] было доказано, что для всех замкнутых счетных подпространств $A \subset \mathbb{R}$, пространство $H(A)$ гомеоморфно $\mathbb{S}$. В этой работе был поставлен вопрос: останется ли этот результат верным, если множество A имеет счетное замыкание в $\mathbb{R}$? Необходимое и достаточное условия были получены Дж. Кулеза в 2017 году [35, Теорема 6].

Теорема 2.7. *Пространства $H(A)$ и $\mathbb{S}$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда A разреженное.*

Мы дадим альтернативное доказательство необходимости (предложение 2.11 ниже) теоремы Дж. Кулезы оновываясь на концепции Е.В. Щепина о ёмкости [22]. Введем следующее определение.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Отображение $\phi\colon X \times \tau \to [0, +\infty)$ называется *предёмкостью* (a precapacity), если выполняются следующие условия:

(i) если $x \in X$ и $U, V \in \tau$ такие, что $V \subset U$, то $\phi(x, U) \leq \phi(x, V)$,

(ii) если $x \in X$ и каждая линейно упорядоченная система множеств $(U_i)_{i\in I} \subset \tau$, то $\phi(x, \bigcup\limits_{i\in I} U_i) = \inf\limits_{i\in I} \phi(x, U_i)$.

Ёмкостью на X наывается предёмкость, удовлетворяющая следующим условиям:

(iii) $x \in X$ и $U \in \tau$, то $x \in \overline{U}$ тогда и только тогда, когда $\phi(x, U) = 0$,

(iv) для каждого $U \in \tau$ отображение $\phi(\cdot, U) : X \to \mathbb{R}$ вляется непрерывным.

Хорошо известно и нетрудно видеть, что отображение $\phi\colon \mathbb{S} \times \tau \to [0, +\infty)$ определенное правилом $\phi(x, U) = \min\{1, d(x, U \cap (-\infty, x]\}$, где d естественная метрика на вещественной прямой (с условием $d(x, \emptyset) = 1$), является ёмкостью в смысле Е.В. Щепина на прямой Зоргенфрея.

Идею следующего предложения можно найти в работе Г. Бенетта и Д. Латзера в [24, лемма 2.6]. Если $(X, <)$ линейно упорядоченное множество и $x \in X$, то обозначим $(x, \to)$ множество $\{y \in X : x < y\}$ (множества $[x, \to)$, $(\leftarrow, x]$, $(\leftarrow, x)$ определяются аналогично).

Предложение 2.10. *Пусть $(X, \tau, <)$ линейно упорядоченное топологическое пространство такое, что для любого $x \in X$ множества вида $(x, \rightarrow)$, $(\leftarrow, x]$, $(\leftarrow, x)$ принадлежат τ, предёмкость $\phi\colon X \times \tau \to [0, +\infty)$ такая, что для каждого $y \in X$ $\phi(\cdot, (y, \rightarrow))$ непрерывное в каждой точке $x \in (\leftarrow, y]$. Тогда отображение $f_\phi\colon X \to \mathbb{R}$ определенное правилом $f_\phi(x) = \phi(x, (x, \rightarrow))$, полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $\delta > 0$ такие, что $\phi(x, (x, \rightarrow)) < \delta$. Если $(x, \rightarrow) = \bigcup\limits_{y>x} (y, \rightarrow)$, то по *(ii)* существует точка $y > x$ такая, что $\phi(x, (y, \rightarrow]) < \delta$. Поскольку $\phi(\cdot, (y, \rightarrow))$ непрерывно в точке x, то существует окрсность V точки x в (X, τ) такая, что $\phi(t, (y, \rightarrow)) < \delta$ для всех $t \in V$. Пусть $W = (\leftarrow, y) \cap V$. Тогда W — окрестность точки x в (X, τ) и для каждого $t \in W$ по *(i)* $\phi(t, (t, \rightarrow)) \leq \phi(t, (y, \rightarrow)) < \delta$.

Если $(x, \rightarrow) \neq \bigcup\limits_{y>x} (y, \rightarrow)$, то $(\leftarrow, x]$ — окрестность точки x в (X, τ). Действительно, если $(x, \rightarrow) \neq \bigcup\limits_{y>x} (y, \rightarrow)$, то существует точа z такая, что $z > x$ и $z \notin \bigcup\limits_{y>x} (y, \rightarrow)$. Тогда $(\leftarrow, z)$ – открытое множество и $(\leftarrow, z) = (\leftarrow, x]$ (если бы $(\leftarrow, z) \subset (\leftarrow, x]$, то нашелся бы y такой, что $x < y < z$ и $z \in (y, \rightarrow) \subset \bigcup\limits_{y>x} (y, \rightarrow)$, что невозможно). Положим $W = (\leftarrow, x] \cap W$. Тогда для любого $t \in W$ по *(i)* $\phi(t, (\leftarrow, t)) \leq \phi(t, (\leftarrow, x)) = \phi(t, (\leftarrow, x]) < \delta$.

$\square$

Отображение f_ϕ из предложения 2.10 ткже используется в следующей лемме.

Лемма 2.2. *Если на $H(A)$ существует $\varkappa$-метрика ϕ, то $A = f_\phi^{-1}(\{0\})$. В частности, множество A имеет тип G_δ в $H(A)$, а значит A имеет тип G_δ в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Из определения пространства $H(A)$ следует, что для каждого $x \in H(A)$, $x \in \overline{(x, \rightarrow)}$ тогда и только тогда, когда $x \in A$. Другими словами, по *(iii)*, $f_\phi^{-1}(\{0\}) = A$. Поскольку f_ϕ полунепрерывно сверху (предложение 2.10), то множество $f_\phi^{-1}(\{0\})$ имеет тип G_δ в $H(A)$. Поскольку точки множества A в $H(A)$ имеют окрестности евклидовой прямой, то множество A имеет тип G_δ в $\mathbb{R}$.

$\square$

Предложение 2.11. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что пространства $H(A)$ и $\mathbb{S}$ гомеоморфны. Тогда A — разреженное.*

Доказательство. Поскольку пространство $\mathbb{S}$ и $H(A)$ гомеоморфны и на $\mathbb{S}$ существует ёмкость, то на $H(A)$ также существует ёмкость. По лемме 2.2 множество A имеет тип G_δ в $\mathbb{R}$ и в силу предложения 1.3 множество A счетно. Следовательно, множество A — разреженное (аналогично рассуждению в предложении 1.10).

$\square$

3. Пространства непрерывных функций

В этом параграфе все рассматриваемые топологические пространства предпологаются вполне регулярными.

Через $C_p(X)$ обозначается множество всех непрерывных отображений $C(X)$ из X в $\mathbb{R}$, наделенное топологией поточечной сходимости, которое являетя топологическим векторным пространством.

Стандартная база просранства $C_p(X)$ состоит из множеств вида

$$W(x_1, \dots, x_n, U_1, \dots, U_n),$$

где $x_1, \dots, x_n \in X$, $U_1, \dots, U_n$ – открытые множества в $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$W(x_1, \dots, x_n, U_1, \dots, U_n) = \{f \in C(X) \colon f(x_i) \in U_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Для каждого $x \in X$ определим функционал $\delta_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ правилом $\delta_x(f) = f(x)$ при всех $f \in C_p(X)$. Хорошо известно следующее

Предложение 3.1. *Для любого $x \in X$ отображение $\delta_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ является линейным непрерывным функционалом.*

Если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то сущестует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(x) \neq f(y)$. Следовательно, $\delta_x(f) = f(x) \neq f(y) = \delta_y(f)$. Таким образом отображение $x \to \delta_x$ инъективное. В дальнейшем будем отождествлять функционал δ_x с x.

В линейном пространстве $C_pC_p(X)$ рассмотрим подпространство линейных функционалов

$$L_p(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in C_pC_p(X) \colon x_1, \dots, x_n \in X, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

алгебраически порожденное множеством X. Будем считать, что если функционал не яввляется тождественно равным нулю, т.е. $f \not\equiv 0$ то все x_i различны и $\alpha_i \neq 0$. В этом случае, для $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, положим $\mathfrak{l}(f) = n$. Если $f \equiv 0$, то $\mathfrak{l}(f) = 0$. Известно, что по отношению к естественным операциям сложения и умножения на скаляр в $C_pC_p(X)$ пространство $L_p(X)$ – наименьшее линейное подпространство линейного топологического пространства $C_pC_p(X)$, содержащее множество X (точнее, содержащее образ X при гомеоморфном вложении X в $C_pC_p(X)$) и множество $\{\delta_x\}_{x\in X}$ – алгебраический базис в $L_p(X)$ (базис Гамеля).

В дальнейшем мы будем использовать некоторые факты, которые можно найти например в [37], [3].

Предложение 3.2. $L_p(X)$ *– локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем* $\mathbb{R}$*, причем* X *– замкнутое подпространство пространства* $L_p(X)$*.*

Предложение 3.3. $L_p(X) = (C_p(X))^\star$

Предложение 3.4. *Пусть* X *и* Y *топологические пространства. Тогда* $C_p(X)$ *и* $C_p(Y)$ *линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда* $L_p(X)$ *и* $L_p(Y)$ *линейно гомеоморфны.*

Пусть X и Y топологические пространства и пусть $T\colon C_p(Y)\to C_p(X)$ линейная функция. Для каждого $x\in X$ носителем в Y точки x относительно T называется множество $supp(x)$ всех $y\in Y$ удовлетворяющих условию: для любой окрестности U точки y существует функция $f\in C(Y)$ такая, что $f(Y\setminus U)\subseteq\{0\}$ и $T(f)(x)\neq 0$. Существует альтернативное определение носителей для линейных непрерывных отображений T [37].

Пусть X и Y – топологические пространства и $T\colon C_p(Y)\to C_p(X)$ – линейное непрерывное отображение. Определим сопряженное отображение $T^*: L_p(X)\to L_p(Y)$ по формуле $T^*(F)=F\circ T$ для любого $F\in L_p(X)$. Тогда для любой точки $x\in X$ верно $T^*x\in L_p(Y)$ и, следовательно, $T^*x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$, где $supp(x)=\{y_1,\ldots,y_n\}$. Если $T^*y\equiv 0$, то $supp(y)=0$. Длиной носителя называют число $|supp(x)|$. Для любой функции $f\in C_p(Y)$ верно $T(f)(x)=(\delta_x\circ T)(f)=(T^*\delta_x)(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(y_i)$.

Пусть X и Y топологичесие пространства и $F\colon X \to Y$ – многозначное отображение. Многозначное отображение F называется полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ найдется открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(x) \cap V \neq \emptyset$ для любого $x \in U$. Если F – полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным снизу. Если для непрерывного отображения $T\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ для любого $x \in X$ $supp(x) \neq \emptyset$, то многозначное отображение $\varphi\colon X \to 2^Y$ заданное правилом $\varphi(x) = supp(x)$ полунепрерывно снизу [37].

Положим $L_p^n(X) = \{z \in L_p(X); \mathfrak{l}(z) \leq n\}$ и $M_p^n(X) = \{z \in L_p(X); \mathfrak{l}(z) = n\} = L_p^n(X) \setminus L_p^{n-1}(X)$. Известно [3], $L_p^n(X)$ замкнуто в $L_p(X)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и верна следующая теорема о базе точки $y \in M_p^n(X)$ в $L_p^n(X)$.

Теорема 3.1. *Пусть X – топологическое пространство и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in M_p^n(X)$. Тогда семейство множеств вида $O(V_1, \ldots, V_n, \varepsilon) = \{y' = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i' x_i' : |\alpha_i' - \alpha_i| < \varepsilon, (\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_i' \in V_i, i = \overline{1,n}\}$, где V_i – открытые, попарно непересекающиеся множества в X и число $\varepsilon > 0$, – база точки y в пространстве $L_p^n(X)$.*

Напомним, что топологическое пространство X называется *совершенным*, если любое открытое подмножество имеет тип F_σ в X. Нетрудно видеть, что в совешнном пространстве разность двух замкнутых множеств имеет тип F_σ.

Лемма 3.1. *Пусть X и Y топологические пространства, X – совершенное, $T\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ – линейное непрерывное отображение и $X_n = \{x \in X : |supp(x)| = n\}$ и $X_0 = \{x \in X\colon T^* x = 0\}$. Тогда $T^*(X_n) \subset M_p^n(Y)$ и множество X_n имеет тип F_σ в X.*

Доказательство. Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ ножества $Z_n = X \setminus \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$ – открыты в X. Ясно, что X_0 – замкнуто в X и, следовательно, Z_0 – открыто в X. Пусть $x_0 \in Z_n$. Тогда $T^*(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i(x_0) y_i(x_0)$, где $m > n$. Тогда для каждого $i = \overline{1,m}$ существуют попарно непересекающиеся окрестности U_i точек $y_i(x_0)$. Отображение φ переводит точку x_0 во множество $\{y_i(x_0)\}_{i=1}^m$. Поскольку это отображение φ является полунепрерывным снизу, то существует окрестность O_{x_0} точки x_0 такая, что для каждой точки $x \in O_{x_0}$ имеем $\varphi(x) \cap U_i \neq \emptyset$ для любого $i = \overline{1,m}$. Таким образом, $O_{x_0} \subset Z_n$, и значит Z_n открыто в X для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $\bigsqcup\limits_{i=0}^{n} X_i$ замкнуто для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Поскольку X – совершенное пространство, то $X_n = \left(\bigsqcup\limits_{i=0}^{n} X_i \right) \cap Z_{n-1}$ имеет тип F_σ в X.

$\square$

Следствие 3.1. *Пусть X и Y топологические пространства, X – совершенное и $T\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ – линейное непрерывное отображение. Если множество V замкнуто в X, то $V = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i^n$, где F_i^n замкнуты в X и $T^*(F_i^n) \subset M_p^n(Y)$.*

Доказательство. По предыдущей теореме $X_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i^n$, где множества Φ_i^n замкнуты в X. Тогда множества $F_i^n = V \cap \Phi_i^n$ замкнуты в X для любых натуральных n и i.

$\square$

Лемма 3.2. *Пусть X и Y топологические пространства, $T\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ линейное непрерывное отображение и $X_n = \{x \in X : |supp(x)| = n\}$, т.е. для любого $x \in X_n$ $T^*(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x) y_i$. Тогда множества $X_n^k = \{x \in X_n \colon |\alpha_i(x)| \leq k, i = \overline{1,n}\}$ замкнуты в X_n для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in X_n$ – предельная для X_n^k. Поскольку $x_0 \in X_n$, то $T^* x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x_0) y_i^0$. Предположим, что $|\alpha_j(x_0)| > k$ для некоторого

$j = \overline{1,n}$. Рассмотрим окрестность точки T^*x_0 $O(U_1, \ldots, U_n, \varepsilon)$ в $L_p^n(Y)$, где $\varepsilon < |\alpha_j(x_0)| - k$. В силу неприрывности отображения T^* существует окрестность U_{x_0} такая, что $T^*U_{x_0} \subset O(U_1, \ldots, U_n, \varepsilon)$. Тогда для точки $x \in X_n^k \cap U_{x_0}$ верно $|\alpha_i(x_0) - \alpha_i(x)| < \varepsilon$ для всех $i = \overline{1,n}$. Следовательно получаем противоречие в силу того, что $\varepsilon > |\alpha_j(x_0) - \alpha_j(x)| \geq |\alpha_j(x_0)| - |\alpha_j(x)| > |\alpha_j(x_0)| - k$.

□

Пусть $T\colon C_p(\mathbb{S}) \to C_p(S_A)$ – линейный гомеоморфизм. В силу того, что $\mathbb{R}$ линейно упорядоченно для каждой точки $t \in S_A$ и её носителя $supp(t) = \{q_1, \ldots, q_n\}$ будем пологать $q_1 < \ldots < q_n$, т.е. нумерация точек в носителе соответствует естественному порядку во множестве вещественных чисел.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим отображение $\pi_j\colon M_p^n(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$ правилом $\pi_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i\right) = q_j$. Учитывая теорему 3.1 нетрудно видеть, что отображение π_j является непрерывным на $M_p^n(\mathbb{S})$ для любого $j = \overline{1,n}$.

Лемма 3.3. *Пусть $T\colon C_p(\mathbb{S}) \to C_p(S_A)$ – линейный гомеоморфизм и множество $B \subset S_A$ такое, что $|B| \geq \aleph_0$ и $T^*(B) \subset M_p^n(\mathbb{S})$. Тогда существует номер $1 \leq j \leq n$ такой, что $|(\pi_j \circ T^*)(B)| \geq \aleph_0$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. для любого $j = \overline{1,n}$ множество $(\pi_j \circ T^*)(B)$ конечно. Поскольку множество $(\pi_j \circ T^*)(B)$ конечно, то существует множество $B_1 \subset B$ такое, что $|B_1| \geq \aleph_0$ и $|(\pi_j \circ T^*)(B_1)| = 1$, т.е. существует точка $q_1^0 \in \mathbb{S}$ такая, что для любого $b \in B_1$ имеем $T^*(b) = \alpha_1(b)q_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i(b)q_i(b)$. Повторяя аналогичное рассуждение для каждого $j \leq n$ получаем набор множеств $B_1, \ldots, B_n$ таких, что $B_{j+1} \subset B_j$, $|B_j| \geq \aleph_0$, $|(\pi_j \circ T^*)(B_j)| = 1$ для любого $j = \overline{1,n}$. Это означает, что существуют точки $q_j^0 \in \mathbb{S}$, $q_1^0 < \ldots < q_n^0$ такие, что для любой точки $b \in B_n$ имеем $T^*(b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(b)q_i^0$. Поскольку B_n – бесконечно, то существует множество попарно различных точек $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\} \subset B_n$. Так как T^* – линейная биекция и множество $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\} \subset L_p(S_A)$ линейно независимое, то множество $\{T^*(b_1), \ldots, T^*(b_{n+1})\} \subset L_p(\mathbb{S})$ так же линейно независимое. Но тогда и векторы $\alpha(b_k) = (\alpha_1(b_k), \dots, \alpha_n(b_k)) \in \mathbb{R}^n$, где $k = \overline{1, n+1}$ линейно независимы, что невозможно.

Теорема 3.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Следующие условия равносильны:*

(i) пространства $\mathbb{S}$ и S_A гомеоморфны;

(ii) пространства $C_p(\mathbb{S})$ и $C_p(S_A)$ линейно гомеоморфны.

Доказательство. Импликация *(i)⇒(ii)* очевидна.

(i)⇐(ii). Пусть $T\colon C_p(\mathbb{S}) \to C_p(S_A)$ линейный гомеоморфизм. Тогда отображение $T^*\colon L_p(S_A) \to L_p(\mathbb{S})$ также линейный гомеоморфизм. Поскольку S_A замкнуто в $L_p(S_A)$, то $T^*(S_A)$ замкнуто в $L_p(\mathbb{S})$. Предположим теперь, что S_A и $\mathbb{S}$ не являются линейно гомеоморфными. Тогда по теореме 2.1 существует множество $V \subset \mathbb{R}$, замкнутое в A такое, что $\overline{V} = \overline{\overline{V} \setminus V}$. Положим $\overline{V}' = \overline{V} \setminus E$, где E – множество τ_A-изолированных точек из $\overline{V}$. Поскольку $\overline{V}'$ замкнуто в S_A, то по следствию 3.1 $\overline{V}' = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m^n$, где F_m^n – замкнуты в S_A и $T^*(F_m^n) \subset M_p^n(\mathbb{S})$.

Возможны два взаимоисключающие случая:

1. Либо существует интервал (a, b) такой, что $(a, b) \cap \overline{V}' \subset V$, либо существует интервал (a, b) такой, что $(a, b) \cap \overline{V}' \subset \overline{V} \setminus V$.

2. Для любого интервала (a, b) верно, что $B = (a, b) \cap \overline{V}' \cap V \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $C = (a, b) \cap \overline{V}' \cap (\overline{V} \setminus V) \neq \emptyset$.

Случай 1. Поскольку множество (a, b) открыто в S_A, а $\overline{V}'$ - бэровское (так как $\overline{V}'$ замкнуто в наследственно бэровском пространстве S_A), то множество $(a, b) \cap \overline{V}'$ - бэровское. Тогда $(a, b) \cap F_m^n$ замкнуты в $(a, b) \cap \overline{V}'$ при $n, m \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют $n, m \in \mathbb{N}$ и интервал $I \subset (a, b)$ такие, что $I \cap \overline{V}' \subset F_m^n$ и $T^*(I \cap \overline{V}') \subset M_p^n(\mathbb{S})$.

Пусть интервал (a, b) такой, что $(a, b) \cap \overline{V}' \subset V$.

Поскольку $I \cap \overline{V}'$ бэровское, то по лемме 2.1 существует интервал $I_1 \subset I$ такой, что отображения $\pi_j \circ T^*|_{I_1 \cap \overline{V}'}$ невозрастающее для каждого $j = \overline{1, n}$.

Положим

$$R_k = \left\{ t \in I_1 \cap \overline{V}' \colon T^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) q_i(t), |\alpha_i(t)| \leq k, i = \overline{1,n} \right\}.$$

Множества R_k замкнуты в X_n по лемме 3.2 и $I_1 \cap \overline{V}' = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. Так как $I_1 \cap \overline{V}'$ бэровское, то сущетвуют номер $k \in \mathbb{N}$ и интервал I_2 такие, что $I_2 \cap \overline{V}' \subset R_k$.

Поскольку $I_2 \cap \overline{V} \neq \emptyset$, то существуют точки $x_0, x_1 \in I_2 \cap (\overline{V} \setminus V)$, $x_0 < x_1$, а так как $I_2 \cap \overline{V}' \subset V$, то $x_0, x_1 \in E$, т.е. изолированные в τ_A. Пусть точка $t_0 \in I_2 \cap \overline{V}'$ такая, что $x_0 < t_0 < x_1$. Выберем убывающую последовательность $\{t_l\}_{l=1}^{\infty} \subset I_2 \cap \overline{V}'$, $t_i < t_0$, сходящуюся в евклидовой топологии к точке t_0. Это означает, что последовательность $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$ в S_A является расходящейся. Поскольку точки $t_l \in R_k$, то $T^*(t_l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t_l) q_i(t_l)$ и $|\alpha_i(t_l)| \leq k$ для всех $i, l \in \mathbb{N}$. Так как отображение $(\pi_j \circ T^*)|_{I_1 \cap \overline{V}'}$ невозрастающее и последовательность $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$ убывающая, то последоательности $\{q_j(t_l)\}_{l=1}^{\infty}$ возрастающие и $q_j(t_l) \leq q_j(t_0)$ при всех $j = \overline{1,n}$ и $l \in \mathbb{N}$. Следовательно последовательности $\{q_j(t_l)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к точкам q_j в $\mathbb{S}$ для каждого $j = \overline{1,n}$. В силу того, что $|\alpha_1(t_l)| \leq k$, существует подпоследовательность $\left\{t_l^{(1)}\right\}_{l=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{l \to \infty} \alpha_1\left(t_l^{(1)}\right) = \alpha_1$. Далее выбираем подпоследовательность $\{t_l^{(2)}\}_{l=1}^{\infty} \subset \{t_l^{(1)}\}_{l=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{l \to \infty} \alpha_2(t_l^{(2)}) = \alpha_2$. На n-том шаге получаем подпоследовательность $\{t_l^{(n)}\}_{l=1}^{\infty}$, для которой существуют пределы $\lim\limits_{l \to \infty} \alpha_i(t_l^{(n)}) = \alpha_i$ для каждого $i = \overline{1,n}$. Нетрудно видеть, что последовательность $\left\{T^*\left(t_l^{(n)}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к точке $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i$. Таким образом получаем противоречие тому, что отображение T^* гомеоморфизм.

Случай, когда существует интервал (a, b) такой, что $(a, b) \cap \overline{V}' \subset \overline{V} \setminus V$, доказывается аналогично.

Случай 2. В силу того, что S_A наследственно бэровское пространство множество $\overline{V}' \subset S_A$ бэровское и, следовательно, существуют $n, m \in \mathbb{N}$ и интервал I такие, что $I \cap \overline{V}' \subset F_m^n$ и $T^*(I \cap \overline{V}') \subset M_p^n(\mathbb{S})$.

Поскольку I открыто в S_A, а $\overline{V}'$ – бэровское, то $I \cap \overline{V}'$ – бэровское [45, стр.228]. В данном случае из условия следует, что $I \cap \overline{V}' = B \sqcup C$, где $B, C \neq \emptyset$. Следовательно, в силу предложения 2.6 хотя бы одно из множеств B или C – второй категории.

Пусть множество B второй категории. Тогда по лемме 2.1 $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, где B_k – замкнутые в B множеста и отображение $(\pi_j \circ T^*)|_{B_k}$ невозрастающее для каждого $j = \overline{1, n}$. В силу того, что B второй категории, существуют номер $k \in \mathbb{N}$ и интервал I_1 такой, что $\emptyset \neq I_1 \cap B \subset B_k$. Пусть $t \in I_1 \cap C$. Тогда существует возрастающая последовательность $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$ точек множества $I_1 \cap B$ сходящаяся в S_A к точки t. В слилу леммы 3.3 существует номер $j = \overline{1, n}$ такой, что множество $\{(\pi_j \circ T^*)(t_l)\}_{l=1}^{\infty}$ бесконечно. Поскольку отображение $\pi_j \circ T^*$ невозрастающее и последовательность $\{t_l\}_{l=1}^{\infty}$ возрастающая, то она переходит в убывающую последовательность $\{(\pi_j \circ T^*)(t_l)\}_{l=1}^{\infty}$, т.е. расходится в $\mathbb{S}$. Таким образом, получаем противоречие, т.к. отображение $\pi_j \circ T^*$ непрерывное.

Случай, когда множество C второй категории доказывается аналогично.

□

4. Функции первого класса Бэра

В данной главе мы даем характеристику функций первого класса Бэра заданных на модификациях прямой Зоргенфрея и пространствах Хаттори. Результаты этой главы опубликованы в работе [9].

Пусть X – топологическое пространство. Отображение $f : X \to \mathbb{R}$ называется функцией первого класса Бэра, если существует последовательность непрерывных функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к функции f на множестве X. Множество всех функций первого класса Бэра обозначается $B_1(X)$. В силу того, что топология S_A тоньше, чем евклидовая топология прямой, $B_1(\mathbb{R}) \subset B_1(S_A)$, но обратное включение не верно.

Пример 4.1. *Пусть $K \subset (\mathbb{R}, \tau_E)$ – канторово множество. Тогда*

$$\mathbb{R} \setminus K = (-\infty, 0) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right) \cup (1, +\infty).$$

Пусть $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и возрастающие последовательности $\{b_n^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $b_n^k \in (a_n, b_n)$ сходятся к точкам b_n. Определим непрерывные функции $f_i : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ следующим образом: $f_i(b_n) = 1$ и $f_i(b_n^i) = 0$, если $1 \leq n \leq i$, f_i линейны на каждом множестве $[b_n^i, b_n]$ и $f_i(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R} \setminus \bigsqcup_{n=1}^{i} [b_n^i, b_n]$. Заметим, что функция $f_i \in C(\mathbb{S})$, но $f_i \notin C(\mathbb{R})$, так как они имеют разрывы в точках множества $\{b_1, \cdots, b_i\}$. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{i \to \infty} f_i(x) = \chi_B(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ и χ_B – характеристическая функция множества B. Таким образом, характеристическая функция χ_B является функцией первого класса Бэра на $\mathbb{S}$. Так как функция $\chi_B|_K$ не имеет точек непрерывности на замкнутом в евклидовой топологии множестве K, то по теорема Бэра [5] $\chi_B \notin B_1(\mathbb{R})$.

Тот факт, что пространства $B_1(\mathbb{R})$ и $B_1(\mathbb{S})$ различны также следует из [40] ввиду того, что $B_1(\mathbb{R})$ секвенциально сепарабельно, а $B_1(\mathbb{S})$ - нет (напомним, что пространство X называется секвенциально сепарабельным, если существует счетное подмножество $D \subset X$ такое, что любая точка $x \in X$ есть предел некоторой последовательности точек из множества D).

Функцию f, заданную на топологическом пространстве X со значениями в вещественной прямой называют cliquish в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой окрестности U точки x существует открытое множество $\emptyset \neq G \subset U$ такое, что $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ для любых двух точек $y, z \in G$. Функцию f называют кликовой, если она кликовая в каждой точке $x \in X$, а множество всех таких функций обозначается $CL(X)$. В работе [39] показано, что для любой кликовой функции f, заданной на топологическом пространстве X, множество точек разрыва D_f первой категории в X. Из этого вытекает следующее

Предложение 4.1. *Пусть X – бэровское пространство, $f \in CL(X)$ и C_f – множество точек непрерывности функции f. Тогда множество C_f всюду плотно в X.*

Доказательство. Поскольку $f \in CL(X)$ и в силу того, что множество D_f первой категории, то $D_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n нигде не плотны. Следовательно,

$$C_f = X \setminus D_f = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \supseteq X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n).$$

Тогда множества $X \setminus \overline{F_n}$ открыты, всюду плотны и поскольку пространство X – бэровское, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \overline{F_n} \right)$ всюду плотно в X. Следовательно, множество C_f всюду потно в X.

□

Теорема 4.1. *Пусть X – бэровское пространство. Тогда $B_1(X) \subset CL(X)$.*

Доказательство. Пусть множество U открыто в X. Тогда подпространство U – бэровское (см. [45]). Пусть функция $g \in B_1(X)$ и $f = g|_U$. Очевидно, что $f \in B_1(U)$. Рассмотрим последовательность непрерывных функций $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ поточечно сходящуюся к функции f на множестве U. Тогда, для любой точки

$x \in U$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ является фундаментальной в $\mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $F_p = \bigcap\limits_{n,m\geq p} \{x \in X\colon |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\}$. Ясно, что $U = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} F_p$. Заметим, что $F_p \cap U$ – замкнуто в U, $U = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}}(F_p \cap U)$. Поскольку подпространство U бэровское, то найдется номер $p_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\mathrm{int}_U(F_{p_0} \cap U) \neq \emptyset$. Тогда множество $V = \mathrm{int}_U(F_{p_0} \cap U)$ открыто в U, а следовательно, открыто в X, и $V \subset F_{p_0} \cap U$. Это означает, что для любых $n, m \geq p_0$ и точки $x \in V$ верно неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ получаем, что $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ для любой точки $x \in V$ и $n \geq p_0$. В силу непрерывности функции f_{p_0} существует окрестность $W \subset V$ такая, что для любых $y, z \in W$ и $n \geq p_0$ верно неравенство $|f_{p_0}(y) - f_{p_0}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Применяя неравенство треугольника для любых $y, z \in W \subset V$, получаем $|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f_{p_o}(y)||f_{p_o}(y) - f_{p_0}(z)| + |f_{p_0}(z) - f(z)| < \varepsilon$.

$\square$

Из предложения 4.1 и теоремы 4.1 получаем

Предложение 4.2. *Пусть X – наследственно бэровское пространство и функция $f \in B_1(X)$. Тогда для любого замкнутого множества $F \subset X$ функция $f|_F$ на множестве F имеет точку непрерывности.*

Доказательство следующих трех лемм повторяет доказательства этих утверждений для метризуемых пространств [5]. Мы приведем доказательство только последней из них.

Лемма 4.1. *Пусть X – топологическое пространство. Если последовательность функций первого класса Бэра $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, то $f \in B_1(X)$.*

Лемма 4.2. *Пусть X – совершенно нормальное пространство. Если $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где множества A_i имеют тип F_σ, то существуют попрано непересекающиеся множества $B_1, \dots B_n$ имеющие тип F_σ в X такие, что $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$*

и $B_i \subset A_i$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Лемма 4.3. *Пусть X – нормальное пространство и $f\colon X \to \{c_0, \ldots, c_n\}$, где числа $c_0 < \ldots < c_n$ из $\mathbb{R}$. Если множества $E_k = \{x \in X\colon f(x) = c_k\}$ имеют тип F_σ при $k = \overline{0, n}$, то функция $f \in B_1(X)$.*

Доказательство. Пусть $E_k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i^k$, где множества F_i^k замкнуты в X. Положим $L_m^k = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i^k$, $L_m = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_m^k$ и определим функцию $\varphi_m\colon L_m \to \mathbb{R}$ следующим образом: $\varphi_m(x) = c_k$, если $x \in L_m^k$. Заметим, что все множества L_m^k непересекающиеся и замкнуты в X и, следовательно, функция φ_m непрерывная на L_m. Тогда в силу теоремы Титце-Урысона [23] существует непрерывное продолжение $\widetilde{\varphi_m}\colon X \to \mathbb{R}$ такое, что $\widetilde{\varphi_m}(x) = \varphi_m(x)$ для любого $x \in L_m$. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{\varphi_m}(x) = f(x)$ для любого $x \in X$.

□

Для функций первого класса Бэра заданных на метризуемых пространствах хорошо известны теорема Лебега и теорема Бэра. Следующие теоремы являются их аналогами в случае наследственно линделефовых пространств.

Теорема 4.2. *Пусть X – наследственно линделефово пространство и функция $f\colon X \to \mathbb{R}$. Функция $f \in B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ.*

Доказательство. Пусть множество U открыто в $\mathbb{R}$. Тогда $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, где множества F_k замкнуты в $\mathbb{R}$ и $F_k \subset \operatorname{int}_{\mathbb{R}} F_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$. Если функция $f \in B_1(X)$, то существует последовательность непрерывных функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда $f^{-1}(x) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} f_n^{-1}(F_k)$ и, следовательно, множество $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ.

Предположим теперь, что для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ и функция f ограничена сверху и снизу точками

a и b соответственно. Разобьём множество значений на конечное число промежутков точками $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ длины не больше $\dfrac{1}{n}$ и положим $A_0 = \{x \in X : f(x) < c_1\}$, $A_k = \{x \in X : c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}\}$, где $k = \overline{1, n-1}$ и $A_n = \{x \in X : f(x) > c_{n-1}\}$. Заметим, что для любого $k = \overline{0, n}$ множества A_k имеют тип F_σ. Тогда для пространства $X = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ по лемме 4.2 существуют множества $B_0, \ldots, B_n$ типа F_σ такие, что $X = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n} B_k$, $B_k \subset A_k$ для любого $k = \overline{0, n}$.

Введем функцию $f_n : X \to \mathbb{R}$, пологая $f_n(x) = c_k$ при $x \in B_k$ для любого $k = \overline{0, n}$. Согласно лемме 4.3, функция $f_n \in B_1(X)$. Зафиксируем точку $x \in X$. Тогда для некоторого номера k имеем, что $x \in B_k \subset A_k$. Значит $f_n(x) = c_k$, а $c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}$. Отсюда ясно, что $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{n}$.

Таким образом, при $n \to \infty$ функции f_n равномерно стремятся к функции f и, стало быть по лемме 4.1, функция $f(x) \in B_1(X)$.

Пусть теперь для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(U)$ имеет тип F_σ и функция f неограниченная. Рассмотрим функцию $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$. Очевидно, что для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ прообраз $g^{-1}(U)$ есть множество типа F_σ. Функция g ограниченая и, следовательно, по предыдущему рассуждению является функцией первого класса Бэра. Тогда $f(x) = \operatorname{tg}(g(x))$ есть функция первого класса Бэра.

$\square$

Теорема 4.3. *Пусть пространство X наследственно линделефово и функция $f : X \to \mathbb{R}$. Если на всяком непустом замкнутом множестве F имеются точки непрерывности индуцированной функции $f|_F$, то $f \in B_1(X)$.*

Доказательство. В силу теоремы 4.2 достаточно показать, что прообраз открытого множества имеет тип F_σ.

Пусть $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$. Положим $P = \{x \in X \colon f(x) > p\}$, $Q = \{x \in X \colon f(x) < q\}$. Тогда $X = P \cup Q$. Используя метод трансфинитной индукции, определим ω_1-последовательности замкнутых множеств $\{F_\beta \subset X\colon \beta < \omega_1\}$ и открытых множеств $\{U_\beta \subset X\colon \beta < \omega_1\}$ таких, что $F_\alpha \subset F_\beta$ при $\beta < \alpha$ и для любого β либо $U_\beta \cap F_\beta \subset P$, либо $U_\beta \cap F_\beta \subset Q$. Пусть $F_0 = X$ и U_0 – окрестность некоторой точки непрерывности функции f такая, что U_0 принадлежит P или Q. Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ определены семейство открытых множеств $\{U_\beta\}_{\beta<\alpha}$ и убывающее семейство замкнутых множеств $\{F_\beta\}_{\beta<\alpha}$ таких, что если β – непредельный ординал, то $F_\beta = F_{\beta-1} \setminus U_{\beta-1}$, $U_{\beta-1}$ – окрестность точки непрерывности функции $f|_{F_{\beta-1}}$ такая, что для каждого $x \in U_{\beta-1}$ либо $f(x) > p$, либо $f(x) < q$, и если β – предельный ординал, то $F_\beta = \bigcap\limits_{\gamma<\beta} F_\gamma$, U_β – окрестность точки непрерывности функции $f|_{F_\beta}$ такая, что $f(U_{\beta-1} \cap F_{\beta-1}) \subset (p, +\infty)$, либо $f(U_{\beta-1} \cap F_{\beta-1}) \subset (-\infty, q)$. Если α такое, что существует $\alpha - 1$, положим $F_\alpha = X \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_{\alpha-1})$. Заметим, что $F_\alpha = F_{\alpha-1} \setminus U_{\alpha-1}$ и $F_\alpha \subseteq F_{\alpha-1}$. Если α – предельный ординал, то $F_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta$. Пусть U_α – окрестность точки непрерывности функции $f|_{F_\alpha}$ такая, что множество $U_\alpha \cap F_\alpha$ входит в P или Q. Если для люююго $\alpha < \omega_1$ $F_\alpha \neq \emptyset$, то мы получаем убывающую систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, причем $F_{\alpha+1} \neq F_\alpha$ по построению. Но тогда возрастающая система открытых множеств $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ является открытым покрытием подпространства $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} (X \setminus F_\alpha) \subset X$. Но это противоречит наследственной линделефовости пространства X, так как из этого покрытия нельзя счетного подпокрытия (в силу условий $X \setminus F_\alpha \subsetneqq X \setminus F_{\alpha+1}$, $U_\alpha \subsetneqq U_{\alpha+1}$). Следовательно, существует наименьший ординал $\alpha < \omega_1$ такой, что $F_\alpha = \emptyset$. Но тогда $X = \bigsqcup\limits_{\beta<\alpha} (F_\beta \setminus F_{\beta+1})$.Положим $T = \{\beta < \alpha\colon F_\beta \setminus F_{\beta+1} \subset P\}$, $L = \{\beta < \alpha\colon F_\beta \setminus F_{\beta+1} \subset Q\} \setminus T$. Ясно, что $L \cap T = \emptyset$ и $L \cup T = [0, \alpha)$. Тогда $X = A \cup B$, где $A = \bigcup\limits_{\beta\in T} (F_\beta \setminus F_{\beta+1})$, $B = \bigcup\limits_{\beta\in L} (F_\beta \setminus F_{\beta+1})$. Поскольку X – наследственно линделефово пространство для любого $\beta < \alpha$ множества $F_\beta \setminus F_{\beta+1} = F_\beta \cap (X \setminus F_{\beta+1})$ имеют тип F_σ и, значит, множества A и B имеют тип F_σ. Заметим, что $A \subset P$, $B \subset Q$ и $A \cap B = \emptyset$.

Таким образом, для любых чисел $p, q \in \mathbb{R}$, где $p < q$ верно, что $X = A \cap B$,

$A \subset P$, $B \subset Q$, множества A, B имеют тип F_σ. Фиксируем число $p \in \mathbb{R}$ и последовательность $q_1 > q_2 > \dots$ такую, что $p = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$. Для каждой пары p, q_n построим множества P, Q_n, A_n, B_n, как это сделано выше для пары p, q. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ $X = A_n \cup B_n$, где $A_n \cap B_n = \emptyset$, множества A_n и B_n имеют тип F_σ, $A_n \subset P$, $B_n \subset Q_n$, а $Q_n = \{x \in X\colon f(x) < q_n\}$. Положим $R = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $W = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $R \cap W = \emptyset$, $X = R \sqcup W$ и множество R имеет тип F_σ. Покажем, что $P = R$. Пусть $x \in P$. Тогда найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f(x) > q_n$ и $x \neq Q_n$. Значит $x \neq W$. Следовательно $x \in R$. Таким образом, множество P имеет тип F_σ. Аналогичный результат справедлив для множества Q. Отсюда получаем, что множество $f^{-1}(p,q)$ имеет тип F_σ для любых $p < q$.

Следовательно прообраз любого открытого множества имеет тип F_σ.

$\square$

Из предложения 4.2 и теоремы 4.3 получеем следующий критерий для функций первого класса Бэра.

Теорема 4.4. *Пусть пространство X наследственно линделефово и наследственно бэровское. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ принадлежит $B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset X$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.*

Заметим, что пространства S_A и пространства Хаттори $H(A)$ удовлетворяют условию теоремы 4.4 и, следовательно, получен критерий для вещественнозначных функций первого класса Бэра заданных на этих пространствах.

Теорема 4.5. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – произвольное подмножество, $E = S_A$ или $E = H(A)$. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ принадлежит $B_1(E)$ тогда и только тогда, когда для любого непустого замкнутого подмножества $F \subset E$ функция $f|_F$ имеет точку непрерывности.*

Заключение

По итогам проведенного исследования получены следующие результаты:

• установлены свойства модификаций прямой Зоргенфрея и пространств Хаттори;

• получены необходимые и достаточные условия гомеоморфности прямой Зоргенфрея и ее модификаций;

• получено необходимое условие гомеоморфности прямой Зоргенфрея и пространств Хаттори;

• получены необходимые и достаточные условия l-эквивалентности пространств непрерывных функций, заданных на прямой Зоргенфрея и ее модификациях в топологии поточечной сходимости;

• получены характеристики функций первого класса Бэра, заданных на прямой Зоргенфрея, ее модификациях и пространствах Хаттори.

Дальнейшие исследования могут быть посвящены линейной гомеоморфной (равномерной топологической) классификации пространств непрерывных функций, заданных на пространствах Хаттори.

Список условных обозначений

В работе принята двойная нумерация теорем и формул, самостоятельная в каждой главе.

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – пространство вещественных чисел, наделенное стандартной евклидовой топологией τ_E;

$\mathbb{S}$ – прямая Зоргенфрея (или «стрелка»), представляющая собой множество вещественных чисел, топология в котором порождена базой $\{(a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$ и обозначется τ_0.

$\overline{X}$ обозначается замыкание множества $X \subset \mathbb{R}$ в пространстве $(\mathbb{R},\tau_E)$;

$\overline{X}^Y$ обозначается замыкание множества $X \subset Y$ в пространстве (Y,τ);

$\operatorname{int} X$ – внутренность множества X в пространстве $(\mathbb{R},\tau_E)$;

$\operatorname{int}_Y X$ – внутренность множества $X \subset Y$ в пространстве (Y,τ);

$|X|$ – мощность множества X;

Если $\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство попарно непересекающихся множеств, то для объединения этх множеств используется обозначение $\bigsqcup\limits_{i\in I} A_i$ вместо $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

ω – первый бесконечный ординал;

ω_1 – первый несчетный ординал;

id – тождественное отображение;

$f|_A$ – сужение отображения $f: X \to \mathbb{R}$ на множество $A \subset X$;

χ_A – характеристическая функция множества $A \subset X$;

$C_p(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций заданных на вполне регулярном тихоновском пространстве X и наделенное топологией поточечной сходимости. База окрестностей нуля состоит из множеств вида

$$U(0,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon) = \{x \in C_p(X): |x(t_i)| < \varepsilon,\ t_i \in X, i=\overline{1,n}\};$$

$B_1(X)$ – множество всех вещественнозначных функций первого класса

Запись $X \sim Y$ означает, что линейные топологические пространства X и Y линейно гомеоморфны;

$\square$ – конец доказательства.

Список литературы

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 367 с.
2. Александров П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П.С. Александров, П.С. Урысон. – М.: Наука, 1971. – 144 с.
3. Архангельский А.В. Топологические пространства функций / А.В. Архангельский. – М.: Издательство МГУ, 1989. – 222 с.
4. Куратовский К. Топология / К. Куратовский. – М.: МИР, 1966. – Т. 1. – 594 с.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
6. Сухачева Е.С. О гомеоморфизме прямой Зоргенфрея S и ее модификации S_P / Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева // Математические заметки. – 2018. – № 103 (2). – С. 258—272.

   Sukhacheva E.S. On a Homeomorphism between the Sorgenfrey Line S and Its Modification S_p / E.S. Sukhacheva, T.E. Khmyleva // Mathematical Notes. – 2018. – Vol. 103 (2). – P. 259–270.
7. Сухачева Е.С. О модификациях прямой Зоргенфрея / Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механиа. – 2017. – № 46. – С. 36–40.
8. Сухачева Е.С. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея / Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – № 5 (31). – С. 63–68.
9. Сухачева Е.С. О функциях первого класса Бэра на некоторых классах неметризуемых пространств / Е.С. Сухачева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. - № 5 (53). – С. 63–68.

10. Сухачева Е.С. Линейно упорядоченные пространства, гомеоморфные прямой Зоргенфрея / Е.С. Сухачева // Научная конференция механико-математического факультета ТГУ: Сборник конференции. Томск, 24–30 апреля 2014 г. – Томск, 2014. – С. 70–71.
11. Сухачева Е.С. О гомеоморфизмах некоторых модификаций прямой Зоргенфрея / Е.С. Сухачева // Актуальные проблемы современной механики: Материалы IV Международной молодежной научной конференции. Томск, 17–19 ноября 2014 г. – Томск, 2014. – С. 111-112.
12. Сухачева Е.С. О гомеоморфизмах некоторых модификаций прямой Зоргенфрея / Е.С. Сухачева // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015. Математика. Новосибирск, 11–17 апреля 2015 г. – Новосибирск, 2015. – С. 59.
13. Сухачева Е.С. Гомеоморфность подмножеств «двойной стрелки» / Е.С. Сухачева // Все грани математики и механики: сборник тезисов Молодежной научной конференции Томск, 24–30 апреля 2015 г. – Томск, 2015. – С. 92.
14. Сухачева Е.С. Гомеоморфность подмножеств «двойной стрелки» / Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева // Все грани математики и механики: сборник статей Молодежной научной конференции – 2015. – С. 180–182.
15. Сухачева Е.С. Гомеоморфность прямой Зоргенфрея и ее модификаций / Е.С. Сухачева // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016: Математика. Новосибирск, 16–20 апреля 2016. – Новосибирск, 2016. – С. 36.
16. Сухачева Е.С. О гомеоморфизме прямой Зоргенфрея и ее модификации S_P. / Е.С. Сухачева, Т.Е. Хмылева // Александровские чтения-2016: тезисы докладов Международной научной конференции. Москва, 22–26 мая 2016 г. – Москва, 2016. – С. 28–29.
17. Сухачева Е.С. Критерий гомеомрфности прямой Зоргенфрея и ее модификации S_A / Е.С. Сухачева // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2017: Математика. Новосибирск, 17–20

апреля 2017 г. – Новосибирск, 2017. – С. 46.

18. Сухачева Е.С. О плотности точек непрерывности функций первого класса Бэра. / Е.С. Сухачева // Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2018: Математика. Новосибирск, 22–27 апреля 2018 г. – Новосибирск, 2018. – С. 20.
19. Сухачева Е.С. О функциях первого класса Бэра на стрелке и ее модификациях / Е.С. Сухачева // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 149-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета: сборник тезисов. Томск, 02–04 октября 2018 г. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2018. – С. 92–93.
20. Сухачева Е.С. Компактификации прямой Зоргенфрея / Е.С. Сухачева, А.А. Федоров // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 149-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета: сборник тезисов. Томск, 02–04 октября 2018 г. – Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2018. – С. 93–94.
21. Хмылева Т.Е. О гомеоморфизме прямой Зоргефрея и ее модификации $S_{\mathbb{Q}}$ / Т.Е. Хмылева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механиа. – 2016. – № 39. – С. 53–56.
22. Щепин Е.В. О топологических произведениях, группах и новом классе пространств, более общих, чем метрические / Е.В. Щепин //ДАН СССР. – 1976. – Т. 226, № 3. – С. 527–529.
23. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
24. Bennett H. Generalized ordered spaces with capacities / H. Bennett, D. Lutzer // Pacific Journal of Mathematics. – 1984. –Vol. 112 (1). – P. 11–19.
25. Burke D.K. Subspaces of the Sorgenfrey line / D.K. Burke, J.T. Moore // Topology and its applications. – 1988. – Vol. 90. – P. 57–68.
26. Bouziad A. On Hattori spaces / A. Bouziad, E. Sukhacheva // Commentationes

Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2017. – N 2. – P. 213-223. – DOI 10.14712/1213-7243.2015.199

27. Chatyrko V.A. A poset of topologies on the set of real numbers / V.A. Chatyrko, Y. Hattori // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2013. – Vol. 54 (2). – P. 189–196.
28. Van Douwen E.K. Closed copies of the rationals / E.K. Van Douwen // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1987. – Vol. 28 (1). – P. 137–139.
29. Van Douwen E.K. Retracts of the Sorgenfrey line / E.K. Van Douwen // Compositio Mathematica. – 1979. – Vol. 38 (2). – P. 155–161.
30. Emeryk A. The Sorgenfrey line has no connected compactification / A. Emeryk, W. Kulpa // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1977. – Vol.18 (3). – P. 483–487.
31. Faber M.J. Metrizability in General Ordered Spaces / M.J. Faber // Mathematical Centre tracts. – Amsterdam : Mathematisch Centrum, 1974. – Vol. 53. – 120 p.
32. Hattori Y. Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces / Y. Hattori // Memoirs of the Faculty of Science and Engineering Shimane University. Series B. Mathematical Science. – 2010. – Vol. 43. – P. 13–26.
33. Heath R.W. A property of the Sorgnfrey line / R.W. Heath, E.A. Michael // Compositio Mathematica. – 1971. – Vol. 23. – P. 185–188.
34. Khmyleva T. On space of continupus functions given on certain modifications of linearly ordered spaces / T. Khmyleva, E. Sukhaheva // International Conference «Topological Algebra and Set-Theoretic Topology» dedicated to Professor A.V. Arhanel'skii's 80th birthday Moscow, August 23–28, 2018. – Moscow, 2018. – P. 546–549.
35. Kulesza J. Results on spaces between the Sorgenfrey and usual topologies on R / J. Kulesza // Topology and its Applications. – 2017. – Vol. 231 (1). –

P. 266–275.

36. Van Mill J. Sierpinski's technique and subsets of R / J. Van Mill // Topology and its Applications. – 1992. – Vol. 44 (1-3). – P. 241–261.
37. Van Mill J. The infinite-dimentional topology of function spaces / J. Van Mill. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – 630 p.
38. Mukhamadiev F.G. Cardinal properties of Hattori spaces on the real lines and their superextensions / F.G. Mukhamadiev, N.K. Mamadaliev // Mathematica Aeterna. – 2014. – Vol. 4, N. 5. – P. 465–475.
39. Neubrunnova A. On quasicontinuous and cliquish functions / A. Neubrunnova // Casopis pro pestovani matematiky. – 1974. – Vol. 99. – N. 2. – P. 109–114.
40. Osipov A.V. On sequential separability of functional spaces / A.V. Osipov, E.G. Pytkeev // Topology and its Applications. – 2017. – Vol. 221. – P. 270–274.
41. Pelant J. On compactifications of GO-spaces / J. Pelant // Topology and order structures, Amsterdam. – Pt. 2. – 1981. – P. 47–51.
42. Sorgenfrey R.H. On the topological product of paracompact spaces / R.H. Sorgenfrey // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1947. – Vol. 53. – P. 631–632.
43. Sukhacheva E. On Hattori spaces. / E. Sukhacheva // TOPOSYM 2016: book of Abstracts of the 12th Symposium on General Topology and ils Relations to Modern Analysis and Algebra. Prague, Czech Republic, July 25–29, 2016. – Prague, 2016. – P. 177.
44. Tkachenko M.G. Chains and cardinals / M.G. Tkachenko // Doklady akademii nauk SSSR. – 1978. – Vol. 239 (3). – P. 546–549.
45. Tkachuk V.V. A C_p–Theory problems book. Topological and functions space / V.V. Tkachuk. – New York: Springer, 2011. – P. 485.