ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Гончаровского Михаила Михайловича

Построение дифференциальных инвариантов и классификация пространств решений дифференциальных уравнений квантовой теории поля

представленную на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертационная работа М. М. Гончаровского посвящена развитию методов, связанных с построением точных решений дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теоретической и математической физике.

Актуальность диссертационной работы обусловлена широким использованием точных решений полевых уравнений в многочисленных приложениях, таких как описание поляризации вакуума и рождения частиц внешними полями, спонтанное нарушение и восстановление симметрии во внешнем поле, различные космологические модели. Особенно ценны точные решения для случая сильных полей, когда теряют применимость методы теории возмущений.

Прогресс в данной сфере с самого момента её становления как отдельного направления исследований в значительной степени связан с использованием дифференциально-геометрических и теоретико-груповых методов, приводящим к взаимному проникновению и обогащению всех вовлечённых областей физики и математики. Оппонируемая диссертация лежит в том же русле, активно эксплуатируя такие актуальные и развивающиеся разделы как теория представлений групп, групповой анализ дифференциальных уравнений и теория инвариантов.

Степень обоснованности и достоверность. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертационной работе, подтверждаются доказательствами и корректным использованием аппарата дифференциальной геометрии, теории Ли–Овсянникова симметрии дифференциальных уравнений, представлений групп и алгебр Ли, в частности теории орбит коприсоединённого представления. Правильность полученных в примерах решений дифференциальных уравнений и дифференциальных инвариантов может быть проверена непосредственно путём дифференцирования.

Научная новизна диссертационного исследования состоит в следующих результатах. Исследован специальный класс скалярных уравнений с нелокальным самодействием, при определённых условиях допускающих точное интегрирование и существование локализованных волновых решений. Предложен способ классифицировать инвариантные подпространства решений линейных уравнений и перечислены алгебры Ли малых размерностей, допускающие нетривиальное ограничение уравнения на указанные подпространства; разработан новый метод построения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Во введении формулируются цели и задачи исследования, обосновывается его актуальность и новизна, даётся оценка степени разработанности темы исследования, формулируются положения, выносимые на защиту.

Глава 1 носит в основном обзорный характер и посвящена изложению методов и общих фактов, применяемых для получения последующих оригинальных результатов.

Во 2-й главе обсуждается класс уравнений, моделирующих динамику скалярных полей с нелокальным самодействием типа свёртки, «живущих» на группах Ли и однородных пространствах. Для редукции числа независимых переменных используется специальный вариант гармонического анализа, приводятся условия интегрируемости в смысле сведения к обыкновенному дифференциальному уравнению. Уравнение в евклидовом пространстве рассматривается как бесконечномерная интегрируемая гамильтонова система, конструируются волновые решения с конечной нормой.

В 3-й главе рассматривается классификация решений линейных уравнений, допускающих некоторую алгебру операторов симметрии. Основой для классификации служит наличие фильтрации на пространстве всех решений данного уравнения, состоящей из специальным образом определённых инвариантных подпространств. Конструктивный момент заключается в том, что ограничение исходного уравнения на такие инвариантные подпространства позволяет уменьшить количество независимых переменных. В диссертации на основе классификаций Мубаракзянова и Морозова алгебр Ли перечислены алгебры размерностей пять и шесть, для которых указанная редукция возможна и не сводится к описанию решений, инвариантных относительно некоторой подалгебры.

В 4-й главе представлен оригинальный метод построения дифференциальных инвариантов групп преобразований и два различных подхода к построению операторов инвариантного дифференцирования. Первый подход базируется на доказанном соответствии между операторами инвариантного дифференцирования и инвариантными операторами на однородном пространстве группы. Он позволяет найти столько операторов инвариантного дифференцирования, сколько существует инвариантных операторов. Второй подход позволяет найти все операторы инвариантного дифференцирования и дифференциальные инварианты в два этапа, сначала определив их для действия группы на специальным образом расширенном многообразии, а затем путём соответствующего ограничения — на исходном. Оба подхода применимы к частному классу проецируемых действий, наиболее часто встречающемуся в приложениях в рамках обозначенного в диссертации круга задач.

Критические замечания. На недочеты, связанные со стилистикой и опечатками, внимания не обращаем.

Гл. 1 Первое, что бросается в глаза: диссертация по теоретической физике начинается со слов “пусть G — вещественная связная унимодулярная группа Ли”. Большую часть главы следовало бы перенести в приложение, а сами математические факты из такого приложения уже давно имеют ясные физические мотивировки; они не формально абстрактны. Кстати, в связи с чем объявляется условие унимодулярности?

Стр. 35. Что значит не требует поднятия с алгебры до группы? В известных методиках, насколько мне известно, поднятия не требуются.

Гл. 2 Трактовка интегрируемости (определение 1) спорна. Нельзя соотносить интегрируемость разных типов уравнений друг с другом. Всякая интегрируемость рано или поздно сведется к интегрируемости «по существу» в соответствии со смыслом операции обращения дифференцирования. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям — лишь предварительная часть работы и далеко не последняя.

Введение уравнения (2.1) достаточно искусственно. Создается впечатление, что, грубо говоря, подходящим образом модифицировав преобразование Фурье, любая задача сведется к обыкновенному ДУ.

Стр. 41. Не пояснено, хотя бы вкратце, откуда появляются функции Бесселя в решении (2.10). Если и придерживаться аналогии с классическим нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ), то иллюстрировать (рис. 2.1) следовало бы не вещественную часть, а амплитуду огибающей $|\psi|$.

Стр. 43. Нелокальность уравнения и его вариационный принцип вызывают вопросы и мотивировочного и принципиального характера. Как понимать — на физическом уровне — бесконечномерную «динамическую» систему с нелокальным «векторным полем». Подозрительно, что на подобном уровне через обобщение преобразования Фурье можно «обосновать» лагранжевость/гамильтоновость чего-угодно. Это место явно требует более подробного, а не беглого, как в тексте, изложения. Автор не упоминает, например, более «простые» (в контексте диссертации) уравнения типа КдВ и НУШ, нетривиальность вопросов о гамильтоновой структуре для которых известна. Подозрительной и искусственной выглядит также формальная каноничность (2.14). Соединения нелокальности и «бесконечномерия» вызывают вопросы в доказательстве Утверждения 1 (стр. 44). Отмечаемая параллель с солитонами поверхностна.

Вышеприведенные замечания переносятся и на последующие обобщения на более широкий класс («проинтегрированных») уравнений гл. 2.

Заметим, к слову, что это замечания — в большей мере замечания по постановке задач, т. е. к научному руководству.

Гл. 3 Теорема 1 может быть полезна, но очень широка, поскольку применима, грубо говоря, «ко всему». Задачи на практике не носят такой характер. Рассмотренные в главе примеры никак не соотнесены с известными результатами, хотя им посвящена обширная литература; например, уравнения вида (3.18). Вопросы теорфизического характера не обсуждаются.

Гл. 4 Утверждения об эффективизации нахождения дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований (например, Теорема 4) выглядят как «математически завуалированные» известные методы их поиска. Ссылки на ненеобходимость использования операции продолжения и решение линейных уравнений не существенны. В конечной форме утверждения этого сорта могут восприниматься как «потайной метод» нахождения решений линейных PDEs, не решая их, но используя симметрии, для нахождения которых надо решать такого же сорта уравнения. Бескоординатность методики скрывает сущность; интегрирование и разделение переменных — это всегда вопрос «вокруг» представления и поиск переменных.

Заключительное замечание носит общий характер. Подтверждающие примеры, приводимые в диссертации, — это примеры не (физических) моделей и решения уравнений, а генераторов симметрий, групп/алгебр и их свойств. Тем не менее, пошаговая алгоритмичность поиска (стр. 98), учитывая общность ситуации, несомненно представляет математический и матфизический интерес. Это же относится и к изученному «частичному отделению переменных» в случаях некоммутативной алгебры, т. е. в важных ситуациях, когда возможны классификационные результаты **или** (если в будущем удастся) результаты отрицательного типа о принципиальной неинтегрируемости.

Заключение. Замеченные недостатки, однако, нисколько не влияют на общую положительную характеристику работы, а часть из них следует рассматривать скорее как корректировки дальнейших исследований.

Диссертация является законченной научной работой, несомненно содержит новые научные результаты соответствующей квалификации и расширяет математический аппарат современной теоретической физики. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Это соответствует требованиям п. 9 "Положения о присуждении ученых степеней", утвержденного постановлением №842 Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г., предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук.

Автор диссертации, Гончаровский Михаил Михайлович, заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Официальный оппонент:
Брежнев Юрий Владимирович,
доктор физ.-мат. наук по специальности
01.04.02 — теоретическая физика,
профессор кафедры квантовой теории поля

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Томский государственный университет»
634050, г. Томск, пр. Ленина 36, (3822) 529–852
www.tsu.ru, e-mail: rector@tsu.ru

6 февраля 2018

Подпись Ю. В. Брежнева удостоверяю
Ученый секретарь Ученого совета ТГУ Н. А. Сазонтова