Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Сорокин Константин Сергеевич

Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

профессор Пётр Андреевич Крылов

Томск – 2014

Оглавление

Список обозначений

В данной работе под словом «группа» понимается абелева группа. Обозначаются группы большими латинскими буквами A, B, ...

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, расположенных в порядке возрастания;

$\mathbb{Q}$ – полная рациональная группа;

$\mathbb{Z}$ – группа целых чисел;

$\mathbb{Z}(n)$ — циклическая группа порядка n;

$\bigoplus$ – прямая сумма;

$\prod$ – прямое произведение;

$\mathrm{Hom}(A, B)$ – группа гомоморфизмов из группы A в группу B;

$E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A;

$J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R;

$\mathrm{Im}(f)$ — образ гомоморфизма f;

$\mathrm{Ker}(f)$ — ядро гомоморфизма f;

$A\,/\,B$ – факторгруппа группы A по подгруппе B;

$\langle M \rangle$ — подгруппа, порождённая подмножеством M;

$A[n]$ — подгруппа $\{a \in A \mid na = 0\}$ группы A;

A_p — p–компонента группы A;

$h(a)$ — высота элемента a;

$o(a)$ — порядок элемента a;

p — простое число;

$\mathbb{Q}$ — группа или поле всех рациональных чисел;

$\mathbb{Q}_p$ — группа или кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с простым числом p;

$\mathbb{Q}_\pi$ — группа или кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с каждым p из π, где π — некоторое подмножество множества всех простых чисел;

$t(A)$ — тип однородной абелевой группы без кручения A.

Введение

Актуальность темы. Пусть R — кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется чистым, если его можно представить в виде $r = u+e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется чистым, если всякий его элемент является чистым.

Понятие чистого кольца было предложено Николсоном в 1977 году как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала [23]. То есть каждое чистое кольцо является заменяемым кольцом. Кроме того, Николсоном было доказано [23], что кольцо с центральными идемпотентами является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо. В то же время имеется пример регулярного кольца, которое не является чистым [20]. Согласно [23], регулярные кольца являются заменяемыми кольцами, следовательно, класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

В 1936 году фон Нейман предложил определение регулярного элемента: элемент r кольца R называется регулярным, если найдется такой элемент $x \in R$, что $r = rxr$; кольцо R называется регулярным (по фон Нейману), если каждый его элемент r — регулярный. Элемент r кольца R называется обратимо-регулярным, если найдется такой элемент $v \in U(R)$, что $r = rvr$, или, что эквивалентно, $r = u \cdot e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется обратимо-регулярным, если всякий его элемент является обратимо-регулярным. Таким образом, чистые кольца являются аддитивным аналогом обратимо-регулярных колец.

Доказано, что полусовершенные и обратимо-регулярные кольца являются чистыми [10] , [9]. Кроме того, если кольцо не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, то свойства кольца быть заменяемым, чистым и полусовершенным совпадают [9].

Понятие чистоты также было рассмотрено применительно к кольцам без единицы, в том числе была показана справедливость приведённого выше результата: кольцо с центральными идемпотентами является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо [26] (согласно определению Ара [6]).

Ряд авторов продолжил изучение чистых колец, наделённых дополнительными свойствами. Например, рассмотрены примеры чистых колец, в которых разложение каждого элемента кольца в виде суммы идемпотента и обратимого элемента определены единственным образом. Удалось показать связь колец, удовлетворяющих данному свойству, с булевыми кольцами [27].

Отдельным направлением в изучении чистоты колец стали строго чистые кольца: в этом случае каждый элемент кольца должен быть представим в виде суммы идемпотентного и обратимого элементов, которые коммутируют между собой [12], [24].

Большое количество работ посвящено изучению чистоты и строгой чистоты треугольных матриц [14], [7], а также произвольных матриц над различными кольцами [29]: коммутативными [15], [13], [8], локальными [21], [30].

В случае, когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R. В частности, если f — чистый элемент кольца эндоморфизмов модуля M, это означает, что существует такой идемпотентный эндоморфизм e модуля M, что f совпадает на $\operatorname{Ker}(e)$ с некоторым автоморфизмом модуля M. Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов. Например, было доказано, что является чистым кольцо линейных операторов векторного пространства над полем произвольной размерности [28]. Впоследствии была доказана справедливость данного результата для векторного пространства над телом [25]. Кроме того, доказана чистота колец эндоморфизмов непрерывного модуля [11], проективного модуля над правым совершенным кольцом [25].

Следует отметить, что в теории абелевых групп большой интерес вызывает вопрос о связи элементов кольца эндоморфизмов абелевых групп и его обратимых элементов - автоморфизмов [17], в том числе те случаи, когда эндоморфизмы представимы в виде суммы автоморфизмов [22]. В связи с этим появляется дополнительный интерес к изучению свойства чистоты таких колец.

В своей работе [18] Голдсмит и Вамош рассмотрели вопросы чистоты колец эндоморфизмов периодических абелевых групп. Было показано, что кольцо эндоморфизмов тотально проективной периодической группы является чистым тогда и только тогда, когда эта группа ограничена.

Отметим, что чистые кольца также привлекают внимание российских учёных: данному классу колец посвящён параграф в монографии Туганбаева А.А. [4].

Таким образом, изучение свойства чистоты колец эндоморфизмов различных модулей, в том числе абелевых групп, является актуальной задачей, привлекающей внимание специалистов в области теории колец, модулей и абелевых групп.

Цель работы. Целью диссертационной работы является изучение вопросов чистоты колец эндоморфизмов различных классов абелевых групп: вполне разложимых групп (группы без кручения), прямых сумм циклических групп (периодические группы), SP-групп (смешанные группы).

Общая методика исследования. В диссертации используются методы и приёмы теории абелевых групп, колец и модулей.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Ниже перечислены основные результаты.

- Дано полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов.
- Найдены достаточные условия чистоты эндоморфизмов прямых сумм циклических групп.
- Доказана чистота колец эндоморфизмов самомалых SP-групп конечного ранга без кручения.
- Найдены достаточные условия, при которых чистота кольца эндоморфизмов SP–группы конечного ранга влечет самомалость самой группы.
- Доказана чистота колец эндоморфизмов SP–групп ранга 1 и 2 с циклическими p–компонентами без бесконечных периодических прямых слагаемых.
- Найдены достаточные условия чистоты эндоморфизмов SP–групп

конечного ранга с циклическими p-компонентами.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории абелевых групп и колец, а также при чтении спецкурсов для бакалавров, магистрантов и аспирантов.

Апробация результатов. Результаты диссертационной работы докладывались на Международных молодежных научных форумах «Ломоносов-2011», «Ломоносов-2013» (Москва, 2011. 2013), на всероссийских симпозиумах «Абелевы группы и модули» (Бийск, 2010. 2012), на Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 135–летию Томского государственного университета и 65–летию Механико–математического факультета (Томск, 2013).
Основные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета и дважды — на семинаре кафедры алгебры Московского педагогического государственного университета (2011, 2013). По теме диссертации опубликовано 9 работ, три из них — в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, двух глав и списка литературы. Работа изложена на 110 страницах. Библиография содержит 30 наименований.

Содержание работы. Все рассматриваемые в работе группы являются абелевыми.

В первой главе диссертации рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов для некоторых классов абелевых групп: вполне разложимых абелевых групп (группы без кручения) и прямых сумм циклических групп (периодические группы).

В первом параграфе данной главы вводится ключевое понятия чистоты кольца, излагаются общие результаты, дающие необходимые и достаточные условия чистоты кольца эндоморфизмов абелевой группы. Ниже приведено определение чистого кольца.

Пусть R — кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется чистым, если его можно представить в виде $r = u + e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется чистым, если всякий его элемент является чистым.

Во втором параграфе приводятся достаточные условия чистоты эндоморфизмов прямых сумм циклических групп. Основным результатом второго параграфа является следующая теорема.

Теорема 1.13 *Пусть* $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ *, где* $B_n = \bigoplus_{i \in I_n} < a_n^i >$ *,* $< a_n^i > \cong$

$\mathbb{Z}(p^n)$, $f \in E(A)$. *Если* $L = \bigoplus\limits_{j \in J} B_j$, *где* $J \subseteq \mathbb{N}$, *причём* $f(A) \subseteq L$ *и* $f|_L$ — *чистый элемент кольца* $E(L)$, *то* f — *чистый элемент в* $E(A)$.

В третьем параграфе даётся полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов. Основным результатом третьей главы является следующая теорема.

Теорема 1.16 *Если* B *— вполне разложимая группа с редуцированной частью* A, *то кольцо эндоморфизмов группы* B *— чистое тогда и только тогда, когда*

$$A = \bigoplus_{p \in \Pi} (\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i{}^p),$$

где Π *— некоторое множество простых чисел,* $A_i{}^p \cong \mathbb{Q}_p$ $(p \in \Pi, i = 1, ..., n_p, n_p \in \mathbb{N})$.

Во второй главе изучаются SP–группы с чистыми кольцами эндоморфизмов. Данные группы были введены в работах А. А. Фомина [16] и П. А. Крылова [2]. В начале главы приводится определение SP–группы. Напомним опеределение SP–группы.

Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p–компонент называется *SP–группой*, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \longrightarrow \prod\limits_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \longrightarrow \prod\limits_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел $\mathbb{P}$, относящихся к A, то есть таких, что $A_p \neq 0$.

В первом параграфе приводятся результаты, описывающие самомалые SP–группы с чистыми кольцами эндоморфизмов. Ниже приведены основные результаты данного параграфа.

Теорема 2.2 *Пусть* A *— самомалая* SP*–группа конечного ранга. Тогда кольцо* R *является чистым.*

Теорема 2.5 *Пусть* A *—* SP*–группа конечного ранга, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и* $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ *для всякого* $p \in \mathbb{P}$*. Если при этом кольцо* R *является чистым, то* A *— самомалая группа.*

Второй параграф посвящён исследованию строения колец эндоморфизмов SP-групп ранга 1 с циклическими p-компонентами: доказана их чистота, найдено описание радикала Джекобсона колец эндоморфизмов данных групп. Основные результаты данного параграфа приведены в следующих теоремах.

Теорема 2.7 *Для любого эндоморфизма* f SP*–группы группы* A *ранга 1 с циклическими* p*–компонентами найдётся такое конечное множество* $\Omega \subset \mathbb{P}$*, что справедливо одно из условий:*

- f *— автоморфизм группы* C *(если* $fA \subseteq T(A)$*),*
- $1 - f$ *— автоморфизм группы* C *(если* $fA \nsubseteq T(A)$*),*

где C *— дополнительное прямое слагаемое к* $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$*.*

Теорема 2.9 $J(E(A)) = H(A)$.

В теореме $H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid \alpha\,|_{A[p]} \in H(A_p)$ для каждого $p \in \mathbb{P}\}$ — аналог идеала Пирса для SP–групп, предложенный Крыловым П.А. (см. [3]).

Третий параграф содержит результаты, дающие достаточные условия чистоты эндоморфизмов SP–групп конечного ранга с циклическими p-компонентами, а также доказательство чистоты колец эндоморфизмов SP–групп ранга 2 с циклическими p–компонентами. Ниже приведены основные результаты данного раздела.

Теорема 2.11 *Пусть A — SP–группа конечного ранга с циклическими p-компонентами. Для любого эндоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(A, T(A))$ найдётся такое конечное множество $\Omega \subset \mathbb{P}$, что $1 - f$ — автоморфизм группы C, где C — дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus\limits_{p \in \Omega} A_p$.*

Теорема 2.13 *Кольцо эндоморфизмов SP–группы ранга 2 с циклическими p-компонентами, не имеющей бесконечных периодических прямых слагаемых, является чистым.*

Автор выражает искреннюю признательность научному руководителю профессору Петру Андреевичу Крылову за неоценимый вклад в развитие данной работы: помощь в постановке задачи, внимание к научной работе, помощь в оформлении статей и данной диссертации.

Глава 1

Некоторые классы абелевых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов

В данной главе вводится понятие чистого кольца, приводятся примеры чистых колец, рассматриваются основные результаты, позволяющие свести изучение чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп к редуцировнному случаю. Далее рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов прямых сумм циклических p−групп и вполне разложимых групп без кручения, приводятся необходимые и достаточные условия чистоты эндоморфизмов перечисленных групп.

1.1 Понятие чистого кольца, примеры и общие факты

Определение 1.1. Элемент кольца называется *чистым*[1], если он является суммой обратимого и идемпотентного элементов этого кольца.

Определение 1.2. Кольцо называется *чистым*, если каждый его элемент является чистым элементом этого кольца.

Следующая лемма описывает связь локальных и чистых колец.

Лемма 1.1. *Пусть R — неразложимое кольцо, тогда R — локальное тогда и только тогда, когда R — чистое.*

Доказательство. Необходимость. Пусть R — локальное кольцо, тогда для каждого $r \in R$ либо r, либо $1-r$ обратим. Если обратим r, то $r = r + 0$. Если обратим $1-r$, то $r = 1 + (r-1)$. По определению 1.1 R — чистое кольцо.

Достаточность. Пусть R — чистое, тогда для каждого $r \in R$ $r = e+u$, где e — идемпотент, u — обратимый. Так как R — неразложимое кольцо, то $e = 0$, либо $e = 1$. Тогда для всякого $r \in R$ либо r обратим и $r = 0 + r$, либо $1–r$ обратим и $r = 1 + (r-1)$. Следовательно, R — локальное кольцо. $\square$

[1]в англоязычной терминологии *clean*

Рассмотрим далее один из примеров чистых колец - локальные подкольца поля рациональных чисел.

Теорема 1.2. *Подкольцо* $R \subsetneqq \mathbb{Q}$ *— локальное кольцо тогда и только тогда, когда* $R = \mathbb{Q}_p$ *для некоторого простого числа* p*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $R = \mathbb{Q}_\pi$, где $\pi = \{p_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество простых чисел, упорядоченных по возрастанию, $I \subseteq \mathbb{N}$. Известно, что R — локальное кольцо тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in R$ либо a, либо $1-a$ обратим. Так как $a \in R$, то найдутся такие $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, что $a = \frac{n}{m}$, $(m, p_i) = 1$, для всякого $i \in I$. Элемент a обратим тогда и только тогда, когда $(n, p_i) = 1$ для всякого $i \in I$.

Предположим, что существуют по крайней мере два простых числа p_1 и p_2, отличных друг от друга и принадлежащих π. Рассмотрим элемент $a = \frac{p_1}{p_1 - p_2}$. Покажем, что $a \in R$, то есть $(p_1 - p_2, p_i) = 1$ для всякого $i \in I$.

Действительно, если бы $p_1 - p_2$ делилось на p_1, либо на p_2, то p_1 и p_2 не были бы взаимно просты. Поскольку $|p_1 - p_2| < p_2 < p_i$ для всякого $i > 2$, то $(p_1 - p_2, p_i) = 1$ для всякого $i \in I$. Следовательно, $a \in R$.

Так как $p_1 \in \pi$, то a не обратим. Элемент

$$1 - a = 1 - \frac{p_1}{p_1 - p_2} = -\frac{p_2}{p_1 - p_2}$$

так же не обратим, поскольку $p_2 \in \pi$.

Таким образом, в случае, когда множество π содержит более одного простого числа, кольцо $R = \mathbb{Q}_\pi$ не является локальным. Значит, $R = \mathbb{Q}_p$.

Достаточность. Пусть $R = \mathbb{Q}_p$ для некоторого простого числа p. Докажем, что R — локальное кольцо. Для этого достаточно показать, что для любого элемента $a \in R$ либо a, либо $1-a$ обратим. Пусть $a \in R$ и $a = \frac{n}{m}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $(m,p) = 1$.

Предположим, что элемент a не обратим, тогда $n \vdots p$ и $n = p^k \cdot r$, $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $(r,p) = 1$. Имеем

$$1 - a = 1 - \tfrac{n}{m} = \tfrac{m-n}{m} = \tfrac{m-p^k \cdot r}{m}$$

и $(m - p^k \cdot r, p) = 1$, так как в противном случае $(m,p) \neq 1$. Таким образом, R — локальное кольцо. □

Следствие 1.3. *Подкольцо $R \subsetneq \mathbb{Q}$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $R = \mathbb{Q}_p$ для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 1.1 и теоремы 1.2. □

Данный результат будет полезен при изучении вполне разложимых групп без кручения в третьем параграфе данной главы.

Определение 1.3 ([11])**.** Модуль называется непрерывным, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1. каждый подмодуль модуля — существенный подмодуль в некотором прямом слагаемом модуля;

2. каждый подмодуль модуля, изоморфный прямому слагаемому модуля, сам является прямым слагаемым модуля.

Лемма 1.4. *Делимые абелевы группы являются непрерывными $\mathbb{Z}$–модулями.*

Доказательство. Пусть D — делимая группа, B — её подгруппа, тогда D содержит делимую оболочку группы B, обозначим её через H. Так как H — делимая группа, то подгруппа H –– прямое слагаемое в D. Так как H — делимая оболочка группы B, то B — существенная подгруппа в H (см. [5]). Таким образом, первое условие из определения непрерывного модуля (определение 1.3) выполнено.

Пусть B — подгруппа группы D, $D = A \bigoplus C$ и $B \cong A$. Так как A — прямое слагаемое делимой группы D, то A — делимая группа. Как эпиморфный образ делимой группы B — делимая группа. Получаем, что B — прямое слагаемое группы D (см. [5]). Таким образом, второе условие из определения непрерывного модуля выполнено. Значит, D — непрерывный $\mathbb{Z}$–модуль. □

Следствие 1.5. *Кольцо эндоморфизмов делимой группы является чи-*

стым.

Доказательство. Согласно [11] кольцо эндоморфизмов непрерывного модуля является чистым. Так как абелевы группы являются $\mathbb{Z}$–модулями, то этот результат для них также справедлив. $\square$

Заметим, что с прямым доказательством данного результата (без обращения к результатам [11]) можно ознакомиться в статье [18].

Следующий результат позволяет свести рассмотрение чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп к редуцированному случаю.

Теорема 1.6. *Группа имеет чистое кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда её редуцированная часть имеет чистое кольцо эндоморфизмов.*

Доказательство. Согласно [5] всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы C. Тогда по [1]

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(D) & \mathrm{Hom}(C,D) \\ \mathrm{Hom}(D,C) & E(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(D) & \mathrm{Hom}(C,D) \\ 0 & E(C) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{Hom}(D,C) = 0$, так как для любого $\alpha \in \mathrm{Hom}(D,C)$ образ $\mathrm{Im}(\alpha)$ — делимая подгруппа в C. Поскольку C — редуцированная группа, то $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$, т.е. $\alpha = 0$. Применяя [19], получаем, что $E(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $E(D)$ и $E(C)$ — чистые кольца.

Кольцо $E(D)$ является чистым. Тогда $E(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $E(C)$ — чистое. $\square$

Лемма 1.7. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ *— прямая сумма вполне характеристических подгрупп. Кольцо* $E(A)$ *— чистое тогда и только тогда, когда кольцо* $E(A_i)$ *— чистое для каждого* $i \in I$.

Доказательство. Поскольку подгруппы A_i — вполне характеристические, то $E(A) \cong \prod\limits_{i \in I} E(A_i)$. Применив [19], мы получим, что кольцо $E(A)$ — чистое тогда и только тогда, когда кольца $E(A_i)$ — чистые ($i \in I$). $\square$

Ниже представлены результаты, дающие достаточные условия чистоты эндоморфизмов абелевых групп. Кроме того, в предложении 1.9 описывается связь свойства чистоты и радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов.

Предложение 1.8. *Пусть* A *— группа,* $f \in E(A)$ *и существует такое* $k \in \mathbb{N}$, *что* f^k *— чистый элемент кольца* $E(A)$, *причём* $f^k = u+e$, *где* e *— идемпотент а* u *— обратимый элемент* $E(A)$. *Если* $\mathrm{Ker}(e)$ *и* $\mathrm{Im}(e)$ *—* f*- и* u*-инвариантны, то* f *— чистый элемент в* $E(A)$.

Доказательство. Поскольку u — автоморфизм группы A, а $\mathrm{Ker}(e)$ и $\mathrm{Im}(e)$ — f- и u-инвариантны, то $u|_{\mathrm{Ker}(e)}$ — автоморфизм $\mathrm{Ker}(e)$, а $u|_{\mathrm{Im}(e)}$ — автоморфизм $\mathrm{Im}(e)$. Обозначим $\mathrm{Ker}(e)$ через B, а $\mathrm{Im}(e)$ через C. Получим:

$f^k|_B = (u+e)|_B = u|_B$ — автоморфизм B,

$(f-1)(f^k + f^{k-1} + ... + f + 1)|_C = (f^k - 1)|_C = (f^k - e)|_C = u|_C$ — автоморфизм C.

Так как подгруппа B — f^{k-1}–инвариантна, а C — $(f^k+f^{k-1}+...+f+1)$–инвариантна, то $f^{k-1}|_B$ — автоморфизм B, а $(f^k + f^{k-1} + ... + f + 1)|_C$ — автоморфизм C. Имеем,

$f|_B = (f^{k-1})^{-1}u|_B$ — автоморфизм B,

$(f-1)|_C = (f^k + f^{k-1} + ... + f + 1)^{-1}u|_C$ — автоморфизм C.

Зададим отображение $u' : A \to A$ следующим образом:

$u'(x) = (f^{k-1})^{-1}u(x)$ для любого $x \in B$ и

$u'(y) = (f^k + f^{k-1} + ... + f + 1)^{-1}u(y)$ для любого $y \in C$.

По построению u' — автоморфизм группы A и $f = u' + e$. Следовательно, f — чистый элемент $E(A)$. $\square$

Предложение 1.9. *Пусть A — группа, $f \in E(A)$ и существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $f^k \in J(E(A))$. Тогда f — чистый элемент кольца $E(A)$.*

Доказательство. Так как $f^k \in J(E(A))$, то $1 - f^k$ — обратимый элемент кольца $E(A)$. Следовательно, $f^k = 1 + (-(1-f^k))$ — чистый элемент в $E(A)$. Условия предложения 1.8 выполнены, поскольку в данном случае $e = 1$ и $\mathrm{Ker}(e) = 0$, а $\mathrm{Im}(e) = A$. Значит верно и его заключение и f — чистый элемент $E(A)$. $\square$

1.2 Прямые суммы циклических p–групп с чистыми кольцами эндоморфизмов

После рассмотрения некоторых общих результатов переходим непосредственно к изучению чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп, а именно - прямых сумм циклических p–групп. Далее будут приведены некоторые вспомогательные результаты, рассмотрены вопросы чистоты ограниченных групп [18], а также основной результат данного параграфа — теорема 1.13, дающая достаточные условия чистоты эндоморфизмов прямых сумм циклических p–групп.

Предложение 1.10. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} A_p$ *— прямая сумма* p*–групп, где* Π *— некоторое множество простых чисел. Кольцо* $E(A)$ *— чистое тогда и только тогда, когда кольцо* $E(A_p)$ *— чистое для всякого* $p \in \Pi$*.*

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 1.7. □

Теорема 1.11 ([18])**.** *Пусть* A *— ограниченная* p*–группа, тогда* $E(A)$ *— чистое кольцо.*

Доказательство. Поскольку A — ограниченная p–группа, то её можно представить в виде $A = \bigoplus\limits_{n=1}^{l} B_n$, где $B_n = \bigoplus\limits_{i\in I_n} < a_n^i >$, $< a_n^i > \cong \mathbb{Z}(p^n)$. Обозначим кольцо $E(A)$ через R. Известно [1, следствие 20.5], что $J(R) = H(A)$, где

$$H(A) = \{\alpha \in R \mid x \in A[p]\,,\ h(x) < \infty \Longrightarrow h(x) < h(\alpha x)\}\,.$$

Поэтому идеал $J(R)$ нильпотентен и, следовательно, идемпотенты кольца R поднимаются по модулю $J(R)$. Кроме того, имеется описание факторкольца $R/J(R)$ [1, следствие 20.14]. Именно, $R/J(R) \cong \prod\limits_{n=0}^{l-1} L_n$, где L_n— кольцо линейных операторов $\mathbb{Z}_p$–пространства размерности $f_n(A)$, $f_n(A)$— n–ый инвариант Ульма-Капланского группы A. Согласно [25] L_n— чистое кольцо ($n = 0, ..., l-1$). Применив [19, предложение 7], мы получим, что $R/J(R) \cong \prod\limits_{n=0}^{l-1} L_n$— чистое кольцо. Следовательно, в соответствии с [19, предложение 6], $E(A) = R$— чистое кольцо. □

Следствие 1.12. *Кольцо эндоморфизмов ограниченной группы чистое.*

Доказательство. Ограниченную группу можно представить в виде прямой суммы ограниченных p–групп. Согласно теореме 1.11 кольцо эндоморфизмов ограниченной p–группы чистое. Применяя теорему 1.10, получим, что кольцо эндоморфизмов ограниченной группы чистое. □

Теорема 1.13. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, *где* $B_n = \bigoplus\limits_{i \in I_n} < a_n^i >$, $< a_n^i > \cong \mathbb{Z}(p^n)$, $f \in E(A)$. *Если* $L = \bigoplus\limits_{j \in J} B_j$, *где* $J \subseteq \mathbb{N}$, *причём* $f(A) \subseteq L$ *и* $f|_L$ *— чистый элемент кольца* $E(L)$, *то* f *— чистый элемент в* $E(A)$.

Доказательство. Обозначим через S множество всех пар (W, g), где $W = \bigoplus\limits_{n \in \Lambda} (\bigoplus\limits_{i \in M_n} < a_n^i >)$, $J \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{N}$, $M_n \subseteq I_n, g^2 = g \in E(W)$, $f|_W - g$ — автоморфизм $E(W)$. Поскольку $f|_L$ — чистый элемент кольца $E(L)$, то существует такой $g \in E(L)$, что $(L, g) \in S$. Зададим на множестве S частичный порядок: $(W_1, g_1) \leq (W_2, g_2)$, если $W_1 \subseteq W_2$ и $g_2 |_{W_1} = g_1$.

Предположим, что $\{(W_\alpha = \bigoplus\limits_{n \in \Lambda_\alpha} (\bigoplus\limits_{i \in M_n^\alpha} < a_n^i >), g_\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ — линейно упорядоченное подмножество множества S. Положим $\Lambda^0 = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \Lambda_\alpha$ и $W = \bigoplus\limits_{n \in \Lambda^0} (\bigoplus\limits_{i \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} M_n^\alpha} < a_n^i >)$. По построению $W_\alpha \subseteq W$ ($\alpha \in \Omega$). Определим $g \in \mathrm{End}(W)$:

$$g(x) = g_\alpha(x) \ (\alpha \in \Omega, \ x \in W_\alpha).$$

Тогда $(W, g) \in S$ и $(W_\alpha, g_\alpha) \leq (W, g)$ для всех $\alpha \in \Omega$. Условия леммы Цорна выполнены, значит существует максимальный элемент (U, h) множества S. Для того, чтобы доказать теорему, осталось проверить, что A и U совпадают.

Можно записать $A = U \bigoplus D$, где D — подгруппа группы A. Предположим, что $A \neq U$. Тогда $U = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, $J \subseteq \Lambda \subsetneqq \mathbb{N}$. Отсюда $D = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathbb{N} \setminus \Lambda} B_\lambda$. Обозначим через d один из ненулевых образующих $a_n^i \in D$, причём $f(< d >) \subseteq U$. Считаем, что h действует на слагаемом $< d >$ тождественно. Имеем, $h^2 = h \in \mathrm{End}(U \bigoplus < d >)$. Покажем, что $f|_{U \bigoplus < d >} - h$ — автоморфизм группы $U \bigoplus < d >$. Действительно, для любого элемента $u + kd \in U \bigoplus < d >$

$$(f - h)([(f - h)|_U]^{-1}(u + f(kd)) - kd) = u + kd.$$

Если $u_1 + k_1 d, u_2 + k_2 d \in U \bigoplus < d >$, причём $(f - h)((u_1 + k_1 d) - (u_2 +$

$k_2d)) = 0$, то

$$(f-h)(u_1-u_2)+f(k_1d-k_2d)=h(k_1d-k_2d)=(k_1d-k_2d).$$

Поскольку левая часть последнего равенства принадлежит U, а правая — $< d >$, то $k_1d-k_2d=0$. Следовательно, $f(k_1d-k_2d)=0$, а, значит, и $(f-h)(u_1-u_2)=0$. Поскольку $(f-h)|_U$ — автоморфизм, то $u_1-u_2=0$.

Тем самым $(U\bigoplus < d >, h)\in S$, что противоречит максимальности элемента (U,h). $\square$

Следствие 1.14. *Пусть* $A=\bigoplus\limits_{p\in\Pi}(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}B_{n,p})$, *где* Π *— некоторое множество простых чисел,* $B_{n,p}=\bigoplus\limits_{i\in I_{n,p}} < a^i_{n,p} >$, $< a^i_{n,p} > \cong \mathbb{Z}(p^n)$, $f\in \mathrm{End}(A)$. *Если существуют такие* $s_p\in\mathbb{N}$, *что* $f(A)\subseteq\bigoplus\limits_{p\in\Pi}(\bigoplus\limits_{n=1}^{s_p}B_{n,p})$, *то* f *— чистый элемент* $\mathrm{End}(A)$.

Доказательство. Обозначим группу $\bigoplus\limits_{p\in\Pi}(\bigoplus\limits_{n=1}^{s_p}B_{n,p})$ через L и p–компоненту группы A через A_p. Поскольку каждая p–компонента группы L ограничена, то согласно теоремам 1.11 и 1.13 $f|_{A_p}$ — чистый элемент кольца $\mathrm{End}(A_p)$ ($p\in\Pi$). Применяя теорему 1.10 получим, что f — чистый элемент $\mathrm{End}(A)$. $\square$

1.3 Вполне разложимые группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

В данном параграфе продолжается изучение свойств чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп на примере вполне разложимых групп без кручения. Напомним определение вполне разложимой группы.

Определение 1.4. Абелева группа без кручения называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1.

Связь между кольцами эндоморфизмов групп без кручения ранга 1 и подкольцами поля $\mathbb{Q}$ описывает следующее предложение.

Предложение 1.15 ([1]). *Пусть A — группа без кручения ранга 1. Тогда кольцо $\mathrm{End}(A)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbb{Q}$, порождённому 1 и всеми такими дробями $\frac{1}{p}$ (p – простое), что $pA = A$.*

Ответ на вопрос, когда подкольцо поля $\mathbb{Q}$ является чистым, был дан в следствии 1.3.

Докажем теперь основной результат, который даёт полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов.

Теорема 1.16. *Если B — вполне разложимая группа с редуцированной частью A, то кольцо эндоморфизмов группы B — чистое тогда и только тогда, когда*

$$A = \bigoplus_{p\in\Pi}(\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i{}^p)\,,$$

где Π *— некоторое множество простых чисел,* $A_i{}^p \cong \mathbb{Q}_p$ $(p \in \Pi, i = 1, ..., n_p, n_p \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Достаточность. Для всякого $p \in \Pi$ обозначим через A_p группу $\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i{}^p$. Тогда для любого $p \in \Pi$ имеем

$$t(A_p) = t(\mathbb{Q}_p) = (\infty, \infty, ..., \infty, 0, \infty, \infty, ...)\,,$$

где 0 соответствует простому числу p. Так как A_p — вполне инвариантные подгруппы группы A, то

$$E(A) \cong \prod_{p\in\Pi} E(A_p)\,.$$

Применяя [19], получим, что $E(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $E(A_p)$ — чистое кольцо. Так как $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ $(p \in \Pi, i = 1, ..., n_p)$, то из предложения 1.15 следует, что

$$E(A_i{}^p) \cong E(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p\,.$$

Применяя следствие 1.3, получим, что $E(A_i{}^p)$ — чистое $(p \in \Pi, i = 1, ..., n_p)$. Тогда по [4] $E(A_p)$ — чистое кольцо ($p \in \Pi$). Таким образом, $E(A)$ — чистое кольцо. Из теоремы 1.6 следует, что $E(B)$ — чистое кольцо.

Необходимость. Пусть $\{e_i{}^t\}_{i\in I_t, t\in T}$ — ортогональная система идемпотентов, соответствующая каноническому разложению

$$A=\bigoplus_{t\in T}(\bigoplus_{i\in I_t} A_i{}^t)\ \text{(т.е. } A_i{}^t=e_i{}^tA, i\in I_t, t\in T\text{)}$$

группы A. Так как $A_i{}^t$ ($i\in I_t, t\in T$) — группы ранга 1, то $e_i{}^t$ — примитивные идемпотенты. Из условия и теоремы 1.6 следует, что $E(A)$ — чистое кольцо. Тогда из [19] получаем, что $e_i{}^t$ — локальные идемпотенты, т.е. $e_i{}^tE(A)e_i{}^t$ — локальное кольцо, а значит, чистое кольцо ($i\in I_t, t\in T$). Согласно [1] имеем соотношения

$$E(A_i{}^t)=E(e_i{}^tA)\cong e_i{}^tE(A)e_i{}^t.$$

Тогда $E(A_i{}^t)$ — чистое кольцо ($i\in I_t, t\in T$). По предложению 1.15 $E(A_i{}^t)$ — подкольцо в $\mathbb{Q}$ ($i\in I_t, t\in T$). Применяя следствие 1.3, получим, что $E(A_i{}^t)\cong\mathbb{Q}_{p_t}$ для некоторого простого p_t ($i\in I_t, t\in T$). Тогда по 1.15 получаем, что $A_i{}^t\cong\mathbb{Q}_{p_t}$ ($i\in I_t, t\in T$).Таким образом,

$$A=\bigoplus_{p\in\Pi}(\bigoplus_{i\in I_p} A_i{}^p),$$

где $A_i{}^p\cong\mathbb{Q}_p$ ($i\in I_p, p\in\Pi$), Π — некоторое множество простых чисел, причём $E(A)$ — чистое кольцо. Согласно доказательству достаточности, $E(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $E(A_p)$ — чистое кольцо ($p\in\Pi$), в нашем случае $A_p=\bigoplus_{i\in I_p} A_i{}^p$.

Предположим, что I_p — бесконечное множество. Тогда

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i\in I_p} A_i{}^p)\cong\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p{}^{(I_p)})\ \text{— чистое кольцо.}$$

Так как $\mathbb{Q}_p$ — полулокальное кольцо, применяя [11, теорема 5.1] (эта теорема верна и в случае card $I>$ card $\mathbb{N}$, где I — индексное множество), получим, что $\mathbb{Q}_p$ — правое совершенное кольцо. Тогда по [4] $\mathbb{Q}_p$ — полуартиново кольцо. Но $\mathbb{Q}_p$ не является полуартиновым (так как содержит бесконечно убывающую цепь главных идеалов, порожденных элементами вида $\frac{1}{p^k}$, $k = 0, 1, ...$). Таким образом, имеем

$$A = \bigoplus_{p\in\Pi}(\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i{}^p), \text{ где } A_i{}^p \cong \mathbb{Q}_p \ (p \in \Pi, i = 1, ..., n^p, n^p \in \mathbb{N}),$$

что завершает доказательство. $\square$

Глава 2

SP-группы конечного ранга с чистыми кольцами эндоморфизмов

В данной главе изучаются вопросы чистоты колец эндоморфизмов одного из классов смешанных абелевых групп — SP–групп конечного ранга. В начале главы вводится определение SP–группы, приводятся некоторые свойства, далее рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов самомалых SP–групп конечного ранга, а также SP-групп конечного ранга с циклическими p-компонентами: изучается строение колец эндоморфизмов данных групп, приводятся необходимые и достаточные условия чистоты эндоморфизмов данных групп.

На всем протяжении данной главы под группой A будет пониматься SP–группа конечного ранга (под рангом смешанной группы A понимается ранг без кручения, то есть ранг факторгруппы $A/T(A)$).

Для удобства будем использовать далее следующие обозначения:

R — кольцо эндоморфизмов группы A

R_p — кольцо эндоморфизмов p-компоненты группы A

R_t — идеал кольца эндоморфизмов группы A, образы которых лежат в периодической части группы A

S — факторкольцо R/R_t.

2.1 Самомалые SP-группы

Определение 2.1. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p–компонент называется SP*–группой*, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \longrightarrow \prod\limits_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \longrightarrow \prod\limits_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел $\mathbb{P}$, относящихся к A, то есть таких, что $A_p \neq 0$.

Определение 2.2. Группа A называется *самомалой*, если образ каждого гомоморфизма $A \to \bigoplus_{\Re} A$ ($\Re$ — произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A.

Лемма 2.1. *Пусть A — SP–группа, тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$A = A_p \bigoplus B_p$ для всякого простого p, причём $pB_p = B_p$.*

2. Если A — группа конечного ранга, то S — конечномерная $\mathbb{Q}$–алгебра.

Доказательство. 1. Пусть A — SP–группа, тогда естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \longrightarrow \prod\limits_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \longrightarrow \prod\limits_p A_p$. Поскольку $A_p \subseteq A$ и $\prod\limits_p A_p = A_q \bigoplus \prod\limits_{p \neq q} A_p$, то в группе A также можно выделить прямое слагаемое A_q:

$$A = A_q \bigoplus (A \bigcap \prod_{p \neq q} A_p).$$

Возьмем произвольный вектор $a = (..., a_p, ...) \in \prod\limits_{p \neq q} A_p$. Заметим, что $o(a_p) = p^k$ ($k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$) для любого p, поэтому $(o(a_p), q) = 1$. Тогда существуют такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что $u \cdot o(a) + v \cdot q = 1$. Имеем,

$$a_p = 1 \cdot a_p = (u \cdot o(a_p) + v \cdot q) \cdot a = q \cdot (v \cdot a).$$

Следовательно, a_p делится на q. Получаем, что $\prod\limits_{p \neq q} A_p$ — q–делимая группа. Поскольку A — сервантная подгруппа группы $\prod\limits_p A_p$ и $\prod\limits_{p \neq q} A_p$ — q–делимая группа, $A \bigcap \prod\limits_{p \neq q} A_p$ — q–делимая группа.

2. Любому эндоморфизму $\alpha \in E(A)$ можно поставить в соответствие элемент $\acute{\alpha} \in E(A/T(A))$ следующим образом: для любого элемента $\bar{a} = a + T(A) \in A/T(A)$ определим

$$\acute{\alpha}\bar{a} = \alpha(a) + T(A).$$

Поскольку α — эндоморфизм, в случае, когда $a-b \in T(A)$, имеем $\alpha(a-b) \in T(A)$. Тем самым отображение $\acute{\alpha}$ задано корректно.

Рассмотрим произвольный элемент $\bar{\alpha} = \alpha + R_t \in S = E(A)/\mathrm{Hom}(A, T(A))$. Построим вложение φ из S в $E(A/T(A))$: каждому $\bar{\alpha}$ поставим в соответствие $\acute{\alpha}$.

Пусть $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha - \beta \in R_t$. Тогда для всякого $a \in A$

$$\varphi(\bar{\alpha})\bar{a} = \acute{\alpha}\bar{a} = \alpha(a) + T(A),$$

$$\varphi(\bar{\beta})\bar{a} = \acute{\beta}\bar{a} = \beta(a) + T(A).$$

И далее получаем

$$\varphi(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\bar{a} = \varphi(\bar{\alpha})\bar{a} - \varphi(\bar{\beta})\bar{a} = (\alpha(a) + T(A)) - (\beta(a) + T(A)) =$$

$$= (\alpha - \beta)a + T(A) = 0 + T(A).$$

То есть $\varphi(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) = \acute{0}$. Тем самым вложение φ задано корректно.

Покажем теперь, что φ — мономорфизм. Пусть имеются два таких элемента $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta} \in S$, что $\varphi\bar{\alpha} = \varphi\bar{\beta}$. В таком случае для всякого $a \in A$ справедливы следующие равенства

$$\bar{0} = 0 + T(A) = \varphi(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\bar{a} = \varphi(\bar{\alpha})\bar{a} - \varphi(\bar{\beta})\bar{a} = (\alpha(a) + T(A)) - (\beta(a) + T(A)) =$$

$$= (\alpha - \beta)a + T(A).$$

Откуда следует, что $(\alpha - \beta)a \in T(A)$ для любого $a \in A$. Значит, $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta} = \bar{0}$ и φ действительно мономорфизм.

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что $E(A/T(A))$ — конечномерная $\mathbb{Q}$–алгебра. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $\bar{a} \in A/T(A)$. Покажем, что $\bar{a}$ делится на n для любого натурального n. Запишем $n = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, где p_i — различные простые числа, s_i — неотрицательные числа ($i = 1, \ldots, k$), k — натуральное число. Из пункта 1 следует, что имеет место равенство

$$A = (\bigoplus_{p \in \{p_1, \ldots, p_k\}} A_p) \bigoplus B,$$

причём B — $p_1, \ldots, p_k$–делимая группа. Тогда найдутся такие $a_{p_i} \in A_{p_i}$ и $b \in B$, что $a = a_{p_1} + \ldots + a_{p_k} + b$. Но $\bar{a} = \bar{b}$, следовательно, $\bar{a}$ делится на n.

Имеем, $A/T(A)$ — делимая группа, а, значит, и $\mathbb{Q}$–пространство. Учитывая конечный ранг группы A, получаем, что $E(A/T(A))$ — конечномерная $\mathbb{Q}$–алгебра. □

Теорема 2.2. *Пусть A — самомалая SP–группа конечного ранга. Тогда кольцо R является чистым.*

Доказательство. Пусть α — произвольный эндоморфизм группы A. Рассмотрим $\bar{\alpha} \in S$. Так как A — SP–группа конечного ранга, то по лемме 2.1 S — конечномерная $\mathbb{Q}$–алгебра. Поэтому S — чистое кольцо и $\bar{\alpha} = \bar{e} + \bar{u}$, где $\bar{e}$ — идемпотентый, а $\bar{u}$ — обратимый элементы кольца

S [25]. Это означает, что найдутся такие r_i $(i = \overline{1,4})$ и $v \in R$, что

$$\alpha = e + u + r_1,$$

$$e^2 - e = r_2,$$

$$uv = vu + r_3 = 1 + r_4,$$

где $\bar{v}$ — обратный к $\bar{u}$.

Так как A — самомалая SP–группа конечного ранга, то согласно [2] $R_t = \bigoplus\limits_p R_p$. Значит, существует такое конечное подмножество простых чисел $\pi \subset \mathbb{P}$, что $r_iA \subseteq \bigoplus\limits_{p\in\pi} A_p$. В силу того, что A — SP–группа, по лемме 2.1 получаем, что $A = C \bigoplus B$, где $C = (\bigoplus\limits_{p\in\pi} A_p)$, а B — p–делимая группа $(p \in \pi)$, причём $r_iC \subseteq C$ и $r_iB = 0$ $(i = \overline{1,4})$, поскольку $r_i \in R_t$. Следует также отметить, что C и B — вполне характеристические подгруппы (следует из доказательства леммы 2.1).

Рассмотрим теперь сужение эндоморфизма $\alpha\,|_B = e\,|_B + u\,|_B$. Имеют место равенства:

$$e\,|_B^{\,2} - e\,|_B = 0,$$

$$u\,|_B\, v\,|_B = v\,|_B\, u\,|_B = 1\,|_B\,.$$

Следовательно, $\alpha\,|_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$.

По условию теоремы группа A — самомалая SP–группа конечного ранга, поэтому, учитывая [2], R_p — конечные и, следовательно, чистые кольца. Тогда и $E(C) = \prod\limits_{p\in\pi} R_p$ — чистое кольцо.

Таким образом мы показали, что $\alpha\mid_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$ и $\alpha\mid_C$ — чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \bigoplus B$ и то, что C и B — вполне характеристические подгруппы группы A, согласно [19] получаем, что α — чистый элемент кольца R. □

Рассмотрим далее некоторые следствия доказанной теоремы.

Лемма 2.3. *Пусть у группы A существует разложение $A = B \bigoplus C$, где C — самомалая SP–группа конечного ранга, а B — бесконечная периодическая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если B — ограниченная группа, то $E(A)$ — чистое кольцо.*
2. *Если B содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических p–групп, порядки которых не ограничены в совокупности, то $E(A)$ не является чистым кольцом.*

Доказательство. 1. Согласно [18] кольцо эндоморфизмов ограниченной периодической группы является чистым. Так как C — самомалая группа конечного ранга, то, как следует из теоремы 2.2, кольцо эндоморфизмов C также является чистым. Поскольку $A = B \bigoplus C$, принимая во внимание [19], получаем, что $E(A)$ — чистое кольцо.

2. Согласно [18], в случае, если p–группа содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических групп, чьи поряд-

ки не ограничены, то кольцо эндоморфизмов такой группы не является чистым. Тем самым $E(A_p)$ не является чистым кольцом. Поскольку A_p является вполне характеристическим прямым слагаемым группы A, то согласно [19] $E(A)$ не является чистым кольцом. $\square$

Следующая лемма даёт достаточное условие чистоты элемента кольца эндоморфизмов SP–группы.

Лемма 2.4. *Пусть f — эндоморфизм группы A и fA — ограниченная группа. Тогда f — чистый элемент кольца $E(A)$.*

Доказательство. Пусть f — эндоморфизм группы A и fA — ограниченная группа. В таком случае найдётся такое конечное множество простых чисел $\Lambda \subset \mathbb{P}$, что $fA \subseteq \bigoplus_{p\in\Lambda} A_p$, так как в противном случае порядки элементов группы fA не будут ограничены в совокупности. Обозначим группу $\bigoplus_{p\in\Lambda} A_p$ через C. Тогда, согласно лемме 2.1, группу A можно представить в виде $A = C \bigoplus D$, где группы C и D являются вполне характеристическими.

Согласно результатам, представленным в [19], $f|_C$ — чистый элемент $\mathrm{E}(C)$. Затем, $f|_D = 0 = 1 + (-1)$ — также чистый элемент $\mathrm{E}(D)$. Тогда, согласно [19], f — чистый элемент кольца $\mathrm{E}(A)$. $\square$

Возникает вопрос, в каких случаях справедлива импликация, обратная сформулированной в теореме 2.2. Другими словами, при каких условиях свойства чистоты кольца эндоморфизмов и самомалость группы совпадают? Следующий результат даёт частичный ответ на данный вопрос.

Теорема 2.5. *Пусть A — SP–группа конечного ранга, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ для всякого $p \in \mathbb{P}$. Если при этом кольцо R является чистым, то A — самомалая группа.*

Доказательство. Предположим противное. В этом случае, согласно [2], найдётся такой эндоморфизм $f \in R_t$, что $f(A_p) \neq 0$ для бесконечного числа простых чисел p, множество которых мы обозначим через Λ.

По условию теоремы f — чистый элемент кольца R, следовательно, найдутся такие обратимый и идемпотентный элементы u и e кольца R, что $f = e + u$. При этом, поскольку $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ для каждого $p \in \mathbb{P}$, e действует на A_p либо как тождественный, либо как нулевой эндоморфизм (то есть группа A_p допускает только тривиальное разложение). Пользуясь свойствами идемпотента e, можно записать:

$$A = \mathrm{Ker}(e) \bigoplus \mathrm{Im}(e),$$

причём

$$f \mid_{\mathrm{Ker}(e)} = (u + e) \mid_{\mathrm{Ker}(e)} = u \mid_{\mathrm{Ker}(e)},$$

$$f \mid_{\mathrm{Im}(e)} = (u + e) \mid_{\mathrm{Im}(e)} = (u + 1) \mid_{\mathrm{Im}(e)} .$$

Так как f совпадает на подгруппе $\mathrm{Ker}(e)$ с автоморфизмом u, то

$$\mathrm{Ker}(e) \cap \mathrm{Ker}(f) = 0,$$

$$\mathrm{Ker}(e) = f(\mathrm{Ker}(e)) \subseteq \mathrm{T}(A).$$

В таком случае, поскольку по условию теоремы группа A не имеет бесконечных периодических слагаемых, а группа $\mathrm{Ker}(e)$ — периодическая группа, то это конечная группа. Значит,

$$\mathrm{Ker}(e) = \bigoplus_{p \in \pi} A_p,$$

где $\pi \subset \Lambda$ — конечное подмножество простых чисел. Тогда оставшиеся p–компоненты A_p лежат в $\mathrm{Im}(e)$ для всякого $p \in \Lambda' = \Lambda \backslash \pi$.

Предположим, что существует ненулевой элемент $a \in A_p$ такой, что $fa = 0$. Поскольку $a \in \mathrm{Im}(e)$, то

$$fa = (u+1)a = 0,$$

откуда следует, что $ua = -a$. Учитывая, что $A_p \cong \mathbb{Z}_p$, можно записать $a = mc$, где c — образующий элемент группы A_p, $\mathrm{o}(c) = p$, $1 \leq m < p$. Тогда

$$-mc = -a = ua = u(mc) = m \cdot uc.$$

То есть

$$m \cdot (uc + c) = 0. \tag{2.1}$$

Поскольку u — автоморфизм, то $o(uc) = o(c) = p$. Тогда найдётся такое $l \in \mathbb{N}$, что $uc = lc$. С учётом этого равенство (2.1) примет вид

$$m(l+1)c = 0.$$

Так как $(m,p) = 1$ (в противном случае a равнялось бы нулю), то $(l+1)\vdots p$, то есть $l+1 = p$. В таком случае $uc = -c$, а $fc = (u+1)c = -c + c = 0$, что противоречит выбору множества Λ. Следовательно,

$$A_p \cap \mathrm{Ker}(f) = 0, \tag{2.2}$$

для всякого $p \in \Lambda^{'}$.

С другой стороны,

$$f(A) \subseteq T(A), \tag{2.3}$$

откуда следует, что $A \bigcap \prod_{p\in\Lambda'} A_p$ не содержит бесконечных векторов из A, иначе мы получили бы противоречие с (2.2) или (2.3).

Таким образом,

$$A \bigcap \prod_{p\in\Lambda'} A_p = \bigoplus_{p\in\Lambda'} A_p,$$

причём справедливо равенство

$$A = (A \bigcap \prod_{p\in\Lambda'} A_p) \bigoplus (A \bigcap \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p).$$

Действительно, обозначим $A \bigcap \prod_{p\in\Lambda'} A_p$ через B, а $A \bigcap \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p$ через C. Ясно, что $B \cap C = 0$. Покажем, что $A = B + C$.

Пусть $a \in A$, предположим, что a — конечный вектор (то есть содержит конечное множество ненулевых p–компонент). Тогда справедливо

$$a \in \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \subseteq (\bigoplus_{p\in\Lambda'} A_p) \bigoplus (\bigoplus_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p) \subseteq B \bigoplus C.$$

Рассмотрим теперь случай, когда a — бесконечный вектор. Тогда только на конечном числе позиций, соответствующих $p \in \Lambda^{'}$, вектор a отличается от нуля. Следовательно, существует такой вектор $a^{'} \in \bigoplus_{p\in\Lambda'} A_p$, что вектор $a^{''} = a - a^{'}$ на всех позициях, соответствующих $p \in \Lambda^{'}$, равен нулю — значит принадлежит $A \bigcap \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p$. Получаем, что $a = a^{'} + a^{''} \in B + C$.

Таким образом, в A нашлось бесконечное периодическое прямое слагаемое, что противоречит условиям теоремы. К полученному противоречию мы пришли исходя из предположения, что группа A не является самомалой, следовательно, группа A — самомалая. $\square$

2.2 SP-группы ранга 1 с циклическими p–компонентами

Пусть $\tilde{a}$ — бесконечный вектор из $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$, где $A_p = \mathbb{Z}_{p^{k_p}}$, $k_p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ — некоторое бесконечное множество простых чисел. При этом $\pi_p\tilde{a} \neq 0$ для бесконечного числа $p \in \Lambda$, где Λ — бесконечное подмножество $\mathbb{P}$, например, равное самому $\mathbb{P}$.

Пусть для группы A выполнено условие:

$$A/\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \cong W, \tag{2.4}$$

где W — одномерное подпространство $\mathbb{Q}$–пространства $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p/\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$, порожденное вектором $\tilde{a}+\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Предложение 2.6. *Группа A является SP–группой ранга 1.*

Доказательство. Очевидно, что $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \subset A$. Покажем, что группа A — сервантная подгруппа группы $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Действительно, пусть $a \in A$ и $\exists b \in \prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$ такой, что $mb = a$. Если порядок a конечен, то и порядок b также конечен. В этом случае $b \in \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \subset A$.

Пусть порядок элемента a бесконечен. В этом случае, согласно условию (2.4), найдутся такие $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, что $n_1 a = n_2\tilde{a} + a_t$, где $a_t \in \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$. Тогда $n_1 mb = n_2\tilde{a}+a_t$. Следовательно, согласно условию (2.4), $b \in A$. Имеем, группа A — сервантная подгруппа группы $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Кроме того, из условия (2.4) и одномерности подпространства W следует, что ранг без кручения группы A равен 1. □

Ясно, что в свою очередь любая SP-группа ранга 1 удовлетворяет условию (2.4), поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A, описанным выше. В данном разделе через A будем обозначать некоторую SP–группу ранга 1.

Дополнительно будем полагать, что Λ и $\mathbb{P}$ различаются лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, почти все проекции вектора $\tilde{a}$ ненулевые. Из данного условия вытекает также, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых.

Теорема 2.7. *Для любого эндоморфизма f группы A найдётся такое конечное множество $\Omega \subset \mathbb{P}$, что справедливо одно из условий:*

- *f — автоморфизм группы C (если $fA \subseteq T(A)$),*
- *$1-f$ — автоморфизм группы C (если $fA \nsubseteq T(A)$),*

где $C = A \bigcap \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \Omega} A_p$ — дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p \in \Omega} A_p$.

Доказательство. Пусть f — эндоморфизм группы A. Рассмотрим действие f на каждой p–компоненте группы A:

$$\pi_p f c_p = n_p c_p, \tag{2.5}$$

где $0 \leq n_p < p^{k_p}$, а c_p — образующие групп A_p.

Рассмотрим случай, когда $f \in T(A)$. Тогда $fa \in T(A)$ для любого элемента $a \in A$, в частности для $a = \tilde{a}$. Это означает, что почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливы равенства:

$$\pi_p f a = f \pi_p \tilde{a} = 0.$$

Рассмотрим проекции вектора a:

$$\pi_p \tilde{a} = \beta_p p^{k_p - s_p} c_p, \tag{2.6}$$

где $(\beta_p, p) = 1$, а $0 \leq s_p < k_p$. В таком случае справедливы равенства:

$$0 = f(\beta_p p^{k_p - s_p} c_p) = \beta_p p^{k_p - s_p} f(c_p) = \beta_p p^{k_p - s_p} n_p c_p.$$

Поэтому $\beta_p n_p \vdots p^{s_p}$, следовательно, $n_p \vdots p^{s_p}$.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f - 1$. Покажем, что u — автоморфизм группы C, где $C = A \bigcap \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \Omega} A_p$ — прямое слагаемое группы A (Ω — конечное подмножество множества $\mathbb{P}$). Рассмотрим равенство для p–компонент:

$$uc_p = (n_p - 1)c_p.$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Обозначим множество простых чисел, для которых данное равенство не выполняется, через Ω. Убедимся, что u — мономорфизм группы C.

Поскольку $n_p \vdots p^{s_p}$ для всякого $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, то $u \mid_{A_p}$ — автоморфизм группы A_p. Следовательно, u — мономорфизм группы C.

Покажем теперь, что u — эпиморфизм группы C. Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то существует элемент $u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u \mid_{A_p}$ — автоморфизм группы A_p для всякого $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a — элемент в A бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся

$a_t \in T(C)$, а также $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ такие, что $ma = n\tilde{a}_C + a_t$, где $\tilde{a}_C$ — проекция вектора $\tilde{a}$ на прямое слагаемое C.

При этом $u\pi_p\tilde{a}_C = (n_p - 1)\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = -1\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = -\pi_p \tilde{a}_C$ для всякого $p \in \mathbb{P}\backslash\Omega$.

Тогда справедливы равенства

$$mu^{-1}(a) = nu^{-1}(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t) = -nu(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (2.4), $u^{-1}(a) \in C$. Следовательно, u— автоморфизм группы C.

Рассмотрим случай, когда $f \notin T(A)$. Тогда $f\tilde{a}$ — бесконечный вектор, а значит, найдутся $a_t \in T(A)$, а также $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ такие, что $mf\tilde{a} = n\tilde{a} + a_t$. Тогда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство:

$$\pi_p m f a = n f \pi_p \tilde{a}.$$

Подставим в последнее равенство выражения для $\tilde{a}$ и f согласно 2.5 и 2.6:

$$mn_p\beta_p p^{k_p - s_p} c_p = n\beta_p p^{k_p - s_p} c_p.$$

Тогда $\beta_p p^{k_p - s_p}(mn_p - n)c_p = 0$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Отсюда следует, что

$$(mn_p - n) \vdots p^{k_p}. \tag{2.7}$$

Поскольку разложению m и n в произведение степеней простых чисел соответствуют конечные наборы простых чисел, то $(m,p)=1$ или $(n,p)=1$ почти для всех $p\in\mathbb{P}$. Обозначим множество простых чисел, для которых данные равенства не выполняются, через $\Omega^{'}$. Тогда для любого $p\in\mathbb{P}\backslash\Omega^{'}$ справедливы равенства:

$$(n_p,p)=1.$$

Рассмотрим эндоморфизм $u=f$. Доказательство того, что u — мономорфизм группы C, где $C=A\bigcap\prod_{p\in\mathbb{P}\backslash\Omega^{'}}A_p$ в точности повторяет рассуждения приведённые выше для случая, когда $fA\subseteq T(A)$.

Покажем теперь, что u — эпиморфизм группы C. Пусть $a\in C$. Если $a\in T(C)$, то $\exists u^{-1}a\in T(C)$, поскольку $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм группы A_p для всякого $p\in\mathbb{P}\backslash\Omega^{'}$.

Рассмотрим случай, когда $a\notin T(C)$, то есть a — элемент в A бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a\in C$. Поскольку $a\in C$, то найдутся $a_t^{'}\in T(C)$, а также $m^{'},n^{'}\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ такие, что $m^{'}a=n^{'}\tilde{a}_C+a_t^{'}$, где $\tilde{a}_C$ — проекция вектора $\tilde{a}$ на прямое слагаемое C. При этом,

$$mu\tilde{a}_C=mf\tilde{a}_C=n\tilde{a}_C.$$

Тогда справедливы равенства

$$nm^{'}u^{-1}a=n^{'}u^{-1}(n\tilde{a}_C)+u^{-1}(na_t^{'})=n^{'}m\tilde{a}_C+u^{-1}(na_t^{'}).$$

Согласно условию (2.4) $u^{-1}a \in C$, Поэтому u — автоморфизм группы C. $\square$

Пусть группа A такая, как в теореме 2.7. Тогда справедлив следующий результат.

Следствие 2.8. *Кольцо эндоморфизмов группы A является чистым.*

Доказательство. Поскольку условия теоремы 2.7 выполнены, то для произвольного эндоморфизма f группы A имеет место разложение

$$A = B \bigoplus C,$$

где $B = \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$, а $C = A \bigcap (\bigoplus_{p\in\mathbb{P}\setminus\Omega} A_p)$. Причем на C либо f является автоморфизмом, либо $1-f$. В таком случае $f\mid_C$ является чистым элементом $E(C)$.

Поскольку B — конечная группа, то кольцо $E(B)$ — чистое (см. [18]).

Таким образом мы показали, что $f\mid_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$ и $f\mid_C$ — чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \bigoplus B$ и то, что C и B — вполне характеристические подгруппы группы A, получим, что f — чистый элемент кольца $E(A)$.

$\square$

Напомним определение идеала Пирса p–группы A:

$$H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid x \in A[p], h(x) < \infty \Longrightarrow h(x) < h(\alpha x)\}.$$

Для SP–группы имеется определение аналога идеала Пирса, предложенное Крыловым П.А. (см. [3]). Если A — SP–группа, то

$$H(A) = \{\alpha \in E(A) \mid \alpha\mid_{A[p]} \in H(A_p) \text{ для каждого } p \in \mathbb{P}\}.$$

Пусть группа A такая, как в теореме 2.7. Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 2.9. $J(E(A)) = H(A)$.

Доказательство. П.А. Крылов в статье [3] доказал, что $J(E(A)) \subseteq H(A)$. Поэтому для завершения доказательства необходимо показать справедливость обратного включения $H(A) \subseteq J(E(A))$. Последнее условие равносильно следующему: для любого эндоморфизма $\alpha \in H(A)$ следует, что $1-\alpha$ — автоморфизм группы A.

Покажем, что $\alpha A \subseteq T(A)$. Действительно, предположим противное. Тогда, согласно теореме 2.7 α является автоморфизмом на прямом слагаемом группы A, содержащим почти все p–компоненты, что невозможно, поскольку $\alpha \in H(A)$.

Итак, $\alpha A \subseteq T(A)$. Тогда по теореме 2.7 $1-\alpha$ является автоморфизмом на прямом слагаемом группы A, содержащим почти все p–компоненты.

Рассмотрим конечную прямую сумму оставшихся p–компонент. Отметим, что в силу определения $H(A)$ для SP–группы, сужение α на каждую из указанных p–компонент будет принадлежать идеалу Пирса это p–компоненты, а значит и её радикалу Джекобсона, поскольку это ограниченная группа. Следовательно для данных p–компонент $1-\alpha$ также является автоморфизмом. □

2.3 SP-группы ранга 2 с циклическими p–компонентами

Рассмотрим вначале более общий случай — SP-группы конечного ранга. Ниже будет приведён результат, описывающий достаточные условия чистоты кольца эндоморфизмов SP-группы конечного ранга.

Пусть для группы A выполнено условие:

$$A/\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \cong W, \tag{2.8}$$

где W — конечномерное подпространство $\mathbb{Q}$–пространства $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p/\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$, порожденное конечным множеством линейно независимых векторов $\tilde{a}_i+\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$, $i=\overline{1,n}$. Причём $\tilde{a}_i$ — бесконечные векторы из $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} A_p$, где $A_p \cong \mathbb{Z}_{p^{k_p}}$, $k_p\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ — некоторое бесконечное множество простых чисел. Обозначим через Λ_i множество тех простых чисел $p\in\mathbb{P}$, для которых $\pi_p a_i \neq 0$.

Предложение 2.10. *Группа A является SP–группой конечного ранга.*

Доказательство. Очевидно, что $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \subset A$. Покажем, что группа A — сервантная подгруппа группы $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Действительно, пусть $a \in A$ и существует $b \in \prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$ такой, что $mb = a$. Если порядок a конечен, то и порядок b также конечен. В этом случае $b \in \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \subset A$.

Пусть порядок элемента a бесконечен. В этом случае, согласно условию (2.8), найдутся такие $m_0, m_i \in \mathbb{Z}$ (при этом хотя бы для одного i $m_i \neq 0$ и $m_0 \neq 0$), что $m_0 a = \sum_{i=1}^{n} m_i \tilde{a}_i + a_t$, где $a_t \in \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$. Тогда $m_0 m b = \sum_{i=1}^{n} m_i \tilde{a}_i + a_t$. Следовательно, согласно условию (2.8), $b \in A$. Имеем, группа A — сервантная подгруппа группы $\prod_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Кроме того, из условия (2.8) и конечномерности подпространства W следует, что ранг без кручения группы A конечен и равен n. $\square$

Ясно, что, в свою очередь, любая SP–группа A конечного ранга удовлетворяет условию 2.8, поэтому в дальнейшем изложении будем пользоваться представлением группы A, описанным выше. Здесь и далее через A будем обозначать SP–группу конечного ранга. Кроме того, будем полагать, что $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$ и $\mathbb{P}$ различаются лишь на конечном множестве элементов. Другими словами, почти все проекции векторов $\tilde{a}_i$ ненулевые. Из данного условия, аналогично случаю, описанному в предыдущем разделе, вытекает также, что группа A не содержит бесконечных периодических прямых слагаемых.

Теорема 2.11. *Для любого эндоморфизма $f \in R_t$ группы A найдётся* *такое конечное множество* $\Omega \subset \mathbb{P}$, *что* $1-f$ *— автоморфизм группы* C, *где* C *— дополнительное прямое слагаемое к* $\bigoplus\limits_{p\in\Omega} A_p$.

Доказательство. Пусть f — эндоморфизм группы A. Рассмотрим действие f на каждой p–компоненте группы A:

$$\pi_p f c_p = n_p c_p, \tag{2.9}$$

где $0 \le n_p < p^{k_p}$, а c_p — образующие групп A_p.

Пусть $fA \subseteq T(A)$, тогда $f\tilde{a}_i \in T(A)$ для любого $i = \overline{1,n}$. Это означает, что почти для всех $p \in \Lambda_i$ справедливы равенства:

$$\pi_p f\tilde{a}_i = f\pi_p\tilde{a}_i = 0.$$

Рассмотрим проекции векторов $\tilde{a}_i$:

$$\pi_p\tilde{a}_i = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p, \tag{2.10}$$

где $(\beta_p^i, p) = 1$, а $0 \le s_p^i < k_p$. С учётом равенств 2.10 можно записать почти для всех $p \in \mathbb{P}$ следующие равенства:

$$0 = f(\beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p) = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} f(c_p) = \beta_p^i p^{k_p - s_p^i} n_p c_p.$$

Поэтому $\beta_p^i n_p \vdots p^{s_p^i}$, следовательно, $n_p \vdots p^{s_p^i}$ для всех $i = 1, ..., n$ и $n_p = \alpha_p^i p^{s_p^i}$, где $p^{s_p^i}$ соответствует максимальному из n значений.

Рассмотрим эндоморфизм $u = f - 1$. Покажем, что u — автоморфизм группы C, где $C = A \bigcap \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus\Omega} A_p$ — прямое слагаемое группы A (Ω

— конечное подмножество множества $\mathbb{P}$). Запишем равенства для p–компонент:

$$uc_p = (\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1)c_p.$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Обозначим множество простых чисел, для которых данное равенство не выполняется, через Ω. Для начала убедимся, что u — мономорфизм группы C.

Поскольку $(\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1, p) = 1$ для всякого $p \in \mathbb{P} \backslash \Omega$, то $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм группы A_p. Следовательно, u — мономорфизм группы C.

Покажем теперь, что u — эпиморфизм группы C. Пусть $a \in C$. Если $a \in T(C)$, то $\exists u^{-1}a \in T(C)$, поскольку $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм группы A_p для всякого $p \in \mathbb{P} \backslash \Omega$.

Рассмотрим случай, когда $a \notin T(C)$, то есть a — элемент A бесконечного порядка. Покажем, что $u^{-1}a \in C$. В этом случае найдутся $a_t \in T(C)$, а также $m, m_i \in \mathbb{Z}$ (при этом $m_i \neq 0$ хотя бы для одного i и $m \neq 0$) такие, что

$$ma = \sum_{i=1}^{n} m_i \tilde{a}_C^i + a_t,$$

где $\tilde{a}_C^i$ — проекция вектора $\tilde{a}_i$ на прямое слагаемое C. При этом, $u\pi_p \tilde{a}_C^i = (\alpha_p^i p^{s_p^i} - 1)\beta_p^i p^{k_p - s_p^i} c_p = -1\beta_p p^{k_p - s_p^i} c_p = -\pi_p \tilde{a}_C^i$ для всякого $p \in \mathbb{P} \backslash \Omega$.

Тогда справедливы равенства:

$$mu^{-1}(a) = \sum_{i=1}^{n} m_i u^{-1}(\tilde{a}) + u^{-1}(a_t) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \tilde{a}_i + u^{-1}(a_t).$$

Согласно условию (2.8), $u^{-1}(a) \in C$. Следовательно, u — автоморфизм группы C. $\square$

Пусть группа A обладает свойствами, перечисленными в теореме 2.11. Тогда справедлив следующий результат.

Следствие 2.12. *Любой эндоморфизм $f \in R_t$ группы A является чистым.*

Доказательство. Доказательство данного утверждения в точности повторяет доказательство следствия 2.8, если ввести обозначение $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = \Lambda$. $\square$

Теперь перейдем к рассмотрению основного случая, вынесенного в заглавие данного раздела. В дальнейшем изложении будем пользоваться представлением SP–группы ранга 2, описанным выше для SP–групп конечного ранга (см. равенство (2.8)).

Напомним, ранее было показано, что кольцо эндоморфизмов SP-группы ранга 1 с циклическими p-компонентами является чистым (следствие 2.8). Кроме того, было показано, что любой эндоморфизм SP-группы конечного ранга, переводящий все элементы группы в её периодическую часть, является чистым (следствие 2.12). В данном разделе объектом исследования являются SP-группы ранга 2 с циклическими p-компонентами, не имеющими бесконечных периодических прямых слагаемых. Ниже приведён основной результат, позволяющий дать полный ответ на вопрос о чистоте рассматриваемых групп.

Теорема 2.13. *Кольцо эндоморфизмов SP–группы ранга 2 с циклическими p-компонентами, не имеющей бесконечных периодических прямых слагаемых, является чистым.*

Доказательство основного результата удобно разбить на несколько частей, каждая из которых будет соответствовать одному из следующих случаев строения множеств Λ_1 и Λ_2:

- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — конечное множество;
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ — бесконечное;
- $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — бесконечное множество и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ — конечные множества.

Таким образом, план доказательства — показать чистоту кольца эндоморфизмов группы A для каждого из описанных выше случаев. Это будет гарантировать чистоту кольца эндоморфизмов для произвольной группы A, удовлетворяющей условиям теоремы.

Заметим, что в случае, когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — конечное множество, группу A можно представить в виде $A = (\bigoplus\limits_{p \in \Lambda_1 \setminus \Omega} A_p) \bigoplus (\bigoplus\limits_{p \in \Lambda_2 \setminus \Omega} A_p) \bigoplus (\bigoplus\limits_{p \in \Omega} A_p)$, где $\Omega = (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \cup (\mathbb{P} \backslash (\bigcup_{i=1,2} \Lambda_i))$ — конечное множество. Учитывая полученные ранее результаты для случая SP-групп ранга 1, мы получим, что группа A обладает чистым кольцом эндоморфизмов. Таким образом, при дальнейшем рассмотрении нас будет интересовать случай, когда $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — бесконечное множество. Поэтому далее для группы A будем предполагать, что данное условие выполнено.

Ниже будут рассмотрены некоторые вспомогательные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных.

Уточним вид проекций для базисных векторов:

$$\pi_p(a_i) = p^{k_p - s_p^i} \alpha_p^i c_p; \tag{2.11}$$

и действие эндоморфизма f на p–компонентах группы A:

$$fc_p = n_p c_p,$$

где $n_p \in \mathbb{Z}$;

$\alpha_p^i \in \mathbb{Z}$, причём $(\alpha_p^i, p) = 1$;

$s_p^i \in \mathbb{N}$, причём $0 < s_p^i \leq p^k$;

c_p — образующий элемент группы A_p.

Лемма 2.14. *Пусть множество* $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ *— бесконечное и* f *— эндоморфизм группы* A. *Если образ* $fa_2 \notin T(A)$, *то* fa_2 *выражается только через образующий вектор* a_2.

Доказательство. Поскольку $fa_2 \in A$, найдутся такие целые n, n_1, n_2 и $a_2^t \in T(A)$, что $nfa_2 = n_1a_1 + n_2a_2 + a_2^t$. Перейдём к равенствам для p-компонент: почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство

$$nf\pi_pa_2 = n_1\pi_pa_1 + n_2\pi_pa_2.$$

Но $\pi_pa_2 = 0$, а $\pi_pa_1 \neq 0$ для $p \in \Lambda_1 \backslash \Lambda_2$, откуда следует, что $n_1 = 0$. Таким образом,

$$nfa_2 = n_2a_2 + a_2^t. \tag{2.12}$$

$\square$

Лемма 2.15. *Пусть множество* $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ *— бесконечное. Тогда* $fa_2 \in T(A)$, *если* $fa_1 \in T(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 2.14, для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может зависеть только от одного образующего вектора a_2. Следовательно, найдутся такие целые числа $n^{'}, n_2 \in \mathbb{Z}$ и элемент $a_t^2 \in T(A)$, что справедливо следующее равенство:

$$n^{'}fa_2 = n_2a_2 + a_t^2$$

Согласно условию леммы $fa_1 \in T(A)$, следовательно, почти для всех $p \in \Lambda_1$

$$\pi_p(fa_1) = n_pp^{k_p - s_p^1}\alpha_p^1c_p = 0.$$

Следовательно, $n_p \vdots p^{s_p^1}$. В таком случае

$$n^{'} n_p p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p = n^{'} \pi_p(fa_2) = n_2 p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p.$$

Поэтому $(n^{'} n_p - n_2) \vdots p^{s_p^2}$. Поскольку $s_p^i \neq 0$, то $n_2 \vdots p$ почти для всех $p \in \Lambda_1$. То есть $n_2 = 0$, а значит, $fa_2 \in T(A)$. $\square$

Лемма 2.16. *Если для базисных векторов a_1 и a_2 существуют прообразы при отображении $f \in E(A)$ и ограничение f — автоморфизм для каждой p–компоненты A_p, то f — автоморфизм группы A.*

Доказательство. Поскольку f — автоморфизм для каждой p–компоненты A_p, то f — мономорфизм группы A и автоморфизм группы $\prod\limits_{p \in \mathbb{P}} A_p$. Для доказательства предложения таким образом необходимо показать, что f - эпиморфизм. Поскольку $f\mid_{A_p}$ — автоморфизм для любого $p \in \mathbb{P}$, то для любого элемента группы A конечного порядка найдётся прообраз при отображении f. Поэтому далее будет рассмотрен случай бесконечных векторов.

Обозначим прообразы для векторов a_1 и a_2 через b_1, b_2 соответственно. Покажем теперь, что для любого бесконечного вектора $a \in A$ элемент $f^{-1}(a) \in C$. Так как $a \in A$, найдутся такие $m, n_2 \in \mathbb{Z}$, $a_t \in T(A)$, что справедливо следующее равенство:

$$ma = m_1 a_1 + m_2 a_2 + a_t.$$

Заметим, что поскольку f — автоморфизм группы $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} A_p$, то прообраз $f^{-1}(a)$ существует, поскольку $a \in A \subseteq \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} A_p$.

Проверим, принадлежит ли $f^{-1}(a)$ группе A:

$$mf^{-1}(a) = f^{-1}(ma) = f^{-1}(m_1a_1 + m_2a_2 + a_t) =$$

$$m_1f^{-1}(a_1) + m_2f^{-1}(a_2) + f^{-1}(a_t) =$$

$$m_1b_1 + m_2b_2 + f^{-1}(a_t).$$

Заметим, что поскольку f — автоморфизм для каждой p–компоненты A_p, то $f^{-1}(a_t) \in A$. Тогда $m_1b_1 + m_2b_2 + f^{-1}(a_t) \in A$, а значит и $mf^{-1}(a) \in A$. Далее, легко показать, пользуясь представлением группы A согласно 2.8, что $f^{-1}(a) \in A$.

Следовательно, f — эпиморфизм группы A. □

Лемма 2.17. *Если существует такое конечное подмножество $\Omega \subset \mathbb{P}$, что f — чистый элемент в $E(\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}\setminus\Omega} A_p)$, то f — чистый элемент в $E(A)$.*

Доказательство. Обозначим группу $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}\setminus\Omega} A_p$ через C.
Заметим, что $f\mid_{\bigoplus_{p\in\Omega} A_p}$ — чистый элемент кольца $E(\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$, поскольку $\bigoplus_{p\in\Omega} A_p$ — ограниченная группа (см. [18]). Принимая во внимание тот факт, что $A = C\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$ и то, что C и $\bigoplus_{p\in\Omega} A_p$ — вполне характеристические подгруппы группы A, из [19] получим, что f — чистый элемент кольца $E(A)$. □

После доказательства некоторых вспомогательных утверждений мы перейдём непосредственно ко второму случаю из принятого нами плана ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — бесконечное множество и хотя бы одно из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ — бесконечное). В следующей лемме будет рассмотрена первая часть доказательства данного случая, когда каждое из множеств $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ — бесконечное. Заметим, что для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin R_t$, поскольку в противном случае f — заведомо чистый элемент (следствие 2.12).

Лемма 2.18. *Пусть оба множества* $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$, $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ *— бесконечные. Тогда кольцо* $E(A)$ *— чистое.*

Доказательство. Итак, $f \notin R_t$, а согласно условию теоремы $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ и $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ — бесконечные множества. В этом случае, согласно лемме 2.14, для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может выражаться только через образующий вектор a_2, а образ fa_1 — только через вектор a_1. Следовательно, найдутся такие целые числа $n, n^{'}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ и элемент $a_1^t, a_t^2 \in T(A)$, что справедливы следующие равенства:

$$nfa_1 = n_1 a_1 + a_1^t, \tag{2.13}$$

$$n^{'} fa_2 = n_2 a_2 + a_t^2. \tag{2.14}$$

Заметим, что если $f \neq 0$, то, в силу предложения 2.15, справедливы следующие импликации:

$$\text{если } fa_1 \in T(A)\text{, то } fa_2 \in T(A)\text{;}$$

$$\text{если } fa_2 \in T(A)\text{, то } fa_1 \in T(A)\text{.}$$

Отсюда следует, что $fa_1 \notin T(A)$ и $fa_2 \notin T(A)$.

Покажем, что существует такое прямое слагаемое C группы A, что f — автоморфизм на C, причем $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, а $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ — конечное множество.

Рассмотрим покомпонентно первое из равенств (2.13 – 2.14): почти для всех $p \in \Lambda_1$ верны равенства

$$nn_p(\pi_p a_1) = \pi_p(nfa_1) = \pi_p(n_1 a_1) = n_1 \pi_p(a_1).$$

С учётом равенства (2.11) получим

$$(nn_p - n_1) \vdots p^{s_p^1}.$$

Поскольку $fa_1 \notin T(A)$, можно сделать вывод, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1$.

Аналогично можно показать, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_2$. Тогда $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых последнее равенство не выполнено, обозначим через Ω. Добавим также к множеству Ω конечное множество тех простых чисел $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n_i ($i = 1, 2$). В таком случае получим разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, где C — дополнительное прямое слагаемое к $\bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. Причем подгруппа C — p–делимая для каждого $p\in\Omega$.

Заметим, что поскольку $(n_p, p) = 1$ для всех $p \in \mathbb{P}\setminus\Omega$, то $f\mid_{A_p}$ — автоморфизм для любого $p\in\mathbb{P}\setminus\Omega$.

Покажем, что существуют такие элементы $b_i \in A$ $(i = 1, 2)$, что $fb_i = \pi_C a_i$.

Поскольку C является n_i–делимой группой ($i = 1, 2$), то найдутся такие элементы $b_i \in C$, что $n_1 b_1 = n\pi_C(a_1)$ и $n_2 b_2 = n'\pi_C(a_2)$. В таком случае справедливо равенство

$$n_1 f b_1 = f(n_1 b_1) = f(n\pi_C(a_1)) = \pi_C(nfa_1) = \pi_C(n_1 a_1).$$

Откуда следует, что $n_1(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$. Тогда $fb_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$, с другой стороны $fb_1 - \pi_C(a_1) \in C$, поэтому $fb_1 = \pi_C(a_1)$.

Аналогично можно показать, что $fb_2 = \pi_C(a_2)$. В таком случае выполнены условия леммы 2.16, следовательно, f — автоморфизм группы C.

Таким образом, мы показали, что $f\mid_C$ — чистый элемент кольца $E(C)$, а значит, согласно лемме 2.17, f — чистый элемент $E(A)$. □

Теперь мы можем перейти непосредственно к рассмотрению второго случая (когда бесконечным может быть только одно из множеств $\Lambda_1\backslash\Lambda_2$, $\Lambda_2\backslash\Lambda_1$). Доказательство удобно провести в несколько этапов, каждый из которых будет соответствовать одному из дополнительных условий, налагающихся на образы и порядки p–компонент базисных векторов. Во всех последующих результатах (леммы 2.19 – 2.23) будем полагать, что бесконечным является только одно из множеств $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$, $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$, для определённости пусть множество $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ — бесконечное, а множество $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ — конечное при любом выборе базисных векторов.

Лемма 2.19. *Если для бесконечного числа простых чисел* $p \in \Lambda_2$ *справедливо неравенство* $s_p^1 > 2s_p^2$, *и* f *— такой эндоморфизм группы* A, *что* $fa_2 \in T(A)$, *то* f *— чистый элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно лемме 2.14 для любого эндоморфизма f группы A образ fa_2 может зависеть только от одного образующего вектора a_2. Таким образом, найдутся такие целые $n, n_2, n', n_1', n_2' \in \mathbb{Z}$ и элементы $a_1^t, a_2^t \in T(A)$, что

$$nfa_2 = n_2a_2 + a_2^t, \tag{2.15}$$

$$n'fa_1 = n_1'a_1 + n_2'a_2 + a_1^t. \tag{2.16}$$

Поскольку мы рассматриваем случай $f \notin R_t$, то согласно лемме 2.15 $fa_1 \notin T(A)$.

Уточним вид проекций для базисных векторов (напомним равенство 2.11):

$$\pi_p(a_i) = p^{k_p - s_p^i}\alpha_p^i c_p, \tag{2.17}$$

и зафиксируем действие эндоморфизма f на p–компонентах группы A:

$$fc_p = n_p c_p,$$

где $n_p \in \mathbb{Z}$;

$\alpha_p^i \in \mathbb{Z}$, причём $(\alpha_p^i, p) = 1$;

$s_p^i \in \mathbb{N}$, причём $0 < s_p^i \le k_p$;

c_p — образующий элемент группы A_p.

Согласно условиям леммы $fa_2 \in T(A)$. В таком случае

$$\pi_p(fa_2) = n_p p^{k_p - s_p^2} \alpha_p^2 c_p = 0$$

почти для всех $p \in \Lambda_2$. Следовательно, $n_p \vdots p^{s_p^2}$. Тогда $n_p = p^{s_p^2}\gamma_p$ для некоторого целого γ_p.

Рассмотрим теперь проекции для образа fa_1:

$$\pi_p(fa_1) = n_p p^{k_p - s_p^1} \alpha_p^1 c_p = \gamma_p p^{k_p - s_p^1 + s_p^2} \alpha_p^1 c_p. \tag{2.18}$$

Учитывая выражение (2.16), можно записать равенство, справедливое почти для всех $p \in \mathbb{P}$

$$n^{'}\pi_p(fa_1) = \pi_p(n_1^{'}a_1 + n_2^{'}a_2) = (n_1^{'}p^{k_p - s_p^1}\alpha_p^1 + n_2^{'}p^{k_p - s_p^2}\alpha_p^2)c_p.$$

Домножим первое равенство, которое мы получили для представления проекций fa_1, на $n^{'}$. В сумме с последним равенством мы можем записать:

$$(p^{k_p - s_p^1}(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2} - n_1^{'})\alpha_p^1 - n_2^{'}\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2})c_p = 0.$$

Откуда следует, что

$$(p^{k_p-s_p^1}(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2}-n_1^{'})\alpha_p^1-n_2^{'}\alpha_p^2 p^{k_p-s_p^2}) \vdots p^{k_p}. \qquad (2.19)$$

Поскольку $s_p^2<s_p^1$, то $k_p-s_p^1<k_p-s_p^2$. Тогда из 2.19 следует, что

$$((n^{'}\gamma_p p^{s_p^2}-n_1^{'})\alpha_p^1-n_2^{'}\alpha_p^2 p^{s_p^1-s_p^2}) \vdots p^{s^1}.$$

Значит, $(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2}-n_1^{'})\alpha_p^1 \vdots p^{s^1-s^2}$, что влечёт $(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2}-n_1^{'}) \vdots p$, поскольку $(\alpha_p^1,p)=1$. В этом случае $n_1^{'} \vdots p$ для бесконечного множества $p\in\Lambda_2$, то есть $n_1^{'}=0$.

Тогда равенства 2.16 и 2.15 можно переписать в следующем виде:

$$n^{'}fa_1=n_2^{'}a_2+a_1^t,$$

$$nfa_2=a_2^t.$$

Рассмотрим гомоморфизм $u=1-f$. Проверим, найдётся ли такое конечное подмножество простых чисел $\Omega\subset\mathbb{P}$, что $u\mid_C$ - автоморфизм подгруппы C, являющейся прямым слагаемым группы $A=C\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega}A_p)$.

Рассмотрим покомпонентно выражение для вектора fa_1, записанное выше:

$$n^{'}n_p\pi_p(a_1)=n_2^{'}\pi_p(a_2).$$

Данное равенство справедливо почти для всех $p\in\mathbb{P}$. При этом почти для всех $p\in\Lambda_1\setminus\Lambda_2$ правая часть данного равенства равна нулю, а значит и $n^{'}n_p\pi_p(a_1)=0$. Тогда, учитывая вид проекций для вектора a_1, получим $n^{'}n_p \vdots p^{s_p^1}$. Учитывая неравенство $n^{'}\neq 0$, приходим к выводу, что $n_p \vdots p^{s_p^1}$ почти для всех $p\in\Lambda_1\backslash\Lambda_2$. Кроме того, учитывая, что $fa_2\in T(A)$, легко показать, что $n_p \vdots p^{s_p^2}$ почти для всех $p\in\Lambda_2$.

Определим множество Ω следующим образом: в него входят все простые числа $p\in\mathbb{P}$ такие, что $(n_p,p)=1$. Кроме того, добавим в множество Ω все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: $n_2, n^{'}, n, (n_2-n)$. Очевидно, что полученное множество Ω будет конечным.

Заметим, что в силу выбора множества Ω $(u=1-f)\,|_{A_p}$ — автоморфизм A_p для всех $p\in\mathbb{P}\setminus\Omega$. Следовательно, u — мономорфизм группы C. Остаётся проверить, будет ли u эпиморфизмом?

Заметим, что $nu\pi_C(a_2)=n(1-f)\pi_C(a_2)=n\pi_C(a_2)-a_2^t$, то есть $n(u\pi_C(a_2)-\pi_C(a_2))\in T(\mathrm{C})$. Поскольку $n\neq 0$, то $u\pi_C(a_2)-\pi_C(a_2)\in T(\mathrm{C})$. Учитывая, что u — автоморфизм для любой p-компоненты группы C, можно утверждать, что для вектора $\pi_C(a_2)$ существует прообраз $u^{-1}\pi_C(a_2)=\pi_C(a_2)+a_C^t$, где $a_C^t\in\mathrm{E}(C)$.

Покажем, что в группе C найдётся также прообраз и для вектора $\pi_C(a_1)$.

Рассмотрим элемент $b_1\in C$, для которого справедливо равенство (существование этого элемента следует из представления группы A согласно 2.8):

$$mb_1 = m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2),$$

где $m = -(n_2^{'} - n)n^{'}$, $m_1 = m$, $m_2 = nn_2^{'}$.

Тогда справедливы следующие равенства:

$$mn^{'}nub_1 = n^{'}n(1-f)(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2)) =$$

$$n^{'}n(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2) - m_1 f\pi_C(a_1) - m_2 f\pi_C(a_2)) =$$

$$n^{'}n(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2)) - m_1 nn_2^{'}\pi_C(a_2) - m_2 n^{'}n_2\pi_C(a_2) =$$

$$n^{'}nm_1\pi_C(a_1) + (m_2 n^{'}n - m_1 nn_2^{'} - m_2 n^{'}n_2)\pi_C(a_2).$$

При этом

$$m_2 n^{'}n - m_1 nn_2^{'} - m_2 n^{'}n_2 = nn_2^{'}n^{'}n + (n_2 - n)n^{'}nn_2^{'} - nn_2^{'}n^{'}n_2 = 0.$$

Таким образом, мы получаем, что $mn^{'}nub_1 = n^{'}nm_1\pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $n^{'}nm(ub_1 - \pi_C(a_1)) = 0$, что в свою очередь приводит к равенству $n^{'}n(n_2 - n)n^{'}(ub_1 - \pi_C(a_1)) = 0$.

Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: $n_2, n^{'}, n, (n_2 - n)$. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $ub_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. С другой стороны, поскольку $b_1 \in C$, то $ub_1 - \pi_C(a_1) \in C$, что вместе с предыдущим выводом даёт равенство $ub_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Как следует из предложения 2.16, u — эпиморфизм, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов.

Таким образом получаем, что u — автоморфизм группы C, а значит, как следует из предложения 2.17, f - чистый элемент кольца эндоморфизмов группы A. $\square$

Лемма 2.20. *Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$, и f — такой эндоморфизм группы A, что $fa_2 \notin T(A)$, то f — чистый элемент $E(A)$.*

Доказательство. Поскольку множество $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ — бесконечное, а множество $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ — конечное, то, как отмечалось в лемме 2.19, будут справедливы равенства 2.15 и 2.16. Кроме того, учитывая лемму 2.15, $fa_1 \notin T(A)$.

Примем вид проекций для базисных векторов и действие эндоморфизма f на p–компонентах группы A такими же, как и в лемме 2.19.

Рассмотрим покомпонентно равенство 2.15: почти для всех $p \in \Lambda_2$

$$nn_p(\pi_p a_2) = \pi_p(nfa_2) = \pi_p(n_2 a_2) = n_2 \pi_p(a_2).$$

Откуда следует, что $(nn_p - n_2)) \vdots p$ почти для всех $p \in \Lambda_2$. Поскольку $fa_2 \notin T(A)$ можно сделать вывод, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_2$.

Далее рассмотрим покомпонентно равенство 2.16: почти для всех $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$

$$n^{'} n_p(\pi_p a_1) = \pi_p(n^{'} fa_1) = \pi_p(n_1^{'} a_1 + n_2^{'} a_2) = \pi_p(n_1^{'} a_1) = n_1^{'} \pi_p(a_1).$$

Откуда следует, что $(n^{'}n_p - n_1^{'})\vdots p$ для бесконечного числа $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$. Следовательно, либо $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, либо $n_1^{'} = 0$.

Рассмотрим подробнее второй вариант. В этом случае равенство 2.16 покомпонентно можно представить в следующем виде: почти для всех $p \in \Lambda_2$

$$n^{'}n_p(\pi_p a_1) = n_2^{'}\pi_p(a_2).$$

Тогда $(n^{'}n_p\alpha_p^1 p^{k_p - s_p^1} - n_2^{'}\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2})\vdots p$. Рассмотрим далее два случая.

Случай 1. $s_p^1 > s_p^2$ для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$. Тогда $(n^{'}n_p\alpha_p^1 - n_2^{'}\alpha_p^2 p^{s_p^1 - s_p^2})\vdots p$, откуда следует, что $n^{'}n_p \vdots p$. Последнее означает, что $n_p \vdots p$, что противоречит полученному ранее выводу о том, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_2$.

Случай 2. $s_p^1 < s_p^2$ для бесконечного числа $p \in \Lambda_2$. Тогда $(n^{'}n_p\alpha_p^1 p^{s_p^2 - s_p^1} - n_2^{'}\alpha_p^2)\vdots p$, откуда следует, что $n_2^{'}\vdots p$. Последнее означает, что $n_2^{'} = 0$, что противоречит условию теоремы, из которого следует, что $fa_1 \notin T(A)$.

Таким образом, мы показали, что $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$. Далее, аналогично доказательству леммы 2.18, легко показать, что существует такое прямое слагаемое C группы A, что f — мономорфизм на C, причем $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$, а $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ — конечное множество. Кроме того, абсолютно аналогично можно показать, что существует прообраз $\pi_C(a_2)$ при отображении f (следует из равенства 2.15).

Добавим к множеству Ω все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел $n, n^{'}, n_1^{'}, n_2$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$.

Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство:

$$mb_1 = m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2),$$

где $m = n_1^{'}n_2$, $m_1 = n^{'}n_2$, $m_2 = -nn_2^{'}$.

Тогда справедливы следующие равенства:

$$mn^{'}nfb_1 = n^{'}nf(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2)) =$$

$$nm_1(n_1^{'}\pi_C(a_1) + n_2^{'}\pi_C(a_2)) + n^{'}m_2n_2\pi_C(a_2) =$$

$$nm_1n_1^{'}\pi_C(a_1) + (nm_1n_2^{'} + n^{'}m_2n_2)\pi_C(a_2).$$

При этом ,

$$nm_1n_2^{'} + n^{'}m_2n_2 = nn^{'}n_2n_2^{'} - n^{'}nn_2^{'}n_2 = 0,$$

$$nm_1n_1^{'} = nn_1^{'}n_2n_1^{'} = mn^{'}n.$$

Таким образом, мы получаем, что $mn^{'}nfb_1 = mn^{'}n\pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $mn^{'}n(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$, что в свою очередь приводит к равенству $n_1^{'}n_2n^{'}n(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$.

Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: $n, n^{'}, n_1^{'}, n_2$. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $fb_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. С другой стороны, поскольку $b_1 \in C$, то $fb_1 - \pi_C(a_1) \in C$, что в сумме с предыдущим выводом даёт равенство $fb_1 - \pi_C(a_1) = 0$. Согласно лемме 2.16, легко доказать, что f — автоморфизм, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов.

Таким образом получаем, что f — автоморфизм группы C, а значит, f - чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 2.17 следует, что f — чистый элемент кольца $E(A)$. $\square$

Лемма 2.21. *Если для бесконечного числа простых чисел* $p \in \Lambda_2$ *справедливо неравенство* $s_p^1 > 2s_p^2$, *то кольцо* $E(A)$ *— чистое.*

Доказательство. Согласно лемме 2.19, в случае, когда $fa_2 \in T(A)$, f — чистый элемент $E(A)$. В случае, когда $fa_2 \notin T(A)$, выполнено условие предложения 2.20, и f — чистый элемент $E(A)$. Таким образом, мы показали, что $E(A)$ - чистое кольцо. $\square$

Лемма 2.22. *Если для бесконечного числа простых чисел* $p \in \Lambda_2$ *справедливы неравенства* $s_p^1 < 2s_p^2$, *то кольцо* $E(A)$ *— чистое.*

Доказательство. Поскольку множество $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ — бесконечное, а множество $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ - конечное, то, как отмечалось в лемме 2.19, будут справедливы равенства 2.15 и 2.16 и, кроме того, $fa_1 \notin T(A)$.

Примем вид проекций для базисных векторов и действие эндоморфизма f на p–компонентах группы A такими же, как и в предложении 2.19.

Покажем, что в условиях данной леммы $fa_2 \notin T(A)$. Предположим противное: что $fa_2 \in T(A)$. Далее, абсолютно аналогично доказательству, изложенному в лемме 2.19, можно прийти к следующему выражению (см. вывод выражения (2.19)):

$$(p^{k_p - s_p^1}(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2} - n_1^{'})\alpha_p^1 - n_2^{'}\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2}) \vdots p^{k_p}. \tag{2.20}$$

Рассмотрим далее два случая:

1. Для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$ справедливы неравенства $s_p^2 < s_p^1 < 2s_p^2$.

2. Для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < s_p^2$.

Начнём с первого случая: для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$ справедливы неравенства $s_p^2 < s_p^1 < 2s_p^2$. Поскольку $s_p^2 < s_p^1$, то, как было показано ранее в предложении 2.19, $n_1^{'} = 0$. То есть выражение (2.20) примет вид:

$$(p^{k_p - s_p^1 + s_p^2} n^{'}\gamma_p \alpha_p^1 - n_2^{'} p^{k_p - s_p^2}) \vdots p^{k_p}.$$

Далее, поскольку $s_p^1 < 2s_p^2$, то $k_p - s_p^1 + s_p^2 > k_p - s_p^2$. Значит,

$$(p^{2s_p^2 - s_p^1} n^{'}\gamma_p \alpha_p^1 - n_2^{'}) \vdots p^{s_p^2}.$$

Следовательно, $n_2^{'} \vdots p$ для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$, то есть $n_2^{'} = 0$.

В итоге мы получили, что $n_1^{'} = 0$ и $n_2^{'} = 0$. Тогда $fa_1 \in T(A)$. Полученное противоречие доказывает, что $fa_2 \notin T(A)$.

Рассмотрим далее случай, когда справедливо второе условие: для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо неравенство $s_p^1 < s_p^2$. Тогда $k_p - s_p^1 > k_p - s_p^2$ и из выражения (2.20) будет следовать

$$(p^{s_p^2 - s_p^1}(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2} - n_1^{'})\alpha_p^1 - n_2^{'}\alpha_p^2) \vdots p^{s_p^2}.$$

Что, в свою очередь приведёт к тому, что $n_2^{'}\alpha_p^2 \vdots p^{s_p^2 - s_p^1}$ для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$. Следовательно, $n_2^{'} = 0$. В таком случае из 2.20 получим, что $(n^{'}\gamma_p p^{s_p^2} - n_1^{'}) \vdots p^{s_p^1}$, а значит $n_1^{'} \vdots p$ для бесконечного множества чисел $p \in \Lambda_2$, то есть $n_1^{'} = 0$.

В итоге мы получили, что $n_1^{'} = 0$ и $n_2^{'} = 0$. Тогда мы получим, что $fa_1 \in T(A)$. Полученное противоречие доказывает, что $fa_2 \notin T(A)$.

Таким образом, выполнено условие предложения 2.20 и f — чистый элемент $E(A)$. Следовательно, мы показали, что $E(A)$ - чистое кольцо.

□

Лемма 2.23. *Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$, то кольцо $E(A)$ - чистое.*

Доказательство. Поскольку множество $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$ — бесконечное, а множество $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ — конечное, то, как отмечалось в лемме 2.19, будут справедливы равенства 2.15 и 2.16 и, кроме того, $fa_1 \notin T(A)$.

Рассмотрим вначале случай, когда когда $fa_2 \in T(A)$. Обозначим разность множества Λ_2 и множества, для которого справедливы указанные выше равенства $s_p^1 = s_p^2$, через Λ. Сразу отметим, что если Λ — бесконечное множество, то $fa_1 \in T(A)$. Действительно, если для любого $p \in \Lambda$ будет справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$, то, с учётом условия $fa_2 \in T(A)$, согласно доказательству лемм 2.19–2.22 мы получим $n_1^{'} = 0$. Последнее, в свою очередь означает, что равенство 2.16 примет вид: $n^{'}fa_1 = n_2^{'}a_2 + a_1^t$. С другой стороны, из равенства (2.20) следует, что при выполнении равенства $s_p^1 = s_p^2$ для бесконечного множества $p \in \Lambda_2$ справедливо $n_2^{'} \vdots p$, то есть $n_2^{'} = 0$ и $fa_1 \in T(A)$. Полученное противоречие означает, что при $fa_2 \in T(A)$, равенство $s_p^1 = s_p^2$ справедливо почти для всех $p \in \Lambda_2$.

Таким образом, в данном случае нам осталось рассмотреть ситуацию, когда почти для всех $p \in \Lambda_2$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2 = s_p$. Из равенства (2.20) почти для всех $p \in \Lambda_2$ получим

$$(n_1^{'}\alpha_p^1 - n_2^{'}\alpha_p^2) \vdots p^{s_p}.$$

Перейдём в группе $A/T(A)$ к новому базису: $b_1 + T(A) = (n_1^{'}a_1 - n_2^{'}a_2) + T(A)$, $b_2 + T(A) = a_2 + T(A)$.

Рассмотрим теперь проекции вектора $b_1 = n_1^{'}a_1 - n_2^{'}a_2$: почти для всех $p \in \Lambda_2$ $\pi_p b_1 = (n_1^{'}\alpha_p^1 - n_2^{'}\alpha_p^2)p^{k_p - s_p}c_p = 0$. Таким образом, мы пришли к ситуации, описанной в начале данного параграфа, когда группу A можно представить в виде прямой суммы двух групп ранга 1 и ограниченной периодической группы:

$$A = (\bigoplus_{p\in\Lambda_1\setminus\Omega} A_p)\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Lambda_2\setminus\Omega} A_p)\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega} A_p),$$

где Ω — конечное множество простых числ, в которое входит $\mathbb{P}\setminus(\bigcup_{i=1,2}\Lambda_i)$, а также все простые числа $p\in\Lambda_2$, для которых не выполнено равенство $s_p^1 = s_p^2 = s_p$. Учитывая полученные ранее результаты для случая SP-групп ранга 1, можем утверждать, что группа A обладает чистым кольцом эндоморфизмов.

Перейдём к случаю, когда $fa_2 \notin T(A)$. Аналогично предыдущему случаю рассмотрим вначале вариант, когда разность множества Λ_2 и множества, для которого справедливы равенства $s_p^1 = s_p^2$, является бесконечным множеством (ранее мы обозначили данное множество через Λ). В этом случае мы получаем, что условия предложения 2.20 выполнены, а значит f — чистый элемент $E(A)$.

Рассмотрим ситуацию, когда $fa_2 \notin T(A)$ и почти для всех $p\in\Lambda_2$ справедливы равенства $s_p^1 = s_p^2 = s_p$.

Запишем равенство (2.15) покомпонентно: почти для всех $p\in\Lambda_2$

$$nn_p(\pi_p a_2) = \pi_p(nfa_2) = \pi_p(n_2a_2) = n_2\pi_p(a_2).$$

Следовательно, $(nn_p - n_2)\vdots p^{s_p}$ почти для всех $p\in\Lambda_2$. Тогда $nn_p =$

$p^{s_p}\delta_p + n_2$, где δ_p — некоторые целые числа. При этом очевидно, что $(n_p, p) = 1$, поскольку $fa_2 \notin T(A)$.

Далее рассмотрим покомпонентно равенство 2.16: почти для всех $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ имеем

$$n' n_p(\pi_p a_1) = \pi_p(n' f a_1) = \pi_p(n_1' a_1 + n_2' a_2) = \pi_p(n_1' a_1) = n_1' \pi_p(a_1).$$

Откуда следует, что $(n' n_p - n_1') \vdots p$ для бесконечного числа $p \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$. Следовательно, либо $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Lambda_1$, либо $n_1' = 0$.

В первом случае, аналогично доказательству леммы 2.20 (второй случай), легко показать, что существует такое прямое слагаемое C группы A, что f — мономорфизм на C, причем $A = C \bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$, а $\Omega \subseteq \mathbb{P}$ — конечное множество. Кроме того, аналогично подходу, изложенному в доказательстве леммы 2.20 (второй случай), можно показать, что существуют прообразы проекций базисных векторов на группу C, что вместе с леммами 2.16 и 2.17 означает чистоту в кольце $E(A)$.

Рассмотрим подробнее второй вариант. В этом случае равенство (2.16) покомпонентно можно представить в следующем виде: почти для всех $p \in \Lambda_2$

$$n' n_p(\pi_p a_1) = n_2' \pi_p(a_2).$$

Тогда $(n' n_p \alpha_p^1 - n_2' \alpha_p^2) \vdots p^{s_p}$. Домножим обе части равенства на n и воспользуемся равенством $nn_p = p^{s_p}\delta_p + n_2$. Получим

$$(n^{'}(p^{s_p}\delta_p + n_2)\alpha_p^1 - nn_2^{'}\alpha_p^2)\vdots p^{s_p}.$$

Отсюда следует, что $(n^{'}n_2\alpha_p^1 - nn_2^{'}\alpha_p^2)\vdots p^{s_p}$. Далее, аналогично рассуждениям, изложенным в доказательстве данной леммы для случая $fa_2 \in T(A)$, легко показать, что группу A можно представить в виде прямой суммы двух групп ранга 1 и ограниченной периодической группы, что, в свою очередь, будет означать чистоту кольца эндоморфизмов группы A.

Таким образом, для каждого из рассмотренных случаев $fa_2 \in T(A)$ и $fa_2 \notin T(A)$ мы доказали чистоту $E(A)$. $\square$

Предложение 2.24. *Если хотя бы одно из множеств* $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$, $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ *— бесконечное, то кольцо* $E(A)$ *— чистое.*

Доказательство. Как отмечалось ранее, для доказательства результата достаточно рассмотреть случай, когда $f \notin R_t$, поскольку в противном случае f — заведомо чистый элемент.

Для начала отметим, что если оба множества $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$, $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ — бесконечные, то выполнены условия леммы 2.18 и, следовательно, кольцо $E(A/T(A))$ будет чистым. Если бесконечным является только одно из указанных множеств, то не умаляя общности можно считать, что бесконечным является множество $\Lambda_1 \backslash \Lambda_2$, а множество $\Lambda_2 \backslash \Lambda_1$ — конечным.

Принимая во внимание результаты, доказанные в леммах 2.21 - 2.23, получаем, что кольцо $E(A)$ — чистое. $\square$

Далее мы переходим к доказательству последнего, третьего случая из плана доказательства основного результата данного параграфа ($\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ — бесконечное множество и при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ — конечные множества). Вначале мы проведём доказательство, когда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$ (лемма 2.25 —- 2.28).

Уточним вид проекций для базисных векторов:

$$\pi_p(a_i) = p^{k_p - s_p^i} \alpha_p^i c_p,$$

где

$\alpha_p^i \in \mathbb{Z}$, причём $(\alpha_p^i, p) = 1$;

$s_p^i \in \mathbb{N}$, причём $0 < s_p^i \leq k_p$;

c_p — образующий элемент группы A_p

и действие произвольного эндоморфизма $f \in E(A)$ на базисных векторах:

$$nfa_1 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + a_t^1,$$

$$kfa_2 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + a_t^2,$$

где $n, k \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $a_t^1, a_t^2 \in T(A)$. При этом $fc_p = n_p c_p$, c_p — образующие A_p , $n_p \in \mathbb{Z}$.

Аналогично предыдущим доказательствам мы будем рассматривать случай, когда $f \notin R_t$. Кроме того, во всех дальнейших результатах (леммы 2.25 — 2.28) будем полагать справедливость следующего условия: при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$ и почти для всех $p \in \mathbb{P}$ справедливо равенство $s_p^1 = s_p^2$.

Лемма 2.25. *Если $n_p \vdots p$ для бесконечного множества простых чисел $p \in \mathbb{P}$, то справедливы следующие утверждения:*

1. $k_2 n_1 = k_1 n_2$,
2. $k n_1 = -n k_2$,
3. $k_1, k_2, n_1, n_2 \neq 0$,
4. $n_p \vdots p$ *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. 1. Согласно условиям предложения, существует такое бесконечное множество $\Omega \subseteq \mathbb{P}$, что $n_p \vdots p$ для $p \in \Omega$. Поскольку $nfa_1 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + a_t^1$, $kfa_2 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + a_t^2$, то почти для всех $p \in \mathbb{P}$ выполнены следующие равенства:

$$nn_p \alpha_p^1 p^{k_p - s_p} c_p = (n_1 \alpha_p^1 + n_2 \alpha_p^2) p^{k_p - s_p} c_p,$$

$$kn_p \alpha_p^2 p^{k_p - s_p} c_p = (k_1 \alpha_p^1 + k_2 \alpha_p^2) p^{k_p - s_p} c_p.$$

Последние равенства равносильны следующим выражениям:

$$((nn_p - n_1)\alpha_p^1 - n_2 \alpha_p^2) \vdots p^{s_p}, \tag{2.21}$$

$$((kn_p - k_2)\alpha_p^2 - k_1\alpha_p^1)\vdots p^{s_p}. \tag{2.22}$$

Следовательно, найдутся такие целые числа γ_p и δ_p, что $(nn_p - n_1)\alpha_p^1 = n_2\alpha_p^2 + \gamma_p p^{s_p}$ и $(kn_p - k_2)\alpha_p^2 = k_1\alpha_p^1 + \delta_p p^{s_p}$. Подставим выражение для $k_1\alpha_p^1$ из второго равенства в первое, предварительно домножив последнее на k_1, получим

$$(nn_p - n_1)((kn_p - k_2)\alpha_p^2 - \delta_p p^{s_p}) = k_1 n_2 \alpha_p^2 + k_1\gamma_p p^{s_p}.$$

Откуда вытекает, что $((nn_p - n_1)(kn_p - k_2) - k_1 n_2)\vdots p^{s_p}$, или

$$(n_p(k(nn_p - n_1) - nk_2) + k_2 n_1 - k_1 n_2)\vdots p^{s_p}. \tag{2.23}$$

Тогда $(k_2 n_1 - k_1 n_2)\vdots p$ для всех $p \in \Omega$, то есть $k_2 n_1 = k_1 n_2$.

2. Учитывая, что $k_2 n_1 = k_1 n_2$, из 2.23 следует $n_p(k(nn_p - n_1) - nk_2)\vdots p^{s_p}$. Поскольку $f \notin R_t$, то $(n_p, p^{s_p}) \neq p^{s_p}$ почти для всех $p \in \Omega$, так как в противном случае $fa_1 = fa_2 = 0$. Тогда

$$(k(nn_p - n_1) - nk_2) = (knn_p - kn_1 - nk_2)\vdots p. \tag{2.24}$$

Тогда $(kn_1 + nk_2)\vdots p$, то есть $kn_1 = -nk_2$.

3. Из выражения (2.21) следует, что $(n_1\alpha_p^1 + n_2\alpha_p^2)\vdots p$ для всех $p \in \Omega$. Следовательно, в случае, если $n_1 = 0$ мы получим, что $n_2 \vdots p$ для всех $p \in \Omega$, то есть $n_2 = 0$. Аналогично, если $n_2 = 0$, то и $n_1 = 0$. Поскольку $f \notin R_t$, приходим к выводу, что $n_1, n_2 \neq 0$, так как в противном случае

$fa_1 = fa_2 = 0$. Аналогичным образом, используя выражение (2.22), легко показать, что $k_1, k_2 \neq 0$.

4. Предположим, что множество $\mathbb{P} \setminus \Omega$ является бесконечным. Тогда $(n_p, p) = 1$ для любого $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Следовательно, из 2.24, учитывая, что $kn_1 = -nk_2$, получим $knn_p \vdots p$. Поскольку $(n_p, p) = 1$, то $kn = 0$, что противоречит выбору данных чисел. Таким образом, мы показали, что множество $\mathbb{P} \setminus \Omega$ может быть только конечным, либо пустым. $\square$

Лемма 2.26. *Если $k_2 n_1 = k_1 n_2$, то $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$.*

Доказательство. Поскольку $nfa_1 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + a_t^1$, $kfa_2 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + a_t^2$, то справедливы выражения (2.21) и (2.22).

Следовательно, найдутся такие целые числа γ_p и δ_p, что

$$(nn_p - n_1)\alpha_p^1 = n_2 \alpha_p^2 + \gamma_p p^{s_p}, \tag{2.25}$$

$$(kn_p - k_2)\alpha_p^2 = k_1 \alpha_p^1 + \delta_p p^{s_p}. \tag{2.26}$$

Подставим выражение для $k_1 \alpha_p^1$ из второго равенства в первое, предварительно домножив последнее на k_1, получим

$$(nn_p - n_1)((kn_p - k_2)\alpha_p^2 - \delta_p p^{s_p}) = k_1 n_2 \alpha_p^2 + k_1 \gamma_p p^{s_p}.$$

Откуда вытекает, что $((nn_p - n_1)(kn_p - k_2) - k_1 n_2) \vdots p^{s_p}$, или

$$(n_p(k(nn_p - n_1) - nk_2) + k_2 n_1 - k_1 n_2) \vdots p^{s_p}.$$

Поскольку $k_2n_1 = k_1n_2$, то из последнего выражения получаем $n_p(k(nn_p - n_1) - nk_2)\vdots p^{s_p}$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Тогда либо $n_p \vdots p$, либо $(n_p, p) = 1$ и $k(nn_p - n_1) - nk_2)\vdots p^{s_p}$. Предположим последнее, тогда найдутся такие целые числа ε_p, что $k(nn_p - n_1) = nk_2 + \varepsilon_p p^{s_p}$. Подставим последнее выражение в (2.25), предварительно домножив последнее на k:

$$(nk_2 + \varepsilon_p p^{s_p})\alpha_p^1 = kn_2\alpha_p^2 + \gamma_p p^{s_p}.$$

Откуда получаем $nk_2\alpha_p^1 - kn_2\alpha_p^2 \vdots p^{s_p}$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, что означает $nk_2a_1 - kn_2a_2 \in T(A)$. Так как a_1, a_2 — базисные векторы, то $k_2 = n_2 = 0$ (поскольку $k, n \neq 0$).

Подставим теперь выражение для $n_2\alpha_p^2$ из равенства (2.25) в (2.26), предварительно домножив последнее на n_2, получим

$$(kn_p - k_2)((nn_p - n_1)\alpha_p^1 - \gamma_p p^{s_p}) = k_1n_2\alpha_p^2 + n_2\delta_p p^{s_p}.$$

Откуда вытекает, что $((kn_p - k_2)(nn_p - n_1) - k_1n_2)\vdots p^{s_p}$, или

$$(n_p(n(kn_p - k_2) - kn_1) + k_2n_1 - k_1n_2)\vdots p^{s_p}.$$

Поскольку $k_2n_1 = k_1n_2$, то из последнего выражения получаем $n_p(n(kn_p - k_2) - kn_1)\vdots p^{s_p}$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Так как согласно предположению $(n_p, p) = 1$, то $(n(kn_p - k_2) - kn_1)\vdots p^{s_p}$. Тогда найдутся такие целые числа σ_p, что $n(kn_p - k_2) = kn_1 + \sigma_p p^{s_p}$. Подставим последнее выражение в (2.26), предварительно домножив последнее на n:

$$(kn_1 + \sigma_p p^{s_p})\alpha_p^2 = nk_1\alpha_p^1 + \delta_p p^{s_p}.$$

Откуда получаем $kn_1\alpha_p^2 - nk_1\alpha_p^2 \vdots p^{s_p}$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, что означает $kn_1a_2 - nk_1a_1 \in T(A)$. Так как a_1, a_2 — базисные векторы, то $k_2 = n_2 = 0$. Но в таком случае $f \notin R_t$, что противоречит условиям предложения. Значит, $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. $\square$

Лемма 2.27. *Если $n_p \vdots p$ для бесконечного множества $p \in \mathbb{P}$, то f — чистый элемент $E(A)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.25 выполнены равенства:

$$k_2n_1 = k_1n_2, \tag{2.27}$$

$$kn_1 = -nk_2, \tag{2.28}$$

кроме того, $k_1, k_2, n_1, n_2 \neq 0$ и $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = 1$, обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n, k, k_1.

Рассмотрим прямое разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм $u = 1 - f$ является автоморфизмом группы C. В виду выбора множества Ω очевидно, что $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$.

Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство:

$$mb_1 = m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2),$$

где $m = -k_1 k x$, $m_1 = k_1 x(k_2 - k)$, $m_2 = k_2^2 x$, $x \in \Omega$.

В таком случае справедливы следующие равенства:

$$mnkub_1 = nku(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2) + b_t) =$$

$$nk(1-f)(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2) + b_t) =$$

$$nk(m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2)) - m_1k(n_1\pi_C(a_1) +$$

$$n_2\pi_C(a_2)) - m_2n(k_1\pi_C(a_1) + k_2\pi_C(a_2)) + b_t^{'} =$$

$$(nkm_1 - m_1kn_1 - m_2nk_1)\pi_C(a_1) + (nkm_2 - m_1kn_2 - m_2nk_2)\pi_C(a_2) + b_t^{'},$$

где $b_t^{'} \in T(C)$. Убедимся в справедливости следующих равенств:

$$nkm_1 + m_1kn_1 + m_2nk_1 = mnk, \tag{2.29}$$

$$nkm_2 - m_1kn_2 - m_2nk_2 = 0. \tag{2.30}$$

Домножим равенство (2.30) на k_1 и с учётом выражения (2.28) получим

$$k_1nkm_2 + m_1nk_2^2 - k_1m_2nk_2 =$$

$$nk_2(-m_1k_2 + k_1m_2) - nk_1km_2 = n(k_2(-m_1k_2 + k_1m_2) - k_1km_2) =$$

$$n(k_2(-k_1x(k_2 - k)k_2 + k_1k_2^2x) - k_1kk_2^2x) =$$

$$n(k_2k_1kxk_2 - k_1kk_2^2x) = 0.$$

Домножим равенство (2.29) на k_2 и с учётом последнего выражения и выражения 2.28 получим

$$k_2(nkm_1 + m_1kn_1 + m_2nk_1) = k_2(nkm_1 - m_1nk_2 + m_2nk_1) =$$

$$k_2nkm_1 + k_2n(-m_1k_2 + m_2k_1) = k_2nkm_1 - nk_1km_2 =$$

$$nk(k_2m_1 - k_1m_2) = nk(k_2k_1x(k_2 - k)) - k_1k_2^2x) =$$

$$-nk(k_2k_1kx) = mnkk_2.$$

Таким образом, мы получаем, что $mnkub_1 = mnk\pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $mnk(ub_1 - \pi_C(a_1)) = 0$, что в свою очередь приводит к равенству $kk_1kn(ub_1 - \pi_C(a_1)) = 0$.

Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: n, k, k_1. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $ub_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. С другой стороны, поскольку $b_1 \in C$, то $ub_1 - \pi_C(a_1) \in C$, что в сумме с предыдущим выводом даёт равенство $ub_1 - \pi_C(a_1) = 0$.

Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $lb_1 = l_1\pi_C(a_1) + l_2\pi_C(a_2)$, где $l = k$, $l_1 = k_1$, $l_2 = k + k_2$.

Согласно предложению 2.16 u — автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит f — чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из предложения 2.17 следует, что f — чистый элемент кольца $E(A)$. $\square$

Лемма 2.28. *Если* $(n_p, p) = 1$ *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$, *то* f *— чистый* *элемент* $E(A)$.

Доказательство. Согласно условиям леммы $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = p$ обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел $n, k, (k_1 n_2 - k_2 n_1)$.

Рассмотрим прямое разложение $A = C \bigoplus (\bigoplus_{p \in \Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм f является автоморфизмом группы C. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $f \mid_{A_p}$ — автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$.

Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство:

$$mb_1 = m_1 \pi_C(a_1) + m_2 \pi_C(a_2),$$

где $m = k_2 n_1 - k_1 n_2$, $m_1 = nk_2$, $m_2 = -kn_2$. Принимая во внимание лемму 2.26, легко показать, что $k_2 n_1 - k_1 n_2 \neq 0$ и k_1, n_1 не могут одновременно равняться нулю, что также справедливо и для k_2, n_2.

В таком случае справедливо следующее равенство:

$$mnkfb_1 = nkf(m_1 a_1 + m_2 a_2 + b_t) =$$

$$m_1 k(n_1 a_1 + n_2 a_2) + m_2 n(k_1 a_1 + k_2 a_2) + b_t^{'} =$$

$$(m_1 k n_1 + m_2 n k_1) a_1 + (m_1 k n_2 + m_2 n k_2) a_2 + b_t^{'},$$

где $b'_t \in T(C)$. Покажем справедливость следующих равенств:

$$m_1 k n_1 + m_2 n k_1 = mnk, \tag{2.31}$$

$$m_1 k n_2 + m_2 n k_2 = 0. \tag{2.32}$$

Рассмотрим сначала равенство 2.31:

$$m_1 k n_1 + m_2 n k_1 = n k_2 k n_1 - k n_2 n k_1 = nk(k_2 n_1 - k_1 n_2) = nkm.$$

Теперь докажем равенство 2.32:

$$m_1 k n_2 + m_2 n k_2 = n k_2 k n_2 + -k n_2 n k_2 = 0.$$

Таким образом, мы получаем, что $mnkfb_1 = mnk\pi_C(a_1)$. Отсюда следует, что $mnk(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$, что в свою очередь приводит к $kn(k_2n_1 - k_1n_2)(fb_1 - \pi_C(a_1)) = 0$.

Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: $n, k, k_2n_1 - k_1n_2$. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $fb_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. С другой стороны, поскольку $b_1 \in C$, то $fb_1 - \pi_C(a_1) \in C$, что в сумме с предыдущим выводом даёт равенство $fb_1 - \pi_C(a_1) = 0$.

Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $lb_1 = l_1\pi_C(a_1) + l_2\pi_C(a_2)$, где $l = k_1n_2 - k_2n_1$, $l_1 = k_1 n$, $l_2 = -kn_1$.

Согласно лемме 2.16 f — автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $f\mid_{A_p}$ — автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит f - чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 2.17 следует, что f — чистый элемент кольца $E(A)$. □

Лемма 2.29. *Если при любом выборе базисных векторов* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ *— конечные множества и почти для всех* $p \in \mathbb{P}$ *справедливо равенство* $s_p^1 = s_p^2$, *то* $E(A)$ *— чистое кольцо.*

Доказательство. Заметим, что не умаляя общности можно считать, что $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$, поскольку прямые суммы p–компонент, относящихся к множествам $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ и $\mathbb{P} \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$, можно выделить конечными прямыми слагаемыми, каждое из которых согласно [18] будет обладать чистым кольцом эндоморфизмов и будет вполне характеристической подгруппой. Тогда, учитывая [19], вопрос изучения чистоты $E(A)$ сведётся к прямому слагаемому, являющемуся дополнением к указанным выше прямым слагаемым, то есть к $A \bigcap (\prod_{p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} A_p)$.

Пусть $f \in E(A)$. Сразу заметим, что в случае, когда $f \in R_t$, согласно предыдущим результатам f — чистый элемент $E(A)$. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $f \notin R_t$. В этом случае, согласно леммам 2.27, 2.28 f — чистый элемент $E(A)$. □

Теперь, для завершения доказательства третьего случая из плана доказательства основного результата нам остаётся рассмотреть условие, когда для бесконечного множества простых чисел $p \in \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$ (леммы 2.30 — 2.34). Аналогично предыдущим доказательствам будем считать, что $f \notin R_t$. Кроме того, во всех дальнейших результатах (лемма 2.30 — 2.33) будем полагать справедливость следующего условия: при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$ и для всех $p \in \Omega$ справедливо неравенство $s_p^1 > s_p^2$ ($\Omega \subseteq \mathbb{P}$ — бесконечное множество).

Лемма 2.30. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $kfa_2 = k_2a_2 + a_t^2$;
2. *если* $n_p \vdots p$ *для бесконечного числа* $p \in \Omega$, *то*
   - $nfa_1 = n_2a_2 + a_t^1$,
   - $fa_2 \in T(A)$, *то есть* $n_p \vdots p$ *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$,
   - *почти для всех* $p \in \mathbb{P}$ *справедливо неравенство* $s_p^1 > s_p^2$;
3. *если* $(n_p, p) = 1$ *почти для всех* $p \in \Omega$, *то* $k_2, n_1 \neq 0$.

Доказательство. Поскольку $f \in E(A)$, то найдутся такие $n, k \in \mathbb{N}$ $n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $a_t^1, a_t^2 \in T(A)$, что будут справедливы следующие равенства:

$$nfa_1 = n_1a_1 + n_2a_2 + a_t^1,$$

$$kfa_2 = k_1a_1 + k_2a_2 + a_t^2.$$

Тогда почти для всех $p \in \mathbb{P}$ выполнены следующие равенства:

$$nn_p\alpha_p^1 p^{k_p - s_p^1} c_p = (n_1\alpha_p^1 p^{k_p - s_p^1} + n_2\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2})c_p,$$

$$kn_p\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2} c_p = (k_1\alpha_p^1 p^{k_p - s_p^1} + k_2\alpha_p^2 p^{k_p - s_p^2})c_p.$$

Последние равенства равносильны следующим выражениям:

$$((nn_p - n_1)p^{k_p - s_p^1}\alpha_p^1 - n_2 p^{k_p - s_p^2}\alpha_p^2) \vdots p^{k_p},$$

$$((kn_p - k_2)p^{k_p - s_p^2}\alpha_p^2 - k_1 p^{k_p - s_p^1}\alpha_p^1) \vdots p^{k_p}.$$

Согласно условиям предложения для всех $p \in \Omega \subseteq \mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1 > s_p^2$, следовательно, из последних выражений получаем

$$((nn_p - n_1)\alpha_p^1 - n_2 p^{s_p^1 - s_p^2}\alpha_p^2) \vdots p^{s_p^1}, \tag{2.33}$$

$$((kn_p - k_2)p^{s_p^1 - s_p^2}\alpha_p^2 - k_1\alpha_p^1) \vdots p^{s_p^1}. \tag{2.34}$$

Тогда $(nn_p - n_1) \vdots p^{s_p^1}$ и $k_1 \vdots p^{s_p^1}$, что в свою очередь означает $k_1 = 0$. Поскольку $k_1 = 0$, из 2.34 мы получаем $(kn_p - k_2)p^{s_p^1 - s_p^2}\alpha_p^2 \vdots p^{s_p^1}$. Следовательно, $(kn_p - k_2) \vdots p^{s_p^2}$.

2. Пусть $n_p \vdots p$ для бесконечного числа $p \in \Omega$, следовательно, $(nn_p - n_1) \vdots p^{s_p^1}$ приводит к $n_1 \vdots p^{s_p^1}$, что означает $n_1 = 0$ и $nfa_1 = n_2a_2 + a_t^1$. Кроме того, поскольку $(kn_p - k_2) \vdots p^{s_p^2}$, из 2.34 мы получаем $k_2 \vdots p$, что в

свою очередь означает $k_2 = 0$ или $fa_2 \in T(A)$, то есть $n_p \vdots p^{s_p^2}$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$.

Заметим, что $s_p^1 \neq s_p^2$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, так как в противном случае, учитывая, что $n_p \vdots p^{s_p^2}$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$ согласно доказательству леммы 2.25, мы получили бы, что $k_1 \neq 0$. А это противоречит сделанным ранее выводам. Если предположить, что $s_p^1 < s_p^2$ для бесконечного числа $p \in \mathbb{P}$, то, переобозначив базисные векторы, мы получим, согласно проведённым ранее размышлениям, $fa_1 \in T(A)$, то есть $f \in R_t$, что противоречит условиям предложения. Таким образом, $s_p^1 > s_p^2$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$.

3. Пусть $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Omega$. Тогда, учитывая, что $(nn_p - n_1) \vdots p^{s_p^1}$ и $(kn_p - k_2) \vdots p^{s_p^2}$, получим $k_2, n_1 \neq 0$, так как в противном случае $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \Omega$. $\square$

Лемма 2.31. *Пусть $f \in E(A)$ и $n_p \vdots p$ для бесконечного множества чисел $p \in \Omega$, тогда f — чистый элемент $E(A)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.30 неравенство $s_p^1 > s_p^2$ справедливо почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Кроме того, $fa_2 \in T(A)$, то есть $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$ и $nfa_1 = n_2a_2 + a_t^1$, где $n, n_2, \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_t^1 \in T(A)$.

Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = 1$, обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении числа n.

Рассмотрев прямое разложение $A = C\bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$, докажем, что эндоморфизм $u = 1 - f$ является автоморфизмом группы C. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P}\setminus\Omega$. Докажем, что существует также прообраз элемента $\pi_C(a_1)$.

Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство:

$$mb_1 = m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2),$$

где $m = n$, $m_1 = n$, $m_2 = n_2$.

В таком случае справедливо следующее равенство:

$$mnub_1 = nu(m_1\pi_C a_1 + m_2\pi_C a_2) = n(1-f)(m_1\pi_C a_1 + m_2\pi_C a_2) =$$

$$n(m_1\pi_C a_1+m_2\pi_C a_2)-m_1n_2\pi_C a_2+b_t^{'} = nm_1\pi_C a_1+(nm_2\pi_C a_2-m_1n_2\pi_C a_2)+b_t^{'} =$$

$$nn\pi_C a_1 + (nn_2\pi_C a_2 - nn_2\pi_C a_2) + b_t^{'} = mn\pi_C a_1 + b_t^{'}.$$

Таким образом, мы получаем, что $mnub_1 = n^2\pi_C(a_1) + b_t^{'}$. Отсюда следует, что $n^2(ub_1 - \pi_C(a_1)) \in T(C)$, что в свою очередь приводит к $n^2(ub_1 - \pi_C(a_1)) \in C$.

Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении n. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $ub_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. С другой стороны, $ub_1 - \pi_C(a_1) \in C$, что в сумме с предыдущим выводом даёт равенство $ub_1 - \pi_C(a_1) = 0$.

Поскольку $fa_2 \in T(A)$, то найдётся такой элемент $a_t^2 \in T(A)$, что $fa_2 = a_t^2$. Тогда $ua_2 = (1-f)a_2 = a_2 - a_t^2$, то есть $a_2 = ua_2 + a_t^2$. Поскольку $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, то существует такой $b_t^2 \in T(A)$, что $fb_t^2 = a_t^2$. Тогда $a_2 = u(a_2 + b_t^2)$.

Согласно лемме 2.16 u — автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов, и $u\mid_{A_p}$ — автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$. Значит, f - чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 2.17 следует, что f — чистый элемент кольца $E(A)$. □

Лемма 2.32. *Пусть $f \in E(A)$ и $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, тогда f — чистый элемент $E(A)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.30 $kfa_2 = k_2a_2 + a_t^2$, кроме того $k_2, n_1 \neq 0$. Согласно условиям леммы $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$. Множество всех тех $p \in \mathbb{P}$, для которых $(n_p, p) = p$, обозначим через Ω. Добавим к нему также все простые числа $p \in \mathbb{P}$, которые участвуют в разложении чисел n, k, k_2, n_1.

Рассмотрим прямое разложение $A = C \bigoplus(\bigoplus_{p\in\Omega} A_p)$ и докажем, что эндоморфизм f является автоморфизмом группы C. Ввиду выбора множества Ω очевидно, что $f\mid_{A_p}$ — автоморфизм для всех $p \in \mathbb{P}\setminus\Omega$. Докажем, что существуют также прообразы для элементов $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$.

Заметим, что в лемме 2.28 было доказано, что для эндоморфизма f, удовлетворяющего условию $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, существуют прообразы для элементов $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$. В таком случае необходимо проверить, будут ли найденные в лемме 2.28 элементы прообразами для $\pi_C(a_1)$ и $\pi_C(a_2)$ в условиях данного предложения: $kfa_2 = k_2a_2 + a_t^2$, $k_2, n_1 \neq 0$.

Рассмотрим элемент $b_1 \in C$, для которого справедливо равенство:

$$mb_1 = m_1\pi_C(a_1) + m_2\pi_C(a_2),$$

где $m = k_2n_1 - k_1n_2 = k_2n_1$, $m_1 = nk_2$, $m_2 = -kn_2$.

В таком случае справедливо следующее равенство:

$$mnkfb_1 = nkf(m_1\pi_C a_1 + m_2\pi_C a_2) =$$

$$m_1k(n_1\pi_C a_1 + n_2\pi_C a_2) + m_2nk_2\pi_C a_2 + b_t =$$

$$m_1kn_1\pi_C a_1 + (m_1kn_2 + m_2nk_2)\pi_C a_2 + b_t =$$

$$nk_2kn_1\pi_C a_1 + (nk_2kn_2 - kn_2nk_2)\pi_C a_2 + b_t = nkm\pi_C a_1 + b_t.$$

Таким образом, мы получаем, что $mnkfb_1 = mnk\pi_C(a_1) + b_t$. Отсюда следует, что $mnk(fb_1 - \pi_C(a_1)) \in T(C)$, что в свою очередь приводит к включению $knk_2n_1(fb_1 - \pi_C(a_1)) \in T(C)$.

Напомним, что в множество Ω входят все простые числа из $\mathbb{P}$, которые участвуют в разложении следующих чисел: n, k, k_2, n_1. Учитывая этот факт, можем утверждать, что $fb_1 - \pi_C(a_1) \in \bigoplus_{p\in\Omega} A_p$. С другой стороны, поскольку $fb_1-\pi_C(a_1) \in C$, то в сумме с предыдущим выводом приходим к равенству $fb_1 - \pi_C(a_1) = 0$.

Аналогично можно показать, что для элемента $\pi_C(a_2)$ прообразом будет элемент $b_2 \in C$, для которого справедливо равенство $lb_1 = l_1\pi_C(a_1)+ l_2\pi_C(a_2)$, где $l = -k_2n_1$, $l_1 = 0$, $l_2 = -kn_1$.

Согласно лемме 2.16 f — автоморфизм группы C, поскольку существуют прообразы для каждого из базисных векторов и $f\mid_{A_p}$ — автоморфизм почти для всех $p \in \mathbb{P}\setminus\Omega$. Значит, f — чистый элемент кольца эндоморфизмов группы C. Тогда из леммы 2.17 следует, что f — чистый элемент кольца $E(A)$. $\square$

Лемма 2.33. *Пусть $f \in E(A)$ и $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \Omega$, тогда f — чистый элемент $E(A)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.30 $kfa_2 = k_2a_2 + a_t^2$, кроме того $k_2, n_1 \neq 0$.

Предположим, что почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$ выполнено равенство $s_p^1 = s_p^2$. Согласно доказательству леммы 2.25, $(n_p, p) = 1$ почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$, так как в противном случае $k_1 \neq 0$.

Рассмотрим альтернативный случай, когда почти для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \Omega$ выполнено неравенство $s_p^1 \neq s_p^2$. Предположим, что для бесконечного множества чисел $p \in \mathbb{P} \subseteq \Omega$ справедливо $n_p \vdots p$. Тогда согласно лемме 2.30 $n_p \vdots p$ почти для всех $p \in \mathbb{P}$, что противоречит условиям предложения. Следовательно, $(n_p,p)=1$ почти для всех $p\in\mathbb{P}$.

Таким образом, $(n_p,p)=1$ почти для всех $p\in\mathbb{P}$. Тогда согласно лемме 2.32, f — чистый элемент $E(A)$. □

Лемма 2.34. *Если при любом выборе базисных векторов $\Lambda_1\backslash\Lambda_2$, $\Lambda_2\backslash\Lambda_1$ — конечные множества и для бесконечного множества чисел $p\in\mathbb{P}$ справедливо неравенство $s_p^1\neq s_p^2$, то $E(A)$ — чистое кольцо.*

Доказательство. Заметим, что не умаляя общности можно считать, что $\Lambda_1=\Lambda_2=\mathbb{P}$, поскольку прямые суммы p–компонент, относящихся к множествам $\Lambda_1\setminus\Lambda_2$, $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ и $\mathbb{P}\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2)$ можно выделить конечными прямыми слагаемыми, каждое из которых согласно [18] будет обладать чистым кольцом эндоморфизмов и будет вполне характеристической подгруппой. Тогда, учитывая [19], вопрос изучения чистоты кольца $E(A)$ сведётся к прямому слагаемому, являющемуся дополнением к указанным выше прямым слагаемым, то есть к $A\bigcap(\prod_{p\in\Lambda_1\cap\Lambda_2}A_p)$.

Пусть $f\in E(A)$. Сразу заметим, что в случае, когда $f\in R_t$, согласно предыдущим результатам f — чистый элемент $E(A)$. Поэтому далее рассмотрим случай, когда $f\notin \mathrm{Hom}(A,T(A))$. В этом случае, согласно леммам 2.31, 2.33 f — чистый элемент $E(A)$. □

Следующее предложение завершает доказательство третьего случая из предложенного плана доказательства основного результата и непосредственно следует из лемм 2.29 и 2.34.

Предложение 2.35. *Если при любом выборе базисных векторов* $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2$, $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$ *— конечные множества, то* $E(A)$ *— чистое кольцо.*

Таким образом, мы доказали основной результат данного раздела.

Следующее предложение даёт пример эндоморфизма, удовлетворяющего условиям леммы 2.25, а также предлагает некоторый алгоритм построения эндоморфизмов рассмотренных групп.

Предложение 2.36. *Пусть группа* A *удовлетворяет условиям, описанным в начале данного параграфа. При этом при любом выборе базисных векторов* $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{P}$, *и почти для всех* $p \in \mathbb{P}$ *справедливо равенство* $s_p^1 = s_p^2$. *Тогда можно выбрать базисные векторы* a_1, a_2 *так, что найдётся эндоморфизм* f *для которого* $f\,|_{A_p}$ *не является мономорфизмом почти для всех* $p \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Напомним вид проекций для базисных векторов:

$$\pi_p(a_i) = p^{k_p - s_p^i} \alpha_p^i c_p, \tag{2.35}$$

где

$\alpha_p^i \in \mathbb{Z}$, причём $(\alpha_p^i, p) = 1$;

$s_p^i \in \mathbb{N}$, причём $0 < s_p^i \le k_p$;

c_p — образующий элемент группы A_p.

Запишем α_p^1 и α_p^2 в следующем виде:

$$\alpha_p^1 = f(p) = \sum_{i=0}^{l_1} B_i^1 p^i, \tag{2.36}$$

$$\alpha_p^2 = g(p) = \sum_{i=0}^{l_2} B_i^2 p^i, \tag{2.37}$$

где $B_i^1, B_i^2 \in \mathbb{Z}$, причем $(B_0^1, p) = 1$ и $(B_0^2, p) = 1$.

Положим

$l_1 = l_2 = s_p - 1$,

$B_i^1 = -(n_2 + k_2)$, $B_i^2 = (n_1 + k_1)$ для $i = 1, \ldots, s_p - 2$,

$B_{s_p-1}^1 = B_0^1 + k\gamma_p$, $B_{s_p-1}^2 = B_0^2 - n\gamma_p$,

где $n_1, n_2, k_1, k_2, \gamma_p \in \mathbb{Z}$, $k, n \in \mathbb{N}$, причём $(\gamma_p, p) = 1$, $(k, n) = 1$, $n_2 \neq -k_2, n_1 \neq -k_1$, и выполнены следующие равенства:

$$n_1 k_2 = n_2 k_1, \tag{2.38}$$

$$n_1 k = -n k_2. \tag{2.39}$$

Заметим, что построенные таким образом векторы a_1, a_2 являются базисными для группы A. Действительно, предположим, что нашлись такие целые m_1, m_2, что $m_1 a_1 + m_2 a_2 \in T(A)$, тогда $(m_1\alpha^1 + m_2\alpha^2) \vdots p^{s_p}$ почти для всех $p \in \Lambda$. Последнее выражение, с учётом равенств 2.36, 2.37, можно записать в следующем виде:

$$(m_1 B_0^1 + m_2 B_0^2) + \sum_{i=1}^{s_p-1} (m_1 B_i^1 + m_2 B_i^2) p^i \vdots p^{s_p}. \tag{2.40}$$

Откуда следует, что $(m_1B_0^1+m_2B_0^2)\vdots p$, следовательно, $m_1B_0^1+m_2B_0^2=0$. Поскольку $B_i^1 = B_0^1$ и $B_i^2 = B_0^2$ для $i = 1,\ldots,s_p-2$, то из (2.40) следует $(m_1B_{s_p-1}^1+m_2B_{s_p-1}^2) = (m_1(B_0^1+k\gamma_p)+m_2(B_0^2-n\gamma_p)) = (m_1k\gamma_p-m_2n\gamma_p)\vdots p$. Значит, $m_1k = m_2n$. Учитывая, что $(k,n)=1$, получим $m_1 = m_2 = 0$, либо $m_1 = n$ и $m_2 = k$ (с точностью до общего множителя). Рассмотрим подробнее второй вариант. В этом случае получим:

$$0 = m_1B_0^1 + m_2B_0^2 = -n(n_2+k_2) + k(n_1+k_1).$$

С учётом равенства (2.38) последнее равенство можно преобразовать следующим образом:

$$-nn_2 + 2kn_1 + kk_1 = 0.$$

Заметим, что из равенства (2.39) легко получить следующее выражение: $n_1^2k = -nk_1n_2$. Тогда, с его учётом, из последнего равенства после умножения на k_1 получим:

$$n_1^2k + 2kn_1k_1 + kk_1^2 = k(n_1^2+2n_1k_1+k_1^2) = k(n_1+k_1)^2 = 0.$$

Последнее означает, что $n_1 = -k_1$, что противоречит выбору чисел n_1 и k_1. Полученное противоречие доказывает, что векторы a_1, a_2 являются базисными для группы A.

Зададим гомоморфзим f из группы A в $\prod\limits_{p\in\Lambda} A_p$: на p–компонентах группы A полагаем

$$fc_p = n_pc_p,$$

где $n_p = p^{s_p-1}\gamma_p$. Покажем, что $f \in E(A)$. Для этого достаточно доказать справедливость следующих равенств:

$$nfa_1 = n_1a_1 + n_2a_2 + a_1^t, \tag{2.41}$$

$$kfa_2 = k_1a_1 + k_2a_2 + a_2^t., \tag{2.42}$$

где $a_1^t, a_2^t \in T(A)$.

Запишем последние два равенства покомпонентно: почти для всех $p \in \Lambda$

$$nn_p\alpha_p^1 p^{k_p-s_p}c_p = (n_1\alpha_p^1 + n_2\alpha_p^2)p^{k_p-s_p}c_p,$$

$$kn_p\alpha_p^2 p^{k_p-s_p}c_p = (k_1\alpha_p^1 + k_2\alpha_p^2)p^{k_p-s_p}c_p.$$

Последние равенства равносильны следующим выражениям:

$$nn_p\alpha_p^1 - (n_1\alpha_p^1 + n_2\alpha_p^2) \vdots p^{s_p}, \tag{2.43}$$

$$kn_p\alpha_p^2 - (k_1\alpha_p^1 + k_2\alpha_p^2) \vdots p^{s_p}. \tag{2.44}$$

Проверим справедливость выражений (2.43) — (2.44). Начнём с первого:

$$nn_p\alpha_p^1 - (n_1\alpha_p^1 + n_2\alpha_p^2) =$$
$$n\gamma_p \sum_{i=s_p-1}^{2(s_p-1)} B^1_{i-(s_p-1)}p^i - (n_1\sum_{i=0}^{s_p-1} B_i^1 p^i + n_2 \sum_{i=0}^{s_p-1} B_i^2 p^i) =$$

$$n\gamma_p \sum_{i=s_p}^{2(s_p-1)} B^1_{i-(s_p-1)} p^i + (n\gamma_p B^1_0 - n_1 B^1_{s_p-1} - n_2 B^2_{s_p-1}) p^{s_p-1} - \sum_{i=0}^{s_p-2} (n_1 B^1_i + n_2 B^2_i) p^i.$$

Рассмотрим отдельно выражение $(n_1 B^1_i + n_2 B^2_i)$ для $i = 1, \ldots, s_p - 2$: с учётом равенства (2.38) получим:

$$(n_1 B^1_i + n_2 B^2_i) = (-n_1(n_2 + k_2) + n_2(n_1 + k_1)) =$$

$$-n_1 k_2 + n_2 k_1 = 0.$$

Тогда $\sum_{i=0}^{s_p-2} (n_1 B^1_i + n_2 B^2_i) p^i = 0$. Теперь отдельно рассмотрим выражение $n\gamma_p B^1_0 - n_1 B^1_{s_p-1} - n_2 B^2_{s_p-1}$. С учётом равенств 2.38, 2.39 получим:

$$n\gamma_p B^1_0 - n_1 B^1_{s_p-1} - n_2 B^2_{s_p-1} =$$

$$= n\gamma_p B^1_0 - n_1(B^1_0 + k\gamma_p) - n_2(B^2_0 - n\gamma_p) =$$

$$= -n\gamma_p(n_2 + k_2) - n_1 k\gamma_p + n_2 n\gamma_p = -\gamma_p(nk_2 + n_1 k) = 0.$$

В таком случае

$$n n_p \alpha^1_p - (n_1 \alpha^1_p + n_2 \alpha^2_p) =$$
$$(n\gamma_p \sum_{i=s_p}^{2(s_p-1)} B^1_{i-(s_p-1)} p^i) \vdots p^{s_p}.$$

Таким образом, справедливость выражения (2.43) доказана.

Теперь проведём аналогичную проверку для выражения (2.44):

$$k n_p \alpha^2_p - (k_1 \alpha^1_p + k_2 \alpha^2_p) =$$

$$k\gamma_p \sum_{i=s_p-1}^{2(s_p-1)} B^2_{i-(s_p-1)} p^i - (k_1 \sum_{i=0}^{s_p-1} B^1_i p^i + k_2 \sum_{i=0}^{s_p-1} B^2_i p^i) =$$

$$k\gamma_p \sum_{i=s_p}^{2(s_p-1)} B^2_{i-(s_p-1)} p^i + (k\gamma_p B^2_0 - k_1 B^1_{s_p-1} - k_2 B^2_{s_p-1}) p^{s_p-1} - \sum_{i=0}^{s_p-2} (k_1 B^1_i + k_2 B^2_i) p^i.$$

Аналогично предыдущему случаю легко показать, что $(k_1 B^1_i + k_2 B^2_i) = 0$ для $i = 1, \ldots, s_p - 2$.

Теперь отдельно рассмотрим выражение $k\gamma_p B^2_0 - k_1 B^1_{s_p-1} - k_2 B^2_{s_p-1}$. С учётом равенств 2.38, 2.39 получим:

$$k\gamma_p B^2_0 - k_1 B^1_{s_p-1} - k_2 B^2_{s_p-1} =$$

$$= k\gamma_p B^2_0 - k_1 (B^1_0 + k\gamma_p) - k_2 (B^2_0 - n\gamma_p) =$$

$$= k\gamma_p (n_1 + k_1) - k_1 k\gamma_p + k_2 n\gamma_p = \gamma_p (kn_1 + k_2 n) = 0.$$

В таком случае

$$kn_p\alpha^2_p - (k_1\alpha^1_p + k_2\alpha^2_p) =$$
$$(k\gamma_p \sum_{i=s_p}^{2(s_p-1)} B^2_{i-(s_p-1)} p^i) \vdots p^{s_p}.$$

Таким образом, справедливость выражения (2.44) доказана и f — эндоморфизм группы A. $\square$

Литература

[1] Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов — М.: Факториал Пресс, 2006.

[2] Крылов П.А. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика. — 2000. — Т. 269. — С. 29–34.

[3] Крылов П.А. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004. — Т.43, №1 — С. 60–76.

[4] Туганбаев А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы — М.: Мир, 1974.

[6] Ara P. Extensions of exchange rings //J. Algebra — 1997. — Vol. 197. — P. 409-423.

[7] Borooah G., Diesl A.J., Dorsey T.J. Strongly clean triangular matrix rings over local rings // J. Algebra — 2007. — Vol. 312. — P. 773-797.

[8] Borooah G., Diesl A.J., Dorsey T.J. Strongly clean matrix rings over commutative local rings // Journal of Pure and Applied Algebra — 2008. — Vol. 212. — P. 281-296.

[9] Camillo V.P., Hua-Ping Yu. Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, №12. — P. 4737-4749.

[10] Camillo V.P., Khurana D. A characterization of unit–regular rings // Commun. Algebra . — 2001. — Vol. 29, №6. — P. 2293–2295.

[11] Camillo V.P., Khurana D., Lam T.Y., Nicholson W.K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. — 2006. — Vol. 304. — P. 94–111.

[12] Chen W. A question on strongly clean rings // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34, №7. — P. 2374–2350.

[13] Chen J., Yang X., Zhou Y. When is the 2×2 matrix ring over a commutative local ring strongly clean? // J. Algebra. — 2006. — Vol. 301. — P. 280-293.

[14] Chen J., Yang X., Zhou Y. On strongly clean matrix and trianglular matrix rings // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34, №10. — P. 3659–3674.

[15] Couchot F. Strong cleanness of matrix rings over commutative rings // Commun. Algebra. — 2008. — Vol. 26, №2. — P. 346-351.

[16] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian groups and modules, Trends in Math. — 1999. — P. 87-100.

[17] Fuchs L. Recent Results and Problems on Abelian Groups // Topics in Abelian Groups, Scott Foresman. Chicago. — 1963. — P. 9-40.

[18] Goldsmith B., Vámos P. A note on clean abelian groups // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. — 2007. — Vol. 117. — P. 181–191.

[19] Han J., Nicholson W.K. Extension of clean rings // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, №6. — P. 2589–2595.

[20] Handelman D. Perspectivity and cancellation in regular rings //J. Algebra — 1977. — Vol. 48. — P. 1–16.

[21] Li Y. Strongly clean matrix rings over local rings // J. Algebra — 2007. — Vol. 312. — P. 397-404.

[22] Meehan C. Sums of automorphisms of free Abelian groups and modules // Proc. Royal Irish Academy. — 2004. — Vol. 104A. — P. 59-66.

[23] Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977.– Vol. 229. — P. 269–278.

[24] Nicholson W.K. Strongly clean rings and Fitting's lemma // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27. — P. 3583–3592.

[25] Nicholson W.K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings // Arch. Math. — 2004. — Vol. 83. — P. 340–343.

[26] Nicholson W.K., Zhou Y. Clean general rings //J. Algebra — 2005. — Vol. 291. — P. 297–311.

[27] Nicholson W.K., Zhou Y. Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit //Glasgow Math. J. — 2004. — Vol. 46. — P. 227-236.

[28] Searcóid M. Ó. Perturbation of linear operators by idempotents // Irish Math. Soc. Bulletin. — 1997. — Vol. 39. — P. 10-13.

[29] Yang X. A survey of strongly clean rings // Appl Math. — 2009. — Vol. 108. — P. 157-173.

[30] Yang Y., Zhou Y. Strong cleanness of the 2×2 matrix ring over a general local ring // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320. — P. 2280-2290.

Статьи, опубликованные в журналах, которые включены в перечень российских рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертаций:

[1*] Сорокин К. С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 105–108.

[2*] Sorokin K. S. Completely decomposable abelian groups with clean endomorphism rings // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 197, № 5. — P. 655-657.

[3*] Сорокин К. С. SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика — 2014. — № 4(30). — С. 24–36.

Статьи в других научных изданиях:

[4*] Сорокин К. С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы: материалы всероссийского симпозиума (Бийск, 19–25 авг., 2010). — Бийск, 2010. — С. 49–52.

[5*] Сорокин К. С. Прямые суммы циклических абелевых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов //Научная студенческая конференция механико-математического факультета: сборник тезисов конференции (Томск, 12–19 апр., 2011). — Томск, 2011. — С. 14-15.

[6*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011» / Отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, М. В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. — URL: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1257/30957_4bdd.pdf (дата обращения 27.08.2014 г.) — ISBN 978-5-317-03634-8

[7*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы: материалы всероссийского симпозиума (Бийск, 20-25 авг., 2012). — Бийск, 2012. — С. 43–46.

[8*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ–2013» [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2013. — URL: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2191/30957_67f7.pdf (дата обращения 27.08.2014 г.) — ISBN 978-5-317-04429-9.

[9*] Сорокин К. С. Абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135–летию Томского государственного университета и 65–летию механико–математического факультета: сборник тезисов (Томск, 2-4 окт., 2013). — Томск, 2013. — С. 36.