Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Томский политехнический университет»

На правах рукописи

My

Манабаев Кайрат Камитович

МОДИФИКАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

> Научный руководитель доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Светашков Александр Андреевич

Томск – 2016

Оглавление

.4
ГО
1
18
го
8
20
22
н
25
25
oe
8
ск
35
го
(a-
3
их
58
на
60
ЫΧ
57
го
71
72
77

5. Методика решения плоских задач линейной вязкоупругости итерационным методом с применением комплекса метода конечных Представление итерационного алгоритма для плоской задачи линейной 5.1. 5.2. алгоритм решения плоских задач Итерационный линейной 5.3. Особенности алгоритма решения упругой задачи в комплексе метода 5.4. Расчет временных функций правых частей уравнений равновесия и 5.5. 5.6. Сравнение результатов расчета методом итераций и приближенным методом......115 6. Сравнение аналитического решения и приближенного решения итерационным методом на примере задачи 0 нагружении СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ......132 Приложение А Программа решения ЛВУ пластины методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Начальная итерация.....146 Приложение Б Программа решения второго шага ЛВУ пластины......150

введение

Актуальность работы. В современном мире сложные конструкции из композиционных и полимерных материалов широко используются в различных областях техники. Рациональное проектирование конструкций подобного класса требует построения математических моделей деформирования, а также математических алгоритмов расчета, позволяющих получать надежные прогнозы прочности и работоспособности элементов и узлов конструкций.

Особенностью механического поведения полимерных и композитных полимерной основе является необходимость материалов на учета реологических свойств данных материалов. Реологические свойства материалов проявляются как свойство ползучести – явление зависимости деформации от времени при условии постоянства нагрузок, и как свойства релаксации – зависимости напряжений от времени при условии постоянства достигнутого уровня деформаций. Чаще всего процессы ползучести и релаксации объединяют под одним термином – вязкоупругость ИЛИ наследственная упругость [1].

Наиболее общей математической моделью представления зависимости напряжений от деформаций с течением времени являются интегральные соотношения, полученные Больцманом и Вольтерра [2, 3]. Одним из основных методов расчета является метод Вольтерра или операторный Недостатком метод. данного операторного метода является то обстоятельство, лля использования необходимо ЧТО его иметь в распоряжении явную зависимость упругого решения от материальных констант. Это возможно далеко не во всех практических случаях. В своем большинстве решения упругих содержат численную задач только зависимость от материальных констант. Проблема восстановления данной зависимости из численного решения задачи теории упругости является трудноразрешимой.

Из приближенных методов решения задач ЛВУ можно отметить следующие: метод аппроксимации Ильюшина [4 – 6], метод квазиупругих решений Шепери [7], метод квазиконстантных операторов Малого-Труфанова [8 – 10], метод переменных модулей [11], метод эффективных по времени модулей [12], приближенный итерационный метод [13].

Метод эффективных по времени модулей имеет ряд преимуществ над остальными в силу того, что он обобщен на следующие задачи: расчет стареющих вязкоупругих тел, расчет анизотропных тел, расчет нелинейно вязкоупругих тел. Однако, применение известных эффективных по времени модулей лагранжевого и кастильянового типа [14 – 17] в расчетах определения напряженно-деформированного состояния линейновязкоупругих тел показало недостаточную точность аппроксимации линейновязкоупругих свойств. Стал актуальным вопрос поиска новых выражений эффективных по времени модулей, позволяющих получить более тесные оценки вязкоупругих свойств материала, и способствовать развитию теории приближенных методов решений задач линейной вязкоупругости.

Приближенный итерационный метод, предложенный в [13], был представлен в вариационной постановке. Реализация данного метода показывает высокую точность расчета задач линейной вязкоупругости, но при этом является весьма трудоемкой. Этим обусловлена актуальность разработки процедуры адаптации итерационного алгоритма к расчетной среде комплекса метода конечных элементов.

В связи с вышесказанным, актуальность диссертационной работы, посвященной разработке и модификации приближенных методов для расчета НДС и прогнозирования прочности конструкций из вязкоупругих и композиционных материалов, не вызывает сомнения.

Состояние теории вязкоупругости, как раздела механики деформированного твердого тела, отражено в монографиях А.А. Ильюшина, Б.Е. Победри [4], Ю.Н. Работнова [18, 19], В.В. Москвитина [20], Д. Бленда [21], Р. Кристенсена [22], И.И. Бугакова [23], М.А. Колтунова [24], А.А.

Адамова, В.П. Матвеенко, Н.А. Труфанова, И.Н. Шардакова [1], а также частично в монографиях Н.Х. Арутюняна, В.П. Ильина, Л.Е. Мальцева, А.С. Кравчука [25 – 29].

Кроме упомянутых монографий фундаментальные результаты исследования вопросов наследственной механики твердого тела представлены также в публикациях других отечественных и зарубежных авторов: [2, 30 – 36].

Целью диссертационной работы является разработка новых приближенных методов решения задач линейной вязкоупругости путем модификаций метода эффективных по времени модулей и итерационного метода.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Анализ современного состояния исследований в области численного исследования задач линейной вязкоупругости.

2. Разработка новых математических моделей эффективных по времени модулей с целью получения более точных оценок свойств вязкоупругих материалов по сравнению с уже имеющимися оценками.

3. Разработка новых математических моделей эффективных модулей для описания свойств упругих изотропных композитных материалов.

4. Разработка новой вычислительной методики итерационного алгоритма решения краевых задач линейной вязкоупругости в двумерной постановке с использованием комплекса метода конечных элементов.

5. Постановка и решение плоских краевых задач ЛВУ для прогноза поведения деформируемых вязкоупругих тел при квазистатических нагрузках.

Научная новизна работы заключается в развитии приближенных подходов к численному решению задач линейной вязкоупругости, где тела с вязкоупругими свойствами подвергаются механическим воздействиям.

В диссертационной работе были разработаны новые математические модели для реализации итерационного алгоритма численного решения задач

ЛВУ и новые математические модели эффективных по времени модулей. Предлагаемые алгоритм и модели описывают процессы вязкоупругого деформирования систем, где элементы конструкций подвергаются воздействию механических нагрузок, позволяют получать эффективные оценки НДС конструкций с заданной точностью.

С использованием разработанных моделей и алгоритма были проведены численные исследования, в результате которых были расширены представления о закономерностях развития напряженно-деформированного состояния элементов конструкций.

Предложенные модели новых эффективных по времени вязкоупругих модулей показали более высокую степень точности аппроксимации линейновязкоупругих свойств по сравнению с известными эффективными характеристиками лагранжевого и кастильянового типов.

Впервые в классической постановке был реализован алгоритм приближенного итерационного метода для решения плоских краевых задач линейной вязкоупругости в среде программного комплекса метода конечных элементов, что позволяет увеличить скорость и снизить трудоемкость расчета задач подобного класса.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанный новый подход к определению математических выражений эффективных по времени модулей и эффективных модулей композиционных материалов, вычислительные технологии алгоритма итерационного метода расширяют теоретические основы и возможности численного исследования процессов деформирования вязкоупругих и композиционных тел.

Модифицированные методы применяются:

- При решении широкого круга задач линейной вязкоупругости, как приближенными, так и численными методами.
- При решении задач об определении напряженно-деформированного состояния упругих композитных материалов.

- В стандартных инженерных программах метода конечных элементов для создания расчетных модулей, ориентированных на расчет квазистатического вязкоупругого поведения.
- В педагогическом процессе для подготовки курса лекций и практических занятий по освоению программных комплексов метода конечных элементов специалистами в области механики деформируемого твердого тела.

Методы исследования основаны на использовании средств вычислительной механики деформируемого твердого тела, вычислительной математики. Реализация ряда задач выполнена средствами программной среды конечно-элементного комплекса «ANSYS» в Национальном исследовательском Томском политехническом университете.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методика определения эффективных по времени модулей, основанная на общности подхода при моделировании неоднородности по времени для линейной вязкоупругости неоднородности И ПО пространственным координатам для композиций, позволяющая получить более высокую аппроксимации линейно-вязкоупругих свойств степень точности по сравнению с известными эффективными по времени модулями.

2. Новые математические модели эффективных по времени модулей смешанного типа и модулей по типу Хашина-Штрикмана применительно к задачам оценки напряженно-деформированного состояния линейновязкоупругих тел под действием механических нагрузок, не допускающим прямого аналитического решения.

3. Новые модели эффективных модулей для двухкомпонентных упругих изотропных композитов, полученные на основе классических выражений и позволяющие получить более точные по сравнению с известными оценки прогноза НДС упругих композиций.

4. Алгоритм реализации в классической постановке универсального быстросходящегося итерационного расчета НДС двумерных плоских задач

линейно-вязкоупругости, его адаптация к среде комплексов метода конечных элементов, позволяющие получать решения краевых задач механики полимерных вязкоупругих материалов с заданной точностью.

5. Результаты численных исследований, проведенные с использованием разработанных моделей и алгоритмов, устанавливающие закономерности процессов деформирования линейно-вязкоупругих тел, расширяющие теоретические и практические представления, которые позволяют осуществлять оценки НДС конструкций из вязкоупругих материалов.

Достоверность результатов исследования подтверждается математической постановкой и использованием математического аппарата механики деформируемого твердого тела, применением апробированных методов решения, решением тестовых задач, результатами исследования сходимости представленного алгоритма, сравнением известных теоретических решений с результатами численного моделирования, с опубликованными результатами других исследований.

Апробация работы. Основные научные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на конференциях: VIII Международная конференция «Фундаментальные и прикладные вопросы механики», г. Томск, 2013; V Международная научно-техническая конференция молодых ученых, аспирантов и студентов с международным участием «Высокие технологии в современной науке и технике», г. Томск, 2015; VIII Международная научно-техническая конференция «Современные проблемы машиностроения», г. Томск, 2014; XII Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, г. Томск, 2014; VIII Международная научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, г. Томск, 2014; VIII Международная научно-техническая конференция "Современные проблемы машиностроения», г. Томск, 2010.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 8 статей, включая 5 статей в журналах перечня, рекомендованного ВАК РФ (из них: «Известия вузов. Физика» – 2, «Физическая мезомеханика» – 2,

[°]«Вычислительная механика сплошных сред» – 1), и 1 статьи в индексируемых базах данных Scopus («Key Engineering Materials» – 1).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из 6 разделов и заключения, изложенных на 152 страницах машинописного текста, включая 50 рисунков, 26 таблиц, список литературы из 135 наименований, 2 приложения.

Личный вклад автора. Все исследования, отраженные в работе, выполнены лично автором в процессе научной деятельности под руководством научного руководителя.

1. Краткий обзор линейной вязкоупругости и теории эффективного по времени модуля

Ползучесть многих неметаллических материалов описывается С уравнений линейной вязкоупругости. Один помощью ИЗ вариантов построения соотношений этой теории состоит в комбинировании упругих и вязких свойств. Для наглядного изображения такого ряда комбинаций применяют реологические модели, представляющие собою определенные наборы сопротивлений. Подобные пружин И вязких соотношения используются для описания поведения, как твердых тел, так и жидкостей. Большой цикл работ, относящихся к описанию вязкоупругих свойств жидкостей, гелей и т. п., принято относить к области реологии (в данном обзоре эти исследования не затрагиваются).

Наиболее общую математическую модель представления зависимости напряжений от деформаций с течением времени получили Больцман и Вольтерра [2]. Ядра данных уравнений называют функциями памяти, или функциями ползучести и релаксации. Последнее объясняется тем, что данные функции могут быть найдены из испытаний на ползучесть и релаксацию. Ядра ползучести и релаксации удовлетворяют гипотезе затухающей памяти, согласно которой влияние на напряженно-деформированное состояние в момент времени $\tau \leq t$ будет более сильным, чем действие нагрузки, произведенной в момент $\tau_1 \ll t$.

При решении задач вязкоупругости принцип, сформулированный В. Вольтерра, заключается в том, что решение задачи обычной теории упругости может быть трансформировано в решение соответствующей задачи теории вязкоупругости, если заменить упругие константы операторами. Расшифровка появляющихся при этом функций от операторов в принципе всегда выполнима, если эти функции рациональны. В противном случае возникают определенные трудности. Следует заметить, что принцип Вольтерра применим лишь тогда, когда вид граничных условий остается неизменным (он непригоден, например, для задач о движущемся штампе).

Также для решения краевых задач ЛВУ применим аппарат преобразование Лапласа-Карсона [37 – 39]. Применяя интегральное преобразование по времени, в изображениях по Лапласу получаем задачу теории упругости. После нахождения упругого решения необходимо перейти к оригиналам. Подобно операторному методу Вольтерра данный метод ограничен требованием аналитической зависимости упругого решения от материальных констант.

Теория ползучести стареющих материалов, ведущая начало от работ Н. Х. Арутюняна [40, 41], получила очень широкое развитие. В ранних работах по теории линейной вязкоупругости (А. Н. Герасимов, А. Ю. Ишлинский, В. Г. Гоголадзе, М. И. Розовский, Ю. Н. Работнов и др.[18]) развивался формальный аппарат теории и выяснялись качественные эффекты, которые могли быть обнаружены в тех или иных случаях.

В работах, примыкающих к физико-химическому направлению, теория применялась для описания тех аспектов поведения различных тел, которые не соответствуют обычным моделям. Значительное развитие теории в пятидесятых годах связано с существенным расширением области ее применения. Постановка новых прикладных задач стимулировала развитие общих методов и поиски многочисленных частных решений.

Современное исследований работах состояние представлено В отечественных и зарубежных авторов. Так в [42] метод квазиконстантных операторов (МКО) [8] Малого-Труфаного обобщен на МКО с частичными аппроксимациями [43]. В [44] для описания механических свойств ЛВУ тела основанные дробного рассмотрены модели, на операции дифференцирования. В [45] итерационный метод [13, 46] применен для решения задачи о деформировании ячейки периодичности волокнистого композиционного материала с нелинейно вязкоупругим связующим [47]. В [48] рассмотрены вопросы численного определения термовязкоупругих

характеристик однонаправленного полимерного композита [49]. В [50] определяющие уравнения нелинейной рассмотрены новые теории вязкоупругости (HBY). Получены необходимые условия упругости объемного поведения. В [51] получены новые формы вариационных вязкоупругих основанные принципов лля сред. на использовании функционалов свертки напряжений и деформаций. В [52] для расчета вязкоупругой оболочки вращения используется аппарат метода конечных элементов ANSYS. В [53] рассмотрена задача определения эффективных свойств вязкоупругого композита. В [54] рассмотрена задача идентификации функций памяти НВУ. Приведено экспериментальное обоснование на примере фторопласта-4, стеклопластика ТС-8/3-250. В [55] предложен численно-аналитический метод решения задач ЛВУ, который не требует аналитического задания ядер ползучести и релаксации. В [56] предложена вязкоупругих свойств новая метолика расчета однонаправленных композиционных материалов при установившихся циклических колебаниях. В [57] введена теория многослойных тонких пластин с помощью метода асимптотических разложений по толщине. Данная математическая модель разработана применительно к колебаниям пластин с учетом диссипации энергии. В [58] проведено моделирование вязкоупругих свойств полимерных слоисто-волокнистых материалов при установившихся циклических колебаниях конструкций. В [59] исследованы ортотропные вязкоупругие пластины, соединенные болтовым креплением. Задача решена с помощью МКЭ в трехмерной постановке. В [60] разработана математическая модель поведения рессоры, изготовленной ИЗ вязкоупругого полимерных композиционных Использован аппарат дробноматериалов. дифференциальных операторов.

Краевые задачи теории вязкоупругости наряду с задачами теории упругости и пластичности являются составной частью механики деформируемого твердого тела. Постановка квазистатических задач линейной вязкоупругости в перемещениях включает в себя:

- 1. уравнения равновесия в напряжениях;
- 2. граничные условия в напряжениях или в перемещениях;
- 3. физические (или определяющие) уравнения, связывающие тензор напряжений в момент времени t с историей изменения тензора деформаций в моменты τ , где $0 \le \tau \le t$;
- 4. соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций с перемещениями.

Задача определения напряженно-деформированного состояния и расчета на прочность линейно вязкоупругой конструкции описывается системой интегро-дифференциальных уравнений – интегральных по времени и дифференциальных по пространственным координатам.

Отличительной особенностью формулировки краевых задач вязкоупругости является ярко выраженный временной характер параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние. При решении краевых задач данное обстоятельство проявляется как необходимость учета во времени всей истории изменения компонент тензоров напряжений или деформаций. Для линейных задач такой учет есть результат воздействия интегрального оператора типа Вольтерра II рода на некоторую функцию времени. Ядро оператора удовлетворяет гипотезе затухающей памяти [21, 61], согласно которой влияние воздействий, произведенных в отдаленные моменты истории $\tau < t$ значительно меньше, чем OT воздействий, произведенных в моменты τ близких к t. Гипотезу затухающей памяти можно рассматривать в качестве аналога принципа локального действия для склерономных тел [29, 62]. Согласно данному принципу, на напряженное состояние в точке пространства наиболее сильное влияние оказывают лишь процессы, протекающие в близких к ней точках.

Основным недостатком, как операторного метода, так и преобразований Лапласа [21], является то обстоятельство, что для его использования необходимо иметь в распоряжении явную зависимость упругого решения от материальных констант. Это возможно далеко не во всех практических случаях. В своем большинстве решения упругих задач содержат только численную зависимость от материальных констант.

Как известно [1, 4, 29, 61, 63], расчеты, проводимые в рамках наследственной механики твердых тел, сопряжены с необходимостью учета истории изменения напряжений и деформаций во времени, что в значительной степени усложняет их численную реализацию. Попытки обойти данную проблему делались различными авторами с помощью разнообразных подходов (приближенных методов).

Например, метод аппроксимации А.А. Ильюшина [5] основан на представлении в упругом решении функций от упругих постоянных в виде некоторых зависимостей, удобных при расшифровке решений, получаемых как в аналитической, так и в численной форме [1, 4].

Метод квазиконстантных операторов [42, 43] Труфанова-Малого обобщен на МКО с частичными аппроксимациями .

Метод квазиупругих решений Шепери, где зависящие от времени эффективные характеристики могут быть найдены квазиупругим методом.

В работах Хуторянского Н.М., Пестренина В.М., Пестрениной И.В., Костроминой П.П. [64], [65] представлены методы решения задач линейной вязкоупругости, основанные на процедуре пошагового интегрирования интегро-дифференциальных уравнений равновесия.

В книге А.Н. Филатова представлен «метод замораживания» [66]. В работе А.Д. Коваленко, А.А. Кильчинского [67] дан метод переменных модулей. Л.Е. Мальцевым [35, 68 – 70] развит несколько иной метод, приводящий по сути к тем же результатам.

В работах [71] Светашкова А.А. был предложен метод эффективных по времени модулей, на основе выражений эффективных по времени модулей Лагранжа и Кастильяно.

В работе [13] предложен приближенный итерационный метод Павлова С.М. и Светашкова, ориентированный на решения линейных задач вязкоупругости и обобщенный на нелинейные задачи в [45, 46].

Предлагаемые в настоящей работе методы построения приближенных решений задач вязкоупругости, основаны на анализе соотношений энергетической эквивалентности для сред с различными определяющими уравнениями. Впервые данный подход был предложен А.П. Деругой [72] для исследования вариационных формулировок итерационных методов теории упругости. В результате приложения данного подхода к определяющим уравнениям теории вязкоупругости и решения вариационных Озадач определения постоянных эквивалентности функционалов потенциальных энергий вязкоупругих и упругих тел, получены аналитические выражения некоторых временных функций, названные эффективными по времени модулями. Тем самым была получена алгоритмическая основа вывода и систематизации эффективных характеристик вязкоупругих тел различной физической природы.

Преимущества энергетического метода по сравнению с существующими подходами проявляются в том, что:

- возможны обобщения на случаи анизотропии произвольного вида, нелинейности механического поведения, термореологически простых материалов, которые могут быть получены как с применением разработанного математического аппарата, так и формальным путем;
- полученная математическая формулировка допускает возможность определения выражений эффективных модулей, отличных от уже известных (в частности, таким способом были найдены выражения оптимальных эффективных модулей);
- получены двухсторонние неравенства для функционалов потенциальных энергий вязкоупругих тел и соответствующих функционалов сред сравнения с эффективными по времени модулями – аналог вилки Фойгта-Рейсса для неоднородных упругих тел.

Сопоставление методик определения эффективных характеристик неоднородных упругих и однородных вязкоупругих материалов, которые можно рассматривать как среды с ярко выраженной неоднородностью

механических свойств во времени, показало общность подходов механики композитных материалов и механики вязкоупругих тел. В результате получены аналитические выражения эффективных по времени модулей типа Хашина-Штрикмана, найденных по сути в качестве формального обобщения результатов механики композитных материалов.

2. Метод эффективных по времени модулей

Одним из направлений представления воздействия интегрального оператора на историю изменения во времени некоторой функции f(t) является использование приближения вида:

$$G^* f \approx g(t) f(t), \tag{1}$$

где G^* – интегральный оператор Вольтерра II рода, а g(t) – некоторый упругий модуль, зависящий от времени.

Согласно (1), результат интегрирования истории изменения функции на интервале 0 - t может быть представлен приближенно в виде произведения двух функций g(t) и f(t). Один из способов определения g(t) основан на теории эффективных по времени модулей.

Очевидно, что точное равенство в (1) будет иметь место в том случае, когда найдены собственные векторы и собственные значения интегрального оператора G^* . Методы, приводящие приближенные решения к виду (1), даны в [8, 11, 69].

В диссертационной работе используются эффективные по времени модули лагранжевого и кастильянового типов, найденные [14, 71], как решения вариационных задач об определении условий максимальной энергетической эквивалентности среды с определяющими уравнениями вязкоупругости, выраженными через упруго-наследственные операторы типа G^* , и упругой среды с модулями, зависящими от времени.

2.1. Эффективные по времени модули лагранжевого и кастильянового типов

Рассмотрим задачу определения эффективных по времени модулей.

Пусть имеются определяющие уравнения линейной вязкоупругости, соответствующие сдвиговому и объемному поведению

$$s_{ij}(t) = \int_{0}^{t} R(t-\tau) de_{ij}(\tau) \equiv G^{*}e_{ij},$$

$$\sigma(t) = \int_{0}^{t} K(t-\tau) d\theta(\tau) \equiv K^{*}\theta.$$
(2)

Здесь R(t), K(t) – функции сдвиговой и объемной ползучести, определяемые из испытаний на релаксацию при сдвиге и объемном обжатии; s_{ij}, e_{ij} – девиаторы тензоров напряжений и деформаций, σ, θ – соответствующие шаровые тензоры, $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij}$, $\theta = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$, (i, j = 1, 2, 3),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Определяющие уравнения упругой среды сравнения задаются в виде:

$$s_{ij}^{0}(t) = g(t)e_{ij}(t),$$

$$\sigma^{0}(t) = k(t)\theta(t).$$
(3)

Найденные эффективные по времени модули в [71] имеют вид:

$$g_{L}(t) = G^{*}h, k_{L}(t) = K^{*}h,$$

$$g_{C}(t) = (G^{*-1}h)^{-1}, k_{C}(t) = (K^{*-1}h)^{-1}.$$
(4)

Здесь *h*(*t*) – единичная функция Хевисайда

$$h(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \ge 0. \end{cases}$$

 $g_L(t), k_L(t), g_C(t), k_C(t)$ - соответственно, эффективные модули лагранжевого и кастильянового типов; под G^{*-1}, K^{*-1} подразумевается операторы, обратные G^*, K^* .

Эффективные модули (4) имеют следующие свойства:

а) в моменты времени *t* = 0, ∞ совпадают с соответствующими упругомгновенными и длительными модулями;

б) являются положительно определенными;

в) выражения ЭМ не зависят от вида граничных нагрузок и способа аппроксимации материальных функций релаксации и ползучести. Между парами ЭМ (4) установлены неравенства вида:

$$g_C(t) \ge g_L(t),$$

$$k_C(t) \ge k_L(t).$$
(5)

2.2. Эффективные по времени модули смешанного типа

В [73] приведено обоснование методологической общности процедур вывода эффективных по времени модулей вязкоупругих тел и эффективных характеристик неоднородных упругих тел. Установленная общность задач механики композитных материалов и механики вязкоупругих тел может служить основой для вывода новых выражений эффективных по времени модулей [16, 17].

Действительно, представим вязкоупругое тело как двухкомпонентный композитный материал, один из компонентов которого имеет свойства, определяемые парой модулей $g_C(t)$, $k_C(t)$, другой – свойства, задаваемые парой модулей $g_L(t)$, $k_L(t)$. Тогда, следуя методике Фойгта-Рейсса определения упругих свойств неоднородного тела [22], запишем выражения двух новых пар эффективных по времени модулей:

$$g_{C,L}^{1}(t) = \overline{\gamma} g_{C}(t) + (1 - \overline{\gamma}) g_{L}(t),$$

$$k_{C,L}^{1}(t) = \overline{\gamma} k_{C}(t) + (1 - \overline{\gamma}) k_{L}(t).$$

$$\frac{1}{g_{C,L}^{2}(t)} = \overline{\gamma} \frac{1}{g_{C}(t)} + (1 - \overline{\gamma}) \frac{1}{g_{L}(t)},$$

$$\frac{1}{k_{C,L}^{2}(t)} = \overline{\gamma} \frac{1}{k_{C}(t)} + (1 - \overline{\gamma}) \frac{1}{k_{L}(t)}.$$
(6)
(7)

Здесь $\overline{\gamma}$ – фиктивное удельное объемное содержание компонента, свойства которого определяются эффективными модулями кастильянового типа. Для определения рассмотрим $\overline{\gamma}$ предельные свойства соотношений (6), (7).

Положим для простоты: $k_C(t) = k_L(t) = K_0 = const$, (предполагаем, что объемная релаксация отсутствует). Рассмотрим $g_L(t) \rightarrow g_C(t)$ (в

соответствии со свойствами эффективных модулей это имеет место в моменты времени, близкие к нулю и бесконечности). Как следует из (6), (7), при $g_L(t) \rightarrow g_C(t)$ получаем $g_{C,L}^1(t) \rightarrow g_{C,L}^2(t)$, в этом случае композит содержит единственный компонент, занимающий весь объем тела. Поскольку в данном случае параметр $\overline{\gamma}$ должен принимать значение равное единице, то объемное содержание компонента можно задать как некоторую

функцию времени, принимающую значение между нулем и единицей при $0 \le t \le \infty$:

$$0 \le \overline{\gamma}(t) \le 1, \ \overline{\gamma}(0) = \overline{\gamma}(\infty) = 1.$$
(8)

Представим $\overline{\gamma}(t)$ в виде:

$$\overline{\gamma}(t) = 1 - \alpha \frac{g_C(t) - g_L(t)}{g_C(t)}, \ \alpha > 0.$$
(9)

Параметр α можно задавать различными способами. Физический смысл α очевиден: при α свойства вязкоупругого тела задаются модулем $g_C(t)$, при $\alpha \to (1 - g_L(t) / g_C(t))^{-1}$ преобладает компонент со свойствами, определяемыми модулем $g_L(t)$.

Легко видеть, что определенные посредством (6), (7) эффективные по времени характеристики обладают свойствами, присущими эффективным по времени модулям типа Лагранжа и Кастильяно.

Преимущества применения приближенных представлений вида (4), (6), (7) при численной реализации краевых задач вязкоупругости очевидны. Ключевым моментом в этом случае должны служить оценки степени погрешности, вносимой использованием приближенных определяющих уравнений. Для эффективных по времени модулей лагранжевого и кастильянового типов подобные оценки приведены в [74].

2.3. Эффективные модули по типу Хашина – Штрикмана

При выводе выражений эффективных по времени модулей типа Хашина-Штрикмана исходили из условия выполнения принципа соответствия или упруго – вязкоупругой аналогии [15, 82, 83].

Для упругого двухкомпонентного композита, у которого модули объемного сжатия и сдвига связаны неравенствами

$$K_1 > K_2, \quad G_1 > G_2,$$
 (10)

эффективные упругие характеристики Хашина-Штрикмана имеют вид:

$$G' = G_{2} + \frac{\overline{\gamma}}{\frac{1}{G_{1} - G_{2}} + \frac{6}{5} \frac{(K_{2} + 2G_{2})(1 - \overline{\gamma})}{(3K_{2} + 4G_{2})G_{2}}},$$

$$G'' = G_{1} + \frac{1 - \overline{\gamma}}{\frac{1}{G_{2} - G_{1}} + \frac{6}{5} \frac{(K_{1} + 2G_{1})\overline{\gamma}}{(3K_{1} + 4G_{1})G_{1}}}.$$

$$K' = \frac{K_{1}K_{2} + \frac{4}{3}(1 - \overline{\gamma}_{1})G_{2}K_{2} + \frac{4}{3}\overline{\gamma}_{1}G_{2}K_{1}}{K_{1} + \frac{4}{3}G_{2} - \overline{\gamma}_{1}(K_{1} - K_{2})},$$

$$K'' = \frac{K_{1}K_{2} + \frac{4}{3}\overline{\gamma}_{1}G_{1}K_{1} + \frac{4}{3}(1 - \overline{\gamma}_{1})G_{1}K_{2}}{K_{1} + \frac{4}{3}G_{2} - \overline{\gamma}_{1}(K_{1} - K_{2})}.$$
(12)

При этом для *G*', *G*", *K*', *K*" предполагается выполнение "вилки" Хашина– Штрикмана:

$$G' < \overline{G} < G'', K' < \overline{K} < K''.$$

Здесь \overline{G} , \overline{K} – точные значения модулей упругости неоднородного упругого тела, $\overline{\gamma}$, $\overline{\gamma}_1$ – удельное объемное содержание одного из компонент.

Обоснование применимости принципа соответствия рассмотрим на примере второго соотношения из (11). Его можно переписать в виде:

$$G'' = G_1 + (G_2 - G_1) \frac{1 - \overline{\gamma}}{1 + \frac{6}{5} \frac{G_2 - G_1}{G_1} \frac{(K_1 + 2G_1)\overline{\gamma}}{3K_1 + 4G_1}}$$

Умножим обе части данного равенства на произвольную функцию времени *f*, кроме того, в знаменателе дроби произведем тождественные преобразования. Тогда:

$$G''f = G_1f + (G_2 - G_1)f \frac{1 - \overline{\gamma}}{1 + \frac{6}{5} \frac{(G_2 - G_1)f}{G_1 f} \frac{(K_1 + 2G_1)f\overline{\gamma}}{(3K_1 + 4G_1)f}}$$

Заменим теперь упругие константы на операторы и учтем, что воздействие последних на функцию времени f(t) имеет приближенное представление вида:

$$G_{\alpha}^{*}f \cong g_{\alpha}(t)f(t), \ K_{\alpha}^{*}f \cong k_{\alpha}(t)f(t), \ (\alpha = 1, 2).$$

В качестве пар $K_{\alpha}(t), G_{\alpha}(t), \alpha = 1, 2,$ возьмем эффективные модули кастильянового и лагранжевого типов [16], [31]

$$K_1(t) = k_C(t), \quad G_1(t) = g_C(t), \quad K_2(t) = k_L(t), \quad G_2(t) = g_L(t).$$
 (13)

На основе [54] можно показать, что эффективные по времени модули лагранжевого и кастильянового типов, связаны между собой неравенствами

$$g_C(t) \ge g_L(t), \ k_C(t) \ge k_L(t). \tag{14}$$

Следовательно, неравенства (10) будут выполнены.

Таким образом, выражения (11), (12) при заменах $G' \to G'(t)$, $G'' \to G''(t)$, $K' \to K'(t)$, $K'' \to K''(t)$ и равенства (13) можно назвать эффективными по времени модулями типа Хашина – Штрикмана:

$$G'(t) = g_{L}(t) + \frac{\gamma}{\frac{1}{g_{C}(t) - g_{L}(t)} + \frac{6}{5} \frac{(k_{L}(t) + 2g_{L}(t))(1 - \overline{\gamma})}{(3k_{L}(t) + 4g_{L}(t))g_{L}(t)}},$$

$$G''(t) = g_{C}(t) + \frac{1 - \overline{\gamma}}{\frac{1}{g_{L}(t) - g_{C}(t)} + \frac{6}{5} \frac{(k_{C}(t) + 2g_{C}(t))\overline{\gamma}}{(3k_{C}(t) + 4g_{C}(t))g_{C}(t)}},$$
(15)

$$K'(t) = \frac{k_{c}(t)k_{L}(t) + \frac{4}{3}(1 - \overline{\gamma}_{1})g_{L}(t)k_{L}(t) + \frac{4}{3}\overline{\gamma}_{1}g_{L}(t)k_{c}(t)}{k_{c}(t) + \frac{4}{3}g_{L}(t) - \overline{\gamma}_{1}(k_{c}(t) - k_{L}(t))},$$

$$K''(t) = \frac{k_{c}(t)k_{L}(t) + \frac{4}{3}\overline{\gamma}_{1}g_{c}(t)k_{c}(t) + \frac{4}{3}(1 - \overline{\gamma}_{1})g_{c}(t)k_{L}(t)}{k_{c}(t) + \frac{4}{3}g_{L}(t) - \overline{\gamma}_{1}(k_{c}(t) - k_{L}(t))}.$$

Параметр $\overline{\gamma}(t)$ в соотношениях (15) определяется согласно (9):

$$\overline{\gamma}(t) = 1 - \alpha [g_C(t) - g_L(t)] / g_C(t).$$

Будем исходить из того обстоятельства, что параметр α должен представлять характеристики вязкоупругого материала. Из анализа кривых изменения во времени функций $\overline{\gamma}(t)$ было выбрано следующее соотношение между α и t_{\min} :

$$\alpha t_{\min} = \frac{1}{3}, \qquad (16)$$

где t_{\min} – координата минимума функции $\overline{\gamma}(t)$. При заданных функциях времени $g_C(t)$, $g_L(t)$ величину t_{\min} можно найти из решения уравнения

$$g_{C}(t_{\min})g_{L}(t_{\min}) - g_{L}(t_{\min})g_{C}(t_{\min}) = 0$$

Аналогичным образом представим функцию времени $\overline{\gamma}_1(t)$ в виде:

$$\overline{\gamma}_{1}(t) = 1 - \alpha_{1}[k_{C}(t) - k_{L}(t)] / k_{C}(t).$$

$$(17)$$

Анализ кривых изменения во времени функций $\overline{\gamma}_1(t)$ дает следующее соотношение между α_1 и t_{\min}^1 :

$$\alpha_1 t_{\min}^1 = \frac{1}{6}, \qquad (18)$$

где t_{\min}^1 - координата минимума функции $\overline{\gamma}_1(t)$.

3. Верификация вычислительной методики эффективных по времени модулей и решение тестовых задач

Для проверки адекватности разработанных моделей смешанных модулей и модулей по типу Хашина-Штрикмана был решен ряд верификационных тестовых задач об определении напряженно-деформированного состояния твердых тел, подвергающихся механическому воздействию. Постановка тестовых задач предполагала такую геометрию расчетных областей и граничные условия, для которых известны аналитические решения [15 – 17, 75].

3.1. Решение задач с использованием модулей смешанного типа

С целью анализа приближенных решений, которые могут быть получены на основе новых эффективных по времени модулей смешанного типа, рассмотрены решения задачи Буссинеска (действие сосредоточенной силы на вязкоупругое полупространство) и задачи Герца (действие сосредоточенной силы на вязкоупругий диск).

В расчетах учитывается значение параметра η , определяющего отношение упругомгновенного модуля к длительному:

$$\eta = \frac{G_0}{G_{\infty}}.$$
(19)

Наиболее важным параметром, необходимым для нахождения приближенных решений на основе эффективных по времени модулей смешанного типа, является параметр α , входящий в определение функции $\overline{\gamma}(t)$.

На рисунке 1 приведена типичная кривая изменения во времени функции удельного объемного содержания $\overline{\gamma}(t)$, рассчитанная по (9) при следующих значениях параметров: $\alpha = 0,3$; $\lambda = 0,0276$ мин⁻¹; $G_0 = 120$ МПа,



Рисунок 1 – График зависимости кривой изменения во времени удельного объемного содержания $\overline{\gamma}(t)$ для одного из компонентов

Из анализа кривых изменения во времени функций $\overline{\gamma}(t)$ было выбрано значение параметра α , представленное формулой (16).

Математические модели эффективных по времени модулей смешанного типа позволили «сузить» известную вилку метода эффективных по времени модулей на основе характеристик лагранжевого и кастильянового типов. Графики зависимостей модулей от времени представлены на рисунке 2.

 $\gamma = 0,0069 \text{ мин}^{-1}, K_0 = 360 \text{ МПа}, t = 0 \div 1000 \text{ мин}.$



Значение параметра t (мин)

Рисунок 2 – Значения модулей при $\eta = 5$; α рассчитано по (16)

Из представленных графиков вытекает следующие выводы:

а) эффективные модули смешанного типа по своим свойствам идентичны модулям лагранжевого и кастильянового типов;

б) кривые изменения во времени эффективных модулей $g_{C,L}^1$, $g_{C,L}^2$ практически совпадают; в) эффективные модули $g_{C,L}^n$, (n = 1, 2)удовлетворяют неравенствам

$$g_{C}(t) \ge g_{CL}^{n}(t) \ge g_{L}(t), n = 1, 2$$

для любых $t \in [0, ∞]$.

3.1.1. Краевая задача о действии сосредоточенной силы на вязкоупругое полупространство (задача Буссинеска)

Постановка упругой задачи.

Рассмотрена задача о действии сосредоточенной нагрузки P на упругое полупространство S [75]. Схема задачи представлена на рисунке 3. Выбрана система координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой приложения нагрузки, а вдоль линии ее действия направлена ось z. Положение точки M определяется тремя координатами r, φ, z (цилиндрическая система координат). Нагрузка приложена нормально к плоскости B, ограничивающей полупространство.



Рисунок 3 – Схема к задаче Буссинеска

На рисунке 3 обозначено: r, z – радиальная и осевая координаты произвольной точки полупространства, $R^2 = r^2 + z^2$.

Уравнения равновесия в перемещениях в полупространстве:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) = 0,$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Здесь *θ* – объемная деформация.

Напряжения, возникающие во всех точках x = (r, z), зависят только от координат r и z (осесимметричное НДС) и должны удовлетворять следующим граничным условиям.

На бесконечности все компоненты тензора напряжений обращаются в нуль:

$$\sigma_{ii}(r,z) = 0, R \to \infty, x \in S.$$

При z = 0, граничная плоскость *В* свободна от напряжений:

$$\sigma_z(r,0) = 0, \quad \mathbf{x} \in B,$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0, \quad \mathbf{x} \in B,$$

за исключением точки начала координат, где напряжения возрастают. Последнее объясняется наличием сосредоточенной нагрузки *P*, приложенной в начале координат, и может быть показано следующими вычислениями. Вырежем в начале координат из полупространства полусферу радиусом *R*, нагруженную силами в виде напряжений по наклонным площадкам. Автором работы [75] получено, что проекция главного вектора этих сил на ось *z* равна:

$$Z = \iiint_F [\tau_{rz} \cos(\theta) + \sigma_z \cos(\psi)] dF = P.$$

Постановка линейно-вязкоупругой задачи.

При решении задачи применялся принцип, сформулированный В. Вольтерра, который заключается в том, что решение задачи обычной теории упругости может быть трансформировано в решение соответствующей задачи теории вязкоупругости, если заменить упругие константы на интегральные операторы.

Считалось, что в начальный момент времени материал находился недеформированным и свободным от внутренних напряжений:

$$\sigma_{ij}(r, z, 0) = 0,$$

 $\varepsilon_{ij}(r, z, 0) = 0, t = 0, x \in S,$
 $u_i(r, z, 0) = 0,$

Расчеты аналитических и приближенных решений проведены при значениях параметров материальных функций ползучести и релаксации, упругих констант, значения нагрузки, приведенных в таблице 1.

мин⁻¹ материальная константа λ 0,0276 мин⁻¹ 0,0069 материальная константа γ $120 \cdot 10^{6}$ модуль сдвига G_0 Па $360 \cdot 10^{6}$ модуль объемного поведения K_0 Па $100 \cdot 10^{6}$ начальная нагрузка Па 0,1 радиальная координата *r* Μ 0,15 осевая координата z Μ

Таблица 1 – Свойства материала полупространства, значение нагрузки

В работе [75] приведено упругое решение задачи, которое дает следующее осесимметрическое распределение компонент перемещений и напряжений:

$$u(r,z) = \left[\frac{rz}{4\pi R^{3}}\frac{1}{G} - \frac{r}{4\pi R(R+z)}f_{1}(v,G)\right]P,$$

$$w(r,z) = \left[\frac{1}{2\pi R}f_{2}(v,G) - \frac{z^{2}}{4\pi R^{3}}\frac{1}{G}\right]P,$$

$$\sigma_{r}(r,z) = \left[\frac{1}{2\pi R(R+z)}f_{3}(v,G) - \frac{3r^{2}z}{2\pi R^{5}}\right]P,$$

$$\sigma_{\varphi}(r,z) = -\left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R}\right)\frac{1}{3\pi R^{2}}f_{3}(v,G)P,$$

$$\sigma_{z}(r,z) = -\frac{3P}{2\pi R^{2}}\frac{z^{3}}{R^{3}}.$$
(20)

Здесь ν , G – упругомгновенные коэффициент Пуассона и модуль сдвига,

$$f_1(\nu,G) = \frac{1-2\nu}{G}, \quad f_2(\nu,G) = \frac{1-\nu}{G}, \quad f_3(\nu,G) = (1-2\nu).$$
 (21)

Осевое σ_z и касательное τ_{rz} напряжения не зависят от упругих постоянных, следовательно, они не будут зависеть и от времени.

Материальные операторы сдвиговой релаксации G^* и ползучести G^{*-1} зададим как:

$$G^{*}x \equiv G(1 - \lambda \mathcal{B}_{\lambda+\gamma}^{*})x,$$

$$G^{*-1}x \equiv \frac{1}{G}(1 + \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^{*})x,$$

$$\mathcal{B}_{\gamma}^{*}x \equiv \int_{0}^{t} e^{-\gamma(t-\tau)}x(\tau)d\tau.$$
(22)

Здесь G – упругомгновенный модуль сдвига, γ , λ – параметры функций релаксации и ползучести.

Для построения аналитического решения задачи необходимо в (21) сделать замены $v \rightarrow v^*$, $G \rightarrow G^*$ и далее произвести расшифровку функций от операторов v^* , G^* .

Введем операторы:

$$\omega^* = \frac{2G^*}{3K_0}, \ g_{1/2}^* = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\omega^*}.$$
(23)

Здесь K_0 – модуль объемного сжатия.

Тогда оператор v^* выразится через оператор связанной ползучести $g_{1/2}^*$ следующим образом: $v^* = \frac{1}{2} g_{1/2}^* (1 - \omega^*)$.

В последнее соотношение входит произведение двух интегральных операторов типа Вольтерра. Используем преобразование произведения двух операторов к их разности посредством формулы

$$\frac{1}{2}\omega^* g_{1/2}^* = 1 - g_{1/2}^*. \tag{24}$$

Тогда получим:

$$f_{1}(\nu^{*}, G^{*}) = \frac{1}{K_{0}} g_{1/2}^{*},$$

$$f_{2}(\nu^{*}, G^{*}) = \frac{1}{2} (G^{*-1} + \frac{1}{K_{0}} g_{1/2}^{*}),$$

$$f_{3}(\nu^{*}, G^{*}) = 3(1 - g_{1/2}^{*}).$$
(25)

Как видно из (25), все три операторные функции оказались выражены через оператор связной ползучести Ильюшина. Его представление имеет вид

$$g_{1/2}^{*}x = \frac{2}{2+\omega_{0}} [1+\lambda\mu \mathcal{P}_{q}^{*}]x,$$

$$q = \lambda + \gamma - \lambda\mu, \ \mu = \frac{\omega_{0}}{2+\omega_{0}}, \ \omega_{0} = \frac{2G}{3K_{0}}.$$
(26)

Таким образом, формулы (20) в совокупности с (24 – 26) дают аналитическое решение задачи о нагружении вязкоупругого полупространства силой P(t). Приближенные решения на основе $g_C(t)$, $g_L(t)$, $g_{C,L}^1(t)$, $g_{C,L}^2(t)$ получим путем замен:

$$f_{1}^{k} = \frac{3}{3K_{0} + g_{k}(t)},$$

$$f_{2}^{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{k}(t)} + \frac{3}{3K_{0} + g_{k}(t)} \right),$$

$$f_{3}^{k} = 3 \left(1 - \frac{3K}{3K_{0} + g_{k}(t)} \right),$$
(27)

где индекс принимает значение k = 1, 2, 3, 4.

Здесь приняты следующие обозначения для $g_k(t)$:

$$g_1(t) = g_C(t), \ g_2(t) = g_L(t), \ g_3(t) = g_{C,L}^1(t), \ g_4(t) = g_{C,L}^2(t).$$
 (28)

Номера кривых относительных отклонений расчетов на рисунках раздела соответствуют индексу k, определенному в $g_k(t)$.

Анализ численных результатов.

На рисунках 4, 5 приведены результаты расчетов относительных отклонений во времени между точными и приближенными решениями для радиальных перемещений и радиальных напряжений, определяемых согласно (20), (25), (26), и (27).

Относительные отклонения вычислялись по следующей формуле:

$$\Delta \Pi = \left| \frac{\Pi_a - \Pi_p}{\Pi_a} \right| \cdot 100 \quad (\%) , \qquad (29)$$

где $\Delta \Pi$ – расчетное значение относительного отклонения (в процентах), Π_a – значение точного решения, Π_p – значение приближенного решения.

Особенностью расчетов задачи является тот факт, что при задании внешней нагрузки в виде ступенчатой функции приближенные решения для перемещений с модулями кастильянового типа практически совпадают с точными (рисунок 4). Противоположную картину дают расчеты напряжений – здесь минимальное отклонение дают расчеты, полученные с помощью модулей лагранжевого типа (рисунок 5). Назначение же параметра α по (16) позволяет минимизировать погрешности решений на основе смешанных модулей, как перемещений, так и напряжений. Погрешность решений на основе 5%.



Рисунок 4 – Графики зависимостей относительных отклонений расчетов радиального перемещения *u* от времени. Номера кривых определены согласно (28). *t*_{min} = 100*мин*



Рисунок 5 – Графики изменения относительных отклонений расчетов радиального напряжения σ_r ; $t_{\min} = 100$ *мин*

Для количественной оценки корректности результатов в таблице 2 приведены значения максимальных относительных отклонений (в процентах) для радиальных (u), осевых (w) перемещений и радиального напряжения (σ_r) в зависимости от параметров α и t_{min} . Расчеты проведены для случая, когда параметр η , определяющий отношение упругомгновенного модуля к длительному, принимает значение равное 10.

Таблица 2 – Значения максимальных отклонений (в процентах) для радиальных (u), осевых (w) перемещений и радиального напряжения (σ_r) в зависимости от параметров α и t_{min}

$\eta = \frac{G_0}{2} = 10$	$g^1_{C,L}$	$g_{C,L}^2$	$g^1_{C,L}$	$g_{C,L}^2$	$g^1_{C,L}$	$g_{C,L}^2$
G_{∞}	Δu , %		$\Delta w, \%$		$\Delta \sigma_r, \%$	
$t_{\min} = 5 MuH, \alpha = 0,06$	2.00	4.20	1.40	1.35	3.30	3.30
$t_{\min} = 10$ мин, $\alpha = 0,03$	1.00	2.10	1.46	1.41	3.35	3.35
$t_{\min} = 20$ мин, $\alpha = 0,016$	0.60	1.20	1.51	1.50	3.40	3.40
$t_{\min} = 50 \text{ мин}, \alpha = 0,006$	0.28	0.47	1.52	1.51	3.40	3.40
$t_{\min} = 100 \text{ мин}, \alpha = 0,003$	0.15	0.20	1.53	1.51	3.45	3.45
$t_{\rm min} = 150$ мин, $\alpha = 0,002$	0.16	0.21	1.55	1.55	3.50	3.50
$t_{\min} = 200 \text{ мин}, \alpha = 0,0016$	0.17	0.21	1.55	1.55	3.50	3.50

3.1.2. Краевая задача о действии сосредоточенной силы на вязкоупругий диск (задача Герца)

Постановка упругой задачи.

Рассмотрен случай плоского упругого диска, сжатого двумя равными и противоположно направленными сосредоточенными силами *F*,

действующими по концам диаметра *AB*. Схема задачи представлена на рисунке 6.



Рисунок 6 – Схема нагружения диска с указанием наименования границ расчетной области

Выбрана система координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой A – точкой приложения нагрузки, а вдоль линии ее действия направлена ось x. Положение точки M определяется координатами r, θ (полярная система координат).

Тело диска обозначено как S. Граница диска Γ состоит из границ полуокружностей, описывающих точки *A* и *B*, обозначенных как Γ_2 и Γ_3 соответственно, и границы Γ_1 , свободной от напряжений.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\begin{split} &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1-\mu}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)u_r + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1+\mu}{2r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{3-\mu}{2r^2}\right)u_\theta = 0,\\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{1-\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)u_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3-\mu}{1-\mu}\frac{1}{r^2}\right)u_r = 0. \end{split}$$

Во всех точках $x = (r, \theta)$ на границах области, занимаемой диском S, задавались следующие граничные условия:
$$\sigma_r(r,\theta) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r(r,\theta) r d\theta = F, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r(r,\theta) r d\theta = -F, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Постановка линейно-вязкоупругой задачи.

В начальный момент времени диск S считался не деформированным и свободным от внутренних напряжений:

$$u_i(r,\theta,t) = 0,$$

$$\sigma_{ij}(r,\theta,t) = 0, t = 0, x \in S$$

$$\varepsilon_{ij}(r,\theta,t) = 0.$$

Расчеты аналитических и приближенных решений проведены при значениях параметров материальных функций ползучести и релаксации, упругих констант, значения нагрузки, приведенных в таблице 3.

Таблица 3 – Свойства материала полупространства, значение нагрузки

материальная константа λ	0,0276	МИН ⁻¹
материальная константа γ	0,0069	МИН ⁻¹
модуль сдвига G_0	$120 \cdot 10^{6}$	Па
модуль объемного поведения K_0	$360 \cdot 10^{6}$	Па
начальная нагрузка	$100 \cdot 10^{6}$	Па
$r_1 = r_2$	0,1	М

Исходя из принципа, сформулированного В. Вольтерра, произведены замены упругих констант операторами в решении упругой задачи.

Упругое решение, предложенное в [75], показывает, что напряжения, возникающие в диске, не зависят от упругих констант, следовательно, они не будут зависеть и от времени.

Приведены упругие перемещения точки М следующим образом:

$$u = -\frac{2F}{\pi}(\varphi_2 \ln \frac{r_1}{r_2} + \varphi_3 \cos \psi),$$

$$v = -\frac{F}{2}(\varphi_1 + \frac{4}{\pi}\varphi_2 \sin \psi),$$
(30)

где $\varphi_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}, \varphi_2 = \frac{1-\nu^2}{E}, \varphi_3 = \frac{\nu(1+\nu)}{E}, E, \nu$ - упругие модуль Юнга и

коэффициент Пуассона, $\psi = 2\phi_1, \phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Преобразование функций упругих констант к функциям от интегральных операторов дает:

$$\varphi_{1} \to \varphi_{1}^{*} = \frac{(1+v^{*})(1-2v^{*})}{E^{*}}$$
$$\varphi_{2} \to \varphi_{2}^{*} = \frac{1-v^{*2}}{E^{*}},$$
$$\varphi_{3} \to \varphi_{3}^{*} = \frac{v^{*}(1+v^{*})}{E^{*}}.$$

Для случая, когда объемное поведение считается упругим, функции примут вид:

$$\varphi_1^* = \frac{1}{2K_0} g_{1/2}^*, \ \varphi_2^* = \frac{1}{4} (G^{*-1} + \frac{1}{K_0} g_{1/2}^*), \ \varphi_3^* = \frac{1}{4} (G^{*-1} - \frac{1}{K_0} g_{1/2}^*).$$
(31)

Приближенные решения с эффективными по времени модулями $g_k(t)$, определенными по (28), могут быть получены путем замен:

$$\varphi_{1,k}^{*}F \approx \frac{1}{2} \frac{3}{3K_{0} + g_{k}(t)} F(t),$$

$$\varphi_{2,k}^{*}F \approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_{k}(t)} + \frac{3}{3K_{0} + g_{k}(t)}\right) F(t),$$

$$\varphi_{3,k}^{*}F \approx \frac{1}{4} \left(\frac{1}{g_{k}(t)} - \frac{3}{3K_{0} + g_{k}(t)}\right) F(t).$$
(32)

Анализ численных результатов.

Граничная нагрузка задавалась в виде ступенчатой функции $F(t) = F_0 h(t)$.

Установлено, что при задании внешней нагрузки в виде ступенчатой функции приближенные решения для $\varphi_1(t)$ близки к расчету с модулем лагранжевого типа, показывающему минимальное расхождение (рисунок 7). Для функций $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$ наблюдаем обратную картину: минимальное расхождение дает расчет с модулем кастильянового типа, а расчеты с лагранжевым модулем дают наибольшую погрешность порядка 60% (рисунок 8). Выбор значения параметра α по (16) позволяет минимизировать погрешности решений на основе смешанных модулей для всех функций $\varphi_i(t), i = 1, 2, 3$. Расчеты с эффективными модулями смешанного типа $g_{C,L}^n$, (n = 1, 2), дают погрешность, не превышающую 5%.

На рисунках 7 – 9 приведены результаты расчетов относительных отклонений во времени между точными и приближенными значениями функций $\varphi_i(t) = \varphi_i^* F$ и $\overline{\varphi}_{i,k}(t) = \varphi_{i,k}^* F$, (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4), определенных посредством (31), (32).

Номера кривых относительных отклонений расчетов на рисунках 7 – 11 соответствуют индексу k, определенному в $g_k(t)$, согласно (28):

$$g_1(t) = g_C(t), \ g_2(t) = g_L(t), \ g_3(t) = g_{CL}^1(t), \ g_4(t) = g_{CL}^2(t).$$



Рисунок 7 – Кривые изменения относительных погрешностей приближенных

расчетов функции ϕ_1 ; $t_{\min} = 100 \text{ мин}$



Значение параметра t (мин)

Рисунок 8 – Графики изменения относительных погрешностей расчетов функции φ_2 ; $t_{\min} = 100$ мин



Рисунок 9 – Графики изменения относительных погрешностей расчетов функции φ_3 ; $t_{\min} = 100$ *мин*

В таблице 4 приведены значения максимальных относительных отклонений (в процентах) для расчетов функций φ_i (*i* = 1, 2, 3) по (31), (32) для задачи Герца.

Таблица 4 — Значения максимальных отклонений (в процентах) для φ_i (*i* = 1, 2, 3).

$\eta = \frac{G_0}{G} = 10$	$g^1_{C,L}$	$g_{C,L}^2$	$g_{C,L}^1$	$g_{C,L}^2$	$g^1_{C,L}$	$g_{C,L}^2$	
G_{∞}	$\Delta arphi$) ₁ , %	$\Delta \varphi$, %	$\Delta arphi_3$, %		
$t_{\min} = 10 \text{ мин}, \alpha = 0,03$	1.59	1.57	0.75	1.65	1.10	2.20	
$t_{\rm min} = 50 $ мин, $\alpha = 0,006$	1.58	1.57	0.40	0.88	0.50	1.33	
$t_{\min} = 100 \text{ мин}, \alpha = 0,003$	1.59	1.59	0.30	0.87	0.28	0.13	
$t_{\min} = 150 \text{ мин}, \alpha = 0,002$	1.57	1.55	0.36	0.90	0.72	1.31	
$t_{\min} = 200 \text{ мин}, \alpha = 0,0016$	1.57	1.55	0.36	0.90	0.72	1.31	

На рисунках 10, 11 приведены результаты расчетов относительных отклонений во времени между точными и приближенными значениями перемещений *u*, *v*, определенных посредством (30), (31).



Рисунок 10 – Графики изменения относительных погрешностей расчетов перемещений *u* . *t*_{min} = 100 *мин*

Кривые 1, 2 получены приближенными решениями с использованием эффективных по времени модулей кастильянового и лагранжевого типов соответственно. Кривые 3, 4 получены решениями с использованием смешанных модулей $g_{C,L}^1$, $g_{C,L}^2$. Расхождение результатов численного приближенного (с использованием модулей смешанного типа) моделирования с аналитическим решением составляет 3,5 %.

Для количественной оценки корректности результатов моделирования представлена идентичная картина распределения относительных отклонений перемещения *v* (рисунок 11).



Рисунок 11 – Графики изменения относительных погрешностей расчетов перемещений v; t_{min} = 100 *мин*

Сформулированная вычислительная методика позволяет получить сходящееся решение и может применяться для экспресс прогнозирования релаксаций напряжений в твердых телах, подвергающихся длительным внешним воздействиям.

3.2. Решение краевой задачи о нагружении вязкоупругого полупространства с использованием модулей по типу Хашина-Штрикмана

Для оценки точности приближенных решений задач линейной вязкоупругости, которые можно получить на основании выражений эффективных по времени модулей Хашина – Штрикмана, определяемых с помощью соотношений (15), необходимо иметь аналитическое решение краевой задачи ЛВУ.

Постановка упругой задачи.

12) Рассмотрена задача (рисунок нагружении 0 упругого полупространства S нагрузкой, равномерно распределенной по кругу радиуса a [4, 75]. Цилиндрическая система координат (r, φ, z) выбрана так, чтобы ее начало совпадало с центром круга радиуса а. Ось z направлена вдоль линий действия приложенной нормально поверхности Γ, нагрузки, К ограничивающей Рассматривался полупространство. случай, когда напряженно-деформированное состояние зависит только от координат r и z – осесимметричное НДС.



Рисунок 12 – Схема нагружения вязкоупругого полупространства

На рисунке обозначено: MC, M₁C – секущие, проведенные через точку С. Полное перемещение точки C от действия всей нагрузки найдется с учетом угла Θ .

Поверхность радиуса *a*, к которой приложена нагрузка *P*, обозначена как Γ_1 , остальная поверхность полупространства, свободная от внешних нагрузок, обозначена как Γ_2 , при чем:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Уравнения равновесия в перемещениях в полупространстве:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

Здесь *θ* – объемная деформация.

Напряжения, возникающие во всех точках $x = (r, \varphi, z)$ полуплоскости, должны удовлетворять следующим граничным условиям. При z = 0, граничная поверхность Г свободна от напряжений:

$$\sigma_{z}(r,0) = 0, \quad x \in \Gamma_{2},$$

$$\tau_{rz}(r,0) = 0, \quad x \in \Gamma.$$
(33)

за исключением поверхности Г₁:

$$w(r,0) = \frac{4P(1-\mu^2)}{a^2\pi^2 E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad z = 0, \ x \in \Gamma_1.$$

На бесконечности все компоненты тензора напряжений обращаются в нуль:

$$\sigma_{ii}(r,z) = 0, \quad R \to \infty, \, \mathbf{x} \in S.$$
(34)

Здесь $R^2 = r^2 + z^2$.

При P = const в точке O радиальное напряжение σ_r равно:

$$\sigma_r = -\frac{3P}{2\pi a^2} \left(1 - g_{1/2}^0\right), \quad g_{1/2}^0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{2G_0}{3K_0}.$$
 (35)

Здесь *P* – интенсивность погонной нагрузки, *K*₀, *G*₀ – упруго-мгновенные модули сдвига и объемного сжатия.

Постановка линейно-вязкоупругой задачи.

В начальный момент времени полупространство считалась недеформированной и свободной от внутренних напряжений:

$$\sigma_{ij}(r,z,t) = 0,$$

$$\varepsilon_{ij}(r,z,t) = 0, \quad t = 0, \quad x \in S.$$

$$u_i(r,z,t) = 0,$$

Методика построения приближенных решений задач наследственной теории упругости основана на замене упругих констант, входящих в аналитические представления упругих усилий и деформаций, на эффективные по времени характеристики.

Для случая, когда модуль объемной упругости не постоянен, задавались операторы вязкоупругой релаксации, описывающие объемное и сдвиговое поведение, в виде:

$$K^{*}x = K_{0} \Big[1 - \lambda_{1} \Im_{\alpha}^{*} (-m_{1} - \lambda_{1}) \Big] x,$$

$$G^{*}x = G_{0} \Big[1 - \lambda \Im_{\alpha}^{*} (-m) \Big] x,$$
(36)

где $m = \lambda + \gamma$, $m_1 = \gamma_1$, а λ , γ , λ_1 , γ_1 – параметры материальных функций релаксации, определяемые из испытаний, $\Im^*_{\alpha}(-\beta)$ – дробноэкспоненциальный оператор Работнова

$$\Im_{\alpha}^{*}(-\beta)x \equiv \int_{0}^{t} \Im_{\alpha}(-\beta,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Ядро оператора $\mathfrak{B}^*_{\alpha}(-\beta)$ задается в виде:

$$\Im_{\alpha}^{*}\left(-\beta,t\right) = \sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{\left(-\beta\right)^{n} \cdot t^{1+n(1+\alpha)}}{\Gamma\left[(1+n) \cdot (1+\alpha)\right]}, \beta > 0, -1 < \alpha \le 0, \lambda < \beta, \quad \Gamma[x] - \Gamma \text{гамма} \quad функция$$

Эйлера.

Вязкоупругие операторы ползучести, обратные (36), имеют вид:

$$K^{*-1}x = \frac{1}{K_0} \Big[1 + \lambda_1 \Im_{\alpha}^* (-m_1) \Big] x,$$

$$G^{*-1}x = \frac{1}{G_0} \Big[1 + \lambda \Im_{\alpha}^* (-m + \lambda) \Big] x.$$
(37)

Для нахождения точного решения для вязкоупругого полупространства необходимо знать аналитическое представление для оператора $g_{1/2}^*$

$$g_{1/2}^* = (1 + \omega^* / 2)^{-1}, \quad \omega^* = 2G^* / 3K^*.$$

Пользуясь алгеброй дробно-экспоненциальных операторов, определялся

$$g_{1/2}^{*}x = (1 + \omega_0 / 2)^{-1} [1 + a_1 \Im_{\alpha}^{*} (-r_1) + a_2 \Im_{\alpha}^{*} (-r_2)]x.$$
(38)

Постоянные a_{α} , r_{α} , ($\alpha = 1, 2$) определяются с помощью соотношений:

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[d \pm \sqrt{d^2 - 4mm_1 + 4mx_1 + 4m_1x_2} \right],$$

$$d = m + m_1 - x_1 - x_2,$$

$$x_1 = \frac{\omega_0}{2 + \omega_0} \left(-\lambda_1 + \frac{\lambda\lambda_1}{m - m_1} \right),$$

$$x_2 = \frac{\omega_0}{2 + \omega_0} \left(\lambda_1 - \frac{\lambda\lambda_1}{m - m_1} \right),$$

$$a_1 = \frac{(r_1 - m)(r_1 - m_1)}{(r_2 - r_1)}, \quad a_2 = \frac{(m_1 - r_2)(m - r_2)}{(r_1 - r_2)}.$$

(39)

Таким образом, соотношения (35), (36), (39) дают аналитическое решение поставленной задачи при задании функции x(t) равной P(t) - функции изменения во времени граничной нагрузки (в дальнейшем принимается $P(t) = P_0 \cdot h(t)$, где $P_0 = const$).

Рассмотрим случай, когда объемная релаксация отсутствует. Как показывают экспериментальные исследования [76], подавляющее большинство вязкоупругих материалов и полимеров не обладают объемной ползучестью и релаксацией. В этом случае объемное поведение будет описываться с помощью соотношений закона Гука, а операторы сдвиговой релаксации и ползучести зададим в виде:

$$G^{*}x \equiv G(1 - \lambda \mathcal{B}_{\lambda+\gamma}^{*})x,$$

$$G^{*-1}x \equiv \frac{1}{G}(1 + \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^{*})x,$$

$$\mathcal{B}_{\gamma}^{*}x \equiv \int_{0}^{t} e^{-\gamma(t-\tau)}x(\tau)d\tau.$$
(40)

Оператор ω^* для случая объемной упругости есть $\omega^* = 2G^* / 3K_0$, а расшифровка воздействия оператора связной ползучести А.А. Ильюшина на произвольную функцию *x*(*t*) имеет вид [10]:

$$g_{1/2}^* x = \frac{2}{2+\omega_0} [1+\lambda\mu \mathcal{P}_q^*]x,$$

$$q = \lambda + \gamma - \lambda\mu, \ \mu = \frac{\omega_0}{2+\omega_0}, \ \omega_0 = \frac{2G}{3K_0}.$$
(41)

Численные расчеты аналитического и приближенных решений для задачи о нагружении вязкоупругого полупространства равномерно распределенной нагрузкой $P(t) = P_0 h(t)$, где $P_0 = 100$ МПа, были проведены при следующих значениях параметров функций сдвиговой релаксации, заданных в виде экспонент:

$$\lambda = 0.24$$
 мин⁻¹, $\gamma = 0.001$ мин⁻¹, $G_0 = 120$ МПа.

Объемные вязкоупругие свойства задавались с помощью функции релаксации, имеющей также экспоненциальное представление с параметрами:

$$\lambda_1 = 0.1 \text{ мин}^{-1}, \ \gamma_1 = 0.001 \text{ мин}^{-1}, \ K_0 = 360 \text{ МПа.}$$

Рассмотрена точка полупространства, для которой: r = 0,15 м, z = 0,15 м.

В дальнейшем параметры материальных функций варьировались путем изменения показателя соотношений скоростей релаксации объемных и сдвиговых свойств $v = \gamma_1 / \gamma$.

Изменения безразмерного показателя соотношения скоростей менялось в переделах от 1 до 100. Кроме того варьировались показатели, отвечающие за отношения упруго – мгновенных модулей сдвига и объемного сжатия к соответствующим длительным значениям. Данные безразмерные показатели, определяются соотношениями

$$\eta = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma}, \ \eta_1 = \frac{\lambda_1 + \gamma_1}{\gamma_1}.$$

Значения η , η_1 варьировались в пределах $5 \div 20$.

В таблице 5 приведены максимальные отклонения приближенных решений (с эффективными модулями $g_n, k_n, n = 1, 2, ..., 6$) от точного при их численной реализации. Рассмотрим случай постоянной скорости сдвиговой релаксации и варьируемой скорости объемной релаксации при $\eta = \eta_1 = 20$.

		g_1 g_2 g_3 g_4 g_5					g_{6}			
$\eta = 2$	$0, \eta_1 = 10$		Максимальные отклонения, %							
$\gamma = 0,01$	$\gamma_1 = 1$	9.00	22.00	8.60	5.50	8.50	8.50			
$\gamma = 0,01$	$\gamma_1 = 0, 1$	5.70	12.40	5.40	7.50	5.35	5.35			
$\gamma = 0,01$	$\gamma_1 = 0.001$	1.70	2.30	1.69	1.40	1.68	1.68			
$\eta = 2$	$0, \eta_1 = 20$	Максимальные отклонения, %								
$\gamma = 0, 1$	$\gamma_1 = 1$	8.50	34.30	12.30	10.50	11.30	11.30			
$\gamma = 0, 1$	$\gamma_1 = 0.01$	1.60	6.70	1.37	1.00	1.30	1.30			
$\gamma = 0, 1$	$\gamma_1 = 0,001$	1.82	6.00	1.56	1.32	1.52	1.52			

Таблица 5 – Максимальные отклонения приближенных решений с ЭМ $g_n, k_n, n = 1, 2, ..., 6$.

В таблице 6 представлены максимальные отклонения численных результатов приближенных решений с эффективными модулями $g_n, k_n, n = 1, 2, ..., 6$ от аналитического при постоянной скорости объемной и варьируемой скорости сдвиговой релаксации для $\eta = \eta_1 = 20$.

Таблица 6 — Максимальные отклонения приближенных решений с ЭМ $g_n, k_n, n = 1, 2, ..., 6.$

		g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_{6}			
$\eta = 2$	20, $\eta_1 = 20$		Максимальные отклонения, %							
$\gamma = 1$	$\gamma_1 = 0,001$	1.85	6.60	0.60	0.40	0.58	0.58			
$\gamma = 0, 1$	$\gamma_1 = 0,001$	1.80	6.50	1.55	1.35	1.54	1.54			
$\gamma = 0,01$	$\gamma_1 = 0,001$	1.60	6.00	1.54	1.24	1.53	1.53			

$\eta = 2$	20, $\eta_1 = 20$	Максимальные отклонения, %						
$\gamma = 1$	$\gamma_1 = 0,01$	1.80	6.53	0.67	0.45	0.63	0.63	
$\gamma = 0,01$	$\gamma_1 = 0,01$	1.60	6.70	1.37	1.00	1.30	1.30	
$\gamma = 0,001$	$\gamma_1 = 0,01$	8.40	34.60	16.70	8.10	8.10	8.10	

Результаты в таблицах 5 и 6 получены при значениях показателей $\eta = 20$, $\eta_1 = 10$, 20. Относительные отклонения приближенных от точных решений краевых задач ЛВУ пропорциональны данным показателям. Таким образом, содержание таблиц 3, 4 иллюстрируют максимальные погрешности, которые могут быть получены на основе применения эффективных модулей лагранжевого и кастильянового типов, пары эффективных модулей типа Хашина – Штрикмана и пары усредненных по Фойгту и Рейссу эффективных характеристик.

В общем случае, когда и сдвиговые, и объемные характеристики механического поведения меняются по закону наследственной упругости, представляет интерес сравнение приближенных решений с точным для процессов сдвиговой и различных скоростей затухания объемной релаксации. Максимальная погрешность наблюдается в том случае, когда скорости объемной и сдвиговой релаксации близки по величине. Применение Хашина Штрикмана эффективных модулей заметно уменьшает максимальные отклонения приближенных от аналитического решения. Еще более тесные оценки дают расчеты на основе фойгтовского и рейссовского осреднений эффективных по времени характеристик типа Хашина – Штрикмана.

Случай отсутствия объемных упруго – наследственных свойств иллюстрирует таблица 7. Здесь расчеты, проведенные для различных значений показателя $\eta = 5, 10, 20$, дают максимальные отклонения результатов приближенных расчетов от точного примерно на порядок

50

меньше чем для случаев задания упруго – наследственных объемных свойств.

Таблица 7 – Максимальные отклонения приближенных решений от аналитического.

	${g_1}$	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
$\eta = 5$	1.25	0.15	1.07	1.07	1.07	1.07
$\eta = 10$	1.6	0.153	1.37	1.4	1.37	1.37
$\eta = 20$	1.83	0.16	1.53	1.58	1.53	1.53

Анализ полученных результатов, приведенных в таблицах 5 – 7, показывает, что: а) новые эффективные по времени характеристики (модули типа Хашина – Штрикмана) дают более близкие приближения к аналитическому решению (на 3...50 %) по сравнению с расчетами, проведенными на основе эффективных по времени модулей типа Лагранжа и Кастильяно; б) еще меньшие отклонения от аналитического точного решения дают модификации эффективных характеристик типа Хашина – Штрикмана, полученные на основе фойгтовского и рейссовского осреднений.

На рисунках 13 – 20 даны кривые изменения во времени результатов аналитического решения $g_a(t)$ и решений, полученных на основе эффективных модулей $g_n(t)$, n = 1, 2, 3, 4. Кривые на рисунках иллюстрируют временной характер и скорости сходимости приближенных решений к аналитическому в различных временных масштабах протекания релаксационных процессов в вязкоупругом теле.

Графики на рисунках 13 – 16 соответствуют случаю преобладания объемной скорости релаксации над сдвиговой. Противоположную картину сходимости по времени результатов приближенных расчетов к аналитическому решению дают графики на рисунках 17 – 20 соответствующие случаю преобладания сдвиговой скорости релаксации над объемной.

51



Рисунок 13 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений для операторов $g_n(t), n = 1, 2$



Рисунок 14 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений: $g_a(t)$ - аналитическое решение, расчеты с модулями

$$g_3(t), g_4(t), \gamma = 0,001, \gamma_1 = 0,01, \eta = 5, \eta_1 = 10$$



Рисунок 15 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений: $g_a(t)$ - аналитическое решение и расчеты с

модулями $g_1(t), g_2(t)$



Рисунок 16 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений: $g_a(t)$ - аналитическое решение, расчеты с модулями

 $g_3(t), g_4(t). \gamma = 0,01, \gamma_1 = 0,1, \eta = 20, \eta_1 = 20$



Рисунок 17 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений: $g_a(t)$ - аналитическое решение, расчеты с модулями

 $g_1(t), g_2(t)$



Рисунок 18 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений: $g_a(t)$ - аналитическое решение, расчеты с модулями

$$g_3(t), g_4(t). \ \gamma = 0, 1, \gamma_1 = 0,001, \ \eta = 20, \ \eta_1 = 20$$



Рисунок 19 – Графики сравнения результатов аналитического и приближенных решений: $g_a(t)$ - аналитическое решение и расчеты с

модулями $g_1(t), g_2(t)$





$$g_3(t), g_4(t), \gamma = 1, \gamma_1 = 0, 1, \eta = 5, \eta_1 = 10$$

Выводы по главе

В результате решения ряда тестовых задач было установлено, что применение сформулированных математических моделей эффективных по времени модулей смешанного типа и модулей по типу Хашина-Штрикмана приводит к корректным результатам, не противоречащим классическим теориям и результатам, полученным другими авторами.

Сформулированная вычислительная методика с использованием модулей смешанного типа и модулей по типу Хашина-Штрикмана позволяет получить сходящееся решение и может применяться для экспресс прогнозирования процессов релаксаций и ползучести в твердых телах, подвергающихся длительным внешним воздействиям.

Основные результаты главы:

1. Сформулированные математические модели новых эффективных модулей смешанного типа и модулей по типу Хашина-Штрикмана, позволяют «сузить» известную вилку метода эффективных по времени модулей кастильянового и лагранжевого типов.

2. Расчеты с эффективными по времени модулями смешанного типа показали вполне удовлетворительное совпадение с точными решениями, для краевых задач линейной вязкоупругости с историями воздействия в виде ступенчатой нагрузки (порядка 5%).

3. Расчеты с эффективными модулями типа Хашина – Штрикмана показали вполне удовлетворительную сходимость (порядка 10%) по сравнению с точными решениями для краевых задач линейной вязкоупругости с историями воздействия в виде ступенчатой нагрузки.

4. Найденные эффективные модули смешанного типа, модули по типу Хашина-Штрикмана, как и модули лагранжевого и кастильянового типов, не зависят от способа аппроксимации материальных функций релаксации и ползучести. Вопрос применимости предлагаемого подхода к более общим, чем ступенчатые истории нагружения, нуждается в дополнительной проработке, в частности – в определении оценок погрешности приближенных решений, полученных при численной реализации.

4. Новые эффективные характеристики неоднородно-упругих тел

58

Существует ряд подходов к определению эффективных свойств неоднородных упругих тел. Имеются методы, базирующиеся на анализе геометрии включений [22, 78]. Известны методы, основанные на теории случайных функций [79], использование некоторых физических гипотез при [47]. анализе конкретных конструкций В асимптотическом методе осреднения [80] решение краевой задачи для упругого неоднородного тела ищется в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими как от «медленных» переменных, соответствующих глобальной «быстрых» структуре неоднородной среды, так И OT переменных, отвечающих локальной структуре композита.

В развитие энергетического подхода [22, 81], в котором предполагается равенство энергий деформирования, запасаемых гетерогенной В И эквивалентной ей гомогенной среде, предложен новый метод [71] определения эффективных модулей Фойгта и Рейсса. В работе [12] установлена общность энергетических методов определения эффективных характеристик неоднородных упругих тел и вязкоупругих тел, свойства которых, будучи постоянными по пространственным координатам, имеют ярко выраженную неоднородность во времени.

"Одним из замечательных достижений механики композитов" [22] являются оценки эффективных свойств, полученные Хашином и Штрикманом. Данные оценки относятся к наиболее точным из тех, которые могут быть получены без учета геометрии включений. Кроме того, в отличие от оценок Фойгта-Рейсса эффективные характеристики Хашина-Штрикмана учитывают неоднородность напряженно-деформированного состояния в композите.

Однако возможности подхода Фойгта-Рейсса далеко не исчерпаны, поскольку данная модель содержит некоторые идеи, которые могли бы

расширить представления об эффективных характеристиках, даваемых оценками Хашина-Штрикмана.

В самом деле, выражения эффективных модулей Фойгта-Рейсса представляют собой усреднение свойств композита, пропорциональное механическим характеристикам его компонент и их объемному содержанию. С той лишь разницей, что эффективные модули Фойгта дают усреднения для упругих модулей, а эффективные модули Рейсса усредняют соответствующие упругие податливости (или жесткости).

Анализ выражений эффективных характеристик Хашина-Штрикмана для двухкомпонентного упругого композита показывает, что они являются вполне определенными соотношениями между упругими модулями включений и их объемным содержанием. Выражения верхних оценок модулей сдвиговой и объемной деформации в виде произведения одного из модулей включения на некоторые безразмерные коэффициенты. Данные коэффициенты представляют собой отношения квазилинейных функций, составленных из произведений модулей упругости включений на их объемные содержания. То же самое относится и к нижним оценкам.

Из анализа структуры выражений эффективных модулей Хашина-Штрикмана можно сделать вывод о том, что данные оценки имеют фойгтовский тип эффективных характеристик. Из них можно получить рейссовские эффективные характеристики путем формальной замены упругих модулей на соответствующие податливости.

Исследованы некоторые свойства полученных эффективных модулей. Численными расчетами установлены неравенства, связывающие эффективные модули Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов. Найдено, что отношения верхних и нижних оценок эффективных модулей двух типов совпадают в пределах нескольких процентов для различных отношений модулей компонент и для различных их объемных содержаний. Приведены выражения среднегеометрических осреднений полученных эффективных характеристик. Построены численные процедуры

59

итерационных преобразований для верхних и нижних оценок эффективных характеристик.

Приведем источники литературы по композиционным материалам. Из уже ставших классическими источников литературы известны два основных вида задач определения эффективных свойств: задачи, решаемые с учетом геометрии включений, либо без их учета [82 – 84]. Основополагающими моделями определения эффективных модулей композита, не учитывающими геометрии включений, являются модель Фойгта и Рейсса [82, 85], а также Хашина-Штрикмана [83, 86], основанная на вариационной модель формулировке задачи теории упругости. Модель Кришера (O. Crisher) [81], также относится к числу моделей, не учитывающих геометрию включений. Данная модель является полуэмпирической, поскольку необходимые для расчета константы предполагается определять из опыта.

Основная литература отечественных и зарубежных авторов представлена в источниках [89 – 125].

4.1. Вывод новых выражений эффективных модулей Хашина-Штрикмана рейссовского типа

Рассмотрим выражения верхних и нижних оценок (*G*^{*}, *G*[']) эффективных характеристик Хашина-Штрикмана [22] двухкомпонентного композита:

$$G' = G_2 + \frac{\gamma_1(G_1 - G_2)}{1 + \gamma_2(G_1 - G_2) / (G_2 - G_U)},$$

$$G' = G_2 + \frac{\gamma_1(G_1 - G_2)}{1 + \gamma_2(G_1 - G_2) / (G_2 - G_L)}.$$
(42)

Здесь $G_1 > G_2$ – модули сдвига компонент с удельными объемными содержаниями $\gamma_1, \gamma_2, G_L = \frac{3}{2} \left(G_2 + \frac{10}{9 / K_2 + 8 / G_2} \right)^{-1}$,

$$G_U = \frac{3}{2} \left(G_1 + \frac{10}{9/K_1 + 8/G_1} \right)^{-1}, \quad K_1, K_2 - \text{модули} \quad \text{объемной} \quad \text{упругости}$$

компонент.

Для G["], G['] предполагается выполнение «вилки» Хашина-Штрикмана

G' > G' > G'.

Аналогичный вид имеют верхние и нижние оценки объемных модулей упругости композита:

$$K'' = K_{2} + \frac{\gamma_{1}(K_{1} - K_{2})}{1 + \gamma_{2}(K_{1} - K_{2}) / (K_{2} - K_{U})},$$

$$K' = K_{2} + \frac{\gamma_{1}(K_{1} - K_{2})}{1 + \gamma_{2}(K_{1} - K_{2}) / (K_{2} - K_{L})},$$

$$K_{U} = \frac{4}{3}G_{1}, K_{L} = \frac{4}{3}G_{2},$$

$$K'' > K^{*} > K'.$$
(43)

Преобразуем выражения (42) к следующему виду:

$$G' = G_{1} \frac{q_{1}(\gamma_{1}G_{1} + \gamma_{2}G_{2}) + \gamma_{2}G_{2}(1 - G_{2} / G_{1})}{q_{1}G_{1} + \gamma_{2}(G_{1} - G_{2})},$$

$$G' = G_{2} \frac{q_{2}(\gamma_{1}G_{1} + \gamma_{2}G_{2}) + \gamma_{2}(G_{1} - G_{2})}{q_{2}G_{2} + \gamma_{2}(G_{1} - G_{2})}.$$
(44)

Здесь обозначено $q_1 = \frac{3 + a_1 G_2 + 2(G_2 / G_1)}{2(1 + a_1 G_1)}, \quad q_2 = \frac{5 + 2a_2 G_2}{2(1 + a_2 G_2)}, \quad a_1 = \frac{10}{9K_1 + 8G_1},$

$$a_2 = \frac{10}{9K_2 + 8G_2}.$$

Аналогичным образом преобразуем (43)

$$K'' = K_1 \frac{K_2 + \frac{4}{3} \frac{G_1}{K_1} (\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2)}{K_2 + \frac{4}{3} G_1 + \gamma_2 (K_1 - K_2)}, \quad K' = K_2 \frac{K_1 + \frac{4}{3} \frac{G_2}{K_2} (\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2)}{K_2 + \frac{4}{3} G_2 + \gamma_2 (K_1 - K_2)}.$$
(45)

Легко видеть, что сомножители, входящие в качестве коэффициентов перед модулями G_{α} , K_{α} ($\alpha = 1,2$) в правых частях (44), (45), являются безразмерными. Кроме того данные безразмерные коэффициенты

представляют собой отношения алгебраических сумм, составленных из модулей упругости компонент, а также выражений эффективных модулей Фойгта:

$$G_F = \gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2, \ K_F = \gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2.$$

В качестве модификации выражений (44), (45) рассмотрим представления, в которых модули G_{α} , K_{α} заменены на соответствующие податливости

/

$$G_{\alpha} \rightarrow \frac{1}{G_{\alpha}}, K_{\alpha} \rightarrow \frac{1}{K_{\alpha}}, \alpha = 1, 2.$$

Кроме того, заменим $G' \to \frac{1}{G'}, G' \to \frac{1}{G''}$ и т.д.

Получим:

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{G_2} + \frac{\gamma_1 \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)}{1 + \gamma_2 \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right) / \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_U}\right)},$$

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{G_2} + \frac{\gamma_1 \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right)}{1 + \gamma_2 \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2}\right) / \left(\frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_L}\right)},$$
(46)
$$3 \text{десь } \overline{G}_L = \frac{3}{2} \left(G_2 + \frac{10}{9/K_2 + 8/G_2}\right)^{-1}, \ \overline{G}_U = \frac{3}{2} \left(G_1 + \frac{10}{9/K_1 + 8/G_1}\right)^{-1}.$$

Соотношения (46) преобразуем к виду:

$$\frac{1}{G_{R}^{"}} = \frac{1}{G_{1}} \frac{\frac{1}{G_{2}} + \overline{G}_{U}}{G_{2}} (\gamma_{2}G_{1} + \gamma_{1}G_{2})}{\frac{1}{G_{2}} + \overline{G}_{U} + \gamma_{2} \left(\frac{1}{G_{1}} - \frac{1}{G_{2}}\right)},$$

$$\frac{1}{G_{R}^{'}} = \frac{1}{G_{2}} \frac{\frac{1}{G_{1}} + \overline{G}_{L}}{G_{1}} (\gamma_{2}G_{1} + \gamma_{1}G_{2})}{\frac{1}{G_{2}} + \overline{G}_{L} + \gamma_{2} \left(\frac{1}{G_{1}} - \frac{1}{G_{2}}\right)}.$$
(47)

Будем называть эффективные модули сдвига, определяемые (47), модулями Хашина-Штрикмана рейссовского типа, снабжая выражения *G*[°], *G*[′] индексами *R*. Кроме того, в дальнейшем будем использовать выражения эффективных модулей (44), (45) с индексами *F*, называя их модулями Хашина-Штрикмана фойгтовского типа.

Эффективные модули объемного сжатия Хашина-Штрикмана рейссовского типа имеют вид:

$$\frac{1}{K_{R}^{"}} = \frac{1}{K_{1}} + \frac{\frac{1}{K_{2}} + \frac{K_{U}}{K_{2}} (\gamma_{1}K_{2} + \gamma_{2}K_{1})}{\frac{1}{K_{2}} + \overline{K}_{U} + \gamma_{2} \left(\frac{1}{K_{1}} - \frac{1}{K_{2}}\right)},$$

$$\frac{1}{K_{R}^{'}} = \frac{1}{K_{2}} + \frac{\frac{1}{K_{1}} + \frac{\overline{K}_{L}}{K_{1}} (\gamma_{1}K_{2} + \gamma_{2}K_{1})}{\frac{1}{K_{2}} + \overline{K}_{L} + \gamma_{2} \left(\frac{1}{K_{1}} - \frac{1}{K_{2}}\right)}.$$
(48)

Здесь обозначено $\overline{K}_U = \frac{4}{3}G_1, \overline{K}_L = \frac{4}{3}G_2.$

Легко проверить, что при $G_1 = G_2 = G$ (тело Хилла) из (47), (48) получаем

$$G_{R}^{"} = G_{R}^{'} = G, \ K_{R}^{"} = K_{R}^{'}.$$

На рисунке 21 – 22 приведены графики безразмерных сдвиговых и объемных модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов в функции от объемного содержания γ , а также безразмерные значения модулей Фойгта и Рейсса. Значения всех эффективных модулей сдвига отнесены к G_2 (к K_2 – для модулей объемного сжатия).

На рисунках 21, 22 приняты следующие обозначения кривых: 1, 4 – зависимость классических модулей Фойгта и Рейсса; 2, 3 – модули Хашина-Штрикмана фойгтовского типа; пунктирные кривые – с использованием модулей Хашина-Штрикмана рейссовского типа.



Рисунок 22 – Зависимость модулей объемного поведения от у

Из графиков видно, что для эффективных модулей Хашина-Штрикмана рейссовского типа сохраняются двухсторонние неравенства вида

$$G_F \geq G_R \geq G_R \geq G_R$$

и аналогичные неравенства для модулей объемного сжатия:

$$K_F \geq K_R' \geq K_R \geq K_R.$$

Здесь G_R, K_R – эффективные модули Рейсса

$$G_R = \frac{G_1 G_2}{\gamma_1 G_1 + \gamma_2 G_2}, K_R = \frac{K_1 K_2}{\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2}.$$

В таблицах 8, 9 приведены в порядке убывания значения всех рассмотренных эффективных модулей сдвига и объемного сжатия при разных объемных концентрациях. Обоснование новых эффективных характеристик *G*3, *K*3 будет дано ниже.

Таблица 8 – Зависимость значений эффективных модулей сдвига от объемного содержания компоненты

	$\gamma = 0$	$\gamma = 0, 1$	$\gamma = 0, 2$	$\gamma = 0,3$	$\gamma = 0, 4$	$\gamma = 0, 5$	$\gamma = 0, 6$	$\gamma = 0, 7$	$\gamma = 0,8$	$\gamma = 0,9$
$G_{\scriptscriptstyle F}$	1.000	1.700	2.400	3.100	3.800	4.500	5.200	5.900	6.600	7.300
G''_{R}	1.000	1.420	1.880	2.384	2.940	3.556	4.242	5.011	5.879	6.866
$G"_{_{RF}}$	1.000	1.412	1.863	2.359	2.909	3.520	4.203	4.972	5.846	6.845
G''_{F}	1.000	1.403	1.846	2.335	2.878	3.484	4.164	4.934	5.813	6.824
G'_{R}	1.000	1.172	1.376	1.621	1.921	2.296	2.780	3.426	4.333	5.701
G'_{RF}	1.000	1.169	1.369	1.609	1.903	2.273	2.750	3.391	4.294	5.667
G'_F	1.000	1.165	1.361	1.597	1.886	2.250	2.721	3.356	4.256	5.632
$G3'_R$	1.000	1.132	1.293	1.487	1.718	1.988	2.302	2.663	3.070	3.519
$\overline{G_R}$	1.000	1.096	1.212	1.356	1.538	1.778	2.105	2.581	3.333	4.706

Таблица 9 – Зависимость значений эффективных модулей объемного сжатия

	$\gamma = 0$	$\gamma = 0, 1$	$\gamma = 0, 2$	$\gamma = 0, 3$	$\gamma = 0, 4$	$\gamma = 0, 5$	$\gamma = 0, 6$	$\gamma = 0, 7$	$\gamma = 0, 8$	$\gamma = 0,9$
K_F	1.000	1.300	1.600	1.900	2.200	2.500	2.800	3.100	3.400	3.700
K''_{F}	1.000	1.210	1.435	1.676	1.934	2.213	2.513	2.839	3.192	3.578
$K"_{_{RF}}$	1.000	1.195	1.405	1.632	1.880	2.151	2.448	2.776	3.139	3.545

OT γ

K''_{R}	1.000	1.179	1.375	1.590	1.828	2.091	2.385	2.714	3.087	3.512
<i>K</i> 3' _{<i>R</i>}	1.000	1.146	1.322	1.53191	1.776	2.057	2.378	2.737	3.070	3.558
<i>K</i> ' _{<i>F</i>}	1.000	1.139	1.296	1.474	1.677	1.913	2.189	2.515	2.909	3.392
K'_{RF}	1.000	1.128	1.274	1.441	1.634	1.860	2.127	2.450	2.848	3.348
K'_{R}	1.000	1.118	1.253	1.409	1.592	1.808	2.068	2.387	2.787	3.305
K_R	1.000	1.081	1.176	1.290	1.429	1.600	1.818	2.105	2.500	3.077

На рисунке 23 приведена гистограмма сравнения отношений верхних и нижних оценок эффективных модулей сдвига и объемного поведения Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов. Отношения $G^{"}/G^{'}$ и $K^{"}/K^{'}$ в функции γ (нижние индексы тут опущены) приведены для соотношения между упругими характеристиками компонент: G_1/G_2

и $K_1 / K_2 = 4$.



Рисунок 23 – Гистограмма сравнения отношений верхних и нижних оценок эффективных модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского

Из сравнения видно, что данные отношения совпадают в пределах 5 % как внутри пар, составленных для фойгтовских и рейссовских характеристик, так и между парами модулей сдвига и объемного сжатия.

4.2. Модель итерационного преобразования эффективных характеристик

С целью получения более тесных оценок точных и приближенных решений, получаемых на основе найденных эффективных модулей, рассмотрим новый метод итерационного преобразования значений верхних и нижних оценок модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов.

Будем использовать подход, применяемый при построении арифметикогеометрического среднего Гаусса [85]. Идея определения данной величины заключается в следующем. Пусть даны $a_0 > b_0 > 0$.

Далее находим $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \ b_{n+1} = (a_n \cdot b_n)^{1/2}, \ n = 1, 2, 3...$

Следуя данному подходу, в соотношениях (2.3), (2.4) введем новые обозначения:

$$\alpha_0 = G_1, \ \beta_0 = G_2, \ \alpha_0 > \beta_0 > 0, \varphi_0 = K_1, \ \psi_0 = K_2, \ \varphi_0 > \psi_0 > 0.$$
(49)

По аналогии с [46] определим дальнейшие члены последовательностей $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ следующим образом:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \frac{q_1^n (\gamma_1 \alpha_n + \gamma_2 \beta_n) + \gamma_2 \beta_n (1 - \beta_n / \alpha_n)}{q_1^n \alpha_n + \gamma_2 (\alpha_n - \beta_n)}$$
$$\beta_{n+1} = \beta_n \frac{q_2^n (\gamma_1 \alpha_n + \gamma_2 \beta_n) + \gamma_2 (\alpha_n - \beta_n)}{q_2^n \beta_n + \gamma_2 (\alpha_n - \beta_n)},$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n \frac{\psi_n + \frac{4}{3} \frac{\alpha_n}{\varphi_n} (\gamma_1 \varphi_n + \gamma_2 \psi_n)}{\psi_n + \frac{4}{3} \alpha_n + \gamma_2 (\varphi_n - \psi_n)},$$

$$\psi_{n+1} = \varphi_n \frac{\varphi_n + \frac{4}{3} \frac{\beta_n}{\psi_n} (\gamma_1 \varphi_n + \gamma_2 \psi_n)}{\psi_n + \frac{4}{3} \beta_n + \gamma_2 (\varphi_n - \psi_n)}, \quad n = 0, 1, ...$$
(50)

Здесь обозначено

$$q_1^n = \frac{3 + a_1^n \beta_n + 2(\beta_n / \alpha_n)}{2(1 + a_1^n \alpha_n)}, \ q_1^n = \frac{5 + 2a_2^n \beta_n}{2(1 + a_2^n \beta_n)}, \ a_1^n = \frac{10}{9\varphi_n + 8\alpha_n}, \ a_2^n = \frac{10}{9\psi_n + 8\beta_n}.$$

Последовательности $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\},$ а также $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ соответствуют итерационным преобразованиям верхних и нижних оценок эффективных модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского типа для сдвига и объемного поведения. Численные расчеты, приведенные в таблицах 8 – 11, подтверждают справедливость выполнения неравенств вида:

$$\alpha_{0} \ge \alpha_{1} \ge \dots \ge \alpha_{n} \ge \beta_{n} \ge \beta_{n-1} \ge \dots \ge \beta_{0},$$

$$\varphi_{0} \ge \varphi_{1} \ge \dots \ge \varphi_{n} \ge \psi_{n} \ge \psi_{n-1} \ge \dots \ge \psi_{0}.$$
(51)

Аналогичным образом преобразуем эффективные модули Хашина-Штрикмана рейссовского типа. Введем последовательности $\{\overline{\alpha}_n\}, \{\overline{\beta}_n\}, \{\overline{\varphi}_n\}, \{\overline{\psi}_n\},$ начальные значения которых определим посредством (8), то есть, возьмем $\overline{\alpha}_0 = G_1$ и т.д. Тогда получим

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_{n+1}} = \frac{1}{\overline{\alpha}_n} \frac{\frac{1}{\overline{\beta}_n} + \frac{G_U^n}{\overline{\beta}_n} (\gamma_2 \overline{\alpha}_n + \gamma_1 \overline{\beta}_n)}{\frac{1}{\overline{\beta}_n} + G_U^n + \gamma_2 \left(\frac{1}{\overline{\alpha}_n} - \frac{1}{\overline{\beta}_n}\right)},$$
$$\frac{1}{\overline{\beta}_{n+1}} = \frac{1}{\overline{\beta}_n} \frac{\frac{1}{\overline{\alpha}_n} + \frac{G_L^n}{\overline{\alpha}_n} (\gamma_2 \overline{\alpha}_n + \gamma_1 \overline{\beta}_n)}{\frac{1}{\overline{\beta}_n} + G_L^n + \gamma_2 \left(\frac{1}{\overline{\alpha}_n} - \frac{1}{\overline{\beta}_n}\right)},$$

$$\frac{1}{\overline{\varphi}_{n+1}} = \frac{1}{\overline{\varphi}_n} \frac{\frac{1}{\overline{\psi}_n} + \frac{K_U^n}{\overline{\psi}_n} (\gamma_2 \overline{\psi}_n + \gamma_1 \overline{\varphi}_n)}{\frac{1}{\overline{\psi}_n} + K_U^n + \gamma_2 \left(\frac{1}{\overline{\varphi}_n} - \frac{1}{\overline{\psi}_n}\right)},$$

$$\frac{1}{\overline{\psi}_{n+1}} = \frac{1}{\overline{\psi}_n} \frac{\frac{1}{\overline{\varphi}_n} + \frac{K_L^n}{\overline{\varphi}_n} (\gamma_2 \overline{\psi}_n + \gamma_1 \overline{\varphi}_n)}{\frac{1}{\overline{\psi}_n} + K_L^n + \gamma_2 \left(\frac{1}{\overline{\varphi}_n} - \frac{1}{\overline{\psi}_n}\right)}, \quad n = 0, 1, \dots$$
(52)

Здесь обозначено

$$G_L^n = \frac{3}{2} \left(\overline{\beta}_n + \frac{10}{9/\psi_n + 8/\overline{\beta}_n} \right), \ G_U^n = \frac{3}{2} \left(\overline{\alpha}_n + \frac{10}{9/\overline{\phi}_n + 8/\overline{\alpha}_n} \right), \ K_U^n = \frac{4}{3} \overline{\alpha}_n, \ K_L^n = \frac{4}{3} \overline{\beta}_n.$$

Числовые расчеты последовательностей $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$

подтверждают справедливость неравенств, аналогичных (51):

$$\overline{\alpha}_{0} \ge \overline{\alpha}_{1} \ge \dots \ge \overline{\alpha}_{n} \ge \overline{\beta}_{n} \ge \overline{\beta}_{n-1} \ge \dots \ge \overline{\beta}_{0},
\overline{\varphi}_{0} \ge \overline{\varphi}_{1} \ge \dots \ge \overline{\varphi}_{n} \ge \overline{\psi}_{n} \ge \overline{\psi}_{n-1} \ge \dots \ge \overline{\psi}_{0}.$$
(53)

Результаты численных расчетов итерационно-преобразованных эффективных модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов для сдвига и объемного поведения представлены в таблицах 10 – 13.

Таблица 10 – Итерированные эффективные модули сдвига фойгтовского типа в зависимости от номера итерации *n*

$G_{(1)F}$	4.699968	$G_{(1)F}^{"}$	8.992805
$G_{(2)F}$	6.447508	$G_{(2)F}^{"}$	6.582424
$G_{(3)F}$	6.514492	$G_{(3)F}^{"}$	6.514633
$G_{(4)F}$	6.514562	$G_{(4)F}^{"}$	6.514562

Таблица 11 – Итерированные эффективные модули сдвига рейссовского типа

в зависимости от *n*

$$G_{(1)R}^{'}$$
 4.808076
 $G_{(1)R}^{''}$
 9.006440

$G_{(2)R}$	6.542042	$G_{(2)R}^{"}$	6.658645
$G_{(3)R}$	6.600100	$G_{(3)R}^{"}$	6.600103
$G_{(4)R}$	6.600101	$G_{(4)R}^{"}$	6.600103

Таблица	12	—	Итерированные	эффективные	модули	объемного	сжатия
		đ	ойгтовского типа	а в зависимости	і от <i>п</i>		

$K_{(1)F}$	6.292192	$K^{"}_{(1)F}$	28.783345
$K_{(2)F}$	12.225179	$K_{(2)F}^{"}$	13.254979
K (3)F	12.727653	$K_{(3)F}^{"}$	12.727757
$K_{(4)F}$	12.727705	$K^{"}_{(4)F}$	12.727705

Таблица 13 – Итерированные эффективные модули объемного сжатия рейссовского типа в зависимости от *n*

$K_{(1)R}$	5.143741	$K_{(1)R}^{"}$	18.113211
$K_{(2)R}$	8.868182	$K_{(2)R}^{"}$	9.340977
K _{(3)R}	9.100591	$K_{(3)R}^{"}$	9.100616
$K_{(3)R}$	9.100604	$K_{(3)R}$	9.100604

В приведенных таблицах номер итерации указан в круглых скобках для каждого типа эффективных модулей. Из расчетов видно, что, во-первых, трех итераций достаточно для практически полной сходимости значений обоих типов модулей; во-вторых, пределы последовательностей итерированных модулей фойгтовского и рейссовского типов близки для верхних и нижних оценок эффективных модулей сдвига, а для эффективных модулей объемного сжатия отличия достигают 40%. Исходными данными для таблиц 10 - 13 были следующие значения модулей сдвига И объемного сжатия соответствующих компонент:

 $G_1 = 20 M\Pi a, K_1 = 993.333 M\Pi a, G_2 = 2 M\Pi a, K_2 = 1.833 M\Pi a.$

При этом полагалось $\gamma_1 = \gamma_2$.

4.3. Модель эффективных модулей на основе среднегеометрического усреднения характеристик Хашина-Штрикмана

Используем процедуру осреднения на основе расчета среднегеометрического значения полученных эффективных характеристик. Как известно [87], имеет место следующая связь между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим двух положительных чисел *a*, *b*:

$$\frac{1}{2}(a+b) \ge \sqrt{ab} \ge 2/\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$
(54)

Левую часть (54) можно трактовать как фойгтовское усреднение двух характеристик при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$; правая часть есть соответствующее рейссовское усреднение при тех же значениях γ_1, γ_2 .

Введем усреднения эффективных модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов по правилу:

$$G_{RF}^{'} = \sqrt{G_{R}^{'}G_{F}^{'}}, \ G_{RF}^{"} = \sqrt{G_{R}^{"}G_{F}^{"}}.$$
 (55)

При этом очевидно выполнение двухсторонних неравенств типа (56). Сопоставление модулей $G_{RF}^{''}$ и $G_{RF}^{'}$, названных среднегеометрическими, с уже описанными модулями, приведено в таблицах 2, 3.

Согласно таблицам 8, 9 между сдвиговыми эффективными модулями Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов для двухкомпонентного композита справедливы неравенства

$$G_{R}^{"} \ge G_{F}^{"} \ge G_{R}^{'} \ge G_{F}^{'}.$$
 (56)

Несколько измененный вид имеют неравенства, связывающие объемные модули

$$K_{F}^{"} \ge K_{R}^{"} \ge K_{F}^{'} \ge K_{R}^{'}.$$
 (57)

Среднегеометрические эффективные модули удовлетворяют следующим неравенствам:

$$G_{R}^{"} \geq G_{RF}^{"} \geq G_{F}^{"},$$

$$G_{R}^{'} \geq G_{RF}^{'} \geq G_{F}^{'},$$

$$K_{F}^{"} \geq K_{RF}^{"} \geq K_{R}^{"},$$

$$K_{F}^{'} \geq K_{RF}^{'} \geq K_{R}^{'}.$$
(58)

Заметим, что неравенства (58) являются прямым следствием (56), (57). Так, если в случае модулей сдвига для верхних и нижних оценок имеем превышение значений эффективных характеристик рейссовского типа над фойгтовскими

$$G_{R}^{"} \ge G_{F}^{"}, \ G_{R}^{'} \ge G_{F}^{'},$$
(59)

то для объемных модулей получаем противоположную картину:

$$K_{F}^{"} \ge K_{R}^{"}, \ K_{F}^{'} \ge K_{R}^{'}.$$
 (60)

Выражения среднегеометрических эффективных модулей типа (55) могут быть использованы для построения других моделей усреднения. Рассмотрим усреднения верхних оценок Хашина-Штрикмана рейссовского и фойгтовского типов:

$$G_{SR} = \sqrt{G_{R}'G_{R}'}, \ G_{SF} = \sqrt{G_{F}'G_{F}'}.$$
 (61)

Аналогичные выражения имеют модули объемного сжатия:

$$K_{SR} = \sqrt{K_{R}'K_{R}''}, \ K_{SF} = \sqrt{K_{F}'K_{F}''}.$$
 (62)

4.4. Задача о нагружении двуслойной оболочки

С целью сравнения точного и приближенных решений, которые могут быть получены на основе новых эффективных характеристик, рассмотрено аналитическое решение задачи о нагружении двухслойной упругой цилиндрической оболочки с днищем. Решение данной задачи, полученное по безмоментной теории, приведено в [88].

Постановка задачи.
Пусть оболочка нагружена внутренним давлением p и осевой силой T (рисунок 24). Окружные и продольные усилия обозначены через $N_1^{(\alpha)}$, $N_2^{(\alpha)}$ соответственно. Верхний индекс принимает значения 1, 2, что соответствует внутреннему и наружному слоям оболочки.



Рисунок 24 – Схема нагружения двухслойной оболочки

На рисунке 24 приняты следующие обозначения: δ_1 , δ_2 – толщины первого и второго слоев, R – радиус цилиндра, $\sigma_1^{(\alpha)}$, $\sigma_2^{(\alpha)}$, ($\alpha = 1, 2$) – окружные и продольные напряжения, q – контактное усилие.

Уравнение равновесия, выражающее сумму проекций сил на ось симметрии, дает соотношение между осевыми напряжениями $\sigma_2^{(\alpha)}$, ($\alpha = 1, 2$) и нагрузками:

$$\sigma_2^{(1)}\delta_1 + \sigma_2^{(2)}\delta_2 = \frac{pR}{2} - \frac{T}{2\pi R}.$$
(63)

Для решения Лапласа о равновесии цилиндрического резервуара имеем:

$$N_1^{(1)} + N_1^{(2)} = pR,$$

где $N_1^{(1)} = R(p-q), N_1^{(2)} = Rq$. Тогда:

$$\sigma_1^{(1)}\delta_1 + \sigma_1^{(2)}\delta_2 = pR.$$
(64)

Уравнения совместности получены, из условий равенства окружных и продольных деформации слоев, выраженных через закон Гука для изотропного тела,

$$\frac{1}{E_{1}} \cdot (\sigma_{1}^{(1)} - \mu_{1} \cdot \sigma_{2}^{(1)}) = \frac{1}{E_{2}} \cdot (\sigma_{1}^{(2)} - \mu_{2} \cdot \sigma_{2}^{(2)}),$$

$$\frac{1}{E_{1}} \cdot (\sigma_{2}^{(1)} - \mu_{1} \cdot \sigma_{1}^{(1)}) = \frac{1}{E_{2}} \cdot (\sigma_{2}^{(2)} - \mu_{2} \cdot \sigma_{1}^{(2)}).$$
(65)

Решая систему алгебраических уравнений (63) – (65) относительно $\sigma_{\beta}^{(\alpha)}$, ($\alpha, \beta = 1, 2$), находилась каждая из неизвестных. Далее рассчитывалось значение удельной потенциальной энергии упругой деформации оболочки

$$U = \frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}) \cdot \varepsilon_1 + (\sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)}) \cdot \varepsilon_2 \right], \tag{66}$$

$$\text{ где } \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(\alpha)} = \frac{1}{E_\alpha} \cdot (\sigma_1^{(\alpha)} - \mu_\alpha \cdot \sigma_2^{(\alpha)}), \ \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(\alpha)} = \frac{1}{E_\alpha} \cdot (\sigma_2^{(\alpha)} - \mu_\alpha \cdot \sigma_1^{(\alpha)}), \ \langle \alpha = 1, 2 \rangle.$$

Здесь по индексам, заключенным в угловые скобки, суммирование не производится.

Потенциальную энергию, соответствующую однослойной оболочке, рассчитаем для различных типов эффективных модулей.

$$U_{k} = \frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_{1} \cdot \varepsilon_{1}^{k} + \sigma_{2} \cdot \varepsilon_{2}^{k}) \right],$$

$$\varepsilon_{1}^{k} = \frac{1}{E_{k}} \cdot (\sigma_{1} - \mu_{k} \cdot \sigma_{2}), \quad \varepsilon_{2}^{k} = \frac{1}{E_{k}} \cdot (\sigma_{2} - \mu_{k} \cdot \sigma_{1}),$$
(67)

 σ_1, σ_2 – продольные и окружные напряжения, возникающие в однослойной оболочке. Для упрощения идентификации модулей условимся использовать индекс *k* в соответствии с таблицей 14.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
G	$G_{_F}$	G_{R}	G'_{F}	$G"_{_F}$	G'_{R}	G''_{R}	$G_{(3)}$	$G_{_{SR}}$
K	K_{F}	K_{R}	K'_{F}	$K"_{_F}$	K'_{R}	K''_{R}	<i>K</i> ₍₃₎	K_{SR}

Таблица 14 – Соответствие эффективных модулей значению индекса *k*

Анализ численных результатов.

Аналитический расчет потенциальной энергии, полученной на основе решения (63) – (66), сравнивался с соответствующими расчетами потенциальной энергии однослойной оболочки (67).

Исходные данные для расчета приведены в таблице 15.

Таблица 15 – Свойства материала полупространства, значение нагрузки

модуль сдвига материала внутреннего слоя G_1	$5 \cdot 10^{9}$	Па
модуль объемного поведения материала	$7 \cdot 10^{9}$	Па
внутреннего слоя K ₂		
модуль сдвига материала внешнего слоя G_2	$1 \cdot 10^{9}$	Па
модуль объемного поведения материала внешнего	2.10^{9}	Па
слоя K_2		
нагрузка Т	30.10^{3}	Η
давление р	10.10^{6}	Па
толщина цилиндра $\delta_1 + \delta_2$	0.01	М

В таблице 16 приведены значения отклонений потенциальной энергии в зависимости от объемного содержания γ .

	от объемного содержания одной из компоненты для									
	двухслойной оболочки (данные таблицы приведены в %)									
γ	$W_{_F}$	$W_{_R}$	$W_{F}^{'}$	$W_{\!F}^{''}$	$W_{R}^{'}$	$W_{R}^{"}$	W_3	W_{SR}		
0.1	14.43	-102.60	7.36	-43.53	5.56	-50.35	1.03	-19.08		
0.2	23.34	-163.10	10.88	-74.07	7.70	-84.86	-6.14	-30.52		
0.3	32.24	-184.10	16.04	-87.36	11.95	-99.7	-12.78	-32.52		
0.4	41.14	-173.70	22.85	-84.96	18.27	-96.90	-16.62	-26.80		
0.5	50.05	-139.90	31.28	-68.85	26.65	-78.99	-15.26	-14.55		
0.6	58.95	-91.03	41.32	-41.55	37.06	-49.05	-6.33	3.15		
0.7	67.85	-35.02	52.92	-6.35	49.42	-10.99	11.75	25.08		
0.8	76.75	19.98	65.98	32.40	63.58	30.24	38.51	49.60		
0.9	85.64	65.85	80.22	68.77	79.13	68.23	69.51	74.25		

Таблица 16 Отклонения потенциальной энергии деформации в зависимости

Результаты численного расчета двухслойной оболочки представлены на рисунке 25 [134, 135].



Рисунок 25 – Относительные отклонения потенциальных энергий двухслойной оболочки в зависимости от γ . Индексы кривых соответствуют

таблице 12

4.5. Расчет трехслойной пластины

На примере изгиба квадратной трехслойной пластины проведено сравнение приближенных решений, использующих новые эффективные модули, с численными решениями, полученными в среде программного комплекса метода конечных элементов.

Постановка задачи.

Рассмотрена плоская задача изгиба трехслойной пластины под действием равномерно-распределенной нагрузки (рисунок 26). Выбрана система координат (*x*, *y*) так, чтобы ее начало совпадало с центром плоскости пластины в точке *O* (рисунок 27). К плоскости *хоу* пластины перпендикулярно приложена нагрузка σ_{ms} .



Рисунок 26 – Схема нагружения четверти квадратной пластины

Уравнение Софи Жермен для прогиба пластины:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta^2 w$$

Здесь w = w(x, y) – прогиб пластины, Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия задавались в виде.

При $x = \pm a$:

$$w(\pm a, y) = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

при $y = \pm a$:

$$w(x,\pm a) = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Решение методом конечных элементов.

Сеточная модель получена путем дискретизации расчетной области, с использованием трехслойного конечного элемента по типу Shell 181 [130]. Ее размерность составляет 10000 гексаэдрических элементов с размерами грани 10 мм (рисунок 27).



Рисунок 27 – Конечно-элементная модель с указанием наименований границ расчетной области и расположения декартовой системы координат *охуz*

Боковые грани пластины обозначены $\Gamma_{s1}, \Gamma_{s2}, \Gamma_{s3}, \Gamma_{s4}$, так что $\Gamma_s = \Gamma_{s1} \cup \Gamma_{s2} \cup \Gamma_{s3} \cup \Gamma_{s4}$. Поверхность, к которой прикладывается изгибающее напряжение $\sigma_{ms} = 30$ МПа, обозначена как Γ_{w} .

Согласно условиям задачи, во всех точках x = (x, y,) граничных поверхностей, занимаемых пластиной, задавались следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{s},$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{s2}, \Gamma_{s4},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{s1}, \Gamma_{s3}.$$

Анализ численных результатов.

Исходные данные для расчета приведены в таблице 17.

Таблица 17 – Свойства материала пол	упространства, значение нагрузки
-------------------------------------	----------------------------------

модуль сдвига материала внутреннего слоя G_1	$5 \cdot 10^{9}$	Па
модуль объемного поведения материала внутреннего слоя K_2	9 · 10 ⁹	Па
модуль сдвига материала внешних слоев G_2	$1 \cdot 10^{9}$	Па
модуль объемного поведения материала внешних слоев K_2	$7 \cdot 10^9$	Па
нагрузка	$30 \cdot 10^{6}$	Па
линейный размер а	2	М
толщина пластины h	0,02	M

Результаты расчетов квадратной пластины, защемленной по контуру, приведены в таблице 18. В таблице указаны максимальные относительные погрешности числовых и приближенных расчетов с эффективными модулями в зависимости от γ .

	$W_{_F}$	W_{R}	$W_{F}^{'}$	$W_{\!F}^{"}$	$W_{R}^{'}$	$W_{R}^{"}$	<i>W</i> ₃	W_{SR}
$\gamma = 0.2$	5.761	-12.400	2.343	-2.644	2.595	-2.467	1.640	0.165
$\gamma = 0.4$	10.724	-22.912	3.846	-5.787	4.386	-5.449	0.685	-0.217
$\gamma = 0.5$	12.649	-27.051	3.941	-7.702	4.626	-7.299	-1.024	-0.906
$\gamma = 0.6$	14.550	-29.438	3.997	-9.208	4.815	-8.760	-2.999	-1.466
$\gamma = 0.8$	15.952	-26.644	3.117	-10.298	4.066	-9.877	-6.860	-2.383

Таблица 18 – Отклонения потенциальной энергии деформации квадратной пластины (в процентах) в зависимости от *у*

Ha 28 представлены графики отклонений значений рисунке потенциальной энергии круглой пластины, рассчитанных средствами комплекса метода конечных элементов, от соответствующих значений однослойной потенциальных энергий пластины, свойства которой определяются тем или иным типом эффективных характеристик. Графики отклонений приведены в зависимости от объемного содержания γ .



Рисунок 28 – Относительные отклонения потенциальных энергий квадратной пластины в зависимости от γ . Индексы кривых соответствуют

Предлагаемый метод построения модифицированных модулей Хашина-Штрикмана не претендует на математическую строгость вывода, поскольку не опирается на вариационные формулировки уравнений неоднородного упругого композита (в отличие от классической модели). Однако данный недостаток компенсируется в некоторой степени простотой и доступностью позволяющей получить выражения эффективных методики, новых характеристик композитных материалов. Данный метод может быть без труда обобщен на другие задачи механики композитов. Например, композит, многокомпонентный упругий обладающий анизотропией произвольного вида.

Другим преимуществом предлагаемого подхода является математическая формулировка методик получения новых эффективных характеристик на основе уже известных. Во-первых, это методика итерационного преобразования эффективных характеристик, во-вторых, это методика, основанная на процедуре среднегеометрического усреднения. Последняя может быть применена как для усреднения эффективных модулей Фойгта и Рейсса, так и для усреднения нижних и верхних оценок модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов.

Необходимо отметить, что приведенные в настоящей работе итерационные процедуры получения новых эффективных характеристик на основе уже известных, не являются единственно возможными. В частности итерационные последовательности типа (50), (51) можно преобразовать в "перекрестные", полагая при этом $\alpha \rightarrow \overline{\alpha}_n$, $\beta \rightarrow \overline{\beta}_n$ в правых частях указанных соотношений.

Проведение полномасштабных численных исследований и сравнений модифицированных и классических эффективных модулей Хашина-Штрикмана применительно к решениям различных типов задач и соотношений между G_{α} , K_{α} , $\alpha = 1, 2$, не входило в цели настоящей работы. Однако проведенный анализ позволяет с большей долей уверенности

81

рекомендовать найденные новые эффективные характеристики (итерационные и среднегеометрические) для приближенного прогноза напряженно-деформированного состояния неоднородных упругих конструкций.

Выводы по главе

1. Для двухкомпонентных упругих композитов представлены методики получения новых эффективных характеристик на основе уже известных. Методика итерационного преобразования эффективных характеристик и методика, основанная на процедуре среднегеометрического усреднения позволяют получать более точные по сравнению с известными оценки прогноза НДС конструкций.

 Проведенные расчеты с модифицированными модулями типа Хашина-Штрикмана показали:

а) отклонения значений верхних и нижних оценок для классических и модифицированных эффективных модулей Хашина-Штрикмана незначительны: порядка 1 – 2 % в случае модулей сдвига и до 5 – 6 % для модулей объемного сжатия.

b) значений потенциальных энергий, соответствующих отклонения точному приближенным решениям, И носят устойчивый характер решенных Максимальные двухсторонние относительно типа задач. отклонения дают расчеты с эффективными модулями Фойгта и Рейсса. Более умеренные (по точности) отклонения дают расчеты на основе верхних и нижних оценок эффективных модулей Хашина-Штрикмана фойгтовского и рейссовского типов. Минимальные отклонения для всех типов решенных задач доставляют расчеты с итерированными и среднегеометрически осредненными эффективными модулями.

5. Методика решения плоских задач линейной вязкоупругости итерационным методом с применением комплекса метода конечных элементов

Основная цель главы: разработка алгоритма итерационного метода решения плоских задач линейной вязкоупругости, реализованного с помощью программного комплекса метода конечных элементов.

Постановка задачи.

1. Представление теории итерационного алгоритма для плоской задачи линейной вязкоупругости на примере одноосного растяжения пластины.

a). Особенности реализации алгоритма решения упругой задачи в комплексе метода конечных элементов.

б). Расчет временных функций правых частей уравнений равновесия и граничных условий.

2. Численная реализация задачи об одноосном нагружении квадратной пластины.

a). Расчет нагружения линейно-вязкоупругой пластины равномерно распределенной нагрузкой. Анализ сходимости в зависимости от выбранных параметров.

б). Сравнение аналитического решения и приближенных решений для задачи о нагружении стержня.

в). Сравнение результатов расчета методом итераций и приближенным методом.

3. Двухосное растяжение квадратной пластины.

5.1. Представление итерационного алгоритма для плоской задачи линейной вязкоупругости

Рассмотрим суть итерационного метода для плоской задачи линейной вязкоупругости.

Рассмотрим уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = X \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = Y. \end{cases}$$
(68)

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ – тензоры напряжений, X, Y – объемные силы.

Уравнения (Коши), связывающие деформации є_{іі} и перемещения и_{іі}

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j = 1, 2).$$
(69)

Определяющие уравнения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \left(K^* - \frac{2}{3}G^*\right)\theta\delta_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij}, \ (i, j = 1, 2).$$

$$\tag{70}$$

Здесь K^* , G^* – операторы объемной и сдвиговой релаксации, ε_{ij} – линейные деформации, θ – объемная деформация пластины равная $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$, u_{α} , $\alpha = 1, 2$ – компоненты вектора перемещений, δ_{ij} - символ Кронекера.

Уравнения равновесия Ламе в перемещениях получатся путем подстановки в (68) напряжений, выраженных через перемещения посредством (69), (70). Система из уравнений Ламе в перемещениях имеет вид

$$\begin{cases} \left(K^* + \frac{1}{3}G^*\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G^*\Delta u_1 = 0, \\ \left(K^* + \frac{1}{3}G^*\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G^*\Delta u_2 = 0. \end{cases}$$
(71)

К ним необходимо добавить уравнения граничных условий

$$\begin{cases} X = \sigma_{11}l + \tau_{12}m \\ Y = \sigma_{22}m + \tau_{21}l, \end{cases}$$

где, величины *l*, *m*, – направляющие косинусы.

Выражая σ_{11} , σ_{22} , τ_{12} по закону Гука, запишем уравнения граничных условий в виде:

$$\begin{cases} X = \left[\left(K^* - \frac{2}{3}G^* \right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + 2G^* \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] l + G^* \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) m, \\ Y = \left[\left(K^* - \frac{2}{3}G^* \right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + 2G^* \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] m + G^* \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) l, \end{cases}$$
(72)

Здесь $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}, \ \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}.$

Мы имеем интегро-дифференциальную систему уравнений (72) относительно искомых перемещений, являющихся функциями как пространственных координат *x*, *y*, так и времени *t*. Реализация такого решения весьма трудоемка.

В формуле (71) Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, G^* –

материальный оператор релаксации, заданный следующим образом:

$$G^* x \equiv G_0 (1 - \lambda \mathcal{B}_{\rho}^*) x, \tag{73}$$

Здесь G_0 – упругомгновенный модуль сдвига, \mathcal{P}^*_{ρ} – оператор с экспоненциальным ядром.

$$\mathcal{P}_{\rho}^{*} x \equiv \int_{0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \qquad (74)$$

где $\rho = \gamma + \lambda$, γ , λ – параметры функций релаксации и ползучести.

Будем рассматривать случай, когда среда обладает только сдвиговой ползучестью, а объемное поведение будем считать упругим

$$K^* = K_0 = const.$$

Рассмотрим итерационную процедуру на примере решения задачи о растяжении прямоугольной пластины, схема которой представлена на рисунке 29. Пластина подвергается действию растягивающего напряжения σ_{ms} , значение которого составляет 15 МПа.

Закрепленная нижняя грань пластины S обозначен как Γ_1 ; грань, к которой прикладывается постоянное растягивающее напряжение, обозначена как Γ_3 (y = b); боковые вертикальные грани обозначены как Γ_2 , Γ_4 ($x = \pm a$), a = 0,95 м, b = 0, 19 м.



Рисунок 29 – Схема нагруженной пластины

Согласно условиям задачи граничные условия в каждой точке поверхности задавались в следующем виде:

На гранях Γ_2 , Γ_4 :

$$\sigma_{11}(\pm a, y, t) = 0,$$

 $\sigma_{12}(\pm a, y, t) = \sigma_{21}(\pm a, y, t) = 0.$

На верхней грани пластины Г₃:

$$\sigma_{22}(x,b,t) = \sigma_{tms},$$

$$\sigma_{12}(x,b,t) = \sigma_{21}(\pm a, y,t) = 0$$

На нижней грани пластины Г₁:

$$u_i(x,0,t) = 0, i = 1,2.$$

Считалось, что в начальный момент времени тело *S* не деформировано и свободно от внутренних напряжений:

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = 0,$$

 $\sigma_{ij}(x, y, 0) = 0,$
 $\varepsilon_{ij}(x, y, 0) = 0.$

Рассмотрим итерационный процесс решения системы уравнений (68). Введем вспомогательные физические уравнения для итерационного процесса будут иметь вид:

$$\sigma_{ij}^{0} = \left(k_{S}G^{*} - \frac{2}{3}G^{*}\right)\theta\delta_{ij} + 2G^{*}\varepsilon_{ij}, \ (i, j = 1, 2).$$

С учетом (70), произведем тождественное преобразование одного из уравнений системы (71):

$$\left(K_{0} + \frac{1}{3}G^{*}\right) \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x} + G^{*} \cdot \Delta u_{1} = K_{0} \frac{\partial\theta}{\partial x} + G_{0} \left(\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \Delta u_{1} - \lambda \mathcal{P}_{\rho}^{*}\Delta u_{1}\right) - \frac{1}{3}G_{0}\lambda \mathcal{P}_{\rho}^{*}\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$$

$$(75)$$

На примере одного из уравнений преобразуем систему (71):

$$G^*\left[\left(k_s + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \Delta u_1\right] = \left(k_s G^* - K_0\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$
(76)

Выбор левой части уравнения равновесия обусловлен тем, что оператор G^* однородным образом входит в данное выражение. Поэтому можно обе части уравнения (76) умножить на G^{*-1} и получить тем самым левую часть уравнения, содержащую только дифференциальные операторы. При данных преобразованиях оставим константу G_0 в левой части уравнения.

$$G_0 \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta u_1 \right] = \left(k_s G^* - K_0 \right) G_0 G^{*-1} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$
(77)

Обозначим оператор невязки итерационного процесса

$$\Delta^* = k_S \cdot G^* - K_0. \tag{78}$$

Оператор G^{*-1} определяется по формуле

$$G^{*-1}x = \frac{1}{G_0} (1 + \lambda \mathcal{P}_{\gamma}^*) x.$$
(79)

Здесь

$$\mathcal{P}_{\gamma}^* x \equiv \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} x(\tau) d\tau \, .$$

Придадим в левой части уравнения (76) искомым функциям индекс *n*+1, а для правой части возьмем индекс *n*. В результате получаем последовательность систем уравнений равновесия в следующем виде:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial x} + \Delta u_1^{(n+1)} \right] = G^{*-1} \cdot \Delta^* \cdot \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x}, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(n+1)} \right] = G^{*-1} \cdot \Delta^* \cdot \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial y}, \ n = 0, 1, \dots \end{cases}$$
(80)

а систему уравнений граничных условий представим как:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(n+1)} + 2 \cdot \varepsilon_{11}^{(n+1)} \right] = G^{*-1} \cdot \Delta^* \cdot \theta^{(n)}, x = \pm a, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(n+1)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(n+1)} \right] = G^{*-1} \cdot \Delta^* \cdot \theta^{(n)} + YG^{*-1}H, y = b. \end{cases}$$

$$\tag{81}$$

Здесь
$$\theta^{(n)} = \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial y}, \ \varepsilon_{11}^{(n)} = \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x}, \ \varepsilon_{22}^{(n)} = \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial y}, \ G^* = \frac{1}{G_0}G^*, \ G^{*-1} = G_0G^{*-1}.$$

Условием разделения пространственных и временных переменных является представление поверхностной нагрузки в виде:

$$Y(x, y, t) = Y(x, y)H(t),$$
 (82)

где *Y*(*x*, *y*) – функция координат, независящая от времени, *H*(*t*) – произвольная функция времени.

Примем начальное приближение равным нулю $u_{\alpha}^{(0)} = 0$, $\alpha = 1, 2$. Подставим в уравнения (80, 81). Тогда при n=0 получим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x} + \Delta u_1^{(1)} \right] = 0, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(1)} \right] = 0, \end{cases}$$
(83)

и граничные условия:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{11}^{(1)} \right] = 0, \quad x = \pm a, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(1)} \right] = \mathbf{Y} \boldsymbol{G}^{*-1} \boldsymbol{H}, \quad y = b. \end{cases}$$

$$\tag{84}$$

Решение граничной задачи (83, 84), очевидно, будет иметь вид:

$$u_{\alpha}^{(1)}(x, y, t) = \tilde{u}_{\alpha}^{(1)}(x, y)\varphi_{0}(t),$$

$$\varphi_{0}(t) = G^{*-1}H.$$

Здесь $\tilde{u}_{\alpha}^{(1)}(x, y)$ – решение граничной задачи упругости, для которой уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x} + \Delta u_1^{(1)} \right] = 0, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(1)} \right] = 0, \end{cases}$$

$$(85)$$

и граничные условия:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{11}^{(1)} \right] = 0, \quad x = \pm a, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(1)} \right] = Y, \quad y = b. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x}, \ \varepsilon_{22}^{(1)} = \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y}, \ \theta^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(n)}.$

Возьмем n=1. На основе (80) получаем:

системы уравнений равновесия в следующем виде:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} + \Delta u_1^{(2)} \right] = G^{*-1} \cdot \Delta^* \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(2)} \right] = G^{*-1} \cdot \Delta^* \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y}, \end{cases}$$
(86)

Так как $\theta^{(1)} = \theta^{(1)} \varphi_0(t)$, то

$$G^{*-1}\Delta^*\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x} = G^{*-1}\Delta^*\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x}\varphi_0(t), \quad G^{*-1}\Delta^*\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial y} = G^{*-1}\Delta^*\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial y}\varphi_0(t).$$

Примем $\varphi_1(t) = G^{*-1} \Delta^* \varphi_0(t)$.

Таким образом, соотношения (85) перепишутся как

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} + \Delta u_1^{(2)} \right] = \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x} \varphi_1(t), \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(2)} \right] = \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y} \varphi_1(t). \end{cases}$$
(87)

Рассмотрим систему граничных условий при n=1. Имеем:

$$\begin{cases} G_{0} \cdot \left[\left(k_{s} - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(2)} + 2 \cdot \varepsilon_{11}^{(2)} \right] = \theta^{(1)} \varphi_{1}(t), \ x = \pm a, \\ G_{0} \cdot \left[\left(k_{s} - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(2)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(2)} \right] = \mathbf{Y} \varphi_{0}(t) + \theta^{(1)} \varphi_{1}(t), \ y = b. \end{cases}$$
(88)

Решение граничной задачи (86, 87) будет иметь вид:

$$u_{\alpha}^{(2)}(x, y, t) = \tilde{u}_{\alpha}^{(1)}(x, y)\varphi_{0}(t) + \tilde{u}_{\alpha}^{(2)}(x, y)\varphi_{1}(t).$$
(89)

Здесь $\tilde{u}_{\alpha}^{(2)}(x, y)$ – решение граничной задачи упругости с уравнениями равновесия:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} + \Delta u_1^{(2)} \right] = \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(2)} \right] = \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}, \end{cases}$$

и граничными условиями:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{11}^{(1)} \right] = \theta^{(1)}, \quad x = \pm a, \\ G_0 \cdot \left[\left(k_s - \frac{2}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(1)} \right] = \theta^{(1)}, \quad y = b. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y}, \quad \theta^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)}. \end{cases}$

Таким образом, решения для *n*+1 итерации будут выражаться следующими формулами

$$u_{\alpha}^{(n+1)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{\alpha}^{(i)}(x, y) \varphi_{i-1}(t),$$

$$\varphi_{i-1}(t) = \left[G^{*-1}(k_{s}G^{*} - K_{0}) \right]^{i} \varphi_{0}(t).$$
(90)

Следовательно, решение систем уравнений (80, 81) с помощью итерационного процесса представлено как последовательность решений упругих задач относительно пространственных координат и расчет временных функций $\varphi_i(t)$.

5.2. Итерационный алгоритм решения плоских задач линейной вязкоупругости

Основные этапы итерационного алгоритма численного моделирования процессов линейно-вязкоупругого деформирования пластины показаны на рисунке 30.

 На основе известной формы и размеров исследуемого тела осуществляется создание геометрической модели. В разобранном случае это прямоугольная пластина со сторонами *a* и *b*, представленная на рисунке 29.

- Создание конечно-элементной модели области тела пластины путем разбиения геометрической модели пластины на плоские прямоугольные элементы.
- Формулировка граничных и начальных условий, отражающих физику процесса нагружения. Определяются внешние механические воздействия и закрепления в виде соотношений (81).
- 4. Выбор начального приближения исходного распределения набора искомых переменных и обнуление номера временного шага (*i* = 0).
- 5. Начало общего (глобального) итерационного процесса.
- 6. Начало локального итерационного процесса решения задачи упругости.
 - 6.1. Формирование силовых граничных условий на поверхности твердого тела S в форме уравнений (уравнения граничных условий, не зависящих от времени). Для первого шага принимаем, что u_α⁽⁰⁾ = 0, α = 1,2 и решаем задачу упругости.
 - Для дальнейшего расчета необходимым решением первого шага 6.2. итерации будут значения объемной деформации $\theta^{(1)}(x, y)$. Путем несложных математических операций определяем массив значений $\theta^{(1)}$ и, для узлов сетки методом конечных разностей находим значения производных $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y}$. Значения представляют собой правые части уравнений равновесия и граничных условий системы на следующем шаге решения. На найденные следующем шаге итерации величины В виле фиктивных объемных и граничных сил прикладываются к узлам расчетной модели.
 - 6.3. После обработки, результаты расчета каждого шага записываются в отдельный текстовый файл-нагрузок, который также является файлом входных данных к расчету следующего шага.

6.4. Обновление расчетной модели пластины S, конечно-элементное разбиение остается прежним, количество узлов и элементов расчетной модели пластины относительно первого шага итерационного процесса остается неизменным. Формирование силовых граничных условий на поверхности твердого тела S в форме уравнений (ГУ упругости 2 шага).



Рисунок 30 – Обобщенная блок-схема итерационного алгоритма

- 6.5. Если критерии сходимости удовлетворены, то переход к пункту 7, если нет, то к 6.1.
- 7. Определение временных функций правых частей уравнений (X) $\varphi_i(t)$.
- Определение конечных искомых решений, представленных формулой (X).
- Осуществляется оценка расчетного и теоретического показателей скорости сходимости итерационного процесса, определенные формулами (89).
- 10. Анализ результатов моделирования.

Пункты 6, 7 отражают основные этапы численного решения задачи. Сформулированный алгоритм строится на основе традиционных подходов механики деформируемого твердого тела, основы и вычислительные алгоритмы которых освещены в литературе, в частности в работах.

5.3. Особенности алгоритма решения упругой задачи в комплексе метода конечных элементов

Упругая задача решается согласно следующей итерационной процедуре (на примере одной из систем 80, 81, 85):

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(K_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(n+1)} \right] = \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial y}, \\ G_0 \cdot \left[\left(K_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \theta^{(n+1)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(n+1)} \right] = \theta^{(n)}, \ n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Распишем процедуру для n=2, где n – номер итерации.

Для первого шага принимаем, что $u_{\alpha}^{(1)} = 0$ и решаем следующую задачу:

$$\begin{cases} G_0 \cdot \left[\left(K_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y} + \Delta u_2^{(1)} \right] = 0, \\ G_0 \cdot \left[\left(K_s + \frac{1}{3} \right) \cdot \theta^{(1)} + 2 \cdot \varepsilon_{22}^{(1)} \right] = Y. \end{cases}$$

Искомым решением первого шага итерации будут значения $\theta^{(1)}(x, y), u^{(1)}_{\alpha}, \alpha = 1, 2.$

После решения первого шага переходим к обработке результатов расчета в постпроцессоре ANSYS [126, 127]. Путем несложных математических операций определяем массив значений $\theta^{(1)}$ и, для узлов сетки методом конечных разностей находим значения производных $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y}$. Значения представляют собой правые части уравнений системы. На следующей итерации найденные величины в виде объемных и граничных сил прикладываются к узлам расчетной модели. После обработки, результаты расчета каждого шага записываются в отдельный текстовый файл, который также является файлом входных данных к расчету следующего шага. Далее запускаем повторное решение задачи. Таким образом, мы сохраняем информацию с предыдущих шагов [128, 129].

Этапы моделирования представлены в пакетном (командном) режиме. Пакетный режим ПК МКЭ ANSYS выполняется путем запуска командного файла-программы, написанного на языке APDL [130, 131]. Также используются два файла-макроса: *«derivate_1»* и *«gu_1»*. В именах файлов и командах цифра «1» означает индекс первого шага итерационной процедуры.

Макрос *«derivate_1»* отвечает за поиск производных $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y}$ методом конечных разностей [131]. Второй макрос служит для создания массива сил на границах пластины. Все вышеописанные файлы представлены в приложениях 1, 2. Алгоритм итерационной процедуры представлен на

рисунке 30.

Рассмотрим детально упругое решение задачи для первого шага итерационного метода.

- Присвоение задаче имени "Iter1". Данное название будут иметь различные файлы, создаваемые программой. *Команда: «/FILNAME, Iter1, 0».*
- 2. Выбор типа анализа. *Команда: «/COM, Structural»*.
- Начало работы в препроцессоре.
 Команда: «/PREP7».
- 4. Выбор типа конечного элемента. *Команда: «ЕТ, 1, PLANE182»*.
- 5. Задание свойств материала: *EX* модуль Юнга, *PRXY* коэффициент Пуассона.

Команда: «МР, ЕХ, 1, Е».

Здесь «*EX*» – числовое значение модуля упругости.

Команда: «МР, PRXY, 1, пи».

Здесь «*nu*» – числовое значение коэффициента Пуассона.

 Построение геометрии квадратной пластины с размером грани 20 ед. Сначала создаем узловые точки пластины в координатной плоскости XY.

Далее на основе узлов строим конечные элементы.

Команда для узловых точек:

```
«z=20
```

*do, i, 1, z

*do, j, 1, z

*enddo

*enddo».

Здесь z – количество узлов на грани пластины.

Команда для построения элементов:

«*do, j, 1, 19

do, i, 1, 19 e, i+20(j-1), i+1+20*(j-1), i+21+20*(j-1), i+20+20*(j-1) *enddo

*enddo».

Задание нагрузки на узлы верхней грани с 381 по 400.
 Команда: «f, 381 ,fy, q, , 400».

Здесь q – числовое значение нагрузки.

- Заделка узлов нижней грани.
 Команда: «d, 1, all, , , 20».
- 9. Вход в решатель, запуск программы на решение. *Команда: «finish*

/solu

solve».

- Вход в постпроцессор для обработки полученного решения. Команда: «/POST1».
- Создание массивов числовых значений линейных деформаций, объемной деформации, производных по объемной деформации, сил в узлах пластины.

Команда объявления массивов для деформаций $\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}$:

«*dim, def_x_1, array, 400

**dim*, *def_y_1*, *array*, 400».

Команда объявления массивов для объемной деформации $\theta^{^{(1)}}$:

«*dim, theta_1, array, 400».

Команда объявления массивов для объемных сил, приложенных в области пластины:

«*dim, force_x_1, array, 400

*dim, force_y_1, array, 400».

Команда объявления массивов для сил на границах:

«*dim, force_x_gu_1, array, 400

*dim, force_y_gu_1, array, 400».

- Заносим значения деформаций в массивы. Команда: «*VGET, defx_1, NODE, 1, EPEL, X, , ,2 *VGET, defy 1, NODE, 1, EPEL, Y, , ,2».
- Получение объемной деформации путем сложения линейных деформаций.

Команда: «*voper, theta_1, defx_1, add, def_y_1».

14. Подключение макроса *«derivat_l»* для поиска производных $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial y}$

методом конечных разностей.

Команда: «derivate_1».

15. Подключение макроса «gu_1» для определения сил на границах пластины.

Команда: «gu_1».

- 16. Запись результатов расчета и преобразованных значений в файл, который будем использовать на следующем шаге итерации. Команда: « PARSAV, All, 'temp_1', 'tmp',''».
- 17. Запуск последующих шагов итерационного процесса.

Команда:

«/INP.,shag_iteracii_n

PRNSOL, U, COMP».

Здесь *п* – количество шагов итерационной процедуры.

5.4. Расчет временных функций правых частей уравнений равновесия и граничных условий

Из представления перемещений $u_{\alpha}^{(n+1)}(x, y, t)$ в виде соотношений (89) вытекает следствие: зависимость перемещений от времени будет неоднородной по координатам. Функции $u_{\alpha}^{(n+1)}(x, y)$ являются весовыми коэффициентами, с которыми $\varphi_i(t)$ входят в определение результирующего перемещения $u_{\alpha}^{(n)}(x, y, t)$. В результате зависимость $u_{\alpha}^{(n)}$ от t в каждой точке расчетной области будет в общем случае отличной от соответствующих значений в соседних точках. В итоге вязкоупругий характер связи напряжений и деформаций будет оказывать влияние на процессы концентрации напряжений.

Будем считать, что временная функция, входящая в определение поверхностной нагрузки (80, 81), является функцией Хевисайда и задается в виде:

$$H(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$
(91)

Для первого шага итерационного процесса правая часть уравнений равновесия равна нулю, а временная функция будет определяться по формуле

$$\varphi_0(t) = G_0 G^{*-1} H = (1 + \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^*) H.$$

Учтем, что $G^{*-1}G^{*} = G_{0}$ и рассчитаем $\varphi_{1}(t)$:

для второго шага невязка будет иметь вид $\varphi_1(t) = \Delta^* \varphi_0$.

$$\varphi_1(t) = G^{*-1} \Delta^* \varphi_0 = \left(k_s G_0 - K_0 G^{*-1} \right) (1 + \lambda \mathcal{P}_{\gamma}^*) H .$$

Введем константы:

$$b = k_S G_0 - K_0, \ a = \frac{K_0 \lambda}{k_S G_0 - K_0}.$$

Тогда $\varphi_1(t) = b \left(1 - a \mathcal{B}_{\gamma}^* \right) \varphi_0$.

Согласно (76) определим функцию $\phi_2(t)$:

$$\varphi_{2}(t) = G^{*-1} \left(k_{s} G^{*} - K_{0} \right) \varphi_{1} = b^{2} \left(1 - a \mathcal{P}_{\gamma}^{*} \right)^{2} \varphi_{0}$$

Для следующего шага:

$$\varphi_3(t) = b^3 \left(1 - a \mathcal{A}_{\gamma}^*\right)^3 \varphi_0$$

Таким образом, используя бином Ньютона для вычисления $b^n (1 - a \mathcal{P}_{\gamma}^*)^n$, можно получить любое $\varphi_n(t)$:

$$\varphi_n(t) = b^n \left(1 - a \mathcal{P}_{\gamma}^*\right)^n \varphi_0 = b^n \left(1 - a \mathcal{P}_{\gamma}^*\right)^n \varphi_0$$

При расчете $\varphi_n(t)$ удобно использовать алгебру операторов Вольтерра [132], согласно которой справедливы следующие соотношения для произведений и степеней операторов:

$$\mathcal{A}^{*}(-\beta)\mathcal{A}^{*}(-\gamma) = \frac{1}{\gamma - \beta} \Big[\mathcal{A}^{*}(-\beta) - \mathcal{A}^{*}(-\gamma) \Big],$$
$$\mathcal{A}^{*n}(-\beta) = -\frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}\mathcal{A}^{*}(-\beta)}{\partial \beta^{n-1}}.$$

Единственным трудоёмким расчетом является возведение оператора \mathcal{P}^*_{γ} в *n* – *ую* степень. Рассмотрим случай, когда *n*=2. Квадрат оператора найдем следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\gamma}^{*}\mathcal{P}_{\gamma}^{*}h &= \int_{0}^{t} e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \int_{0}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-\theta)} d\theta = e^{-\gamma t} \int_{0}^{t} e^{\gamma \tau} d\tau \int_{0}^{\tau} e^{-\gamma \tau} e^{\gamma \theta} d\theta = \\ &= e^{-\gamma t} \int_{0}^{t} \frac{1}{\gamma} \left(e^{\gamma \tau} - 1 \right) d\tau = e^{-\gamma t} \left(\frac{1}{\gamma^{2}} e^{\gamma t} - \frac{1}{\gamma^{2}} - \frac{1}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Представим временные функции для *n*=3.

$$\begin{split} \varphi_0(t) &= G_0 G^{*-1} H = (1 + \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^*) H , \\ \varphi_1(t) &= b \left(1 - a \mathcal{B}_{\gamma}^* + \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^* - a \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^{*2} \right) , \\ \varphi_2(t) &= b^2 \left(1 + a^2 \mathcal{B}_{\gamma}^{*2} - 2a \mathcal{B}_{\gamma}^* + a \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^{*2} + a^2 \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^{*3} - 2a \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^{*2} + \lambda \mathcal{B}_{\gamma}^* \right) , \end{split}$$

$$\varphi_3(t) = b^3 \left(1 - a^3 \mathcal{A}_{\gamma}^{*3} + 3a^2 \mathcal{A}_{\gamma}^{*2} - 3a \mathcal{A}_{\gamma}^{*} - 3a^3 \lambda \mathcal{A}_{\gamma}^{*4} + 3a^2 \lambda \mathcal{A}_{\gamma}^{*3} - 3a \lambda \mathcal{A}_{\gamma}^{*2} + \lambda \mathcal{A}_{\gamma}^{*} \right).$$

5.5. Анализ сходимости итерационного алгоритма

Физические свойства материала пластины, обладающего сдвиговой релаксацией, задаются соотношением линейно вязкоупругого нестареющего тела, согласно (72). При этом объемное поведение будем считать упругим. Материальные константы: $G_0 = 2$ МПа, $K_0 = 10$ МПа.

Будем решать задачу для медленной, средней и быстрой скоростей релаксации, параметры функций которых представлены в таблице 19. Расчеты проведены для случаев, когда параметр η , определяющий отношение упругомгновенного модуля к длительному

$$\eta = G_0 / G_\infty, \tag{92}$$

принимает значение равные 5, 10 и 15.

Медленная скорость		Cpe	цняя скорость	Быстрая скорость	
релаксации, мин ⁻¹ .		релаксации, мин ⁻¹ .		релаксации, мин ⁻¹ .	
n-5	$\lambda = 0.004,$	n-5	$\lambda = 0.04,$	n-5	$\lambda = 0.4,$
η-3	$\gamma = 0.001$	$\eta = 3$	$\gamma = 0.01$	η-5	$\gamma = 0.1$
n - 10	$\lambda = 0.009,$	n-10	$\lambda = 0.09,$	n-10	$\lambda = 0.9,$
$\eta = 10$	$\gamma = 0.001$	η=10	$\gamma = 0.01$	η=10	$\gamma = 0.1$
n - 15	$\lambda = 0.014,$	n-15	$\lambda = 0.14,$	n - 15	$\lambda = 1.4,$
η=13	$\gamma = 0.001$	η-15	$\gamma = 0.01$	η=13	$\gamma = 0.1$

Таблица 19 – Значения материальных функций от η

При численной реализации итерационного процесса возможны два случая задания коэффициента k_s : a) $k_s = k_s(t)$, б) $k_s = const$.

Для случая, когда коэффициент зависит от времени, справедливы следующие выражения:

$$k_{S}(t)=G^{*-1}K_{0},$$

и более точное

$$k_{S}(t) = K_{0}G^{*-1}\varphi_{n}.$$

Способ задания константы не накладывает ограничений на вид итерированных функций времени, поскольку последние не зависят от координат. Поэтому, имея право на допущение, в работе приведены примеры, когда k_s является константой. Будем считать, что условно точное решение задачи получим при

$$k_s = G_0^{-1} K_0. (93)$$

Для оценки влияния коэффициента на скорость сходимости процесса рассмотрим следующие случаи его задания:

a)
$$k_s = 0.7 k_s$$
,
b) $k_s = 0.85 k_s$,
c) $k_s = 0.9 k_s$.
(94)

Расчетные показатели скорости сходимости определялись по формуле:

$$q_{n} = \frac{W_{n} \left(u^{n+1} - u^{n} \right)}{W_{n} \left(u^{n} - u^{n-1} \right)}, \quad u^{n} = \left(u^{n}, v^{n} \right), n = 1, 2, \dots$$

$$W_{n} \left(u^{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^{n} \varepsilon_{ij}^{n} \right) (i, j = 1, 2) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11}^{n} \varepsilon_{11}^{n} + \sigma_{12}^{n} \varepsilon_{12}^{n} + \sigma_{21}^{n} \varepsilon_{21}^{n} + \sigma_{22}^{n} \varepsilon_{22}^{n} \right).$$
(95)

Здесь $W_n(u^n)$ – функционалы удельных потенциальных энергий напряжений и деформаций. Функционалы $W_n(u^n)$ рассчитывались в каждый момент времени для выбранного элемента сетки расчетной модели пластины. В нашем примере, порядковый номер элемента конечно элементной модели в ANSYS равен 180.

напряжения σ_{ij}^n определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{n} &= \sigma_{11}^{n-1} + K_{0}\theta^{n}\varphi_{n}(t) - \frac{2}{3}G_{0}\left(\varphi_{n}(t) - \lambda\int_{0}^{t}e^{-\rho(t-\tau)}\varphi_{n}(\tau)d\tau\right)\theta^{n} + \\ &+ 2G_{0}\left(\varphi_{n}(t) - \lambda\int_{0}^{t}e^{-\rho(t-\tau)}\varphi_{n}(\tau)d\tau\right)\varepsilon_{11}^{n}. \\ \sigma_{22}^{n} &= \sigma_{22}^{n-1} + K_{0}\theta^{n}\varphi_{n}(t) - \frac{2}{3}G_{0}\left(\varphi_{n-1}(t) - \lambda\int_{0}^{t}e^{-\rho(t-\tau)}\varphi_{n}(\tau)d\tau\right)\theta^{n} + \\ &+ 2G_{0}\left(\varphi_{n}(t) - \lambda\int_{0}^{t}e^{-\rho(t-\tau)}\varphi_{n}(\tau)d\tau\right)\varepsilon_{22}^{n}. \\ \sigma_{12}^{n} &= \sigma_{12}^{n-1} + K_{0}\theta^{n}\varphi_{n}(t) + 2G_{0}\left(\varphi_{n}(t) - \lambda\int_{0}^{t}e^{-\rho(t-\tau)}\varphi_{n}(\tau)d\tau\right)\varepsilon_{12}^{n}. \end{aligned}$$

Здесь $\theta^n, \varepsilon_{ij}^n$ – значения объемной и линейных деформаций решения упругой задачи в комплексе метода конечных элементов.

Кроме q_n определялся суммарный показатель степени сжатия за n итераций

$$q = \prod_{k=1}^{n} q_k, \tag{96}$$

выражающий отношение свертки, рассчитанной на разности (*n* + 1)-го и *n*-го приближений, к соответствующей свертке, рассчитанной для разности первого и нулевого приближения.

Для начала, представим результаты решения относительно пространственных координат.

Программный код задачи представлен в приложении 1, 2. Сеточная модель получена путем дискретизации расчетной области. Модель представлена 361 элементом квадратной формы с размером грани равной 1 см. Число узловых точек равно 400. Выбранное количество узловых точек обусловлено демонстрацией метода решения и не учитывает влияние количества элементов на точность решения [133]. Пластина подвергается действию постоянного растягивающего напряжения σ_{ms} , значение которого постоянно и составляет 15 МПа.



Рисунок 31 – Изображение конечно-элементной модели пластины

Согласно условиям задачи граничные условия в каждой точке поверхности задавались в следующем виде:

На гранях Г₂, Г₄:

$$\sigma_{11}(\pm a, y) = 0,$$

 $\sigma_{12}(\pm a, y) = \sigma_{21}(\pm a, y) = 0.$

На верхней грани пластины Г₃:

$$\sigma_{22}(x,b) = \sigma_{tns},$$

$$\sigma_{12}(x,b) = \sigma_{21}(\pm a, y) = 0.$$

На нижней грани пластины Г₁:

$$u_i(x,0) = 0, i = 1, 2.$$

В таблицах 20 – 22 представлены результаты расчета первых восьми шагов решения упругой задачи для различных для случаев выбора параметров.

№ шага	$u^{(n)}(x,y)$	$\tilde{v}^{(n)}(x,y)$	$\varepsilon_x^{(n)}(x,y)$	$\varepsilon_{y}^{(n)}(x,y)$	$\theta^{(n)}(x,y)$
1	6,84E-03	2,14E-02	-2,73E-02	4,89E-02	2,16E-02
2	-1,05E-03	-3,80E-03	4,21E-03	3,96E-04	4,60E-03
3	3,34E-04	2,51E-02	-1,33E-03	4,36E-03	3,02E-03
4	-1,83E-05	-2,08E-03	7,31E-04	3,17E-04	4,14E-04
5	1,23E-04	3,44E-03	-4,96E-05	4,76E-04	4,26E-04
6	-9,73E-06	-2,65E-04	3,92E-05	2,51E-07	3,94E-05
7	1,95E-06	4,59E-04	-7,69E-06	5,20E-05	5,96E-05
8	-3,34E-07	-4,58E-05	1,40E-06	1,86E-06	3,26E-06

Таблица 20 — Численные результаты расчета упругой пластины для случая, когда $\eta = 5, \lambda = 0.004, \gamma = 0.001, k_s = 0.7 k_s$

Таблица 21 — Численные результаты расчета упругой пластины для случая, когда $\eta = 10, \ \lambda = 0.009, \gamma = 0.001, k_s = 0.85 k_s$

№ шага	$u^{(n)}(x,y)$	$\tilde{v}^{(n)}(x,y)$	$\varepsilon_x^{(n)}(x,y)$	$\varepsilon_{y}^{(n)}(x,y)$	$\theta^{(n)}(x,y)$
1	7,16E-03	2,06E-02	-2,86E-02	4,78E-02	1,91E-02
2	-8,55E-04	-2,33E-03	3,42E-03	1,28E-04	3,55E-04
3	2,96E-04	1,87E-02	-1,18E-03	3,30E-03	2,12E-03
4	-1,20E-04	-1,54E-03	4,79E-04	-2,40E-04	2,39E-04
5	1,07E-05	2,04E-03	-4,32E-05	2,82E-04	2,39E-04
6	-4,46E-06	-1,62E-04	1,80E-05	-2,32E-06	1,57E-05
7	6,67E-07	2,18E-04	-2,61E-06	2,42E-05	2,68E-05
8	-3,96E-08	-2,33E-05	1,86E-07	-4,47E-07	6,33E-07

№ шага	$u^{(n)}(x,y)$	$\tilde{v}^{(n)}(x,y)$	$\varepsilon_x^{(n)}(x,y)$	$\varepsilon_{y}^{(n)}(x,y)$	$\theta^{(n)}(x,y)$
1	7,52E-03	1,96E-02	-3,01E-02	4,66E-02	1,65E-02
2	-6,69E-04	-1,15E-03	2,68E-03	-8,89E-05	2,59E-03
3	2,47E-04	1,31E-02	-9,88E-04	2,36E-03	1,38E-03
4	-7,20E-05	-1,03E-03	2,88E-04	-1,67E-04	1,21E-04
5	7,88E-06	1,07E-03	-3,16E-05	1,49E-04	1,17E-04
6	-1,73E-06	-8,44E-05	6,97E-06	-2,25E-06	4,72E-06
7	1,45E-07	8,70E-05	-5,57E-07	9,50E-06	1,01E-06
8	-2,26E-08	-9,49E-06	7,98E-08	-3,47E-08	4,51E-08

Таблица 22 – Численные результаты расчета упругой пластины для случая, когда $\eta = 15$, $\lambda = 0.014$, $\gamma = 0.001$, $k_s = 0.9k_s$.

Результаты расчета с учетом временных функций итерационного процесса. Временные функции определяется согласно (89):

$$\varphi_{i-1}(t) = \left[G^{*-1}(k_S G^* - K_0)\right]^i \varphi_0(t).$$

Численный расчет выражений $\varphi_i(t)$ проводился в системе компьютерной алгебры Mathcad.

В таблице 23 представлены результаты расчета

$$u^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \tilde{u}^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi_{n-1}(t), \ v^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \tilde{v}^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi_{n-1}(t), \ n = 1,...,8,$$

для случая, когда $\eta = 10$, $\lambda = 0.004$, $\gamma = 0.001$, $k_s = 0.9 k_s$.

№ шага	$u^{(n)}(x,y)$	$\tilde{v}^{(n)}(x,y)$	$\varphi_{n-1}(t)$	$u^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$	$v^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$
1	7,521E-03	1,962E-01	6,689	5,030E-02	1,312E-01
2	-6,693E-04	-1,155E-03	-5,749	3,8438E-03	6,606E-03
3	2,471E-04	1,313E-02	4,897	1,211E-03	6,425E-02
4	-7,208E-05	-1,035E-03	-4,126	2,970E-04	4,241 E-03
5	7,882E-06	1,075E-03	3,427	2,702E-05	3,666 E-03

Таблица 23 – Результаты расчета ЛВУ пластины

6	-1,732E-06	-8,443E-05	-2,795	4,821E-06	2,3603E-04
7	1,451E-07	8,701E-05	2,222	3,231E-07	1,932E-04
8	-2,265E-08	-9,492E-06	-1,703	3,845E-08	1,616E-05

Решения для *n*-ой итерации определены формулами (89):

$$u_{\alpha}^{(n+1)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_{\alpha}^{(i)}(x, y) \varphi_{i-1}(t),$$
$$\varphi_{i-1}(t) = \left[G^{*-1}(k_{s}G^{*} - K_{0}) \right]^{i} \varphi_{0}(t).$$

Для оценки влияния k_s на скорость сходимости решения приведем расчеты, результаты которых представлены на рисунках 32 – 35. Представлены логарифмические зависимости суммарного показателя степени сжатия q, определенного согласно (96), для двух наиболее показательных случаев: расчетные значения взяты для времени t = 100 мин. и t = 1000 мин.

На рисунке 32, 33 рассмотрен случай, когда параметр η , представленный формулой (92), принимает значение равно 5.



Рисунок 32 – Логарифмические зависимости q от номера итерации.

$$1 - k_s = 0.7 k_s, 2 - k_s = 0.85 k_s, 3 - k_s = 0.9 k_s; t = 100$$
 мин



Рисунок 33 – Логарифмические зависимости q от номера итерации.

 $1 - k_s = 0.7 k_s, 2 - k_s = 0.85 k_s, 3 - k_s = 0.9 k_s; t = 1000$ мин

Как видно из графиков, чем ближе параметр k_s к условно точному значению k_s , определенному формулой (93), тем скорость сходимости итерационного процесса выше.

Аналогичные результаты показывают и случаи, представленные на рисунках 34, 35, когда параметр η =10. На рисунке 34, 35 рассмотрены случаи, когда значение параметра времени равно 100 и 1000 минут.


Рисунок 34 – Логарифмические зависимости q от номера итерации.

 $1 - k_s = 0.7 k_s, 2 - k_s = 0.85 k_s, 3 - k_s = 0.9 k_s; t = 100$ мин



Номер итерации *n*



 $1 - k_s = 0.7 k_s, 2 - k_s = 0.85 k_s, 3 - k_s = 0.9 k_s; t = 1000$ мин

109

Проведем сравнение расчетного показателя скорости сходимости, определенного посредством (95), и *теоретического показателя*, представленного формулой (97).

Теоремы о сходимости итерационного процесса, представленного в диссертации, сформулированы и доказаны в [62]. Необходимым условием сходимости итерационного алгоритма будет условие норм-эквивалентности вида:

$$m \|u\|_0^2 \le \|u\|^2 \le M \|u\|_0^2.$$

Здесь

$$\|u\|_{0}^{2} = a_{0}(t;\overline{u},\overline{u}) = \int_{V} \sigma_{ij}^{0}(\overline{u})\varepsilon_{ij}(\overline{u})dv,$$
$$\|u\|^{2} = a(t;\overline{u},\overline{u}) = \int_{V} \sigma_{ij}(\overline{u})\varepsilon_{ij}(\overline{u})dv, \quad (i,j=1,2).$$

Скорость сходимости определяется посредством неравенства

$$\left\| \overline{u}^{n+1} - \overline{u}^{*} \right\|_{0} \le \overline{q}^{n+1} \left\| \overline{u}^{0} - \overline{u}^{*} \right\|_{0}, n = 0, 1, \dots$$

Где, \bar{u}^* – значение точного решения для вектора перемещения.

Вычисление теоретического показателя степени сжатия осуществляется по формуле, представленной в [12]:

$$\overline{q} = \frac{(M-m)}{(M+m)}.$$
(97)

Значения *m*, *M* определяются как:

$$m = \min(\mu_1, \mu_2), \quad M = \max(\mu_1, \mu_2),$$
 (98)

где

$$\mu_1 = K_0 \varepsilon^2(t) + \frac{1}{3k_s + 1},\tag{99}$$

а, в силу того, что объемная релаксация отсутствует ($K^* = K_0 = const$),

$$\mu_2 = 1.$$
 (100)

Значение μ_1 можно найти, решив следующее уравнение:

$$\varepsilon(t)\mathbf{G}^*\varepsilon = \frac{3}{3k_s + 1} \tag{101}$$

После тождественного преобразования (101) получим:

$$\varepsilon^{2}(t)\mathbf{G}_{0} - \varepsilon(t)\mathbf{G}_{0}\lambda\int_{0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau - \frac{3}{3k_{s}+1} = 0$$
(102)

Здесь, для упрощения представления, $\int_{0}^{t} \Phi(t-\tau) d\tau \equiv \int_{0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)} x(\tau) d\tau$.

Рассмотрим интеграл, для которого

$$\int_{0}^{t_{n+1}} \Phi(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon(\tau)\Phi(t_{n+1}-\tau)d\tau.$$
(103)

Примем следующую схему вычисления:

$$f(t) = \int_{0}^{t} \Phi(\tau) d\tau, f(0) = 0, f'(\tau) = \Phi(\tau).$$
(104)

В каждом из интервалов в сумме (104) сделаем аппроксимацию

$$\int_{t_{i}}^{t_{i+1}} \varepsilon(\tau) \Phi(t_{n+1} - \tau) d\tau \cong \varepsilon(t_{i+0,5}) \int_{t_{i}}^{t_{i+1}} f'(t_{n+1} - \tau) d\tau =$$

$$= \varepsilon(t_{i+0,5}) \Big[f(t_{n+1} - t_{i+1}) - f(t_{n+1} - t_{i}) \Big].$$
(105)

Тогда, учитывая (105), уравнение (101) примет вид:

$$\varepsilon^{2}(t_{n})G_{0}\left[1-\lambda f(t_{n+1}-t_{n})\right]+\varepsilon(t_{n})G_{0}\lambda\sum_{i=0}^{n}\varepsilon(t_{i+0,5})\left[f(t_{i})-f(t_{i+1})\right]-\frac{3}{3k_{s}+1}=0 \quad (106)$$

При решении данного квадратного уравнения возникает вопрос выбора корня. Учтем, что в формуле (99) значение деформации $\varepsilon(t_n)$ возводится во вторую степень. Множитель $G_0 \lambda \sum_{i=0}^n \varepsilon(t_{i+0,5}) [f(t_i) - f(t_{i+1})]$, влияющий на знак и значение корня, имеет значение близкое к нулю. В силу того, что модули корней практически не отличаются, то выбор корня уравнения (106) не принципиален.

Решая квадратное уравнение (106), определим $\varepsilon(t_n)$. Далее найдем μ_1 , согласно (99), и определим показатель \overline{q}_n . Суммарный показатель степени сжатия за *n* итераций будем определять по формуле (96).

На рисунке 36 представлена логарифмическая зависимость показателя сходимости от *n* для двух вариантов задания а) теоретическое \overline{q} , определенно посредством (97); б) расчетное значение *q* согласно (95). Материальные константы: $G_0 = 2$ МПа, $K_0 = 10$ МПа, $\lambda = 0,004$ мин⁻¹, $\gamma = 0,001$ мин⁻¹.



Рисунок 36 – Логарифмическая зависимость показателя скорости сходимости от числа итераций. Пунктирные кривые получены расчетным способом по формулам (95), сплошные – теоретическим определением (97). Кривым 1, 5 соответствует время 50 мин.; кривым 2, 6 – 100 мин.; 3, 7 – 1000 мин.; 4, 8 – 1500 мин.

Хотелось бы отметить, что скорость сходимости итерационного метода достаточно высокая. Достаточно 6 итераций, чтобы коэффициент сжатия равнялся 10⁻⁶.

Проверка решения, представление результатов.

Проверим алгоритм решения для двух случаев, когда 1) t = 0 и 2) t близко к ∞ . Материальные константы G_0 , K_0 приняты согласно заданию. Скорость релаксации средняя, параметры $\eta = 5$, $k_s = 0.9 k_s$.

 Для первого случая, проверкой решения ЛВУ пластины итерационным способом будет расчет упругой пластины со сдвиговым модулем G₀.

В таблице 24 представлены результаты расчета перемещений для решения ЛВУ пластины итерационным способом.

№ шага	$u^{(n)}(x,y)$	$\tilde{v}^{(n)}(x,y)$	$\varphi_{n-1}(t)$	$u^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$	$v^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$
1	7,520E-03	1,960E-01	1,000	0,752E-02	1,960E-01
2	-6,691E-04	-1,154E-03	-0,060	4,011E-05	6,894E-05
3	2,472E-04	1,312E-02	3,600E-3	8,904E-07	4,723E-05
4	-7,204E-05	-1,031E-03	-2,161E-4	1,555E-08	2,220E-07
5	7,881E-06	1,077E-03	1,296E-5	1,021E-10	1,386E-08
6	-1,739E-06	-8,446E-05	-7,776E-7	1,341E-12	6,566E-11
7	1,452E-07	8,700E-05	4,665E-8	6,784E-15	4,057E-12
8	-2,261E-08	-9,492E-06	-2,799E-9	6,319E-17	2,656E-14

Таблица 24 – Результаты расчета ЛВУ пластины

Согласно (90)

$$u(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\Big|_{t=0} = 7,561 \cdot 10^{-3} \ CM, \ v(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\Big|_{t=0} = 1,964 \cdot 10^{-1} \ CM.$$

Запишем результаты упругого решения пластины с модулями G₀:

$$u' = 7,645 \cdot 10^{-3} cM, v' = 1,930 \cdot 10^{-1} cM.$$

Погрешности расчетов перемещений решения итерационным способом относительно упругого решения с модулем G₀ показывают следующий результат:

$$\Delta u = \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)|_{t=0} - u'}{u'} 100 = 1,1\%, \ \Delta v = \frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)|_{t=0} - v'}{v'} 100 = 1,7\%.$$
(107)

2) Представим аналогичные результаты для второго случая. Проверкой решения ЛВУ пластины итерационным способом будет расчет упругой пластины со сдвиговым модулем G_{∞} .

В таблице 25 представлены результаты расчета перемещений для решения ЛВУ пластины итерационным способом.

№ шага	$u^{(n)}(x,y)$	$\tilde{v}^{(n)}(x,y)$	$\varphi_{n-1}(t)$	$u^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$	$v^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$
1	7,520E-03	1,960E-02	4,999	3,760E-02	9,814E-01
2	-6,691E-04	-1,154E-03	-4,059	0,271E-02	0,466E-02
3	2,472E-04	1,312E-02	3,296	8,154E-04	4,325E-02
4	-7,204E-05	-1,031E-03	-2,676	1,927E-04	0,275E-02
5	7,881E-06	1,077E-03	2,173	1,713E-05	2,124E-03
6	-1,739E-06	-8,446E-05	-1,764	3,044E-06	1,490E-04
7	1,452E-07	8,700E-05	1,433	2,083E-07	1,246E-04
8	-2,261E-08	-9,492E-06	-1,163	2,626E-08	1,104E-05

Таблица 25 – Результаты расчета ЛВУ пластины

Определено:

$$u(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\Big|_{t=\infty} = 4,134 \cdot 10^{-3} \ CM, \ v(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\Big|_{t=0} = 1,034 \ CM.$$

Запишем результаты упругого решения пластины с модулями G_{∞} :

$$u'' = 3,991 \cdot 10^{-3} cM, v'' = 0,989 \cdot 10^{-1} cM.$$

Погрешности расчетов равны:

$$\Delta u = \frac{u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\big|_{t=0} - u''}{u''} 100 = 3,6\%, \ \Delta v = \frac{v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\big|_{t=0} - v''}{v''} 100 = 4,5\%.$$
(108)

Отметим, что относительные погрешности, рассчитанные по (107), (108) не превышают пяти процентов. Результаты расчета, полученные при проверке, подтверждают применимость итерационного метода решения задач теории линейной вязкоупругости с применением программного комплекса метода конечных элементов.

5.6. Сравнение результатов расчета методом итераций и приближенным методом

В данном разделе проведем оценку погрешности итерационного расчета для вязкоупругой пластины, с результатами расчетов, полученных приближенными методами. Приближенные решения для вязкоупругой пластины получим при помощи эффективных по времени модулей, выражения которых представлены формулами (4, 6, 7, 15).

Запишем выражения этих эффективных по времени модулей.

Эффективные по времени модули лагранжевого типа (4):

$$g_L(t) = G^*h$$

Эффективные по времени модули кастильянового типа (4):

$$g_{C}(t) = (G^{*-1}h)^{-1}.$$

Смешанные модули по типу Фойгта (6):

$$g_{CL}^{1}(t) = \overline{\gamma} g_{C}(t) + (1 - \overline{\gamma}) g_{L}(t) \,.$$

Смешанные модули по типу Рейсса (7):

$$g_{C,L}^{2}(t) = \left[\overline{\gamma} \frac{1}{g_{C}(t)} + (1 - \overline{\gamma}) \frac{1}{g_{L}(t)}\right]^{-1}$$

Эффективные по времени модули по типу Хашина-Штрикмана (15):

$$G'(t) = g_{L}(t) + \frac{\overline{\gamma}}{\frac{1}{g_{C}(t) - g_{L}(t)}} + \frac{6}{5} \frac{(K_{0} + 2g_{L}(t))(1 - \overline{\gamma})}{(3K_{0} + 4g_{L}(t))g_{L}(t)},$$

$$G''(t) = g_{C}(t) + \frac{1 - \overline{\gamma}}{\frac{1}{g_{L}(t) - g_{C}(t)}} + \frac{6}{5} \frac{(k_{C}(t) + 2g_{C}(t))\overline{\gamma}}{(3k_{C}(t) + 4g_{C}(t))g_{C}(t)}$$

Здесь $\overline{\gamma}$ – удельное объемное содержание компонента, определено посредством (9).

Для упрощения идентификации кривых решений на графиках 37, 38 условимся использовать порядковые номера линий в соответствии с таблицей 26.

Таблица 26 – Соответствие методов решений значению порядкового номера

Номер кривой на графике	Метод решения		
1	приближенное решение с ЭМ $g_L(t)$		
2	итерационный метод		
3	приближенное решение с ЭМ $g_C(t)$		
4	приближенное решение с ЭМ $g_{C,L}^{1}(t)$		
5	приближенное решение с ЭМ $g_{C,L}^2(t)$		
6	приближенное решение с ЭМ $G'(t)$		
7	приближенное решение с ЭМ $G"(t)$		

кривой

На графиках отражены результаты расчетов для случая, когда $\eta = 10, \lambda = 0.009, \gamma = 0.001.$



Рисунок 37 – Зависимость перемещений *и* от времени. Номера кривых соответствуют таблице 23.



Рисунок 38 – Зависимость перемещений *v* от времени. Номера кривых соответствуют таблице 23.





1 – отклонения расчетов с модулем $g_L(t)$, 2 – отклонения расчетов с модулем $g_C(t)$, 3, 4 – кривые расчетов с модулями $g_{C,L}^1(t)$, $g_{C,L}^2(t)$, 5 – G'(t) и G''(t).



Рисунок 40 – Графики изменения относительных отклонений приближенных решений перемещений *v* от расчета с итерационным алгоритмом. 1 – отклонения расчетов с модулем $g_L(t)$, 2 – отклонения расчетов с модулем $g_C(t)$, 3, 4 – кривые расчетов с модулями $g_{C,L}^1(t)$, $g_{C,L}^2(t)$, 5 – G'(t) и G''(t).



Рисунок 41 – Графики изменения относительных отклонений приближенных решений напряжений σ_x от расчета с итерационным алгоритмом. 1 – отклонения расчетов с модулем $g_L(t)$, 2 – отклонения расчетов с модулем $g_C(t)$, 3, 4 – кривые расчетов с модулями $g_{C,L}^1(t)$, $g_{C,L}^2(t)$, 5 – G'(t) и G''(t).



Рисунок 42 – Графики изменения относительных отклонений приближенных решений напряжений σ_y от расчета с итерационным алгоритмом. 1 – отклонения расчетов с модулем $g_L(t)$, 2 – отклонения расчетов с модулем $g_C(t)$, 3, 4 – кривые расчетов с модулями $g_{C,L}^1(t)$, $g_{C,L}^2(t)$, 5 – G'(t) и G''(t).

6. Сравнение аналитического решения и приближенного решения и терационным методом на примере задачи о нагружении стержня

Стержень прямоугольного сечения, схема которого представлена на рисунке 43, подвергается действию постоянного растягивающего напряжения σ_{ins} [69]. Значение σ_{ins} постоянно и составляет 15 МПа. Длина стержня L_0 =0,19 м. Размеры торца: a = 1 мм., b = 0,095 мм.



Рисунок 43 – Схема нагружения стержня

Численные расчеты аналитического и итерационного решений для задачи были проведены при следующих значениях параметров материальных функций релаксации и упругих констант:

 $\lambda = 0,004, \gamma = 0,001, G_0 = 2 \text{ MII}a, K_0 = 10 \text{ MII}a, .$

Значения заданных параметров: $\eta = 10$, $k_s = 0.96 k_s$.

Конечно элементная модель стержня (рисунок 44) получена путем двадцати кратного увеличения одного из размеров квадратной пластины, описанной в пункте 5. Надо понимать, что моделировать стержень в программном комплексе ANSYS удобнее при помощи стрежневых элементов, однако, представление сеточной модели в виде плоских элементов является вынужденной мерой. Это можно объяснить тем, что итерационный алгоритм предполагает взятие производной от значений объемных деформаций по узлам сетки методом конечных разностей.



Рисунок 44 – Конечно-элементная модель с указанием наименования границ расчетной области и декартовой системы координат

Жестко закрепленный торец стержня S обозначен как Г₃, торец к которому прикладывается растягивающее напряжение Г₁, боковые продольные грани обозначены как Г₂, Г₄

Согласно условиям задачи граничные условия в каждой точке поверхности x = (x, y) задавались в следующем виде:

На гранях Г₂, Г₄:

$$\sigma_{11}(\mathbf{x},t) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_2, \Gamma_4,$$

 $\sigma_{12}(\mathbf{x},t) = \sigma_{21}(\mathbf{x},t) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_2, \Gamma_4$

На верхней грани пластины Г₁:

$$\sigma_{22}(\mathbf{x},t) = \sigma_{tms}, \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\sigma_{12}(\mathbf{x},t) = \sigma_{21}(\mathbf{x},t) = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

На нижней грани пластины Г₃:

$$u_i(\mathbf{x},t) = 0, \ i = 1, 2, \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Считалось, что в начальный момент времени тело S не деформировано и свободно от внутренних напряжений:

$$u_1(\mathbf{x}, 0) = u_2(\mathbf{x}, 0) = 0,$$

 $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, 0) = 0,$ $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$
 $\varepsilon_{ii}(\mathbf{x}, 0) = 0,$

Представим аналитическое решение для стержня.

Упругое решение задачи о нагружении стержня растягивающей силой имеет вид:

$$\sigma_{y} = E\varepsilon_{y}, \varepsilon_{y} = \frac{\Delta L}{L_{0}}, \varepsilon_{x} = -\mu\varepsilon_{y}, v = \Delta L.$$
(109)

Здесь: σ_y – нормальное продольное напряжение, *E* и μ – модуль упругости Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, ε_y – продольная деформация, ε_x – поперечная деформация, v – перемещение свободного конца стержня, L_0 – начальная длина стержня, ΔL – удлинение стержня.

Для построения аналитического решения задачи необходимо в (109) сделать замены $\mu \to \mu^*, E \to E^*$ и произвести расшифровку функций от операторов μ^*, E^* .

Операторы μ^* , E^* выразятся через оператор связанной ползучести Ильюшина $g_{1/2}^*$. Оператор $g_{1/2}^*$ и имеет вид:

$$g_{1/2}^{*} x = \frac{2}{2 + \omega_{0}} [1 + \lambda \mu \Im_{q}^{*}] x,$$

$$q = \lambda + \gamma - \lambda \mu, \ \mu = \frac{\omega_{0}}{2 + \omega_{0}}, \ \omega_{0} = \frac{2G}{3K_{0}}.$$
(110)

Операторный модуль E^{*-1} выразится через G^{*-1} . Представим выражения операторов E^*, E^{*-1}, μ^* .

Рассмотрим операторный модуль E^* :

$$E^* = \frac{9K_0\omega^*}{2+\omega^*},$$

здесь ω^* определена формулой (23).

Согласно связи оператора $g_{1/2}^*$ и ω^* .

$$g_{1/2}^* = \frac{2}{2+\omega^*}$$

получим

$$E^* = 9K_0 \frac{1}{2} \omega^* g_{1/2}^*. \tag{111}$$

Учитывая преобразование произведения двух операторов к их разности посредством формулы (24)

$$\frac{1}{2}\omega^*g_{1/2}^*=1-g_{1/2}^*,$$

приведем формулу (111) к следующему виду:

$$E^* x = 9K_0 \left(1 - g_{1/2}^* \right) x.$$
 (112)

Здесь K_0 - модуль объемной упругости.

Рассмотрим расшифровку оператора μ^* .

$$\mu^* = \frac{1 - \omega^*}{2 + \omega^*} = \frac{1}{2} (1 - \omega^*) g_{1/2}^*.$$

Принимая во внимание формулу (23), получим

$$\mu^* x = \left(\frac{3}{2}g_{1/2}^* - 1\right)x. \tag{113}$$

Рассмотрим оператор E^{*-1} .

$$E^{*-1} = \frac{2 + \omega^*}{9K_0 \omega^*} = \frac{1}{9K_0} \left(\frac{2}{\omega^*} + 1\right).$$

Подставим в формулу выражение для ω^* , тогда получим

$$E^{*-1}x = \left(\frac{1}{3}G^{*-1} + \frac{1}{9K_0}\right)x.$$
 (114)

Учитывая формулы (112 – 114), произведем расшифровку формул (109):

Рассмотрим вывод формулы для $\varepsilon_{y}(t)$

$$\varepsilon_{y}(t) = \frac{\Delta L}{L_{0}} = \frac{L_{0}}{L_{0}A} \frac{1}{E^{*}} P.$$

Здесь А - площадь поперечного сечения стержня.

С учетом формулы (114) получим

$$\varepsilon_{y}(t) = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{3} G^{*-1} + \frac{1}{9K_{0}} \right) P.$$
(115)

Рассмотрим вывод формулы для $\varepsilon_x(t)$

$$\mathcal{E}_{x}(t) = -\mu^{*}\mathcal{E}_{y}(t).$$

Согласно выражениям (113, 114) получим

$$\varepsilon_{x}(t) = -\left(\frac{3}{2}g_{1/2}^{*} - 1\right)\varepsilon_{y}(t) = \frac{1}{A}\left(1 - \frac{3}{2}g_{1/2}^{*}\right)\left(\frac{1}{3}G^{*-1} + \frac{1}{9K_{0}}\right)P.$$

Следует заметить, что при дальнейшем перемножении множителей мы сталкиваемся с умножением операторов. Умножение оператора \mathcal{P}_{q}^{*} , входящего в выражение $g_{1/2}^{*}$, и оператора \mathcal{P}_{γ}^{*} , входящего в выражение G^{*-1} , производилось по следующей формуле:

$$\mathcal{J}_q^*\mathcal{J}_\gamma^* = \frac{\mathcal{J}_q^* - \mathcal{J}_\gamma^*}{\gamma - q}.$$

Тогда:

$$\varepsilon_{x}(t) = \frac{1}{A} \left[\frac{1}{3} G^{*-1} + \frac{1}{9K_{0}} - \frac{1}{6K_{0}} g^{*}_{1/2} - \frac{3}{G_{0}(2+\omega_{0})} \left(1 + \lambda\mu \partial_{q}^{*} + \lambda \partial_{\gamma}^{*} + \lambda^{2}\mu \frac{\partial_{q}^{*} - \partial_{\gamma}^{*}}{\gamma - q} \right) \right] P \quad (116)$$

Представим формулу для перемещения v:

$$v = \Delta L = \frac{L_0}{A} \left(\frac{1}{3} G^{*-1} + \frac{1}{9K_0} \right) P$$
(117)

Рассмотрим результаты решения.

На рисунках 45 – 47 представлены результаты расчета удлинения стержня, продольной и поперечной деформаций. Линиями 1 представлены аналитические решения, линиями 2 показаны данные, полученные в результате решения итерационным методом. Максимальные расхождения результатов численного моделирования с аналитическим решением составило не более 5, 75 %.



Рисунок 45 – Зависимость перемещения *v* от времени. 1- аналитическое решение, 2 – расчет с итерационной процедурой



Рисунок 46 – Зависимость значений продольной деформации от времени. 1аналитическое решение, 2 – расчет с итерационной процедурой



Рисунок 47 – Зависимость значений поперечной деформации от времени. 1аналитическое решение, 2 – расчет с итерационной процедурой

На рисунках 48 – 50 приведены результаты расчетов относительных отклонений во времени между аналитическим и итерационным решениями.



Рисунок 48 – Кривая изменения относительных отклонений аналитического решения от расчета с итерационной процедурой перемещения свободного

конца стержня



Рисунок 49 – Кривая изменения относительных отклонений аналитического решения от расчета с итерационной процедурой продольной деформации

127



Рисунок 50 – Кривая изменения относительных отклонений аналитического решения от расчета с итерационной процедурой поперечной деформации

Выводы по главе.

1. Показано, что итерационный метод, реализованный посредством программного комплекса метода конечных элементов, обладает достаточно высокой скоростью сходимости. Проведенный численный анализ условий сходимости итерационного процесса позволяет получить качественные и количественные оценки напряженно-деформированного состояния ЛВУ пластины.

2. Сравнение с результатами аналитического решения подтверждает применимость итерационного метода расчета задач ЛВУ в программном комплексе метода конечных элементов.

3. функций быть Зависимость временных может получена независимо от упругого решения. Процедуры определения временных функций И упругих решений реализуются раздельно. Реализация итерационного алгоритма не привязана к какому-либо конкретному виду ядер, входящих в физические уравнения.

4. Данный алгоритм позволяет решать задачи линейной вязкоупругости без написания дополнительных программ-макросов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено модифицирование приближенных методов расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из вязкоупругих и композиционных материалов.

Сформулируем полученные в работе результаты:

1. В рамках развития теории приближенных решений задач линейной вязкоупругости разработана методика определения эффективных по времени модулей, основанная на общности подхода при моделировании неоднородности по времени для линейной вязкоупругости и неоднородности по пространственным координатам для композиций. Предложенная методика позволяет получать более высокую степень точности аппроксимации линейно-вязкоупругих свойств по сравнению с известными эффективными по времени модулями.

2 Получены выражения и установлены свойства новых эффективных по времени модулей смешанного типа и модулей типа Хашина-Штрикмана. Модели, основанные на методе эффективных по времени модулей могут быть рекомендованы для экспресс-анализа квазистатического напряженного конструкций деформированного состояния полимерных ИЗ И работающих композиционных материалов, В режиме ползучести (релаксации).

3. Для двухкомпонентного изотропного получены композита выражения новых эффективных характеристик на основе итерационного и средне-геометрического преобразования классических модулей. Данные выражения рекомендуются к использованию наряду с модулями Фойгта-Рейсса Хашина-Штрикмана И для получения оценок напряженнодеформированного состояния неоднородных композитов.

4. Разработан алгоритм реализации приближенного быстросходящегося итерационного метода расчета НДС двумерных плоских задач линейно-вязкоупругости в среде комплексов метода конечных

130

элементов, позволяющие получать решения краевых задач механики полимерных и композиционных материалов с заданной точностью.

5. В результате адаптации приближенного итерационного метода к среде комплекса конечно-элементного анализа установлено: достаточно быстрая сходимость итерационного алгоритма, практическое совпадение расчетных и теоретических оценок сходимости, совпадение аналитического и итерационного решения в пределах 6%, что позволяет рекомендовать данный метод для расчета квазистатических плоских краевых задач вязкоупругости в линейной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

 Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов [и др.]. – Екатеринбург : УрО РАН, 2003. – 411 с.

2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1982. – 304 с.

Volterra V. Drei Vorlesungen / V. Volterra. – Leipzig, Berlin, 1914. –
 155 p.

Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970. – 280 с.

5. Ильюшин А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин // Механика полимеров. – 1968. – № 2. – С. 210-221.

 Ильюшин А. А. Некоторые основные вопросы механики полимеров / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов // Там же. – 1965. – № 3. – С. 180-190.

7. Шепери Р. Вязкоупругие свойства композиционных материалов /
Р. Шепери // Браутман Л. Н. Механика композиционных материалов. – М. :
[б. и.], 1978. – Т. 2. – С. 102-195.

8. Малый В. И. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости кусочно-линейных материалов / В. И. Малый, Н. А. Труфанов // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных материалов и конструкций: сб. науч. тр. – Свердловск : УрО РАН, 1989. – С. 78-85.

9. Малый В. И. Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости нестареющих материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 1. – С. 77-86.

 Малый В. И. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов / В. И. Малый, Н. А. Труфанов // Там же. – 1987. – № 6. – С. 148-154. 11. Коваленко А. Д. О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости / А. Д. Коваленко, А. А. Кильчинский // Прикл. механика. – 1970. – Т. 6, № 12. – С. 27-34.

12. Светашков А. А. Прикладные задачи механики вязкоупругих материалов / А. А. Светашков. – Томск : Изд-во ТПУ, 2012. – 205 с.

Павлов С. М. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости / С. М. Павлов, А. А. Светашков // Изв. вузов. Физика. – 1993. – Т. 36, № 4. – С. 129-137.

14. Светашков А. А. Эффективные по времени модули линейной вязкоупругости // Механика композит. материалов. – 2000. – № 1. – С. 96-107.

 Светашков А. А. Эффективные по времени вязкоупругие модули типа Хашина-Штрикмана / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов, К. К. Манабаев // Физ. мезомеханика. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 33-39.

16. Светашков А. А. Новые эффективные по времени характеристики для решения задач линейной вязкоупругости / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов, К. К. Манабаев // Изв. Физика. – 2013. – Т. 56, № 7-3. – С. 206-208.

17. Светашков А. А. Приближенный алгоритм решения задач линейной вязкоупругости / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов, К. К. Манабаев // Вычислит. механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 292-299.

Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н.
 Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

19. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел
 / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 383 с.

Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В.
 Москвитин. – М. : Наука, 1972. – 328 с.

 Бленд Д. Р. Теория линейной вязкоупругости / Д. Р. Бленд. – М.: Мир, 1965. – 199 с. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен.
 - М.: Мир, 1982. – 334 с.

23. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения) / И. И. Бугаков. – М. : Наука, 1973. – 288 с.

24. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. – М. : Высш. шк., 1976. – 277 с.

Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н. Х.
 Арутянян. – М.-Л. : Гостехиздат, 1952. – 324 с.

26. Арутюнян Н. Х. Теория ползучести неоднородных сред / Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский. – М. : Наука, 1983. – 336 с.

Ильин В. П. Расчет строительных конструкций из вязкоупругих материалов / В. П. Ильин, Л. Е. Мальцев, В. Г. Соколов. – Л. : Стройиздат, Ленингр. отд., 1991. – 190 с.

28. Колтунов М. А. Прикладная механика деформируемого твердого тела / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М. : Высш. шк., 1983. – 349 с.

Кравчук А. С. Механика полимерных и композиционных материалов / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. – М. : Наука, 1985. – 304 с.

30. Адамов А. А. Неизотермическое деформирование элементов конструкций из нелинейного дисперсно наполненного эластомера // Механика композиц. материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 2. – С. 25-30.

31. Адамов А. А. К построению модели вязкоупругого поведения наполненных эластомеров с учетом структурных изменений / А. А. Адамов // Исследования по механике материалов и конструкций. – Свердловск : УрО АН СССР, 1988. – С. 4-6.

32. Быков Д. Л. Об одном методе определения напряжений в линейно-вязкоупругих телах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 2. – С. 100-103.

33. Зевин А. А. Аппроксимация функций интегральных операторов в наследственных теориях упругости и старения // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, вып. 11. – С. 90-96.

34. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 832 с.

35. Мальцев Л. Е. Теория вязкоупругости для инженеров-строителей
 / Л. Е. Мальцев, Ю. И. Карпенко. – Тюмень : Вектор Бук, 1999. – 299 с.

Победря Б. Е. Механика композиционных материалов / Б. Е.
 Победря. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

37. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А.
 Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высш. шк., 1965. – 466 с.

39. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – М. : Наука, 1971. – 224 с.

Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н. Х.
 Арутюнян. – М.-Л. : Гостехиздат, 1952. – 324 с.

41. Арутюнян Н. Х. Теория ползучести неоднородных сред / Н. Х. Арутюнян, В. Б. Колмановский. – М. : Наука, 1983. – 336 с.

42. Труфанов H. A. Применение метода квазиконстантных операторов с частичными аппроксимациями для прогнозирования эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного органопластика / Н. А. Труфанов, Е. В. Куимова, А. В. Путилова // Вестн. Перм. нац. исслед. политех. ун-та. Механика. – 2010. – № 3. – С. 31-48.

43. Труфанов Н. А. Применение частичных аппроксимаций в методе квазиконстантных операторов // Вестн. ПГТУ. Полимер. материалы. – 1997. – № 3. – С. 86-89.

44. Саркисян В. С. К теории неоднородных анизотропных нелинейно-вязкоупругих тел / В. С. Саркисян, Э. К. Безоян, М. Г. Григорян // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 2010. – № 61. – С. 12-17.

45. Куликов Р. Г. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного композиционного материала с нелинейно - вязкоупругим связующим / Р. Г. Куликов, Н. А. Труфанов // Вычисл. механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 61-71.

46. Куликов Р. Г. Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости / Р. Г. Куликов, Н. А. Труфанов // Там же. – 2009. – Т. 2, № 3. – С. 44-56.

47. Ван Фо Фы Г. А. Конструкции из армированных пластмасс / Г. А.
Ван Фо Фы. – Киев : Техника, 1971. – 220 с.

48. Куимова Е. В. Численное прогнозирование эффективных термовязкоупругих характеристик однонаправленного волокнистого композита с вязкоупругими компонентами / Е. В. Куимова, Н. А. Труфанов // Вест. СамГУ. – 2009. – № 4. – С. 129-148.

49. Труфанов Н. А. Приближенное определение трансверсальных вязкоупругих свойств органоволокна в составе однонаправленного органопластика / Н. А. Труфанов, О. Ю. Сметанников // Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций: сб. науч. тр. – Свердловск : [б. и.], 1990. – С. 114-118.

50. Победря Б. Е. Новые определяющие соотношения в нелинейной теории вязкоупругости / Б. Е. Победря, А. Б. Анисимов // Вест. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. – 2009. – № 5. – С. 41-47.

51. Манжиров А. В. Конволютивные вариационные принципы и их приложения в механике сплошных сред / А. В. Манжиров, С. А. Лычев, Н. К. Гупта // Успехи механики сплошных сред. – 2009. – Т. 7, № 5. – С. 506-524.

52. Гуляев В. А. Применение пакета ANSYS для решения задач вязкоупругости анизотропных оболочек / В. А. Гуляев, О. Ю. Сметанников // Вычислит. механика. – 2008. – Т. 6, № 7. – С. 59-62.

53. Каменский А. О. Определение эффективных характеристик вязкоупругого композита, релаксация компонент которого описывается экспонентами разных дробных порядков / А. О. Каменский, М. Ф. Селиванов, Ю. О. Чорнован // Мат. методы физ. механики. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 69-79.

54. Голуб В. П. К задаче идентификации ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости / В. П. Голуб, Ю. М. Кобзарь, В. С. Рагулина // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – № 45. – С. 39-49.

55. Шевченко В. П. Численно-аналитический метод решения задач линейной теории вязкоупругости / В. П. Шевченко, Р. Н. Нескородев // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 42-49.

56. Дмитриенко Ю. И. Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов / Ю. И. Дмитриенко, Е. А. Губарева, С. В. Сборщиков // Мат. моделирование и числовые методы. – 2014. – Вып. 2. – С. 28-48.

57. Димитриенко Ю. И. Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин / Ю. И. Димитриенко, Е. А. Губарева, Д. О. Яковлев // Наука и образование. – 2014. – № 10. – С. 359-382.

58. Моделирование вязкоупругих характеристик слоистоволокнистых полимерных композиционных материалов / Ю. И. Димитриенко [и др.] // Там же. – 2014. – № 11. – С. 748-770.

59. Клигман Е. П. Определение собственных колебаний кусочнооднородных вязкоупругих тел с использованием пакета ANSYS / Е. П. Клигман, В. П. Матвеенко, Н. В. Севодина // Вычислит. механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 46-54.

60. Староверов Н. Н. Моделирование вязкоупругих свойств и механического поведения рессоры из полимерных композиционных материалов под нагрузкой / Н. Н. Староверов, Г. О. Котиев, И. З. Даштиев // Наука и образование. – 2011. – № 7. – С. 1-19.

61. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью / У. А. Дэй. –
М.: Мир, 1974. – 190 с.

62. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М. : Мир, 1975. – 592 с.

63. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров / Т. Алфрей.
– М. : Изд-во иностр. лит., 1952. – 620 с.

64. Хуторянский Н. М. Метод гранично-временных интегральных уравнений нестационарных динамических задач вязкоупругости / Н. М. Хуторянский // Прикладные проблемы прочности. – 1979. – № 12. – С. 11-17.

65. Пестренин В. М. Влияние разгрузочных целей на напряженное состояние и ползучесть породного массива в окрестности выработки / В. М. Пестренин, И. В. Пестренина, П. П. Костромина // Вычислит. механика сплошных сред. – 2011. – № 2. – С. 110-118.

66. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях / А. Н. Филатов. – Ташкент : ФАН, 1967. – 132 с.

67. Коваленко А. Д. О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости / А. Д. Коваленко, А. А. Кильчинский // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, № 12. – С. 27-34.

68. Мальцев Л. Е. Приближенное операционное исчисление для уравнений Вольтерры в задачах механики полимеров // Механика полимеров. – 1977. – № 5. – С. 804-811.

69. Мальцев Л. Е. Метод непосредственного решения задач
вязкоупругости / Л. Е. Мальцев, В. И. Кренкин // Там же. – 1977. – № 4. – С.
606-613.

70. Мальцев Л. Е. Применение полиномов почти наилучшего приближения к решению задач вязкоупругости // Там же. – 1977. – № 6. – С. 967-971. 71. Светашков А. А. Определение эффективных характеристик неоднородных вязкоупругих тел / А. А. Светашков // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6, № 1. – С. 52-64.

72. Деруга А. П. Вариационные формулировки некоторых итерационных методов // Пространственные конструкции в Красноярском крае. – Красноярск : КПИ, 1979. – С. 34-46.

73. Светашков А. А. Применение энергетического метода к определению эффективных по времени модулей линейной вязкоупругости / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов // Физ. мезомеханика. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 69-73.

74. Светашков А. А. Оценка погрешности расчетов напряженнодеформированного состояния линейно-вязкоупругих тел с эффективными по времени модулями / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов // Там же. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 101-106.

75. Рекач В. Г. Руководство по решению задач по теории упругости / В.Г. Рекач. – М. : Высш. шк., 1966. – 229 с.

76. Гольдман А. Я. Прогнозирование деформационно – прочностных свойств полимерных и композиционных материалов / А. Я. Гольдман. – Л. : Химия, 1988 – 272 с.

77. Беккенбах Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман; под ред. В. И. Левина. – Изд. 2-е, стер. – М. : Комкнига, 2007. –280 с.

78. Сендецки Д. Упругие свойства композитов / Д. Сендецки. – М. :
 Мир, 1978. – Т. 2 : Механика композитных материалов. – 654 с.

79. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т. Д. Шермергор. – М. : Наука, 1977. – 400 с.

80. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н.
С. Бахвалов, Т. П. Панасенко. – М. : Наука, 1984. – 352 с.

81. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials /
B. Budiansky // J. Mech. and Phys. Solids. – 1965. – Vol. 13, № 14. – P. 223-227.

139

82. Hashin Z. 1962. The elastic moduli of heterogeneous materials / Z.
Hashin // J. Appl. Mech. – 1962. – Vol. 29, № 1. – P. 143-150.

83. Hashin Z. A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials / Z Hashin, S. Shtrikman // J. Mech. Phys. Solids. – 1963. – Vol. 11, N_{2} 2. – P. 127-140.

84. Sendeckyj G. P. Mechanics of composite materials / G. P. Sendeckyj.
N. Y. : Academic Press, 1974. – 503 p.

85. Светашков А. А. Об одной модификации эффективных модулей двухкомпонентного изотропного композита / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов, К. К. Манабаев // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56, № 7-3. – С. 209-211.

86. Hill R. Self - consistent mechanics of composite materials / R. Hill //
J. Mech. Phys. Solids. – 1965. – Vol. 13, № 14. – P. 213-222.

87. Christensen R. M. Mechanics of Composite Materials / R. M.
Christensen. – N. Y. : Academic Press, 1979. – 348 p.

88. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. – М. : МГУ, 1995. – 366 с.

89. Тучинский Л. И. Композиционные материалы, получаемые методом пропитки / Л. И. Тучинский. – М. : Металлургия, 1986. – 208 с.

90. Matysiak S. J. On the microlocal modeling of thermoelastic periodic composites / S. J. Matysiak, C. Wozniak // J. Tech. Phys. – 1988. – Vol. 29, № 1. – P. 85-97.

91. Макарова Е. Ю. О нелинейных многоуровневых стохастических краевых задачах механики деформирования и разрушения композитов / Е. Ю. Макарова, Ю. В. Соколкин // Int. J. Comput. Civil and Struct. Eng. – 2008. – Т. 04, № 2. – С. 86.

92. Справочник по композиционным материалам : в 2-х кн. Кн. 1 / под ред. Дж. Любина. – М. : Машиностроение, 1988. – 223 с.

93. Справочник по композиционным материалам : в 2-х кн. Кн. 2 / под ред. Дж. Любина. – М. : Машиностроение, 1988. – 290 с.

94. Машков Ю. К. Конструкционные пластмассы и полимеры: учеб.
пособие / Ю. К. Машков, М. Ю. Байбарацкая, Б. В. Григоревский. – Омск :
Изд-во ОмГТУ, 1974. – 129 с.

95. Пористые проницаемые материалы: справ. изд. / под ред. С. В.
Белова. – М. : Металлургия, 1987. – 335 с.

96. Rasool A. Effects of Particle Shape on the Macroscopic and Microscopic Linear Behaviors of Particle Reinforced Composites / A. Rasool, H. J. Böhm // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – Vol. 58. – P. 21-34.

97. Klusemann B. Homogenization Methods for Multi-Phase Elastic
Composites of Non-Ellipsoidal Shape: Comparisons and Benchmarks / B.
Klusemann, H. J. Böhm, B. Svendsen // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2012. – Vol. 34.
– P. 21-37.

98. Структурные особенности композита диоксид циркония/многостенные углеродные нанотрубки, полученного электрофорезом / Е. А. Ляпунова [и др.] // Неорган. материалы. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 23.

99. Шадрин В. С. Изучение структуры, фазового состава и механических свойств композиционных материалов Al – ZrW2O8 / В. С. Шадрин, Е. С. Дедова, С. Н. Кульков // Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых, аспирантов и студентов «Современное состояние и проблемы естественных наук». – Томск : Изд-во ТПУ, 2014. – С. 193-195.

100. Скруктура и свойства ZRO2(Y2O3)-TIC композиционных материалов / Д. С. Болтышева [и др.] // Современные проблемы прикладной математики и информатики : междунар. молодеж. конф., Дубна, 22-27 авг. 2012 г. – М. : МЦНО, 2012. – С. 37-39.

101. Тетерс Г. А. Оптимизация оболочек из слоистых композитов / Г.
 А. Тетерс, Р. Б. Рикардс, В. А. Нарусберг. – Рига : Зинатне, 1978. – 240 с.

102. Кульков С. Н. Структура и механические свойства композитов
AL-AL₄C₃ / С. Н. Кульков, С. А. Ворожцов // Изв. вузов. Физика. – 2010. – Т.
53, № 12 (2). – С. 172-175.

103. Композиционный керамический материал : пат. 2341494 Рос.
Федерация: МПК С04В35/488 / Мельников А. Г., Кульков С. Н., Савченко Н.
Л., Саблина Т. Ю. – № 2007104479/03; заявл. 05.02.2007; опубл. 20.12.2008.

104. Панин В. Е. Влияние сдвиговой устойчивости кристаллической структуры поликристаллов на механизм их усталостного разрушения на мезомасштабном уровне / В. Е. Панин, Т. Ф. Елсукова, Г. В. Ангелова, С. В. Сапожников // Физическая мезомеханика. – 1998 – №2. – С. 45-50.

105. Определение эффективных теплофизических характеристик композиционного материала / П. А. Люкшин [и др.] // Физ. мезомеханика. – 2008. – Т. 11, № 5. – С. 103-110.

106. Эффективные деформационно-прочностные характеристики полимерной композиции с дисперсными включениями разных размеров / И.
И. Анисимов [и др.] // Там же. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 11-16.

107. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. – М. : Машиностроение, 1988. – 272 с.

108. Исследования по созданию керамических композитных структур из изготовленных пневмоциркуляционным методом порошковых компонентов / С. В. Пономарев [и др.] // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 9-3. – С. 19-23.

109. Дмитриев О. С. Математическое моделирование процесса отверждения изделия из полимерных композиционных материалов методом горячего прессования / О. С. Дмитриев, С. В. Мищенко, С. В. Пономарев // Вестн. Тамб. гос. техн. ун-та. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 390.

110. Bonnet G. Effective properties of elastic periodic composite media with fibers / G. Bonnet // J. Mech. and Phys. Solids. – 2007. – Vol. 55, N_{2} 5. – P. 881-899.

111. Computational Methods in Applied Sciences / Ed. E. Oñate, R. Owen.
– Dordrecht : Springer, 2007. – 270 p.

112. Mercier S. Homogenization of elastic-viscoplastic heterogeneous materials: Self-consistent and Mori-Tanaka schemes / S. Mercier, A. Molinari // Int. J. Plasticity. -2009. - Vol. 25, No 6. - P. 1024-1048.

113. Zheng Q. S. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution / Q. S. Zheng, D. X. Du // J. Mech. and Phys. Solids. – 2001. – Vol. 49, N_{2} 11. – P. 2765-2788.

114. Капитонов А. М. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства: моногр. / А. М. Капитонов. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2013. – 532 с.

115. Копысов С. П. Применение вейвлет-преобразования при численном осреднении дифференциальнеых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и получение эффективных характеристик / С. П. Копысов, Ю. А. Сагдеева // Изв. вузов. Математика. – 2007. – Т. 6, № 7. – С. 80-83.

116. Luo J. Micromechanics of randomly oriented ellipsoidal inclusion composites Part 1: Stress strain and thermal expansion // J. Appl. Phys. – 1996. – Vol. 79, № 12. – P. 9047-9056.

117. Luo J. Micromechanics of randomly oriented ellipsoidal inclusion composites Part 1: Elastic Module // Ibid. – P. 9057-9063.

118. Anupama Upadhyay. Prediction of Effective Elastic Modulus of Biphasic Composite Materials / Anupama Upadhyay, Ramvir Singh // Modern Mech. Eng. -2012. -Vol. 2, N 1. -P. 6-13.

119. Walpole L. J. On the overall elastic module of composite materials /
L. J. Walpole // J. Mech. Phys. Solids. – 1963. – Vol. 11. – P. 127-140.

120. Lakkad S. C. Temperature dependence of the elastic constants // J. Appl. Phys. – 1971. – Vol. 42, № 11. – P. 4277-4280.

121. Brown H. L. Elastic properties of some polycrystalline transitionmetall-monocarbides // J. Chem. Phys. – 1966. – Vol. 45, № 2. – P. 545-549. 122. Sen A. K. Bulk properties of composite media: Simplification on of bounds on the shear modulus of suspensions of impenetrable spheres // J. Appl. Phys. – 1987. – Vol. 62, N_{2} 9. – P. 3503-3513.

123. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. Royal. Soc. London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. – 1957. – Vol. 241, № 1226. – P. 376-396.

124. Gerbin H. D. The sheer modulus of material permeated by a random distribution of free circular Creck Quart // Appl. Math. – 1975. – Vol. 33, № 3. – P. 296-303.

125. Lei M. Elastic constants of a material orthorhombic symmetry: An alternative measurement approach / M. Lei, H. Ledbetter, Yu, Xie // J. Appl. Phys. – 1994. – Vol. 76, № 5. – P. 2738-2741.

126. Конюхов А. В. Основы анализа конструкций в ANSYS / А. В. Конюхов. – Казань : КГУ, 2001. – 102 с.

127. Метод конечных элементов: учеб. пособие для вузов / П. М. Варвак [и др.]. – Киев : Вища шк., 1981. – 176 с.

128. Численные методы в теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский [и др.]. – Красноярск. : Изд-во Краснояр. ун-та, 1986. – 386 с.

129. Зинкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / О. К. Зинкевич – М.: Мир, 1975. – 541 С.

130. Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.

131. Морозов Е. М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения /
Е. М. Морозов, А. Л. Муйземнек, А. С. Шадский. – М. : ЛЕНАНД, 2008. –
456 с.

132. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р. В. Хемминг. – М. : Физматгиз, 1968. – 400 с.

133. Чигарев А. В. ANSYS для инженеров: справоч. пособие / А. В.
Чигарев, А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 512
с.
134. Светашков А. А. Модификации эффективных модулей типа Хашина–Штрикмана для двухкомпонентного изотропного композита / А. А. Светашков, Н. А. Куприянов, К. К. Манабаев // Физ. мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 6. – С. 57-65.

135. Svetashkov A. A. Modifications of the Mathematical Crisher Model for Effective Moduli of Two-Component Elastic Isotropic Composite / A. A. Svetashkov, N. A. Kupriyanov, K. K. Manabaev // Key Eng. Materials. – 2015. – Vol. 685 : High Technology: Research and Applications. – P. 206-210.

Приложение А

Программа решения ЛВУ пластины методом конечных элементов

в программном комплексе ANSYS.

Начальная итерация

! начало программы

FINISH

/CLEAR, START

! присваивание имени программы «Iter»

/FILNAME, Iter, 1

! выбор типа решателя

/COM, Structural

! вход в препроцессор программы

/PREP7

! задание значений упругомгновенных модулей

G0=2

K0=10

! задание констант

exp=2.718281828459045

Ks=4.7

! модуль Юнга и коэффициент Пуассона в зависимости от "Кс" и упругомгновенных модулей

E = (3*G0*Ks)/(Ks+1/3)

nu = (Ks-2/3)/(2*(Ks+1/3))

! задание типа элемента

ET,1,PLANE182,,,0

KEYOPT,1,1,0

KEYOPT,1,3,2

KEYOPT,1,6,0

! значение нагрузки

q=0.015

! свойства материалов

S=1

R, 1, S

MP, EX, 1, E

MP, NUXY,1,nu

! построение геометрии

z=20

*do, i, 1, z

*do, j, 1, z

n, i+z*(j-1), i/2-5.25,j/2-0.5

*enddo

*enddo

*do, j, 1, 19

*do, i, 1, 19

```
e, i+20*(j-1), i+1+20*(j-1), i+21+20*(j-1), i+20+20*(j-1)
```

*enddo

*enddo

! «шаг» для производной в макрос derivat

h=0.5

! приложение нагрузки к узлам

f,381 ,fy,q,,400

! граничные условия для узлов нижней грани

d,1,all,,,20

finish

! вход в решатель

/solu

! запуск решения

solve

! вход в постпроцессор

/post1

*dim,defx0,array,400

*dim,defy0,array,400

*dim,tetta0,array,400

! объявляем массивы для значений производных от напряжений

*dim,dx0,array,400

*dim,dy0,array,400

! задаём массивы для "объёмных" сил

*dim, forcex0, array, 400

*dim, forcey0, array, 400

*dim, forcexgu0, array, 400

*dim, forceygu0, array, 400

! заносим перемещения в массивы perx, pery

*VGET, defx0, NODE, 1, EPEL, X, , ,2

*VGET, defy0, NODE, 1, EPEL, Y, , ,2

! векторная операция сложение напряжений Х+Ү

*voper, tetta0, defx0, add, defy0

! подключение макроса для взятия производной по напряжениям

derivat0

! умножение производных по напряжениям на коэффициент А

*vfact, A

*voper, forcex0, dx0, ADD

*vfact, A

*voper, forcey0, dy0, ADD

! подключение макроса для граничных условий

gu0

! запись результатов в файл temp0, 0 - индекс итерации

PARSAV, All, 'temp0', 'tmp',"

! вывод значений расчета в листе

PRNSOL,U,COMP

! загрузка последующих 10 шагов

/INP.,shag_iteracii1

PRNSOL,U,COMP

 $/INP., shag_iteracii2$

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii3

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii4

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii5

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii6

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii7

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii8

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii9

PRNSOL,U,COMP

/INP.,shag_iteracii10

PRNSOL,U,COMP

Приложение Б

Программа решения второго шага ЛВУ пластины

! начало программы

FINISH

/CLEAR, START

! выбор типа решателя

/COM, Structural

! вход в препроцессор программы

/PREP7

! загрузка файла результатов с предыдущего шага

/INPUT, 'temp0', 'tmp',"

! задание типа элемента.

ET, 1, PLANE182, , ,0

KEYOPT, 1, 1, 0

KEYOPT, 1, 3, 2

KEYOPT, 1, 6, 0

! задание свойств материала, реальных констант

S=1

R, 1, S

! модуль Юнга и коэффициент Пуассона

MP, EX, 1, E

MP, NUXY, 1, nu

! Построение геометрии

z = 20

*do, i, 1, z

*do, j, 1, z

n, i+z*(j-1), i/2-5.25, j/2-0.5

*enddo

*enddo

*do, j, 1, 19

*do, i, 1, 19

```
e, i+20*(j-1), i+1+20*(j-1), i+21+20*(j-1), i+20+20*(j-1)
```

*enddo

*enddo

! граничные условия для узлов нижней грани

d, 1, all, , ,20

! задание нагрузок в виде «объемных» сил, полученных с предыдущего шага

*do, i, 1, 400

f, i, FX, forcex0(i)

f, i, FY, forcey0(i)

*enddo

! задание поверхностных нагрузок

forcegu0

finish

! вход в модуль решателя

/solu

! запуск решения

solve

! вход в постпроцессор

/post1

! обработка результатов и получение правых частей уравнений равновесия в

области и на границе

! объявляем массивы для значений деформаций defx, defy

*dim, defx1, array, 400

*dim, defy1, array, 400

*dim, tetta1, array, 400

! объявляем массивы для значений производных от напряжений

*dim, dx1, array, 400

*dim, dy1, array, 400

! задаём массивы для "объёмных" сил

*dim, forcex1, array, 400

*dim, forcey1, array, 400

*dim, forcexgu1, array, 400

*dim, forceygu1, array, 400

! заносим перемещения в массивы perx, pery

*VGET, defx1, NODE, 1, EPEL, X, , ,2

*VGET, defy1, NODE, 1, EPEL, Y, , ,2

! векторная операция сложение напряжений Х+Ү

*voper, tetta1, defx1, add, defy1

! подключение макроса для взятия производной по напряжениям

derivat1

! умножение значений производных от напряжений на коэффициент А

*vfact, A

*voper, forcex1, dx1, ADD

*vfact, A

*voper, forcey1, dy1, ADD

! подключение макроса, отвечающего за граничные условия

gu1

! Запись результатов в файл temp1

PARSAV, All, 'temp1', 'tmp',"

! вывод значений расчета в листе

PRNSOL, U, COMP.