

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



Беккерман Екатерина Николаевна

ОЦЕНИВАНИЕ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ
И ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ
АСИНХРОННОГО МС-ПОТОКА СОБЫТИЙ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор
Горцев Александр Михайлович

Томск – 2017

Оглавление

Введение.....	4
1 Алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий	17
1.1 Постановка задачи.....	17
1.2 Построение матрицы оценок.....	19
1.3 Структура матрицы оценок.....	25
1.4 Построение гистограммы по матрице оценок. Свойства гистограммы оценок.....	29
1.5 Алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий.....	46
1.6 Выводы.....	47
2 Алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности.....	48
2.1 Постановка задачи отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности.....	49
2.2 Построение графа оценок. Свойства графа оценок.....	51
2.3 Алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности и вспомогательные алгоритмы	63
2.3.1 Предварительные замечания.....	63
2.3.2 Алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности.....	66
2.3.3 Процедура проверки и коррекции отрезков реализации, полученных по компонентам связности, соответствующим интервалам стационарности.....	71
2.3.4 Процедура финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующие интервалам стационарности.....	76
2.4 Оценивание числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с использованием отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности.....	78
2.4.1 Алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, основанный на свойствах гистограммы оценок интенсивности.....	86

2.4.2	Алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, основанный на свойствах оценок интенсивности	90
2.5	Выводы	91
3	Экспериментальное исследование алгоритмов. Численные результаты применения алгоритмов	92
3.1	Пример применения алгоритмов к имитационной модели асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями	97
3.2	Численные результаты работы алгоритмов при некоторых сочетаниях параметров	119
3.3	Выводы	141
	Заключение	142
	Список использованной литературы	144
	Приложение А Описание имитационной модели асинхронного МС-потока событий	161
	Приложение Б Пример применения алгоритмов к имитационной модели асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями для реализации с большим количеством событий	165
	Приложение В Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ	170

Введение

Актуальность темы исследования.

Теория массового обслуживания (ТМО, в англоязычной литературе — Queueing Theory (теория очередей)), обычно рассматриваемая как раздел исследования операций, представляет собой совокупность математических моделей и методов анализа вероятностных задач прикладной математики, связанных с исследованием структуры и оптимизацией управления различными реальными системами в области техники и экономики. Началом исследований в этой области можно считать работы датского ученого А.К. Эрланга, опубликованные в 1909–1917 г.г. и посвященные исследованию процессов, связанных с обслуживанием требований, поступающих на телефонную станцию.

Развитие теоретических методов ТМО и методов решения практических задач, связанное с расширением области ее применения (системы управления запасами, транспортные системы, системы связи), можно проследить по работам [137, 128, 144, 111, 120, 133, 16, 80, 26, 99, 100, 119, 143, 15, 21, 25, 101, 129, 110, 113, 91, 103, 130, 3, 79, 121, 127, 136, 138, 52, 85, 126, 82, 88, 102, 14, 104, 141, 4, 77, 78, 5, 51, 54, 67, 135, 24, 74, 71, 2]. При этом усложнение структуры систем обслуживания, а также появление в конце 80-х годов прошлого века цифровых сетей с интеграцией служб (ISDN, [12]), привело к необходимости создания (для решения задач анализа и оптимизации систем) адекватных математических моделей информационных потоков, обрабатываемых в данных системах, что, в свою очередь, привело к необходимости развития и использования специфических математических моделей информационных потоков — дважды стохастических потоков событий, или потоков событий со случайно изменяющейся интенсивностью [114, 123, 139, 32, 131, 4, 115, 5, 36].

В зависимости от природы случайности изменения интенсивности потока событий, дважды стохастические потоки событий принято разделять на два вида: 1) потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [139, 115, 105, 118], и 2) потоки, интенсивность которых есть кусочно-

постоянный случайный процесс с конечным числом состояний, иначе называемые МС-потоками событий. Такие потоки впервые были введены в рассмотрение в 1979 году практически одновременно и независимо в работах М. Neuts (США) как MVP-потоки [130] и Г.П. Башарина, В.А. Кокотушкина и В.А. Наумова как МС-потоки [4, 5]. Последние являются наиболее адекватными математическими моделями потоков в ISDN [12].

Исследования систем массового обслуживания с входящими дважды стохастическими потоками событий были проведены в России такими учеными как Г.П. Башарин, П.П. Бочаров, А.В. Печинкин, К.Е. Самуилов, Ю.В. Гайдамака — в Российском университете дружбы народов [13, 59, 72, 86, 96, 97, 98, 140]; В.М. Вишневецкий, М.П. Фархадов — в Институте проблем управления РАН [1, 58, 125]; А.Ф. Терпугов, А.М. Горцев, А.А. Назаров, К.И. Лившиц, С.П. Моисеева, Л.А. Нежелская — в Томском государственном университете [11, 18, 33, 34, 60, 63, 64, 75, 94, 132, 134]; В.В. Рыков — в Российском государственном университете нефти и газа [53, 57]; В.А. Ивницкий — в Московском университете путей сообщения [69, 70, 122]; М.А. Федоткин, А.В. Зорин — в Нижегородском государственном университете [68, 106, 107]; Г.Ш. Цициашвили, Н.И. Головкин — в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения РАН [27, 81, 108, 109]; В.Н. Задорожный — в Омском государственном техническом университете [65, 66]; в Белоруссии такими учеными как Г.А. Медведев, А.Н. Дудин, В.И. Клименок — в Белорусском государственном университете [116, 117, 124, 142]; Ю.В. Малинковский — в Гомельском государственном университете [56, 83]; М.А. Маталыцкий — в Гродненском университете [76, 84, 90]; а также учеными Д. Ефросининым (университет Johannes Kepler University Linz, Austria), М. Пагано (Пизанский университет, Италия), А. Меликовым (Азербайджанская НАН), О. Тихоненко (Варшавский университет), М. Neuts (США), D. Lucantoni (США) и другими учеными.

Очевидно, что решение задач оптимизации систем обслуживания непосредственным образом зависит от значений параметров потоков событий, функционирующих в системе. С другой стороны, параметры этих потоков, как пра-

вило, являются неизвестными (ненаблюдаемыми) величинами. Таким образом, задачи оценивания параметров МС-потоков событий являются, безусловно, актуальными. На сегодняшний день имеется обширная литература, посвященная решению задач оценивания параметров дважды стохастических потоков событий. Классификацию решаемых задач можно осуществить по двум признакам.

1. Задачи оценивания параметров, решаемые для дважды стохастических потоков *различной структуры*. Под структурой МС-потока в данном случае понимается способ перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. В этом смысле потоки делятся на асинхронные (потоки, для которых моменты времени изменения интенсивности не зависят от моментов наступления событий, [36, 35, 42, 50, 29, 31, 38]), синхронные (потоки, для которых изменение интенсивности может произойти только в момент времени наступления события потока, [41, 17, 37, 18]), и полусинхронные (потоки, для которых изменение интенсивности для одного подмножества состояний является «асинхронным», т. е. не зависящим от моментов времени наступления событий потока, а для остальных состояний — «синхронным», т. е. происходящим только в момент времени наступления события потока, [92, 93, 39, 40, 30]). Кроме того, в литературе рассматриваются различные обобщения моделей [55, 19, 89, 34, 48, 47, 87], а также модели МС-потоков с двумя состояниями для случая, когда для одного из состояний соответствующая интенсивность потока равна нулю (так называемые альтернирующие потоки событий, [41, 28, 46, 45, 43]).

2. Задачи оценивания параметров, решаемые для дважды стохастических потоков, наблюдения за моментами наступления событий которых осуществляются *в различных условиях*. Так, для МС-потоков различной структуры (см. выше) решены задачи оценивания параметров потока при наличии так называемого мертвого времени — случая, когда, по некоторым причинам, моменты времени наступления событий потока на определенных отрезках времени (фиксированной или случайной длительности) становятся недоступны наблюдению, [20, 40, 37, 44, 62, 95, 61]. Кроме того, для потоков определенной структуры предложено решение задачи оценивания параметров потока при условии

наличия случайных ошибок в измерениях моментов времени, [42, 50, 49, 112].

Анализ литературы показывает, что задачи оценивания параметров дважды стохастических потоков событий с кусочно-постоянной интенсивностью рассматриваются в предположении *априорно известного числа состояний* процесса $\lambda(t)$. На практике, даже в предположении априорной известности того, что рассматриваемый поток событий является потоком определенной структуры (например, асинхронный дважды стохастический поток событий), вопрос о *числе состояний* интенсивности (и, следовательно, о значениях интенсивности) МС-потока событий остается открытым. В силу этого, задача оценивания числа состояний МС-потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока является актуальной.

Цель и задачи исследования. Целью работы является решение задачи оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с конечным числом состояний по наблюдениям за моментами времени наступления событий потока, разработка и математическое обоснование алгоритма оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, экспериментальное исследование на ЭВМ алгоритма оценивания и вспомогательных алгоритмов.

В рамках поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Получение и анализ свойств смеси плотностей распределения оценки интенсивности простейшего потока событий.
2. Общая формулировка и математическое обоснование алгоритма оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий.
3. Формулировка и математическое обоснование алгоритма отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности.
4. Формулировка и математическое обоснование алгоритма вычисления оценок числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий.

5. Разработка и реализация программного комплекса, реализующего вышперечисленные алгоритмы, обеспечивающего возможность контроля параметров алгоритмов и предоставляющего численную и визуальную информацию о результатах работы алгоритмов.

6. Анализ численных результатов, полученных с помощью программного комплекса, с использованием данных, реализованных на имитационной модели асинхронного МС-потока событий.

Научная новизна исследования заключается в том, что впервые решена задача оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий по наблюдениям за моментами времени наступления событий потока.

Теоретическая и практическая значимость диссертации состоит в математическом обосновании подхода к решению задачи оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с конечным числом состояний на основе выборки наблюдений за моментами наступления событий потока, а также в разработке алгоритмов, реализующих этот подход.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования разработанных алгоритмов для оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока в задачах анализа и проектирования систем и сетей массового обслуживания, в частности, информационно-вычислительных систем, телекоммуникационных и компьютерных сетей и пр.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы теории вероятностей, математического анализа, теории марковских процессов, теории массового обслуживания, математической статистики, теории графов и численные методы. Исследование алгоритмов оценивания выполнено на основе компьютерной имитационной модели асинхронного МС-потока событий. Программный комплекс алгоритмов и имитационная модель асинхронного МС-потока событий реализованы на языке C++.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) аналитический вид смеси плотностей распределения оценок интенсивности простейшего потока событий и ее свойства;
- 2) алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий с конечным числом состояний к интервалам стационарности;
- 3) алгоритмы оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами теоремы и утверждений, основанными на аппарате теории случайных процессов, теории вероятностей, математической статистики, математического анализа, теории графов, а также результатами численных экспериментов, полученных в ходе экспериментального исследования алгоритмов оценивания.

Связь работы с научными проектами. Работа выполнена в рамках общей тематики научных исследований дважды стохастических потоков событий, проводимых на кафедре исследования операций Национального исследовательского Томского государственного университета, а также в рамках выполнения следующих научных проектов: 1) госзадание Федерального агентства по образованию на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2009–2011 гг. «Исследование математических моделей программно-аппаратной передачи, обработки, управления и защиты информации в телекоммуникационных сетях и компьютерных комплексах технических и экономико-социальных систем (1.17.09)», номер госрегистрации темы (РК): 01200903817; 2) госзадание Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 гг. «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации (8.4055.2011)», номер госрегистрации темы (РК): 01201261193.

Результаты работы используются в учебном процессе на факультете при-

кладной математики и кибернетики (ФПМК) Национального исследовательского Томского государственного университета при разработке курсов лекций «Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков» и «Имитационное моделирование телекоммуникационных потоков и систем» для магистрантов, обучающихся по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» (магистерская программа «Математическое и программное обеспечение прикладного вероятностного анализа»).

Апробация результатов исследования. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция «Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания», Минск, 1998 г.

2. IV межвузовская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых научных сотрудников «Молодежь, наука и образование: проблемы и перспективы», Томск, 2000 г.

3. Межрегиональная научно-методологическая конференция «Повышение эффективности научных исследований и совершенствование учебного процесса», Анжеро-Судженск, 2000 г.

4. Международная конференция «Современные математические методы исследования информационно-вычислительных сетей», Минск, 23–25 января 2001 г.

5. V Всероссийская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» — ISAM'04, Иркутск, 7–10 сентября 2004 г.

6. IV Сибирская школа-семинар с международным участием «Проблемы компьютерной безопасности и криптографии», Томск, 6–9 сентября 2005 г.

7. VII Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Томск, 2–5 сентября 2008 г.

8. V Международная научно-практическая конференция «Актуальные про-

блемы радиофизики» «АПР – 2013» с элементами научной школы для молодежи, Томск, 1–6 октября 2013 г.

9. X Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Горно-Алтайск, 9–11 июня 2014 г.

Публикации по теме исследования. По материалам диссертации опубликовано 13 работ, из них 4 статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 1 статья в российском журнале, переводная версия которого индексируется Web of Science), 1 статья в научном журнале, 3 статьи в приложениях к научному журналу, 5 публикаций в сборниках материалов международных и российских научных конференций и Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания.

Публикации в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. **Беккерман Е. Н.** Об одном алгоритме распознавания МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева // Вестник Томского государственного университета. – 2000. – № 271. – С. 41–45.

2. **Беккерман Е. Н.** Эвристический метод аппроксимации случайного потока событий МС-поток с произвольным числом состояний / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 9. – С. 20–33.

в переводной версии журнала, индексируемой Web of Science:

Bekkerman E. N. Heuristic approximation method for a random flow of events by an MC-flow with arbitrary number of states / E. N. Bekkerman, S. G. Kataev, S.S. Kataeva // Automation and Remote Control. – 2013. – Vol. 74, is 9. – P. 1449–1459. – DOI: 10.1134/S0005117913090026.

3. **Беккерман Е. Н.** Об одном свойстве смеси плотностей распределения оценок интенсивности простейшего потока событий / Е. Н. Беккерман, А. М. Горцев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56, № 9/2. – С. 226–228.

4. **Беккерман Е. Н.** Эвристический алгоритм оценки числа состояний асинхронного МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 3 (28). – С. 20–31.

Публикации в других научных изданиях:

5. **Беккерман Е. Н.** Эвристический способ обнаружения информационного признака МС-потока и его исследование / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы Четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания (BWWQT) – Международной конференции «Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания». Минск, 27–29 января 1998 г. – Минск, 1998. – С. 5–9.

6. **Беккерман Е. Н.** Исследование гистограммы оценок интенсивности МС-потока / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Повышение эффективности научных исследований и совершенствование учебного процесса : тезисы докладов межрегиональной научно-методологической конференции. Анжеро-Судженск, 18 ноября 2000 г. – Анжеро-Судженск, 2000. – С. 6–8.

7. **Беккерман Е. Н.** Алгоритм определения участков стационарности МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети : материалы международной конференции «Современные математические методы исследования информационно-вычислительных сетей». Минск, 23–25 января 2001 г. – Минск, 2001. – Вып. 16. – С. 42–46.

8. **Беккерман Е. Н.** Исследование информационных признаков пуассоновского потока при малом количестве событий / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2003. – № 6. – С. 216–219.

9. **Беккерман Е. Н.** Проверка соответствия отрезка потока событий интервалу стационарности МС-потока / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2004. – № 9 (II). – С. 125–128.

10. **Беккерман Е. Н.** Аппроксимация МС-потокм реального потока событий / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева, Д. Ю. Кузнецов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2005. – № 14. – С. 248–253.

11. **Беккерман Е. Н.** Алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивностей МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Седьмой Российской конференции с международным участием. Томск, 02–05 сентября 2008 г. – Томск, 2008. – С. 78.

12. **Беккерман Е. Н.** Алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивностей МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, С. С. Катаева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 3 (8). – С. 19–26.

13. **Беккерман Е. Н.** Использование свойств гистограммы оценок простейшего потока событий для выявления интенсивностей аппроксимирующего МС-потока / Е. Н. Беккерман, А. М. Горцев, С. С. Катаева // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой российской конференции с международным участием. Катунь, 09–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 88–89.

Личный вклад автора. Основная задача диссертационной работы, оценивание числа состояний асинхронного МС-потока событий с конечным числом состояний, сформулирована научным руководителем работы, профессором А.М. Горцевым. Идея применения метода выделения структур для решения задачи отнесения событий МС-потока к интервалам стационарности принадлежит доктору технических наук С.Г. Катаеву. Автором лично разработаны основные и вспомогательные алгоритмы для оценивания числа состояний и значений ин-

тенсивности асинхронного МС-потока событий, сформулированы и доказаны теорема и утверждения, обосновывающие эти алгоритмы, а также разработан и реализован программный комплекс для экспериментального исследования алгоритмов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех разделов и заключения, списка литературы и трех приложений. Общий объем работы составляет 170 страниц, из которых 125 страниц представляют основной текст. Иллюстративный материал состоит из 38 рисунков (в том числе 2 рисунка в приложениях). Список литературы содержит 144 наименования.

Подразделы имеют двойную нумерацию: первая цифра — номер раздела, вторая — номер подраздела. Подподразделы второго раздела имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер раздела, вторая — номер подраздела, третья — номер подподраздела. Формулы имеют тройную нумерацию: первая цифра — номер раздела, вторая — номер подраздела, третья — номер формулы. Рисунки и таблицы имеют двойную нумерацию: первая цифра — номер раздела, вторая — номер рисунка или таблицы. Нумерация теорем и утверждений двойная: первая цифра — номер раздела, вторая — номер теоремы или утверждения.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается описание работы, раскрывается актуальность исследуемой проблемы, приводится обзор работ других авторов по изучаемой тематике, формулируется цель, задачи и методология исследования, обосновывается теоретическая и практическая значимость работы, новизна выносимых на защиту результатов.

В первом разделе описывается подход к решению задачи оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий. В подразделе 1.1 описывается математическая модель асинхронного МС-потока событий и формулируется постановка задачи оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий. В подразделе 1.2 описывается процедура последовательного получения оценок среднего числа событий в единицу времени на всевозможных отрезках времени между наступлениями событий из реализации потока, часть

из которых являются оценками значений интенсивности исследуемого потока событий; также в подразделах 1.2–1.3 описано построение матрицы оценок и ее структура. В подразделе 1.4 описывается построение гистограммы оценок, обсуждаются ее свойства. В подразделе 1.5 на основании свойств гистограммы оценок предлагается процедура оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока. В подразделе 1.6 содержатся выводы к разделу 1.

Во втором разделе формулируется алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности. В подразделе 2.1 описывается постановка задачи отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности. В подразделе 2.2 описывается преобразование матрицы оценок в граф оценок, описываются свойства графа оценок, его связь с матрицей оценок и гистограммой оценок. В подразделе 2.3 формулируется алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности и вспомогательные алгоритмы проверки и коррекции отрезков реализации, полученных по компонентам связности, соответствующим интервалам стационарности. В подразделе 2.4 предлагается два подхода к оцениванию числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий на основании информации об отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, и формулируются алгоритмы на основании этих подходов. В подразделе 2.5 формулируются выводы к разделу 2.

В третьем разделе описывается программное обеспечение, разработанное для исследования алгоритмов, предложенных в разделе 2, а также формулируются методы определения качества оценивания числа состояний и значений интенсивности исследуемого асинхронного МС-потока событий. В подразделе 3.1 приводится пример применения алгоритмов раздела 2 к реализации моментов наступления событий асинхронного МС-потока с тремя состояниями, полученной с помощью имитационной модели. В подразделе 3.2 приводятся численные результаты применения алгоритмов к реализациям имитационной

модели асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями при неблагоприятных соотношениях параметров. В подразделе 3.3 содержатся выводы к разделу 3.

В заключении диссертационной работы, в соответствии с поставленными во введении задачами, перечисляются основные результаты работы.

В приложении А описывается имитационная модель асинхронного МС-потока событий, использованная для исследования алгоритмов, сформулированных в разделе 3.

В приложении Б представлен пример применения алгоритмов, представленных в разделе 2, к реализации асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями.

В приложении В представлен акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ.

1 Алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий

В данном разделе рассматривается задача оценивания числа состояний интенсивности асинхронного МС-потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока. Предлагается алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий и значений интенсивности потока в каждом состоянии по наблюдениям за моментами времени наступления событий потока.

Результаты данного раздела опубликованы в работах [6, 7, 8].

1.1 Постановка задачи

Дадим определение асинхронного МС-потока событий с конечным числом состояний, пользуясь терминами и определениями [4]. Пусть $\lambda(t)$ — случайный кусочно-постоянный стационарный процесс с непрерывным временем t , принимающий значения из конечного множества констант $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1; n}$. Говорят, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в состоянии i , если $\lambda(t) = \lambda_i$. На интервалах времени, когда $\lambda(t) = \lambda_i$ (т. е. когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии i), поток событий ведет себя как простейший поток с интенсивностью λ_i [111]. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии i распределена по экспоненциальному закону. Переход процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j определяется матрицей инфинитезимальных коэффициентов $\|\alpha_{ij}\|_{n \times n}$, где

$$\alpha_{ij} > 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1; n}; \quad \alpha_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}, \quad i = \overline{1; n}. \quad (1.1.1)$$

Величина α_{ij} , $i \neq j$ в (1.1.1) — интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j . С использованием (1.1.1) введем в рассмотрение следующие величины, необходимые при дальнейших исследованиях:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\alpha_{ii}, \quad i = \overline{1; n}; \quad p_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_i}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1; n}; \quad p_{ii} = 0, \quad i = \overline{1; n}; \\ \alpha_i &> 0, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i, j = \overline{1; n}. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Таким образом, величина α_i в (1.1.2) есть параметр экспоненциального распределения длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии i ($i = \overline{1; n}$); величины p_{ij} — вероятности перехода процесса из состояния i в состояние j по окончании состояния i ($i, j = \overline{1; n}$). Определенный таким образом поток событий является асинхронным, т. е. переходы процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j не привязаны к моментам наступления событий потока. В данных предположениях процесс $\lambda(t)$ — марковский процесс. Таким образом, асинхронный МС-поток событий полностью задается следующим набором параметров:

$$\begin{aligned} \lambda &= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i > 0, i = \overline{1; n}, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = \overline{1; n}; \\ \alpha &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \alpha_i > 0, i = \overline{1; n}; \\ P &= \|p_{ij}\|_{n \times n}, 0 \leq p_{ij} \leq 1, p_{ii} = 0, \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i, j = \overline{1; n}. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

На рисунке 1.1 приведен возможный вариант поведения асинхронного МС-потока событий и кусочно-постоянного процесса $\lambda(t)$.

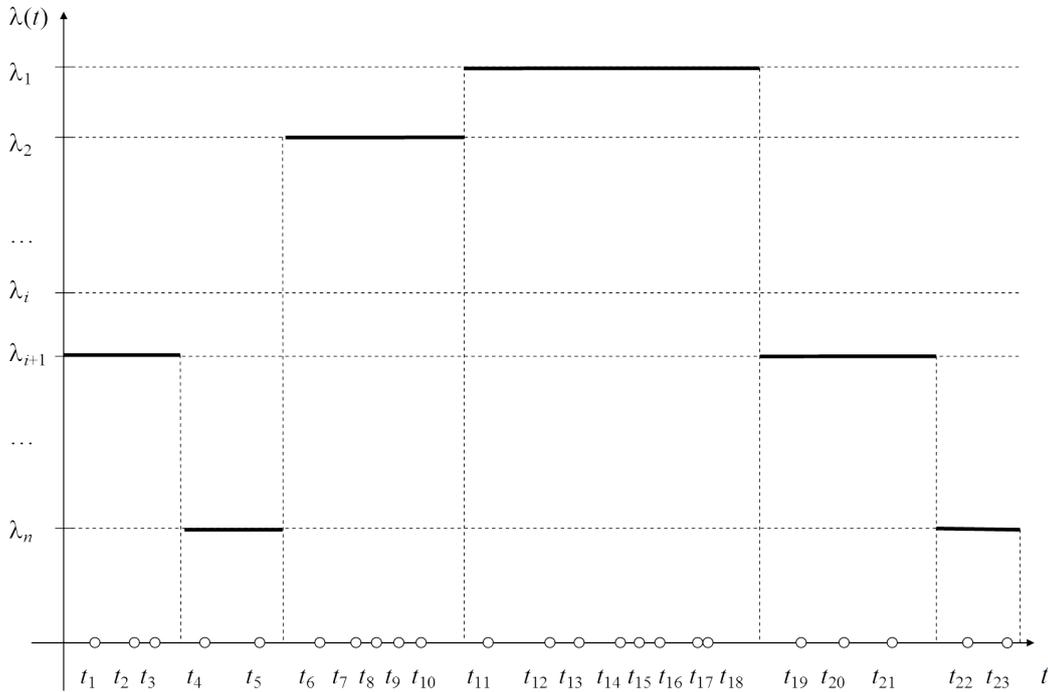


Рисунок 1.1 — Реализация асинхронного МС-потока событий; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — состояния процесса $\lambda(t)$; t_1, t_2, \dots — моменты наступления событий.

В дальнейшем будем называть значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени t мгновенной интенсивностью или интенсивностью асинхронного МС-потока со-

бытий, интервалы времени, на которых $\lambda(t)$ постоянен (начиная с момента начала интервала и заканчивая моментом окончания интервала) — интервалами стационарности асинхронного МС-потока событий, состояния процесса $\lambda(t)$ — состояниями асинхронного МС-потока событий, число n состояний процесса $\lambda(t)$ — числом состояний асинхронного МС-потока событий.

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым ($\lambda(t)$ — скрытый марковский процесс). Число состояний n потока, значения $\lambda_i, \alpha_i, (i = \overline{1; n})$, матрица $P = ||p_{ij}||_{n \times n}$ полагаются неизвестными. Наблюдениями за потоком событий являются моменты времени наступления событий потока. Требуется по реализации моментов наступления событий потока t_0, t_1, \dots, t_N на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$ ($t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$) сделать оценку числа состояний n потока событий и значений $\lambda_i, (i = \overline{1; n})$ интенсивности потока в каждом состоянии.

Если тем или иным статистическим алгоритмом построена оценка \hat{n} числа n , то тогда для оценивания значений параметров асинхронного МС-потока событий можно воспользоваться уже разработанными методами, например из [29].

Заметим, что на отрезке наблюдения за потоком процесс $\lambda(t)$ может не перейти во все возможные состояния. Таким образом, говоря об оценивании числа состояний процесса $\lambda(t)$, подразумеваем количество состояний, реализовавшееся за время наблюдения.

1.2 Построение матрицы оценок

Пусть имеется реализация асинхронного МС-потока событий

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N, \quad (1.2.1)$$

где $i = \overline{0; N}$ — моменты времени наступления событий потока. Наблюдение за потоком начинается в момент времени t_0 — наступления нулевого события потока и заканчивается в момент t_N — наступления N -го события потока. Таким образом, длительность отрезка $[t_0, t_N]$ — случайная величина. Реализации (1.2.1) асинхронного МС-потока событий соответствует определенная (фиксированная) траектория процесса $\lambda(t), t_0 \leq t \leq t_N$.

На рисунке 1.2 приведен вариант траектории процесса $\lambda(t)$ с тремя состояниями на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$.

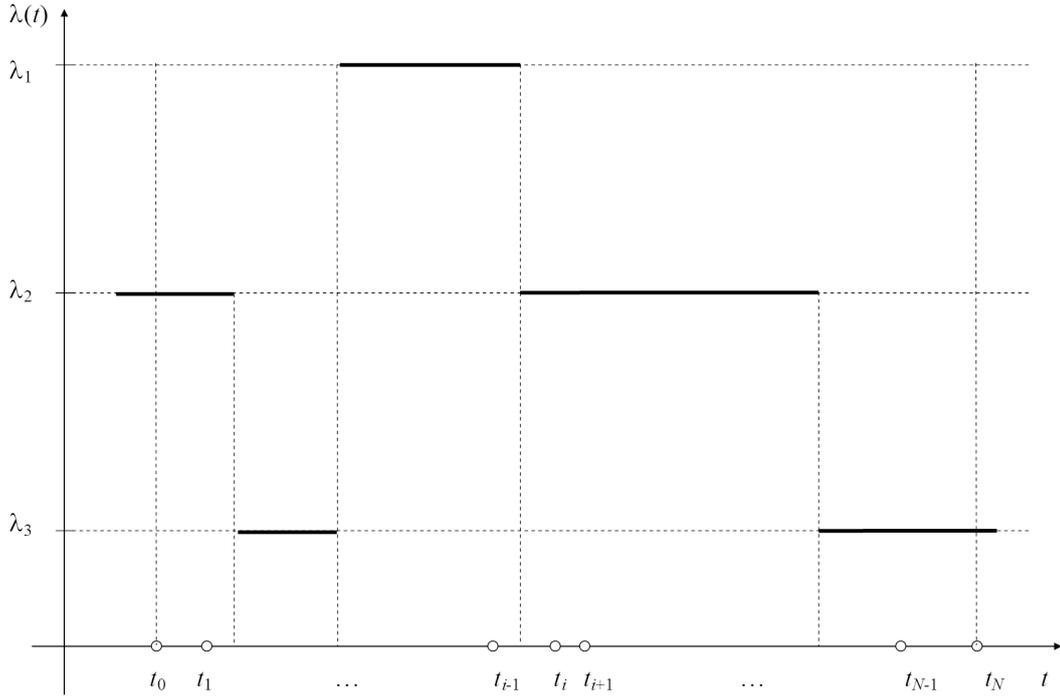


Рисунок 1.2 — Вариант траектории процесса $\lambda(t)$ на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$

Исходя из того, что на интервалах стационарности асинхронный МС-поток ведет себя как простейший поток событий с постоянной интенсивностью, для оценивания значений интенсивности исследуемого потока воспользуемся известной формулой оценки интенсивности для простейшего потока при фиксированном количестве событий:

$$\widehat{\lambda}^{(k)} = (k - 1)/(t_k - t_0), \quad (1.2.2)$$

где $\widehat{\lambda}^{(k)}$ — оценка интенсивности простейшего потока событий, k — число интервалов между наступлениями событий простейшего потока на отрезке наблюдения $[t_0, t_k]$ (количество событий на отрезке наблюдения $(k + 1)$), t_0 — момент начала наблюдения (момент наступления события с номером 0), t_k — момент окончания наблюдения (момент наступления k -го события).

Утверждение 1.1. Плотность вероятности оценки (1.2.2) при фиксированном k имеет вид:

$$P(\widehat{\lambda}^{(k)}) = \lambda^k \frac{(k - 1)^{k-1}}{(k - 2)!} \left[\widehat{\lambda}^{(k)} \right]^{-(k+1)} e^{-\lambda \frac{k-1}{\widehat{\lambda}^{(k)}}}, \quad k \geq 2. \quad (1.2.3)$$

Доказательство. Оценка $\widehat{\lambda}^{(k)}$ при фиксированном k является функцией одного случайного аргумента: интервала времени $T_k = (t_k - t_0)$. Интервал времени $(t_k - t_0)$, в свою очередь, есть сумма случайных величин τ_1, \dots, τ_k , $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1; k}$ — интервалов между соседними событиями простейшего потока. Известно, что величины τ_1, \dots, τ_k , $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1; k}$ независимы и распределены по экспоненциальному закону с параметром λ , а их сумма имеет плотность вероятности:

$$P(T_k) = \lambda \frac{(\lambda T_k)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda T_k}, T_k > 0.$$

На интервале $T_k > 0$ оценка интенсивности (1.2.2) является монотонно убывающей функцией $y = \phi(x)$ аргумента T_k и имеет обратную функцию $x = \psi(y)$. Известно, что плотность распределения в этом случае представляет собой выражение $g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|$ [22]. Имеем:

$$y = \phi(x) = \frac{(k-1)}{x}, \quad x = \psi(y) = \frac{(k-1)}{y}, \quad \psi'(y) = -\frac{(k-1)}{y^2},$$

$$f(\psi(y)) = \lambda \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{\lambda(k-1)}{y} \right]^{k-1} e^{-\lambda \frac{(k-1)}{y}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)| &= \lambda \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{\lambda(k-1)}{y} \right]^{k-1} e^{-\lambda \frac{(k-1)}{y}} \left| -\frac{(k-1)}{y^2} \right| = \\ &= \lambda^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} y^{-(k+1)} e^{-\lambda \frac{(k-1)}{y}}, \end{aligned}$$

где $y = \widehat{\lambda}^{(k)}$. Утверждение доказано.

Отметим, что оценка интенсивности простейшего потока при фиксированном количестве событий на отрезке $[t_0, t_k]$, полученная по методу максимального правдоподобия, есть $\widehat{\lambda}_{mle} = k/(t_k - t_0)$, при этом оценка $\widehat{\lambda}_{mle}$ получается смещенной: $M(\widehat{\lambda}_{mle}) = [k/(k-1)]\lambda$. Легко видеть, что исправленная оценка (1.2.2) является несмещенной: $M(\widehat{\lambda}^{(k)}) = \lambda$. Дисперсия оценки (1.2.2) есть $D(\widehat{\lambda}^{(k)}) = \lambda^2/(k-2)$. При $k \rightarrow \infty$ дисперсия стремится к нулю, т. е. оценка (1.2.2) является состоятельной. Количество информации, содержащееся в

выборке $\{t_0, \dots, t_k\}$ моментов наступления событий простейшего потока (или, что то же самое, в выборке $\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$, $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1; k}$ интервалов между моментами наступления событий простейшего потока), есть $I_k(\lambda) = k/\lambda^2$. Тогда эффективность оценки (1.2.2) определится в виде $eff(\hat{\lambda}) = I_k^{-1}/D(\hat{\lambda}^{(k)}) = 1 - (2/k)$, где $I_k^{-1} = \lambda^2/k$ — минимальная дисперсия (или потенциальная точность) любых оценок $\hat{\lambda}^{(k)}$. Таким образом, оценка (1.2.2) является асимптотически эффективной.

График плотности вероятностей $P(\hat{\lambda}^{(k)})$ для $\lambda = 10$ и различных значений параметра k представлен на рисунке 1.3.

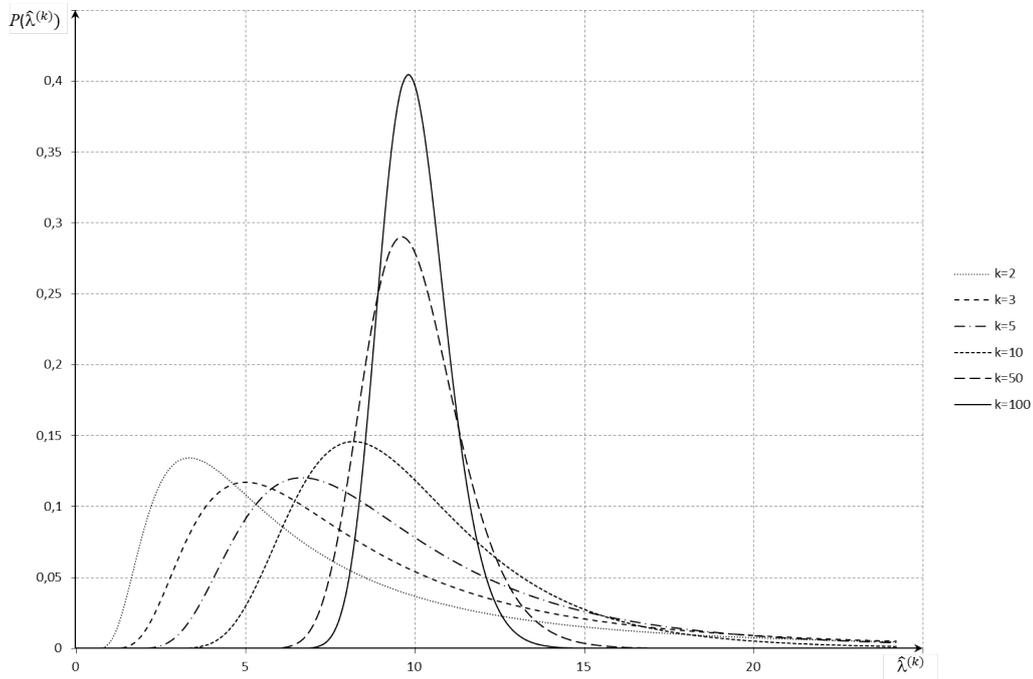


Рисунок 1.3 — График плотности вероятностей $P_k(\hat{\lambda})$ для $\lambda = 10$ и различных значений k

Для реализации (1.2.1) будем находить оценки интенсивности наблюдаемого потока по следующему правилу: в качестве отрезка наблюдения будем рассматривать отрезок $[t_0, t_i]$, где $i = \overline{2; N}$. Последовательно получим оценки интенсивности потока событий по трем, четырем, пяти и так далее событиям (начиная с нулевого), т. е. последовательность оценок интенсивности вида:

$$\hat{\lambda}_{0,2} = \frac{1}{t_2 - t_0}, \dots, \hat{\lambda}_{0,r} = \frac{r-1}{t_r - t_0}, \dots, \hat{\lambda}_{0,N} = \frac{N-1}{t_N - t_0}. \quad (1.2.4)$$

Предположим, что события из реализации (1.2.1) наступили в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_r , когда процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии s . Перехо-

ды процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние возможны только на интервалах (t_i, t_{i+1}) ($i = \overline{r; N-1}$), при этом, в принципе, процесс $\lambda(t)$ на интервале (t_i, t_{i+1}) может сменить свое состояние несколько раз. В момент наступления события, т. е. в момент t_i ($i = \overline{r+1; N}$) процесс $\lambda(t)$ может находиться в одном из состояний l ($l = \overline{1; n}$). Возможные значения процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий t_r, t_{r+1}, \dots представлены в виде графа (рисунок 1.4).

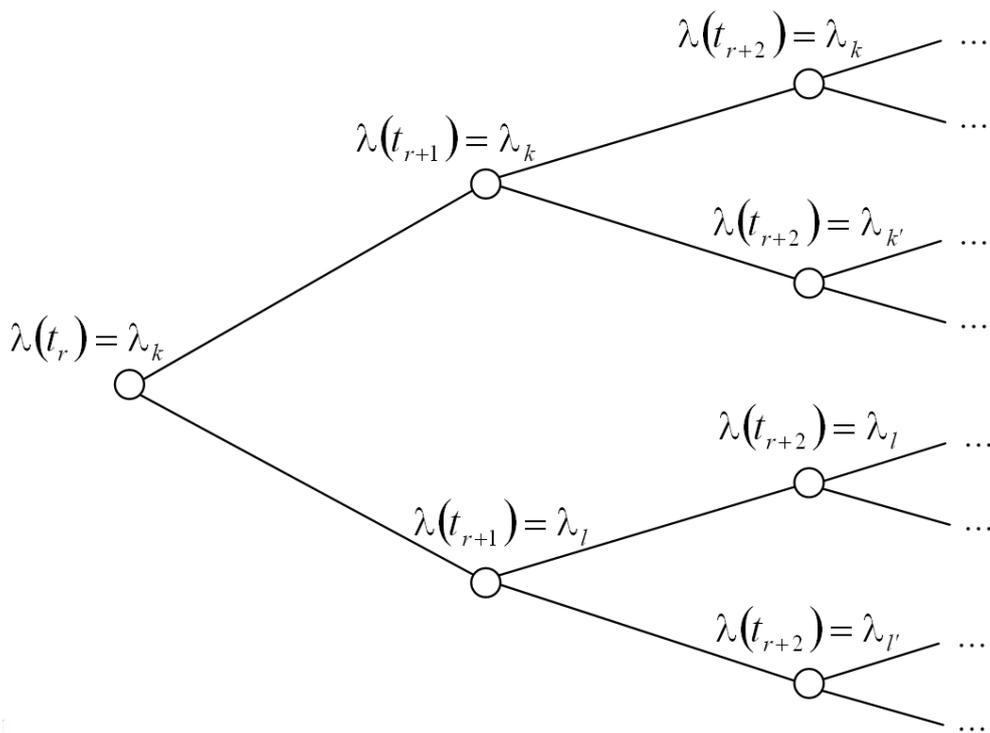


Рисунок 1.4 — Возможные значения процесса $\lambda(t)$ в моменты наступления событий t_r, t_{r+1}, \dots

Кроме сделанного предположения о том, что события, наступившие в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_r , наступили, когда процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии s , где $\lambda(t) = \lambda_s$, будем также предполагать, что на интервалах (t_i, t_{i+1}) ($i = \overline{0; r-1}$) перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния s в другое состояние не происходит. Тогда события, наступившие в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_r , будут относиться к одному и тому же интервалу стационарности потока, для которого процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_s . Вследствие этого можно считать, что события, наступившие в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_r , есть события простейшего потока, интенсивность которого есть λ_s . Событие, наступившее в момент

времени t_{r+1} , есть первое событие из следующего интервала стационарности.

Тогда оценки $\widehat{\lambda}_{0,2}, \widehat{\lambda}_{0,3}, \dots, \widehat{\lambda}_{0,r}$ из последовательности (1.2.4) есть оценки значения интенсивности λ_s простейшего потока, имеющего место в состоянии s и реализовавшегося на временном отрезке $[t_0, t_r]$. Остальные $(N - r)$ значений последовательности (1.2.4) (а именно: $\widehat{\lambda}_{0,r+1}, \widehat{\lambda}_{0,r+2}, \dots, \widehat{\lambda}_{0,N}$) есть условные оценки среднего числа событий в единицу времени на отрезках $[t_0, t_i]$ ($i = \overline{r+1; N}$) соответственно. Условие означает существование всевозможных переходов процесса $\lambda(t)$ из s -го состояния в любое другое на временных отрезках $[t_r, t_i]$ ($i = \overline{r+1; N}$).

Таким образом, оценки, получаемые по этому правилу, будут двух типов: 1) пока события, наступившие в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_i ($i = \overline{1; r}$) однородны, в том смысле, что они наступают с интенсивностью λ_s в пределах одного и того же интервала стационарности, то имеют место оценки $\widehat{\lambda}_{0,i}$ ($i = \overline{2; r}$) интенсивности λ_s ; 2) после чего события t_0, t_1, \dots, t_i ($i = \overline{r+1; N}$) перестают быть однородными, так как моменты времени наступления событий принадлежат более чем одному интервалу стационарности, тогда имеют место условные оценки $\widehat{\lambda}_{0,i}$ среднего числа событий в единицу времени на отрезке $[t_0, t_i]$ ($i = \overline{r+1; N}$). Элементы последовательности (1.2.4) первого типа назовем *«внутриинтервальными»* оценками интенсивности λ_s , элементы второго типа — *«шумовыми»* оценками.

Для того, чтобы получить последовательность «внутриинтервальных» оценок интенсивности для следующего интервала стационарности (начало следующего интервала стационарности лежит между моментами времени t_r и t_{r+1} , т. к. на интервале (t_r, t_{r+1}) процесс $\lambda(t)$ может перейти из состояния s в состояние l , $s \neq l$), необходимо в качестве начального события для последовательности оценок интенсивности этого интервала стационарности выбрать событие, наступившее в момент времени t_{r+1} .

Однако момент времени t_{r+1} наступления первого события на следующем интервале стационарности (и тем более момент начала следующего интервала стационарности, лежащий между моментами времени t_r и t_{r+1}) неизвестен.

Тогда для того, чтобы получить последовательности «внутриинтервальных» оценок интенсивностей простейших потоков, реализовавшихся на следующих друг за другом интервалах стационарности, необходимо произвести вычисление последовательностей оценок вида (1.2.4), выбирая в качестве момента начала наблюдения поочередно каждый момент наступления события из реализации (1.2.1): сначала момент времени t_0 , затем t_1 и т. д. Следуя этому правилу, получим всевозможные оценки интенсивности асинхронного МС-потока событий на отрезках наблюдения $[t_i, t_j]$ в виде

$$d_{ij} = \frac{j - i + 1}{t_{j+1} - t_{i-1}}, \quad i, j = \overline{1; N-1}, \quad i \leq j.$$

Среди d_{ij} будут присутствовать последовательности «внутриинтервальных» оценок интенсивностей простейших потоков, реализовавшихся на интервалах стационарности в течение отрезка наблюдения за потоком $[t_0, t_N]$, если количество событий, произошедших на интервалах стационарности, равно либо больше трех. Из оценок d_{ij} сформируем верхнетреугольную матрицу D :

$$D = [d_{ij}]_{N-1 \times N-1}, \quad d_{ij} = \begin{cases} \frac{j - i + 1}{t_{j+1} - t_{i-1}}, & i \leq j, \quad i, j = \overline{1; N-1}, \\ 0, & i > j, \quad i, j = \overline{1; N-1}. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Верхнетреугольную матрицу D , элементы которой вычислены по формулам (1.2.5), будем называть матрицей всевозможных оценок интенсивностей потока или просто матрицей оценок.

1.3 Структура матрицы оценок

Рассмотрим подробнее структуру полученной матрицы (1.2.5), изображенной на рисунке 1.5.

Событию потока, наступившему в момент времени t_j , соответствует столбец матрицы D с номером $(j - 1)$, $(j = \overline{2; N})$. В столбце, соответствующем моменту t_j , указаны оценки интенсивности асинхронного МС-потока событий, построенные на отрезках времени $[t_i, t_j]$, $i = \overline{0; j-2}$ ($j = \overline{2; N}$). Первый элемент столбца — оценка интенсивности, построенная на отрезке $[t_0, t_j]$, второй элемент столбца — оценка интенсивности, построенная на отрезке $[t_1, t_j]$ и т. д.,

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_r & t_{r+1} & t_{r+2} & t_{r+3} & t_{r+4} & \dots & t_{N-1} & t_N \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \bullet \\ t_r \\ t_{r+1} \\ t_{r+2} \\ \bullet \\ t_{N-3} \\ t_{N-2} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{t_2-t_0} & \frac{2}{t_3-t_0} & \frac{3}{t_4-t_0} & \dots & \frac{r-1}{t_r-t_0} & \frac{r}{t_{r+1}-t_0} & \frac{r+1}{t_{r+2}-t_0} & \frac{r+2}{t_{r+3}-t_0} & \frac{r+3}{t_{r+4}-t_0} & \dots & \frac{N-2}{t_{N-1}-t_0} & \frac{N-1}{t_N-t_0} \\ 0 & \frac{1}{t_3-t_1} & \frac{2}{t_4-t_1} & \dots & \frac{r-2}{t_r-t_1} & \frac{r-1}{t_{r+1}-t_1} & \frac{r}{t_{r+2}-t_1} & \frac{r+1}{t_{r+3}-t_1} & \frac{r+2}{t_{r+4}-t_1} & \dots & \frac{N-1}{t_{N-1}-t_1} & \frac{N-2}{t_N-t_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{t_4-t_2} & \dots & \frac{r-3}{t_r-t_2} & \frac{r-2}{t_{r+1}-t_2} & \frac{r-1}{t_{r+2}-t_2} & \frac{r}{t_{r+3}-t_2} & \frac{r+1}{t_{r+4}-t_2} & \dots & \frac{N-2}{t_{N-1}-t_2} & \frac{N-3}{t_N-t_2} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{t_{r+2}-t_r} & \frac{2}{t_{r+3}-t_r} & \frac{3}{t_{r+4}-t_r} & \dots & \frac{N-r-2}{t_{N-1}-t_r} & \frac{N-r-1}{t_N-t_r} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_{r+3}-t_{r+1}} & \frac{2}{t_{r+4}-t_{r+1}} & \dots & \frac{N-r-3}{t_{N-1}-t_{r+1}} & \frac{N-r-2}{t_N-t_{r+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_{r+4}-t_{r+2}} & \dots & \frac{N-r-4}{t_{N-1}-t_{r+2}} & \frac{N-r-3}{t_N-t_{r+2}} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{t_{N-1}-t_{N-3}} & \frac{2}{t_N-t_{N-3}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{t_N-t_{N-2}} \end{array} \right. \end{matrix}$$

Рисунок 1.5 — Структура матрицы оценок D
асинхронного МС-потока событий

$(j - 1)$ -й элемент столбца — оценка интенсивности, построенная на отрезке $[t_{j-2}, t_j]$. Остальные элементы столбца равны нулю. В $(N - 1)$ -м столбце ($j = N$) все элементы отличны от нуля.

Событию потока, наступившему в момент времени t_i , соответствует строка матрицы D с номером $(i + 1)$, ($i = \overline{0; N - 2}$). В строке, соответствующей моменту t_i , указаны оценки интенсивности асинхронного МС-потока событий, построенные на отрезках времени $[t_i, t_j]$, $j = \overline{i + 2; N}$, ($i = \overline{0; N - 2}$). Начальные элементы строки до диагонального равны нулю. Диагональный элемент строки — оценка интенсивности, построенная на отрезке $[t_i, t_{i+2}]$, следующий элемент строки — оценка интенсивности, построенная на отрезке $[t_i, t_{i+3}]$ и т. д., $(N - 1)$ -й элемент строки — оценка интенсивности, построенная на отрезке $[t_i, t_N]$. В первой строке ($i = 0$) матрицы D все элементы отличны от нуля. В первой строке матрицы D при построении оценок интенсивности асинхронного МС-потока событий участвуют все события, наступившие на отрезке $[t_0, t_N]$, во второй строке — события, наступившие на отрезке $[t_1, t_N]$ и т. д., в $(N - 1)$ -ой строке — события, наступившие на отрезке $[t_{N-2}, t_N]$.

На диагоналях верхнего треугольника матрицы D расположены оценки интенсивности потока событий, построенные по определенному количеству событий. Главная (первая) диагональ содержит оценки интенсивности потока,

построенные по трем событиям на отрезках времени $[t_i, t_{i+2}]$, ($i = \overline{0; N-2}$). Следующая (вторая) диагональ содержит оценки интенсивности потока, построенные по четырем событиям на отрезках времени $[t_i, t_{i+3}]$, ($i = \overline{0; N-3}$) и т. д.. Диагональ с номером $(k-1)$ содержит оценки интенсивности потока, построенные по $(k+1)$ -му событию на отрезках времени $[t_i, t_{i+k}]$, ($i = \overline{0; N-k}$). Элемент $d_{N-1, N-1}$ является оценкой интенсивности потока, построенной по $N+1$ событию, т. е. по всей реализации (1.2.1).

В дальнейшем (для краткости) событие потока из реализации (1.2.1), наступившее в момент времени t_j , будем называть j -ым событием. Пусть n_1 — номер первого события, наступившего в пределах некоторого интервала стационарности, реализовавшегося на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$; n_2 — номер последнего события, наступившего в пределах этого же интервала стационарности, ($n_2 \geq n_1 + 2$). Тогда в строке матрицы D с номером n_1 элементы строки, начиная с диагонального элемента d_{n_1+1, n_1+1} и заканчивая элементом d_{n_1+1, n_2-1} , являются «внутриинтервальными» оценками интенсивности простейшего потока, реализовавшегося в пределах рассматриваемого интервала стационарности. В следующей $(n_1 + 2)$ -ой строке матрицы D элементы строки, начиная с диагонального элемента d_{n_1+2, n_1+2} и заканчивая элементом d_{n_1+1, n_2-1} , также являются «внутриинтервальными» оценками интенсивности простейшего потока, реализовавшегося на рассматриваемом интервале стационарности и т. д. Таким образом, все элементы матрицы оценок (1.2.5)

$$d_{ij} : i = \overline{n_1 + 1; n_2 - 1}; j = \overline{i; n_2 - 1}, (n_2 \geq n_1 + 2) \quad (1.3.1)$$

являются «внутриинтервальными» оценками интенсивности асинхронного МС-потока событий на рассматриваемом интервале стационарности. Элементы (1.3.1) образуют в матрице (1.2.5) треугольный блок размером $(n_2 - n_1 - 1)$ (первый диагональный элемент блока — d_{n_1+1, n_1+1} , последний — d_{n_2-1, n_2-1}).

Таким образом, в матрице (1.2.5) элементы (1.3.1), являющиеся «внутриинтервальными» оценками интенсивности асинхронного МС-потока событий для определенного интервала стационарности процесса $\lambda(t)$, образуют треугольный блок, расположенный на диагонали матрицы D и ограниченный $(n_1 + 1)$ -й

строкой и $(n_2 - 1)$ -м столбцом. Количество событий, на обработке которых построен треугольный блок, равно $(n_2 - n_1 + 1)$.

Если элементы матрицы оценок (1.3.1) являются «внутриинтервальными» оценками, то элементы, расположенные выше и правее треугольного блока, сформированного оценками (1.3.1), а именно:

$$\begin{aligned} d_{ij} : i = \overline{1, n_1}, j = \overline{n_1 + 1, n_2 - 1}, \\ d_{ij} : i = \overline{1, n_1}, j = \overline{n_2, N}, \\ d_{ij} : i = \overline{n_1 + 1, n_2 - 1}, j = \overline{n_2, N}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

являются «шумовыми» оценками, при вычислении которых задействованы события исследуемого интервала стационарности.

На рисунке 1.6 приведена иллюстрация возможного поведения процесса $\lambda(t)$ для трех состояний, возможного наступления событий на временной оси $(t_0, t_1, \dots, t_{14})$ и реализующаяся для этого варианта поведения асинхронного МС-потока матрица D .

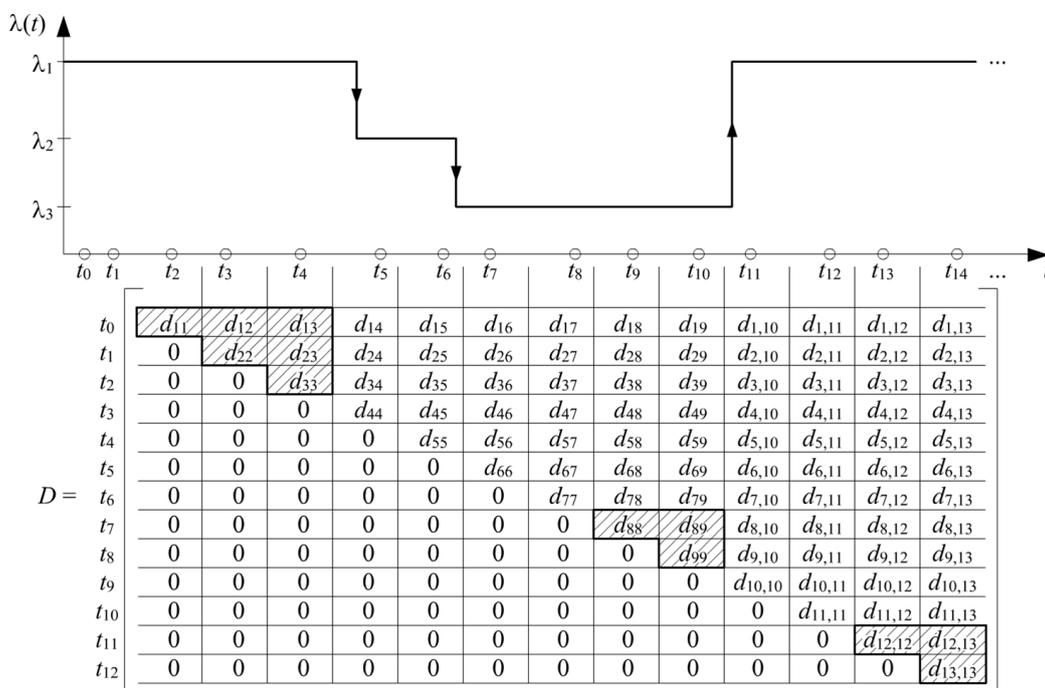


Рисунок 1.6 — Блочная структура матрицы D оценок интенсивности потока

Заштрихованные в матрице D блоки являются треугольными блоками «внутриинтервальных» оценок: 1) элементы верхнего блока — оценки интен-

сивности λ_1 простейшего потока, реализовавшегося в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ на временном отрезке $[t_0, t_4]$; 2) элементы среднего блока — оценки интенсивности λ_3 простейшего потока, реализовавшегося в третьем состоянии процесса $\lambda(t)$ на временном отрезке $[t_7, t_{10}]$; 3) элементы нижнего блока — снова оценки интенсивности λ_1 простейшего потока, реализовавшегося в первом состоянии процесса $\lambda(t)$ на временном отрезке $[t_{11}, t_{14}]$. В силу конструкции оценок (1.2.5) все остальные оценки (элементы) матрицы D будут «шумовыми» оценками интенсивности асинхронного МС-потока событий. Кроме того, треугольный блок «внутриинтервальных» оценок интенсивности λ_2 простейшего потока, реализовавшегося во втором состоянии процесса $\lambda(t)$ на временном отрезке $[t_5, t_6]$, в данном случае не существует, т. к. на этом интервале стационарности реализовалось менее трех событий потока.

1.4 Построение гистограммы по матрице оценок. Свойства гистограммы оценок

Для изучения свойств оценок интенсивности потока событий построим гистограмму оценок интенсивностей асинхронного МС-потока событий по элементам матрицы оценок (1.2.5). Гистограмма, построенная по выборке значений непрерывной случайной величины, является непараметрической оценкой функции плотности распределения этой случайной величины [23]. В данном случае в качестве случайной величины рассматривается оценка интенсивности потока событий по всевозможным интервалам времени между наступлениями событий из реализации (1.2.1), а в качестве выборки значений этой случайной величины — значения из матрицы D .

В случае непрерывной случайной величины для группировки данных требуется разбить весь диапазон данных на полуинтервалы (ячейки). Для этого необходимо среди ненулевых элементов матрицы D определить максимальное d_{max} и минимальное d_{min} значение. Задав шаг h ($h > 0$), диапазон значений $[d_{min}, d_{max}]$ элементов матрицы D разбивается на ячейки

$$[x_0, x_1), [x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, [x_{i-1}, x_i), \dots, [x_{l-1}, x_l),$$

$$x_i = d_{min} + ih \ (i = \overline{0; l}), \ x_{l-1} < d_{max} \leq x_l.$$

Для каждой ячейки $[x_{i-1}, x_i)$ ($i = \overline{1; l}$) определим количество m_i элементов матрицы D , принадлежащих полуинтервалу $[x_{i-1}, x_i)$, т. е. m_i — количество элементов матрицы D таких, что $x_{i-1} \leq d_{qp} < x_i$, $q = \overline{1; N-1}$, $p = \overline{q; N-1}$. Затем определим относительную частоту f_i для полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$ как отношение m_i к общему количеству ненулевых элементов матрицы $f_i = 2m_i/N(N-1)$. На основе полученной информации построим гистограмму H : для каждой ячейки строится прямоугольник площади f_i (шириной h , высотой f_i/h) с основанием на полуинтервале $[x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1; l}$. При таком построении гистограммы суммарная площадь прямоугольников равняется единице.

Будем называть ряд следующего вида:

$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	\dots	$[x_{i-1}, x_i)$	\dots	$[x_{l-1}, x_l)$
f_1	f_2	f_3	\dots	f_i	\dots	f_l

$$\begin{aligned} x_i &= d_{min} + ih \quad (i = \overline{1; l}), \quad x_{l-1} < d_{max} \leq x_l, \\ f_i &= 2m_i/N(N-1) \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

и графическое отображение этого ряда на координатной плоскости гистограммой оценок (и при необходимости обозначать H). Ряд (1.4.1) может быть графически представлен в виде полигона частот или огибающей. В этих случаях площадь под ломаной линией (в случае полигона частот) или под кривой (в случае огибающей) приближается к единице при уменьшении шага группировки данных. В дальнейшем, для наглядности, гистограмма будет графически представлена огибающей — сглаженной кривой, построенной по ряду (1.4.1) при помощи средств MS Excel.

Рассмотрим свойства гистограммы, вытекающие из свойств «внутриинтервальных» и «шумовых» элементов матрицы оценок (1.2.5) и ее блочной структуры (см. подраздел 1.3).

Предположим, что на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$ все наступившие события принадлежат одному и тому же интервалу стационарности (все события, наступившие в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_N , наступили, когда процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии s с интенсивностью λ_s и на интервалах (t_{i-1}, t_i) , $i = \overline{1; N}$,

не происходило переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния s в какое-либо другое состояние). Тогда можно считать, что на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$ реализовался простейший поток с интенсивностью λ_s . В дальнейших рассуждениях для краткости положим $\lambda_s = \lambda$.

По событиям t_0, t_1, \dots, t_N построим матрицу D по формулам (1.2.5). В этом случае все элементы матрицы D будут «внутриинтервальными» оценками интенсивности λ простейшего потока событий, реализовавшегося на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$, полученными по $(k+1)$ -му последовательным событиям из реализации рассматриваемого простейшего потока ($k = \overline{2; N-1}$). Общее количество ненулевых элементов в матрице D составит $N(N-1)/2$. Доля оценок $\widehat{\lambda}^{(k)}$, построенных по $(k+1)$ -му событию на отрезках времени $[t_i, t_{i+k}]$, ($i = \overline{0; N-k}$):

$$q_k^{(N)} = \frac{2(N-k+1)}{N(N-1)}, \quad k = \overline{2; N}, \quad \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} = 1. \quad (1.4.2)$$

Последовательность $q_k^{(N)}$ удовлетворяет неравенствам:

$$1 > q_2^{(N)} > q_3^{(N)} > \dots > q_N^{(N)}, \quad \text{т. е. } q_k^{(N)} > q_{k+1}^{(N)}, \quad k = \overline{2; N-1}.$$

Таким образом, построенная по матрице D гистограмма будет содержать оценки интенсивности рассматриваемого потока событий по различным отрезкам времени $[t_i, t_{i+k}]$, ($i = \overline{0; N-k}$) для всевозможных значений $k = \overline{2; N}$.

Плотность вероятности оценки $\widehat{\lambda}^{(k)}$ при фиксированном k , где k есть количество интервалов между наступившими событиями на рассматриваемом временном отрезке, имеет вид:

$$P(\widehat{\lambda}^{(k)}) = \lambda^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} [\widehat{\lambda}^{(k)}]^{-(k+1)} e^{-\lambda \frac{k-1}{\widehat{\lambda}^{(k)}}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.4.3)$$

Здесь оценка интенсивности по фиксированному количеству событий $\widehat{\lambda}^{(k)}$ ($\widehat{\lambda}^{(k)} > 0$) является случайной величиной для каждого k ($k = \overline{2; N}$). Для каждого k определены плотности вероятностей (1.4.3), где k можно рассматривать как параметр, принимающий значения $2, 3, 4, \dots, N$. Величины $q_k^{(N)}$ из (1.4.2) можно рассматривать как вероятность того, что параметр k принял некоторое значение из ряда $2, 3, 4, \dots, N$. Тогда в (1.4.3) переменную $\widehat{\lambda}^{(k)}$ можно заменить

на $\widehat{\lambda}$ и рассматривать смесь плотностей вероятности (1.4.3) для всех $k = \overline{2; N}$:

$$P_N(\widehat{\lambda}) = \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} P_k(\widehat{\lambda}) = \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} \left[\lambda^k \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} [\widehat{\lambda}]^{-(k+1)} e^{-\lambda \frac{k-1}{\widehat{\lambda}}} \right]. \quad (1.4.4)$$

Функция (1.4.4) является выпуклой линейной комбинацией функций $P_k(\widehat{\lambda})$. Таким образом, гистограмма, построенная по правилам (1.4.1) с использованием данных для одного интервала стационарности, является оценкой смеси плотностей распределения вид (1.4.4). Плотность распределения оценки интенсивности простейшего потока (1.4.3) является унимодальной кривой, максимум которой находится в некоторой окрестности значения оцениваемой интенсивности и приближается к этому значению с увеличением количества наблюдений k . Исследуем функцию $P_N(\widehat{\lambda})$ как функцию переменной $\widehat{\lambda}$ ($\widehat{\lambda} > 0$), чтобы убедиться в том, что и она является унимодальной и ее максимум приближается к значению интенсивности исследуемого простейшего потока с увеличением N .

Введем новую переменную $x = \lambda/\widehat{\lambda}$ ($x > 0$). Из (1.4.4) вытекает

$$P_N(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=2}^N q_k^{(N)} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} x^{k+1} e^{-(k-1)x}, \quad x > 0. \quad (1.4.5)$$

Точки функции (1.4.5), подозрительные на экстремум, определяются уравнением:

$$P'_N(x) = \frac{1}{\lambda} q_2^{(N)} x^2 e^{-x} \sum_{k=2}^N \frac{q_k^{(N)}}{q_2^{(N)}} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} [(k+1) - (k-1)x] = 0, \quad (1.4.6)$$

где $\frac{q_k^{(N)}}{q_2^{(N)}} < 1$, $k = \overline{3; N}$. Тогда из (1.4.6) следует, что корни функции $P'_N(x)$ находятся из уравнения

$$F_N(x) = 0; \quad F_N(x) = \sum_{k=2}^N f_k^{(N)}(x); \quad (1.4.7)$$

$$f_k^{(N)}(x) = \frac{q_k^{(N)}}{q_2^{(N)}} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} [(k+1) - (k-1)x].$$

Единственный ноль функции $f_k^{(N)}(x)$ есть $x_0^{(k)} = 1 + \frac{2}{(k-1)}$, $k = \overline{2; N}$.

Тогда имеем $F_N(x) > 0$ для $0 < x \leq 1 + \frac{2}{(N-1)}$, $F_N(x) < 0$ для $x \geq 3$.d

Таким образом, нули функции $F_N(x)$ (один или несколько) будут лежать в полуинтервале $(1 + \frac{2}{(N-1)}, 3]$. Покажем, что функция $F_N(x)$ является строго монотонной на полуинтервале $(1 + \frac{2}{(N-1)}, 3]$. Тогда $F_N(x)$ будет иметь на этом полуинтервале единственный ноль, а, следовательно, функция (1.4.5) — единственный максимум. Производная $F'_N(x)$ выпишется в виде:

$$F'_N(x) = \sum_{k=2}^N f_k^{(N)'}(x) = \sum_{k=2}^N \frac{q_k^{(N)}}{q_2^{(N)}} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-2)!} x^{k-3} e^{-(k-2)x} z_k(x),$$

$$z_k(x) = (k-2)(k-1)x^2 - [(k-1)^2 + (k-2)(k-1)]x + (k-2)(k+1). \quad (1.4.8)$$

Отметим, что функция $z_k(x)$ в (1.4.8) определяет знак каждого слагаемого функции $F'_N(x)$. Функция $z_k(x)$ — выпуклая функция переменной x . Минимум $z_k(x)$ достигается в точке

$$x_{0k} = 1 + \frac{1}{(k-1)} + \frac{1}{2(k-1)},$$

$$z_k(x_{0k}) = -[(k+1) + (k-3)^2(4(k-1)(k-2))^{-1}], \quad k = \overline{3; N}.$$

Функция $z_k(x)$ отрицательна на интервале $(x_2^{(k)}, x_1^{(k)})$, $k = \overline{3; N}$, где

$$x_{1,2}^{(k)} = \left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-2)} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{(k-2)} \left(\frac{1}{4(k-2)} + \frac{k^2-2}{(k-1)^2} \right)}. \quad (1.4.9)$$

Заметим, что $x_2^{(k)} < x_1^{(k)}$, при этом для всех $k = \overline{3; N}$ справедливы неравенства: $x_1^{(k)} < 4$ и $x_2^{(k)} < 1$. Таким образом, при исследовании функции $F_N(x)$ на количество нулей правомочно рассматривать значения x , принадлежащие отрезку $[1, 3]$.

Предварительно рассмотрим граничный случай $N = 2$. Из (1.4.7) получаем $F_2(x) = f_2^{(2)}(x) = 3 - x$, т. е. $x_0^{(2)} = 3$. Из (1.4.8) находим $F'_2(x) = -1$. Таким образом, для $N = 2$ функция $P_2(x)$, определенная (1.4.5), имеет единственный максимум в точке $x_0^{(2)} = 3$. Тогда плотность вероятностей $P_2(\hat{\lambda})$, определенная (1.4.4), имеет также единственный максимум в точке $\hat{\lambda}_0 = \lambda/3$.

Теорема 1.1. Функция $F_N(x)$, определенная в (1.4.7), имеет единственный ноль.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Пусть $N = 3$.

Тогда

$$\begin{aligned} F_3(x) &= (3 - x) + 4x(2 - x)e^{-x}, \\ F'_3(x) &= -1 + 4(x^2 - 4x + 2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $F_3(x) < 0$ для $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Следовательно, функция $F_3(x)$ — строго монотонная (убывающая) на интервале $(1, x_1^{(3)}) = (1, 2 + \sqrt{2})$, где $x_1^{(3)}$ определена в (1.4.9); при этом $F_3(1) > 0$, $F_3(x_1^{(3)}) < 0$. Таким образом,

1) функция имеет единственный ноль в точке $x_3^0 \in (1, x_1^{(3)})$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{k-1} \Big|_{k=3} < x_3^0 < \left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-2)} \right] + \\ + \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{4(k-2)} + \frac{k^2-2}{(k-1)^2} \right)} \Big|_{k=3}; \end{aligned}$$

2) функция $F_3(x)$ не достигает нуля для $x > x_3^0$.

Пусть $N = 4$.

Тогда:

$$\begin{aligned} F_4(x) &= (3 - x) + \frac{16}{3}(2 - x)xe^{-x} + \frac{9}{2}(5 - 3x)x^2e^{-2x}, \\ F'_4(x) &= -1 + \frac{16}{3}(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + \frac{9}{2}(6x^2 - 19x + 10)xe^{-2x}. \end{aligned}$$

Представим $F_4(x)$ и $F'_4(x)$ в виде:

$$\begin{aligned} F_4(x) &= F_3(x) + \phi_4(x); \quad F'_4(x) = F'_3(x) + \phi'_4(x), \\ \phi_4(x) &= \frac{4}{3} \left[(2 - x) + \frac{27}{8}(5 - 3x) \right] xe^{-x}, \\ \phi'_4(x) &= \frac{4}{3} \left[(x^2 - 4x + 2) + \frac{27}{8}(6x^2 - 19x + 10) \right] xe^{-x}. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Тогда имеем $\phi'_4(x) < 0$ для $1 \leq x \leq x_1^{(4)}$ ($x_1^{(4)} = 2.5$). Так как $F'_3(x) < 0$ для $1 \leq x \leq 2.5$, то $F'_4(x) < 0$ для $1 \leq x \leq 2.5$, т. е. $F_4(x)$ — строго монотонная

(убывающая) на отрезке $[1; 2.5]$ функция. Так как $\phi_4(x)$ — строго монотонная (убывающая) на отрезке $[1; 2.5]$ функция, при этом $\phi_4(x) > 0$ для $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$, $\phi_4(x) < 0$ для $x \geq 2.5$, то в единственной точке x_4^* , где $\frac{5}{3} \leq x_4^* \leq 2.5$, имеет место $\phi_4(x = x_4^*) = 0$. Тогда $\phi_4(x) < 0$ для $x > x_4^*$:

а) $\phi_4(x) < 0$ для $x_4^* < x \leq 2.5$ в силу строгой монотонности функции $\phi_4(x)$ на полуинтервале $(x_4^*, 2.5]$,

б) $\phi_4(x) < 0$ для $x > 2.5$ в силу определения функции $\phi_4(x)$ в (1.4.10).

Наконец, в точке $x_1^{(4)}$ имеет место $F_4(x = x_1^{(4)}) < 0$ (см. рисунок 1.7).

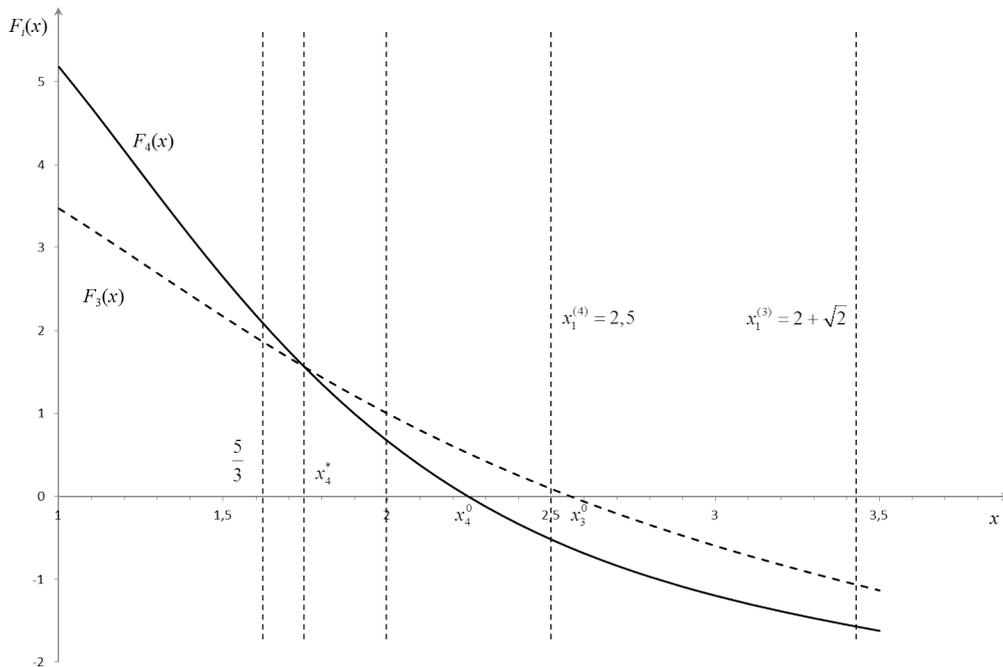


Рисунок 1.7 — Взаимное расположение функций $F_3(x)$ и $F_4(x)$ и их особых точек

Следовательно, функция $F_4(x)$ — строго монотонная (убывающая) на интервале $(1, x_1^{(4)}) = (1; 2.5)$, где $x_1^{(4)}$ определена в (1.4.9); при этом $F_4(1) > 0$, $F_4(x_1^{(4)}) < 0$. Таким образом,

1) функция $F_4(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_4^0 \in (1, x_1^{(4)})$:

$$1 + \frac{2}{k-1} \Big|_{k=4} < x_4^0 < \left[1 + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2(k-2)} \right] + \sqrt{\frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{4(k-2)} + \frac{k^2-2}{(k-1)^2} \right)} \Big|_{k=4};$$

2) функция $F_4(x)$ не достигает нуля для $x > x_4^0$;

3) функция $\phi_4(x)$ — строго монотонная (убывающая) функция для $1 \leq x \leq x_1^{(4)}$, имеющая единственный ноль в точке x_4^* , где $\frac{5}{3} < x_4^* < x_1^{(4)}$, и не достигающая нуля для $x > x_4^*$; $x_1^{(3)} > x_1^{(4)}$.

Рассмотрим теперь произвольное $N + 1$. Имеем

$$F_{N+1}(x) = F_N(x) + \phi_{N+1}(x); \quad F'_{N+1}(x) = F'_N(x) + \phi'_{N+1}(x),$$

$$\phi_{N+1}(x) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=3}^{N+1} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-3)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} [(k+1) - (k-1)x],$$

$$\phi'_{N+1}(x) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=3}^{N+1} \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-3)!} x^{k-3} e^{-(k-2)x} z_k(x), \quad N \geq 3,$$

где $z_k(x)$ определена в (1.4.8).

Сделаем предположение индукции для произвольного N :

- 1) функция $F_N(x)$ — строго монотонная (убывающая) функция на интервале $(1, x_1^{(N)})$, где $x_1^{(N)}$ определена в (1.4.9), при этом $F_N(1) > 0$, $F_N(x_1^{(N)}) < 0$;
- 2) функция $F_N(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_N^0 \in (1, x_1^{(N)})$:

$$1 + \frac{2}{N-1} < x_N^0 < \left[1 + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{2(N-2)} \right] + \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{1}{4(N-2)} + \frac{N^2-2}{(N-1)^2} \right)}; \quad (1.4.11)$$

- 3) функция $F_N(x)$ не достигает нуля для $x > x_N^0$;

- 4) функция $\phi_{N+1}(x)$ — строго монотонная (убывающая) функция для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$, имеющая единственный ноль в точке x_{N+1}^* ($1 + \frac{2}{N} < x_{N+1}^* < x_1^{(N+1)}$) и не достигающая нуля для $x > x_{N+1}^*$; $x_1^{(N)} > x_1^{(N+1)}$.

Имеем $F_{N+1}(1) > 0$. Так как $\phi'_{N+1}(x) < 0$ для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$ и $F'_N(x) < 0$ для $1 \leq x \leq x_1^{(N)}$, причем $x_1^{(N)} > x_1^{(N+1)}$, то $F_{N+1}(x)$ строго монотонна (убывает) на отрезке $[1; x_1^{(N+1)}]$. В точке $x = x_1^{(N+1)}$ функция $F_{N+1}(x = x_1^{(N+1)})$ есть функция дискретного переменного N ($N \geq 3$). Численные расчеты показывают, что $F_{N+1}(x = x_1^{(N+1)}) < 0$ для $N = \overline{3; 10}$. Таким образом, на отрезке $[1; x_1^{(N+1)}]$ функция $F_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль в точке x_{N+1}^0 , где $1 < x_{N+1}^0 < x_1^{(N+1)}$. Имеем далее $\phi_{N+1}(x)$ — строго монотонная (убывающая) функция для

$1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$. По предположению индукции $\phi_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_{(N+1)}^* \in \left(1 + \frac{2}{N}; x_1^{(N+1)}\right)$ и не достигает нуля для $x > x_{(N+1)}^*$. Тогда имеем

$$F_{N+1}(x) \begin{cases} = F_N(x), & x = x_{N+1}^* \\ > F_N(x), & \text{для } 1 \leq x \leq x_{N+1}^*, \\ < F_N(x), & \text{для } x > x_{N+1}^*. \end{cases}$$

По предположению индукции $F_N(x)$ не достигает нуля для $x > x_N^0$. Так как $x_{N+1}^* < x_{N+1}^0 < x_1^N$, то $F_{N+1}(x)$ не достигает нуля для $x > x_{N+1}^0$.

Чтобы завершить доказательство, докажем, что функция $\phi_{N+1}(x)$ не достигает нуля для $x > x_{N+1}^*$ и $1 < x_{N+1}^* < x_1^{N+1}$. Имеем $\phi_{N+1}(x) = F_{(N+1)}(x) - F_N(x)$, $N \geq 3$. В точке $x = x_1^{(N+1)}$ выполняется $F_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$. Тогда:

1) если $F_N(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $\left|F_{N+1}(x_1^{(N+1)})\right| > -F_N(x_1^{(N+1)})$, то $\phi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $\phi_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль $x_{(N+1)}^* \in \left(1; x_1^{(N+1)}\right)$ (см. рисунок 1.8);

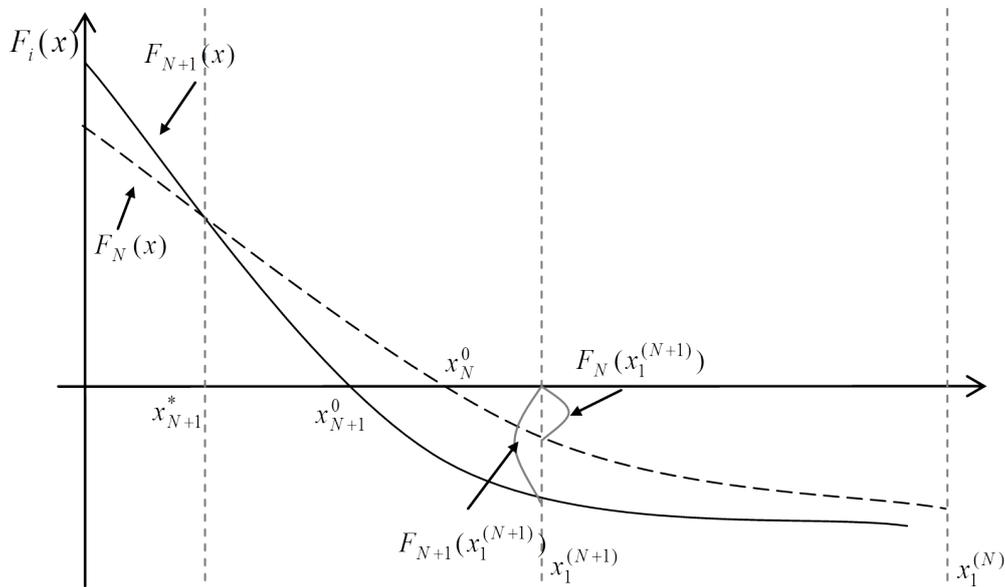


Рисунок 1.8 — Взаимное расположение функций $F_N(x)$ и $F_{N+1}(x)$ и их особых точек:
случай 1

2) если $F_N(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $\left|F_{N+1}(x_1^{(N+1)})\right| < -F_N(x_1^{(N+1)})$, то $\phi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) > 0$; т. е. $F_{N+1}(x) > F_N(x)$ для $1 \leq x \leq x_1^{(N+1)}$ и точка $x_{(N+1)}^*$, опре-

деляющая ноль функции $\phi_{N+1}(x)$ на интервале $(1; x_1^{(N+1)})$, отсутствует, что противоречит рассмотренным случаям $N = 3$ и $N = 4$ (см. рисунок 1.9);

3) если $F_N(x_1^{(N+1)}) > 0$, то $\phi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $\phi_{N+1}(x)$ имеет единственный ноль в точке $x_{N+1}^* \in (1; x_1^{(N+1)})$ (см. рисунок 1.10).

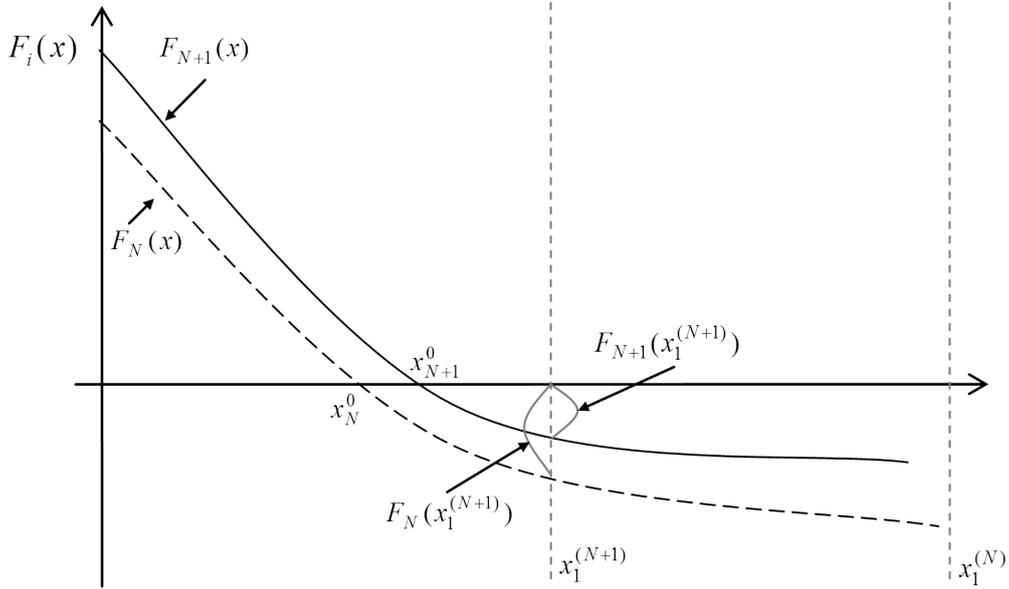


Рисунок 1.9 — Взаимное расположение функций $F_N(x)$ и $F_{N+1}(x)$ и их особых точек:
случай 2

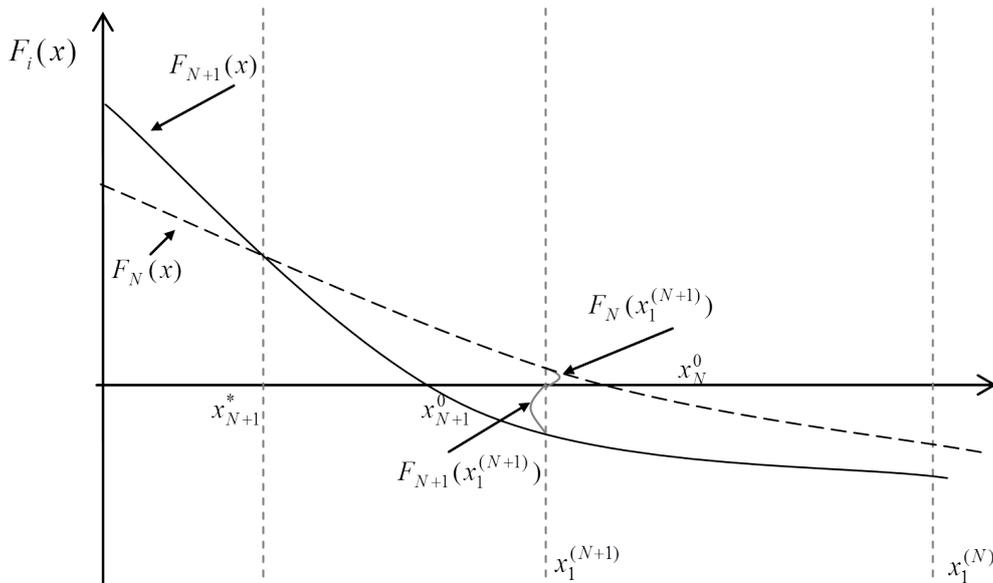


Рисунок 1.10 — Взаимное расположение функций $F_N(x)$ и $F_{N+1}(x)$ и их особых точек:
случай 3

Таким образом, $\phi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$ и $1 < x_{(N+1)}^* < x_1^{(N+1)}$.

Представим $\phi_{N+1}(x)$ в виде

$$\phi_{N+1}(x) = \frac{1}{N(N-1)} x e^{-x} \Phi_{N+1}(x),$$

$$\Phi_{N+1}(x) = \sum_{k=2}^N \frac{k^{k+1}}{(k-2)!} x^{k-2} e^{-(k-2)x} \left(\frac{k+2}{k} - x \right).$$

Знак функции $\phi_{N+1}(x)$ определяется знаком функции $\Phi_{N+1}(x)$, при этом точка нуля этих функций есть x_{N+1}^* . Точки $x_k = \frac{k+2}{k}$ образуют интервалы $\left(1 + \frac{2}{k+1}, 1 + \frac{2}{k}\right)$, $k = \overline{2; N}$, в один из которых попадает точка $x_1^{(N+1)}$, в которой $\Phi_{N+1}(x_1^{(N+1)}) < 0$, при этом $x_1^{(N+1)} > x_{N+1}^*$. Точка $x_1^{(N+1)}$ разбивает слагаемые в $\Phi_{N+1}(x)$ на положительные и отрицательные. При изменении x от $x_1^{(N+1)}$ до 2 количество положительных слагаемых уменьшается (для $x \geq 2$ положительных слагаемых нет) (рисунок 1.11).

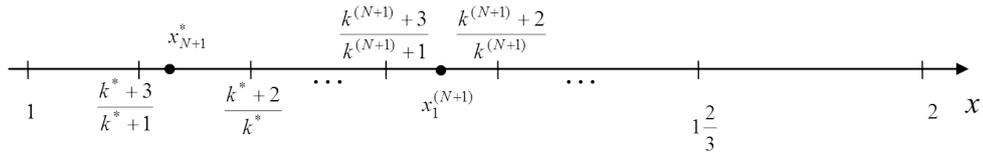


Рисунок 1.11 — Взаимное расположение точек $x_1^{(N+1)}$ и x_{N+1}^*

Тогда $\Phi_{N+1}(x) < 0$ для $x > x_1^{(N+1)}$. Таким образом, функция $\phi_{N+1}(x)$ не достигает нуля для $x > x_1^{(N+1)}$. *Теорема доказана.*

Следствие 1. Функция $P_N(x)$ ($x > 0$), определенная формулой (1.4.5), имеет единственный максимум в точке x_N^0 , лежащий в границах (1.4.11).

Следствие 2. Плотность вероятностей $P_N(\widehat{\lambda})$, определенная в (1.4.4), имеет единственный максимум в точке $\widehat{\lambda}_0 = \frac{\lambda}{x_N^0}$.

Следствие 3. В силу неравенства (1.4.11) при $N \rightarrow \infty$ точка нуля функции (1.4.5) $x_N^0 \rightarrow 1$, т. е. $\widehat{\lambda}_0 \rightarrow \lambda$.

Таким образом, доказано, что смесь плотностей вероятностей (1.4.4) для простейшего потока является унимодальной функцией для любых значений параметра N . Точка максимума этой функции находится в окрестности значения λ интенсивности рассматриваемого простейшего потока и стремится к значению интенсивности исследуемого простейшего потока с увеличением количе-

ства наблюдений. Очевидно, что, при длине реализации, равной N , случайная величина, описываемая плотностью распределения (1.4.4), имеет следующие характеристики:

$$M_{\hat{\lambda}}^{(N)} = \lambda, \quad D_{\hat{\lambda}}^{(N)} = \lambda^2 \sum_{k=2}^N \frac{q_k^{(N)}}{k-2}. \quad (1.4.12)$$

На рисунке 1.12 в качестве иллюстрации представлен график функции смеси плотностей распределения оценок интенсивности простейшего потока событий для $\lambda = 20$ и различных значениях длины реализации N .

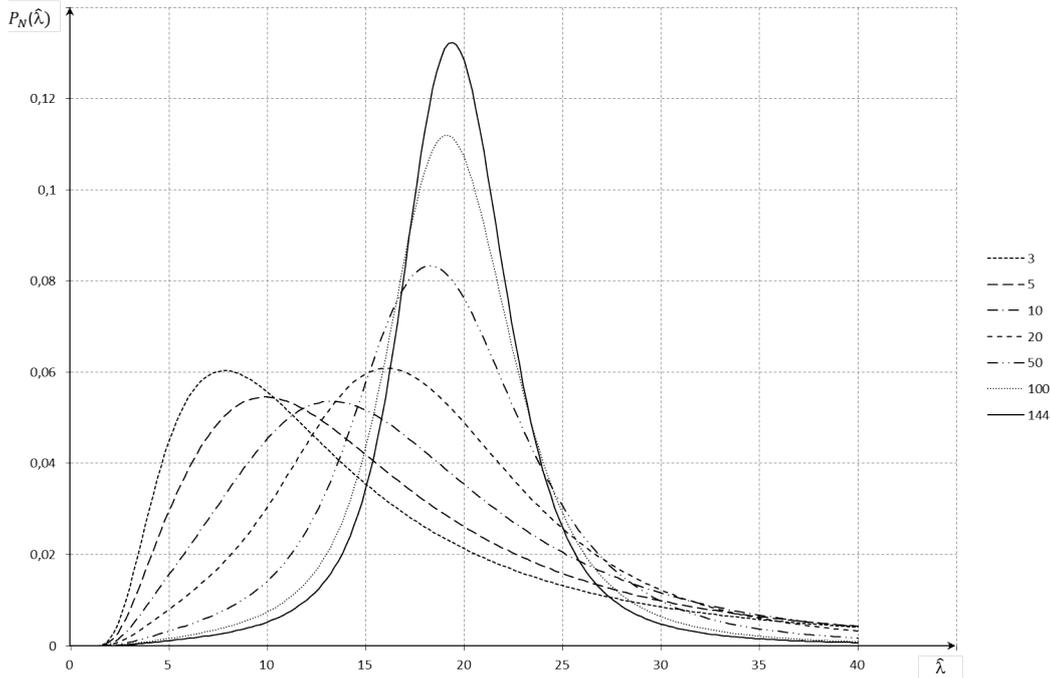


Рисунок 1.12 — График функции смеси плотностей распределения оценок интенсивности простейшего потока событий для $\lambda = 20$ и различных значениях длины реализации N

Гистограмма, построенная по правилам (1.4.1) с использованием данных для простейшего потока является оценкой смеси плотностей вида (1.4.4). Так же как и смесь распределений (1.4.4) она имеет единственный максимум. Значения на полуинтервале, доставляющем максимум гистограммы, приближаются к интенсивности потока на рассматриваемом интервале стационарности с увеличением длины исследуемой реализации. При достаточной длине реализации полуинтервал, доставляющий максимум гистограммы, будет содержать значение интенсивности рассматриваемого простейшего потока.

На рисунке 1.13 в качестве иллюстрации приведен пример гистограмм

оценок интенсивности простейшего потока, построенных для простейшего потока с интенсивностью 50 для разного количества событий на рассмотренном отрезке наблюдения. Видно, что при возрастании количества событий содержащая большинство оценок из матрицы D окрестность полуинтервала, доставляющего максимум гистограммы, уменьшается.

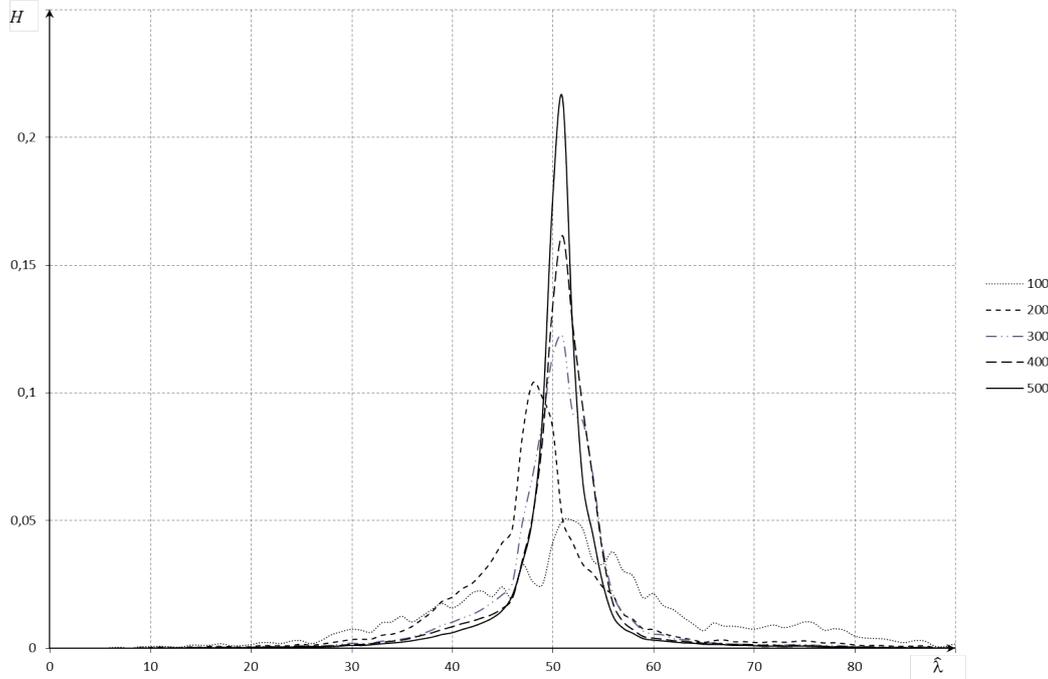


Рисунок 1.13 — Пример поведения гистограммы оценок для простейшего потока с интенсивностью $\lambda=50$ при увеличении количества событий

На рисунке 1.14 приведен пример гистограмм оценок интенсивности простейшего потока, построенных по отрезкам наблюдений, содержащим 500 событий, для различных значений интенсивности. Видно, что при возрастании интенсивности содержащая большинство оценок из матрицы D окрестность полуинтервала, доставляющего максимум гистограммы, увеличивается, а сам максимум уменьшается.

Теперь предположим, что на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$ реализовалось несколько интервалов стационарности. На каждом интервале стационарности события наступают с определенной интенсивностью, соответствующей состоянию процесса $\lambda(t)$. Каждый интервал стационарности, содержащий достаточное число событий, будет представлен в матрице оценок D блоком «внутри-

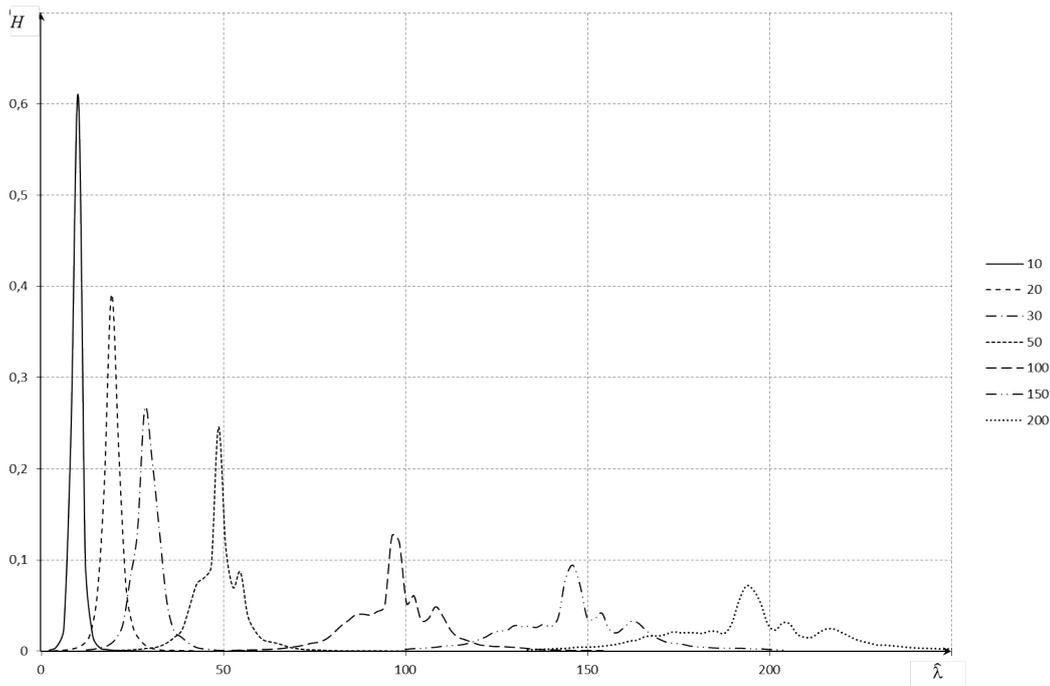


Рисунок 1.14 — Пример поведения гистограммы оценок для простейшего потока, построенной по реализации из 500 событий, для различных значений интенсивности

интервальных» оценок. Гистограмма, полученная для каждого отдельного блока «внутриинтервальных» оценок, представляет собой унимодальную функцию — оценку смеси плотностей распределения вида (1.4.4). Таким образом, каждый блок «внутриинтервальных» оценок сформирует в гистограмме максимум. Абсцисса каждого максимума относится к полуинтервалу значений, близких к интенсивности потока на соответствующем интервале стационарности, т. е. к значению интенсивности соответствующего состояния процесса $\lambda(t)$.

Если на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$ среди интервалов стационарности найдутся интервалы, соответствующие одному и тому же состоянию процесса $\lambda(t)$, то каждый из них образует блок «внутриинтервальных» оценок в матрице D и максимум в гистограмме оценок. Абсциссы этих максимумов в силу следствия 3 будут близки по значению. Следовательно, максимумы, соответствующие таким блокам «внутриинтервальных» оценок, сформируют единый максимум, абсцисса которого близка по значению к интенсивности рассматриваемого состояния.

То есть, сгруппировав все «внутриинтервальные» оценки из матрицы D , получим гистограмму, которая имеет несколько максимумов разной высоты.

Каждый максимум сформирован «внутриинтервальными» оценками интенсивности определенного состояния потока. Количество максимумов, таким образом, равно количеству состояний интенсивности, реализовавшихся на отрезке наблюдения. Полуинтервалы, к которым относятся максимальные частоты в гистограмме, указывают на значения интенсивностей состояний процесса $\lambda(t)$, реализовавшихся на отрезке наблюдения $[t_0, t_N]$.

Все элементы матрицы D , не относящиеся к блокам «внутриинтервальных» оценок, являются «шумовыми» оценками, т. е. оценками средней интенсивности потока на некотором отрезке реализации, который включает в себя события из более чем одного интервала стационарности.

Утверждение 1.2. «Шумовые» оценки есть средневзвешенные оценки интенсивности потока по всем длительностям интервалов стационарности, реализовавшихся в пределах отрезка времени, по которому производится оценивание.

Доказательство. Рассмотрим элемент матрицы оценок d_{ij} , который является оценкой интенсивности потока на отрезке времени $T = [t_{i-1}, t_{j+1}]$, по которому производится оценивание, по $n = (j - i + 1)$ событиям. Пусть в течение временного отрезка $[t_{i-1}, t_{j+1}]$ реализовалось m интервалов стационарности с интенсивностями $\lambda^{(k)}$, $k = \overline{1; m}$. Тогда

$$T = t_{j+1} - t_{i-1} = \sum_{k=1}^m T_k, \quad n = j - i + 1 = \sum_{k=1}^m n_k,$$

где T_k — длительность k -го интервала стационарности, n_k — количество событий, реализовавшееся в k -ом интервале стационарности. Оценки интенсивности потока на k -ом интервале стационарности выпишутся в виде $\hat{\lambda}^{(k)} = n_k/T_k$, $k = \overline{1; m}$.

Тогда элемент d_{ij} есть:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{j - i + 1}{t_{j+1} - t_{i-1}} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m n_k = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \frac{n_k}{T_k} T_k = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \hat{\lambda}^{(k)} T_k = \sum_{k=1}^m \hat{\lambda}^{(k)} \frac{T_k}{T}, \quad \sum_{k=1}^m \frac{T_k}{T} = 1. \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Утверждение доказано.

Таким образом, «шумовая» оценка (1.4.13) является выпуклой линейной комбинацией «внутриинтервальных» оценок $\widehat{\lambda}^{(k)}$, $k = \overline{1; m}$, которые могут быть построены по интервалам стационарности, реализовавшимся на отрезке времени, по которому производится оценивание интенсивности.

«Шумовые» оценки вносят вклад в гистограмму, группируясь на интервале значений между минимальным и максимальным значениями интенсивности состояний интервалов стационарности, входящих в отрезок времени, по которому производится оценивание. Следовательно, максимумы, сформированные «внутриинтервальными» оценками, в гистограмме могут быть искажены или поглощены «шумовыми» оценками. Рассмотрим «шумовые» оценки, при вычислении которых задействованы интервалы стационарности, соответствующие состоянию с минимальной интенсивностью среди реализовавшихся за все время наблюдения за потоком. Такие оценки больше, чем значение этой минимальной интенсивности, т. е. группируются преимущественно правее «внутриинтервальных» оценок этой интенсивности. Таким образом, максимум гистограммы, соответствующий этой минимальной интенсивности, наименее подвержен искажению «шумовыми» оценками.

Таким образом, если построить гистограмму оценок по матрице для потока с произвольным числом состояний, то «шумовые» оценки распределятся по всем полуинтервалам, искажая и поглощая максимумы гистограммы, образованные «внутриинтервальными» оценками интенсивностей состояний исследуемого потока. Однако следует отметить, что максимум, соответствующий состоянию с минимальной интенсивностью, наименее подвержен этому искажению.

На рисунке 1.15 в качестве примера представлены три гистограммы оценок, построенные на основании данных из матрицы оценок D для асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями. Матрица оценок построена по наблюдениям за потоком со следующими характеристиками: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 40$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1$. Длина реализации составляет 500 событий. Ряд 1 — гистограмма, построенная по всей матрице оценок D . Ряд 2 — гистограмма, построенная

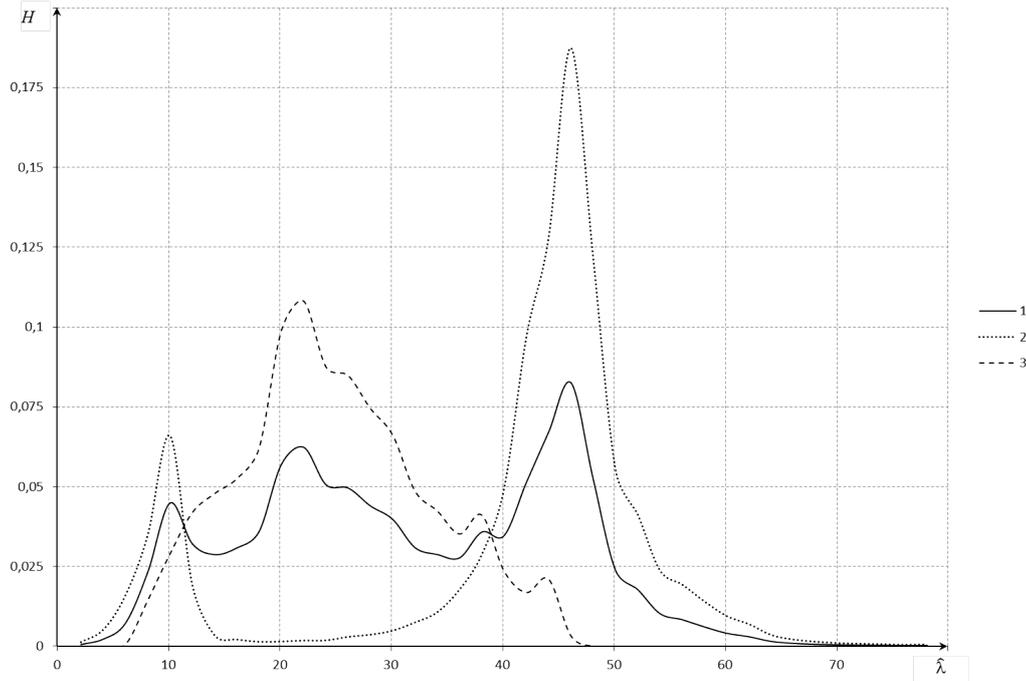


Рисунок 1.15 — Пример поведения гистограммы оценок для асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями, построенной по реализации из 500 событий, характеристики потока: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 40$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,1$

только по «внутриинтервальным» оценкам из матрицы D . Ряд 3 — гистограмма, построенная только по «шумовым» оценкам из матрицы D . Гистограмма «внутриинтервальных» оценок имеет два максимума, точки максимумов приблизительно равны интенсивностям потока в первом и втором состояниях. Максимум гистограммы «шумовых» оценок расположен между максимумами гистограммы «внутриинтервальных» оценок. Гистограмма, полученная по всем значениям из матрицы D , имеет три максимума, крайние максимумы сформированы преимущественно «внутриинтервальными» оценками интенсивностей состояний, средний максимум — преимущественно «шумовыми».

Сформулируем свойства гистограммы оценок:

1. Гистограмма, построенная по реализации простейшего потока, имеет единственный максимум. Полуинтервал гистограммы, доставляющий максимум, содержит значение интенсивности простейшего потока (при достаточном количестве событий в реализации).

2. В случае асинхронного МС-потока событий гистограмма, построенная

только по «внутриинтервальным» оценкам из матрицы оценок, имеет несколько максимумов. Количество максимумов совпадает с количеством состояний процесса $\lambda(t)$, реализовавшихся за время наблюдения. Положение максимумов указывает на значения оценок интенсивностей реализовавшихся состояний.

3. Гистограмма, построенная по всем элементам из матрицы оценок (в случае асинхронного МС-потока), содержит как «внутриинтервальные», так и «шумовые» оценки. Максимумы, образованные «внутриинтервальными» оценками, могут быть поглощены и искажены «шумовыми» оценками.

4. Максимум гистограммы, соответствующий наименьшему из значений интенсивности исследуемого потока, реализовавшихся за время наблюдения, наименее подвержен искажению «шумовыми» оценками.

1.5 Алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий

На основании изложенных соображений сформулируем алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока:

Шаг 1. По реализации потока построить всевозможные оценки интенсивности на отрезках времени $[t_{i-1}, t_{j+1}]$ и сформировать матрицу оценок интенсивности D по формулам (1.2.5).

Шаг 2. Отнести элементы матрицы оценок D к «внутриинтервальным», либо к «шумовым».

Шаг 3. Сгруппировать «внутриинтервальные» оценки из матрицы D в гистограмму (1.4.1).

Шаг 4. Определить количество максимумов гистограммы. Количество максимумов гистограммы является оценкой количества состояний асинхронного МС-потока событий.

Шаг 5. Для каждого максимума гистограммы определить полуинтервал, доставляющий этот максимум. Некоторое значение из полуинтервала (например его левая граница) указывает на значение оценки интенсивности асинхронного МС-потока событий в данном состоянии.

Таким образом, для оценки числа состояний n процесса $\lambda(t)$ и значений интенсивностей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ асинхронного МС-потока событий необходимо в матрице оценок D отделить «внутриинтервальные» оценки от «шумовых». Согласно структуре матрицы оценок, «внутриинтервальные» оценки образуют в матрице треугольные блоки (1.3.1), размер и расположение этих блоков соответствует расположению интервалов стационарности в реализации потока. То есть для отделения «внутриинтервальных» оценок в матрице D нужно определить, к какому интервалу стационарности относится то или иное событие в реализации.

1.6 Выводы

1. На основе реализации потока (1.2.1) событий построена матрица всевозможных оценок интенсивности потока (1.2.5). Матрица имеет блочную структуру: в треугольных блоках на диагонали расположены «внутриинтервальные» оценки интенсивности потока (1.3.1), размер и положение блоков «внутриинтервальных» оценок соответствует длине и положению интервалов стационарности в реализации потока. Остальные элементы матрицы оценок являются «шумовыми» оценками.

2. По элементам матрицы оценок построена гистограмма оценок интенсивности (1.4.1).

3. Показано, что гистограмма, построенная по реализации простейшего потока, является оценкой смеси плотностей распределений (1.4.4). Доказана теорема, следствием которой является унимодальность смеси плотностей (1.4.4) и приближение ее точки максимума к значению интенсивности простейшего потока с увеличением числа событий в реализации.

4. Рассмотрены свойства гистограммы оценок для случая простейшего потока, вытекающие из свойств смеси плотностей (1.4.4).

5. Рассмотрены свойства гистограммы оценок для случая асинхронного МС-потока событий.

6. Сформулирован алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий.

2 Алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности

Для применения алгоритма оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий необходимо определить, какие оценки в матрице оценок D (1.2.5) являются «внутриинтервальными» оценками, а какие — «шумовыми», и использовать для построения гистограммы оценок только «внутриинтервальные» оценки. Такие оценки в матрице D расположены в треугольных блоках на главной диагонали (1.3.1), расположение и размер блоков соответствуют расположению и длине интервалов стационарности в исследуемой реализации потока. Выше и правее блока «внутриинтервальных» оценок, соответствующего некоторому реализовавшемуся интервалу стационарности, расположены «шумовые» оценки, полученные с учетом событий этого интервала стационарности (1.3.2). В предложенном алгоритме оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий используются только «внутриинтервальные» оценки, поэтому необходимо вывести из рассмотрения «шумовые» оценки, содержащиеся в матрице, например, положив их равными нулю. Для того, чтобы определить, какие из оценок в матрице D являются «внутриинтервальными», а какие — «шумовыми», необходимы сведения о реализовавшихся за время наблюдения интервалах стационарности. Однако, поскольку процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то количество интервалов стационарности, моменты времени их начала и окончания, номера событий, реализовавшихся на том или ином интервале стационарности, неизвестны.

Таким образом, для того, чтобы определить, какие элементы матрицы оценок — «внутриинтервальные» оценки, а какие — «шумовые», необходимо определить, какие события реализации (1.2.1) предположительно относятся к одному и тому же интервалу стационарности. То есть, необходимо отнести каждое событие реализации исследуемого потока к одному из интервалов стационарности с использованием особенностей модели потока и свойств матрицы оценок D и гистограммы оценок H , построенных по реализации.

Для этого предлагается воспользоваться подходом описанным в [73]. Основные результаты раздела 2 были опубликованы в [9].

2.1 Постановка задачи отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности

Реализация (1.2.1) есть последовательность моментов наступления событий потока. К интервалу стационарности с состоянием интенсивности s в реализации потока относится последовательность событий потока, которые наступили, когда процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии с интенсивностью λ_s от момента начала интервала постоянства интенсивности и до момента его окончания, т. е. последовательность событий реализации, наступивших в пределах одного интервала времени, в течение которого процесс $\lambda(t)$ находился в состоянии s .

Пусть момент времени t' — момент начала некоторого интервала стационарности и t'' — момент его окончания. На интервале стационарности процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии s . Моменты t' и t'' ненаблюдаемы и, следовательно, не отражены в реализации (1.2.1). События, наступившие на интервале времени (t', t'') , составляют в реализации последовательность (множество) событий, относящихся к интервалу стационарности состояния s , т. е. последовательность моментов наступления событий, наступивших с интенсивностью λ_s .

$$t' < t_{i_0} < t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n} < t_{i_{n+1}} < t'', \quad i_{j+1} = i_j + 1, \quad j = \overline{0; n}. \quad (2.1.1)$$

Отрезок времени $[t_{i_0}, t_{i_{n+1}}]$, соответствующий множеству событий (2.1.1), содержится в интервале стационарности (t', t'') . Будем называть множество событий (2.1.1) последовательностью событий интервала стационарности, а отрезок времени $[t_{i_0}, t_{i_{n+1}}]$ — отрезком реализации, соответствующим интервалу стационарности.

Таким образом, все множество событий реализации разбивается на последовательности следующих друг за другом событий. Так как на интервале стационарности МС-поток ведет себя как простейший поток с некоторой постоянной интенсивностью, то каждая последовательность событий, относящаяся к одному и тому же интервалу стационарности, может рассматриваться как

последовательность событий из реализации простейшего потока с некоторой постоянной интенсивностью. Заметим, что в пределах исследуемой реализации может быть несколько интервалов стационарности, на которых события наступают с одинаковой интенсивностью, т. е. для нескольких интервалов стационарности может реализоваться одно и то же состояние процесса $\lambda(t)$.

Таким образом, на множестве событий потока из реализации (1.2.1) необходимо задать разбиение на подмножества следующих друг за другом событий:

$$\{t_0, t_1, \dots, t_N\} = \bigcup_{l=1}^k \left\{ t_{i_0^l} < t_{i_1^l} < t_{i_2^l} < \dots < t_{i_{n_l}^l} < t_{i_{n_l+1}^l} \right\}, \quad (2.1.2)$$

$$i_{j+1}^l = i_j^l + 1; \quad i_{n_l+1}^l + 1 = i_0^{l+1}, \quad l = \overline{1; k-1}; \quad i_0^1 = 0, \quad i_{n_l+1}^k = N.$$

После этого, для каждого подмножества из (2.1.2) предполагая, что последовательность событий реализации (2.1.1) есть последовательность событий некоторого интервала стационарности, будем рассматривать элементы матрицы D , содержащиеся в треугольном блоке вида:

$$d_{pq}, \quad p = \overline{i_1; i_n}, \quad q = \overline{p; i_n} \quad (2.1.3)$$

как «внутриинтервальные» оценки интенсивности некоторого состояния исследуемого потока событий. Следовательно, оценки

$$\begin{aligned} d_{pq} &: i = \overline{1, i_0}, \quad j = \overline{i_0, i_n}, \\ d_{ij} &: i = \overline{1, i_0}, \quad j = \overline{i_{n+1}, N-1}, \\ d_{ij} &: i = \overline{i_1, i_n+1}, \quad j = \overline{i_{n+1}, N-1} \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

будем рассматривать как «шумовые» (см. (1.3.1) и (1.3.2)).

Предполагается, что на отрезках времени $[t_{i_0^l}, t_{i_{n_l+1}^l}]$, $l = \overline{1; k}$, являющихся отрезками реализации, соответствующими интервалам стационарности, события потока наступают с одинаковой интенсивностью, т. е. процесс $\lambda(t)$ находится в определенном состоянии. На интервалах времени $(t_{i_{n_l+1}^l}, t_{i_0^{l+1}})$, $l = \overline{1; k-1}$ происходит переход из одного состояния процесса $\lambda(t)$ в другое. Оценка состояния процесса $\lambda(t)$ в каждый момент времени на интервалах $(t_{i_{n_l+1}^l}, t_{i_0^{l+1}})$, $l = \overline{1; k-1}$ не производится.

Выведем из рассмотрения «шумовые» оценки, заменив их в матрице оценок нулями, а «внутриинтервальные» оценки сгруппируем в гистограмму. После этого можно будет применить алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий, описанный в первом разделе (см. подраздел 1.5).

Отметим, что качество отнесения событий реализации к интервалам стационарности естественным образом скажется на результатах применения алгоритма оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий. Если последовательность событий, отнесенных к одному и тому же интервалу стационарности, содержит события из более чем одного интервала стационарности, то среди оценок, рассматриваемых в качестве «внутриинтервальных», окажутся «шумовые». Они будут учтены в гистограмме оценок и приведут к ее искажению.

2.2 Построение графа оценок. Свойства графа оценок

Для решения задачи отнесения событий реализации к интервалам стационарности потока событий представим данные матрицы оценок D (1.2.5) в виде графа. Пусть $G(V, E)$ — полносвязный граф вида

$$\begin{aligned} G(V, E) : \quad V &= \{1, 2, \dots, N - 1\}, \\ E &= \{(p, q), q > p, p = \overline{1; N - 2}, q = \overline{2; N - 1}\}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где V — множество вершин графа, E — множество пар вершин (множество ребер) графа. Вершины графа пронумеруем $i = \overline{1, N - 1}$ и сопоставим каждой вершине с номером i событие потока с тем же номером. Каждое событие из реализации потока представлено в графе вершиной с тем же номером за исключением событий, соответствующих началу и окончанию наблюдений. Ребру (p, q) графа припишем величину d_{pq} , $p = \overline{1; N - 2}$, $q = \overline{p + 1; N - 1}$, из матрицы оценок D (1.2.5) (в дальнейшем величины, приписанные ребрам, будем называть весами ребер). Таким образом, ребру графа с весом d_{pq} , соединяющему вершины с номерами p и q , будет соответствовать оценка интенсивности исследуемого потока по временному интервалу (t_{p-1}, t_{q+1}) .

Пусть в реализации (1.2.1) имеется интервал стационарности (2.1.1), к которому относятся события $\{t_{i_0}, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}, t_{i_{n+1}}\}$, при этом $t_{i_0} < t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n} < t_{i_{n+1}}$, $i_{j+1} = i_j + 1$, $j = \overline{0, n}$ (события следуют по порядку без пропусков), $t_{i_0}, t_{i_{n+1}}$ — соответственно моменты времени наступления первого и последнего события на рассматриваемом интервале стационарности. Введем обозначения:

$$I^{(s)} = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \quad \widetilde{I}^{(s)} = \{(p, q) : q > p, p, q \in I^{(s)}\}, \quad (2.2.2)$$

$I^{(s)}$ — номера моментов времени наступления событий, принадлежащих интервалу стационарности, исключая первое и последнее событие интервала стационарности, $\widetilde{I}^{(s)}$ — упорядоченные пары этих номеров. Множества (2.2.2) определяют в графе (2.2.1) подграф, соответствующий рассматриваемому интервалу стационарности состояния s с интенсивностью λ_s . В матрице D элементы, соответствующие множеству ребер подграфа $\widetilde{I}^{(s)}$ (2.2.2), содержатся в блоке «внутриинтервальных» оценок значения интенсивности λ_s , соответствующем рассматриваемому интервалу стационарности, за исключением элементов, расположенных на главной диагонали. Элементы этого блока «внутриинтервальных» оценок участвуют в формировании максимума гистограммы, соответствующего состоянию с интенсивностью λ_s .

Гистограмма, построенная по являющимся весами ребер подграфа (2.2.2) элементам блока «внутриинтервальных» оценок (2.1.3), соответствующего интервалу стационарности (2.1.1), (т. е. по всем элементам блока «внутриинтервальных» оценок за исключением элементов главной диагонали), является оценкой плотности распределения случайной величины $\widehat{\lambda}_s$ вида:

$$P_n(\widehat{\lambda}_s) = \sum_{k=3}^n q_k^{(n)} P_k(\widehat{\lambda}_s), \quad q_k^{(n)} = \frac{2(n-k+1)}{(n-1)(n-2)}, \quad \sum_{k=3}^n q_k^{(n)} = 1, \quad (2.2.3)$$

где $P_k(\widehat{\lambda}_s)$ — плотность распределения вероятностей оценки значения интенсивности состояния s вида (1.4.3).

Утверждение 2.1. Пусть в реализации потока событий имеется интервал стационарности (2.1.1), который в графе G порождает подграф (2.2.2). Тогда

найдется интервал значений (λ', λ'') ($\lambda_s \in (\lambda', \lambda'')$), такой, что для наперед заданного количества элементов d_{pq} матрицы D (1.2.5), являющихся весами ребер подграфа $(p = \overline{i_1; i_{n-1}}, q = \overline{p+1; i_n})$, будет справедливо: $d_{pq} \in (\lambda', \lambda'')$.

Доказательство. Так как на интервале стационарности состояния s асинхронный МС-поток событий ведет себя как простейший поток с интенсивностью λ_s , то все элементы блока «внутриинтервальных» оценок матрицы D , соответствующего рассматриваемому интервалу стационарности, являются значениями случайной величины $\widehat{\lambda}_s$, описываемой плотностью распределения (2.2.3).

Доказано (см. подподраздел 1.4.1), что плотность распределения (1.4.4) имеет единственный максимум. Плотность (2.2.3) построена полностью аналогично плотности (1.4.4), следовательно, обладает теми же свойствами. Случайная величина $\widehat{\lambda}_s$, описываемая плотностью распределения (2.2.3), имеет следующие характеристики:

$$M_{\widehat{\lambda}_s}^{(n)} = \lambda_s, \quad D_{\widehat{\lambda}_s}^{(n)} = \lambda_s^2 \sum_{k=3}^n \frac{q_k^{(n)}}{k-2}. \quad (2.2.4)$$

Таким образом, матожидание и дисперсия оценки интенсивности простейшего потока $\widehat{\lambda}_s$ для любых конечных λ_s и n конечны. Следовательно, к случайной величине $\widehat{\lambda}_s$ применимо неравенство Чебышева [23]:

$$P(|X - M_X| \geq b\sigma) \leq \frac{1}{b^2}, \quad (2.2.5)$$

где b — положительный множитель, $X = \widehat{\lambda}_s$, $M_X = \lambda_s$, $\sigma = \lambda_s \sqrt{\sum_{k=3}^n \frac{q_k^{(n)}}{k-2}}$.

То есть для любых конечных λ_s и n вероятность того, что значение случайной величины окажется за пределами $b\sigma$ -окрестности ее матожидания, не превосходит $1/b^2$. Следовательно, если имеется выборка значений случайной величины $\widehat{\lambda}_s$, то ожидается, что a процентов значений из выборки будут принадлежать интервалу значений $(\lambda_s - b\sigma, \lambda_s + b\sigma)$, где $a = \frac{b^2 - 1}{b^2} \times 100$. Пусть \bar{a} — процент значений случайной величины $\widehat{\lambda}_s$ (от всех реализовавшихся значений), который должен содержать интервал (λ', λ'') . Отсюда $b_{1,2} = \pm \sqrt{1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}}$.

Положим $\lambda' = \lambda_s - \sigma \sqrt{1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}}$, $\lambda'' = \lambda_s + \sigma \sqrt{1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}}$. Интервал

значений (λ', λ'') содержит значение интенсивности на интервале стационарности λ_s по построению и наперед заданный процент оценок интенсивности из блока «внутриинтервальных» оценок в соответствии с формулой (2.2.5). *Утверждение доказано.*

Следствие. Длина интервала значений (λ', λ'') , содержащего \bar{a} процентов значений случайной величины $\hat{\lambda}_s$, являющихся «внутриинтервальными» оценками интенсивности λ_s , зависит от значения интенсивности λ_s и от количества событий на рассматриваемом интервале стационарности.

Длина интервала значений (λ', λ'') равна:

$$\begin{aligned} \lambda'' - \lambda' &= 2\sigma b = 2\lambda_s \sqrt{\sum_{k=3}^n \frac{q_k^{(n)}}{k-2}} \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}\right)} = \\ &= 2\lambda_s \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}\right)} \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^n \frac{n-k+1}{k-2}} = \\ &= 2\lambda_s \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}\right)} \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)} \left[(n-1) \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - (n-2) \right]} \approx \\ &\approx 2\lambda_s \sqrt{\left(1 + \frac{\bar{a}}{100 - \bar{a}}\right)} \sqrt{\frac{2(n-1) [\ln(n-2) + \gamma - 1] + 1}{(n-1)(n-2)}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь каким-либо образом выбран интервал значений (λ', λ'') для некоторого интервала стационарности состояния s . Согласно утверждению 2.1 и следствию из этого утверждения, можно выбрать такой интервал (λ', λ'') , который будет содержать большой процент значений «внутриинтервальных» оценок интенсивности этого интервала стационарности из соответствующего диагонального блока матрицы D . Удалим из графа (2.2.1) ребра, веса которых не содержатся в интервале значений (λ', λ'') . В этом случае в графе (2.2.1)

выделится набор \tilde{G} компонент связности вида

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \{G_0(V_0, E_0), G_1(V_1, E_1), \dots, G_m(V_m, E_m)\}, \\ G_i &(V_i, E_i), \quad i = \overline{1, m}: \\ V_i &\subset V, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad \bigcup_{i=1}^m V_i \subseteq V, \\ E_i &= \{(p, q) : p, q \in V_i, \quad q > p, \quad d_{pq} \in (\lambda', \lambda'')\}, \\ G_0 &(V_0, E_0) : V_0 \subset V; \quad E_0 = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^m V_i = V, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

где m — число компонент связности.

Компонента $G_0(V_0, E_0)$ содержит все вершины, не соединенные ребрами с другими вершинами графа. Таким образом, интервал значений (λ', λ'') задает на множестве вершин графа разбиение. Одна из компонент связности $G_l(V_l, E_l)$ с непустым множеством ребер соответствует интервалу стационарности. Это означает, что если в компоненте связности $G_l(V_l, E_l)$ множество вершин состоит из элементов $V_l = \{i_1^l, i_2^l, i_3^l, \dots, i_{n_l}^l\}$, причем $i_1^l < i_2^l < \dots < i_{n_l}^l$, то этой компоненте связности соответствует множество событий реализации $t_{i_1^l}, t_{i_1^l+1}, t_{i_1^l+2}, \dots, t_{i_{n_l}^l}$, которые составляют последовательность событий интервала стационарности, а отрезок времени $[t_{i_1^l}, t_{i_{n_l}^l}]$ является отрезком реализации, соответствующим интервалу стационарности.

Появление не одной, а нескольких компонент связности, порождаемых интервалом значений (λ', λ'') , объясняется следующим образом. Во-первых, в реализации может быть несколько интервалов стационарности состояния s , следовательно, в матрице D будет содержаться несколько блоков «внутриинтервальных» оценок интенсивности λ_s , и элементы из этих блоков также будут принадлежать интервалу значений оценки интенсивности (λ', λ'') . Во-вторых, могут найтись «шумовые» оценки, значения которых окажутся в интервале значений (λ', λ'') . Как минимум одна компонента связности из набора, порождаемого интервалом значений (λ', λ'') (2.2.6), например, $G_l(V_l, E_l)$, будет соответствовать интервалу стационарности, по которому построен интервал значений (λ', λ'') . Это означает, что множество вершин этой компоненты связности соответству-

ет последовательности событий интервала стационарности. Чтобы определить эту компоненту связности, необходимо сформулировать требования, которым должна удовлетворять компонента связности, соответствующая интервалу стационарности. Сформулируем эти требования исходя из особенностей модели асинхронного МС-потока событий и способа получения компонент связности.

Требование 1. Степени всех вершин компоненты связности близки к максимально возможным для данной компоненты.

Предположим, что интервал значений (λ', λ'') построен для конкретного интервала стационарности (2.1.1). В этом случае компонента связности $G_l (V_l, E_l)$, порождаемая интервалом значений (λ', λ'') , содержит наперед заданное (близкое к максимально возможному) количество ребер. То есть, эта компонента связности является подграфом, близким к полному, а значит, степени вершин компоненты близки к максимально возможным. Для компоненты связности с множеством вершин $V_l = \{i_1^l, i_2^l, i_3^l, \dots, i_{n_l}^l\}$ максимальные степени вершин будут равны $(n_l - 1)$, а сумма всех степеней вершин $(n_l - 1)n_l$. Таким образом, из двух компонент связности предпочтительна та, у которой сумма степеней вершин больше. Однако необходимо учитывать, что сумма степеней вершин компоненты может быть большой за счет того, что в компоненте связности есть одна или несколько (относительно небольшое число) вершин с большими степенями, а степени остальных вершин малы. Такая компонента связности не соответствует интервалу стационарности. Необходимо, чтобы не только сумма степеней вершин была близка к максимально возможной для данной компоненты связности, но и все степени вершин были близки к максимально возможным.

Для учета этого требования введем следующие характеристики компоненты связности.

Определение. Показателем компактности компоненты G_l будем называть величину

$$COMP(G_l) = \frac{1}{n_l(n_l - 1)} \sum_{j=1}^{n_l} s_j, \quad (2.2.7)$$

где s_j — степень j -ой вершины компоненты связности G_l , n_l — число вершин в компоненте связности G_l . Величина $COMP(G_l)$ достигает максимума, когда

все степени вершин равны максимально возможным для данного множества вершин. Максимальное значение характеристики $COMP(G_l)$ — единица.

Определение. Показателем однородности компоненты G_l будем называть величину

$$ENTR(G_l) = \frac{-\sum_{j=1}^{n_l} p_j \log p_j}{\log n_l}, \quad p_j = \frac{s_j}{\sum_{V_l} s_j}, \quad (2.2.8)$$

где s_j — степень j -ой вершины компоненты связности G_l , $\sum_{V_l} s_j$ — сумма степеней всех вершин компоненты связности G_l , n_l — количество вершин компоненты связности G_l . В случае, когда рассматриваемая компонента связности является полным подграфом, числитель становится равным $\log n_l$, а значение величины $ENTR$ достигает максимума, равного единице.

Требование 2. Номера вершин компоненты связности следуют подряд, возможно, с незначительными пропусками.

В последовательности событий интервала стационарности номера событий следуют подряд без пропусков. В компоненте связности пропуски в последовательности номеров вершин возможны. Интервал значений (λ', λ'') выбирается так, чтобы он содержал большой процент (но не обязательно все) элементов соответствующего блока «внутриинтервальных» оценок. Таким образом, для множества вершин компоненты связности и номеров событий соответствующего отрезка реализации исследуемого потока должно выполняться требование: $(i_{n_l}^l - i_1^l) \approx |V_l|$.

Требование 3. Последовательность событий потока, соответствующих вершинам компоненты связности (с учетом пропущенных, если такие есть), составляет последовательность событий простейшего потока.

На интервале стационарности состояния s асинхронный МС-поток событий ведет себя как простейший с интенсивностью λ_s . То есть, отрезок реализации потока, соответствующий компоненте связности $G_l(V_l, E_l)$, содержит последовательность событий $t_{i_1^l}, t_{i_1^l+1}, t_{i_1^l+2}, \dots, t_{i_{n_l}^l}$, которая является реализацией пуассоновского (простейшего) потока с интенсивностью λ_s . Следовательно, для последовательности величин $\tau_r = t_{i_1^l+r+1} - t_{i_1^l+r}$ ($r < \overline{1; n_l - 1}$) не отвергается

гипотеза об экспоненциальном распределении с одним и тем же параметром.

Так как неизвестно, какие события принадлежат одному и тому же интервалу стационарности, то выбирать интервал значений (λ', λ'') будем таким образом, чтобы среди компонент связности, порождаемых интервалом (λ', λ'') , были компоненты, удовлетворяющие сформулированным требованиям.

Пусть задан некоторый интервал значений $(\lambda'_1, \lambda''_1)$ и по этому интервалу построено множество компонент связности графа G вида (2.2.6). Для каждой компоненты связности этого множества рассчитаны характеристики $COMP$ и $ENTR$ по формулам (2.2.7) (2.2.8). Увеличим интервал значений $(\lambda'_1, \lambda''_1)$, получим новый интервал значений $(\lambda'_1 - \Delta^{(1)}, \lambda''_1 + \Delta^{(2)})$, $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$, обозначим его $(\lambda'_2, \lambda''_2)$. По интервалу значений $(\lambda'_2, \lambda''_2)$ получим новое множество компонент связности, и для этого множества компонент связности — новый набор характеристик $COMP$ и $ENTR$. Так как второй интервал значений интенсивности шире первого, то второй набор компонент связности будет отличаться от первого за счет появления новых ребер, веса которых не принадлежат первому интервалу значений $(\lambda'_1, \lambda''_1)$, но принадлежат второму $(\lambda'_2, \lambda''_2)$.

При увеличении интервала значений от $(\lambda'_1, \lambda''_1)$ (обозначим компоненту связности, порождаемую этим интервалом, через $G_l^{(1)}(V_l^{(1)}, E_l^{(1)})$) до $(\lambda'_2, \lambda''_2)$ (обозначим соответствующую компоненту связности $G_l^{(2)}(V_l^{(2)}, E_l^{(2)})$) возможно два случая. В первом случае множество вершин компоненты связности не изменяется: $V_l^{(1)} = V_l^{(2)}$, множество ребер увеличивается: $E_l^{(1)} \subset E_l^{(2)}$. То есть ребра, появившиеся в компоненте связности за счет расширения интервала значений интенсивности, лишь увеличили степени вершин, но не присоединили к компоненте связности новых вершин. В этом случае значения характеристики компактности и однородности компоненты связности увеличатся.

Во втором случае появившиеся после увеличения интервала значений интенсивности ребра присоединяют к существующей компоненте связности еще одну вершину или другую компоненту связности. В этом случае в компоненте связности $G_l^{(2)}(V_l^{(2)}, E_l^{(2)})$ по сравнению с компонентой $G_l^{(1)}(V_l^{(1)}, E_l^{(1)})$ увеличится не только количество ребер, но и количество вершин. Значение характери-

стик $COMP$ и $ENTR$ новой компоненты связности будет зависеть от того, как распределятся связи в новой компоненте, т. е. характеристики компактности и однородности рассматриваемой компоненты могут как возрасти, так и уменьшиться.

Увеличив интервал значений интенсивности до максимального (d_{min}, d_{max}) , в разбиении (2.2.6) получим единственную компоненту связности, которая совпадет с графом $G(V, E)$, с характеристиками компактности и однородности, равными единице. Однако для этой компоненты связности, в общем случае, не будет выполняться требование 3 о соответствии последовательности событий отрезка реализации пуассоновскому потоку событий. При последовательном увеличении интервала значения компактности и однородности будут реагировать одновременным увеличением на образование компонент связности, близких к полностью связным.

Также можно получать новый интервал не за счет увеличения (расширения границ), а за счет сдвига, т. е. $(\lambda'_2, \lambda''_2) = (\lambda'_1 + \Delta, \lambda''_1 + \Delta)$. Тогда часть ребер, присутствовавших в первом множестве компонент связности будут удалены, другие будут добавлены. В этом случае характеристики $COMP$ и $ENTR$ по-прежнему будут реагировать увеличением на увеличение количества ребер в компоненте связности по отношению к количеству вершин. В случае перераспределения степеней вершин (количество ребер осталось прежним, но изменились степени вершин) величина $COMP$ не изменится, а величина $ENTR$ увеличится, если уменьшится разброс степеней вершин. Если известно, что интервал значений содержит значение интенсивности потока в некотором состоянии, то, сдвигая интервал значений интенсивности, можно добиться увеличения показателей компактности и однородности для соответствующей компоненты связности.

Интервал значений (λ', λ'') , содержащий значение интенсивности состояния потока, будет порождать набор компонент связности, среди которых найдется компонента, удовлетворяющая требованиям 1–3. Границы интервала значений (λ', λ'') , согласно следствию из утверждения 2.1, зависят от интенсив-

ности на интервале стационарности и от его длины. Информацию о значениях интенсивности состояний потока несет гистограмма оценок интенсивности (1.4.1). Локализацию «внутриинтервальных» оценок интенсивности в гистограмме можно определить, исследуя точки максимумов гистограммы H . Причем, исходя из утверждения 1.2, сначала нужно исследовать максимум с наименьшей по значению абсциссой, так как он наименее подвержен искажению «шумовыми» значениями оценок интенсивности потока. Пользуясь этими соображениями, определим локализацию «внутриинтервальных» оценок интенсивности некоторого состояния по гистограмме оценок, затем зададим последовательность интервалов значений интенсивности $(\lambda'_1, \lambda''_1)$, $(\lambda'_2, \lambda''_2)$ и так далее, для каждого интервала выделим множество компонент связности и проверим их на соответствие требованиям к компоненте связности, соответствующей интервалу стационарности, исследуя изменения характеристик $COMP$ и $ENTR$ в зависимости от изменения границ интервала значений интенсивности. Если интервал значений (λ', λ'') содержит интенсивность потока на интервале стационарности, то, изменяя границы интервала значений, можно получить множество разбиений вида (2.2.6), среди которых найдутся такие, которые содержат компоненты связности, удовлетворяющие всем требованиям 1–3.

Отметим, что, при изменении интервала значений интенсивности для вновь получаемых разбиений не всегда прослеживается преемственность компонент связности. В общем случае количество компонент связности от разбиения к разбиению меняется, компоненты могут объединяться, а в случае сдвига интервала значений интенсивности — и разделяться. Однако в отношении компонент связности с большим количеством вершин такая преемственность прослеживается. Введем понятие доминирующей компоненты связности.

Определение. Доминирующей компонентой связности множества компонент связности (2.2.6) назовем компоненту $G' = G_l(V_l, E_l)$ с непустым множеством ребер и наибольшим среди всех компонент разбиения количеством вершин:

$$G' = G_l(V_l, E_l) : |V_l| = \max_i |V_i|, \quad i = \overline{1; m}, \quad E_l \neq \emptyset.$$

Прослеживая изменение характеристик компактности и однородности для доминирующих компонент связности, можно выявить интервалы значений интенсивности, для которых характеристики компактности и однородности были одновременно близки с максимальным. Среди разбиений $\{\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \dots, \tilde{G}^{(k)}\}$, соответствующих интервалам значений интенсивности $(\lambda'_1, \lambda''_1), (\lambda'_2, \lambda''_2), \dots, (\lambda'_k, \lambda''_k)$ с доминирующими компонентами $\{G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(k)}\}$, перспективным для дальнейшего исследования является то разбиение $\tilde{G}^{(i_*)}$, для которого значение $COMP(G^{(i_*)})$ доминирующей компоненты связности $G^{(i_*)}$ достигает локального максимума, и одновременно значение $ENTR(G^{(i_*)})$ доминирующей компоненты $G^{(i_*)}$ наиболее близко к локальному максимуму. Для этих интервалов значений интенсивности будем проверять компоненты связности на соответствие интервалам стационарности некоторого состояния потока.

Сформулируем основные свойства графа оценок и приемы преобразования графа для решения поставленной задачи отнесения событий реализации к интервалам стационарности.

1. Граф оценок G (2.2.1), построенный по матрице оценок D (1.2.5), является полносвязным графом с числом вершин $(N - 1)$ (число моментов времени наступления событий внутри отрезка наблюдения (1.2.1)). Число ребер графа равно $N(N - 1)$. Весом ребра, соединяющего вершины с номерами i и j , является значение элемента матрицы оценок d_{ij} .

2. Последовательность событий потока, соответствующих интервалу стационарности состояния s из реализации (1.2.1), порождает в графе (2.2.1) подграф (2.2.2), множество вершин которого соответствует моментам наступления событий потока из реализации, а множество ребер — треугольному блоку «внутриинтервальных» оценок в матрице (1.2.5). Существует интервал значений (λ', λ'') , такой, что заранее заданный процент оценок интенсивности λ_s , порожденных рассматриваемыми событиями потока, будет принадлежать этому интервалу значений. В гистограмме эти оценки участвуют в формировании максимума, соответствующего значению оценки интенсивности $\hat{\lambda}_s$.

3. При заданном интервале значений интенсивности (λ', λ'') процедура удаления в графе (2.2.1) ребер, вес которых не принадлежит интервалу, приводит к получению множества компонент связности (2.2.6), называемого разбиением.

4. Последовательность номеров событий компоненты связности не должна содержать существенных пропусков. Расстояния между соседними событиями на отрезке реализации, соответствующем компоненте связности, должны подчиняться экспоненциальному закону с одним и тем же значением параметра распределения.

5. Компоненты связности (2.2.6) характеризуются показателями компактности (2.2.7) и однородности (2.2.8). Показатель компактности характеризует величину степеней вершин компоненты связности. Показатель однородности характеризует равенство степеней вершин. Величины компактности и однородности изменяются при изменении интервала значений интенсивности (λ', λ'') . Они реагируют увеличением на увеличение количества ребер в компоненте связности и достигают максимума, когда степени вершин компоненты связности достигают своего максимума при фиксированном количестве вершин.

6. В случае $\lambda_s \in (\lambda', \lambda'')$ компоненты связности указывают на интервалы стационарности реализации (1.2.1), соответствующие интенсивности λ_s . Компоненту связности G_l из множества (2.2.6) можно считать соответствующей интервалу стационарности, если величины $COMP$ и $ENTR$ для данной компоненты при изменении интервала значений оценок (λ', λ'') одновременно достигают локальных максимумов.

7. Исследовав изменение показателей компактности и однородности для доминирующей компоненты связности разбиения в зависимости от интервала значений интенсивности, выберем тот интервал значений интенсивности, для которого показатели компактности и однородности одновременно достигают максимума. Этот интервал значений интенсивности предположительно порождает компоненты связности, соответствующие интервалам стационарности некоторого состояния s .

2.3 Алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности и вспомогательные алгоритмы

2.3.1 Предварительные замечания

Пусть известен интервал значений интенсивности (λ', λ'') , содержащий интенсивность некоторого состояния потока, которое реализовалось в процессе наблюдения. Исходя из свойств графа оценок, опишем последовательность действий для отнесения событий реализации к некоторому интервалу стационарности по интервалу значений интенсивности (λ', λ'') .

1. На основе интервала (λ', λ'') построим последовательность интервалов значений интенсивности $(\lambda'_1, \lambda''_1), (\lambda'_2, \lambda''_2), \dots, (\lambda'_k, \lambda''_k)$. По последовательности интервалов значений интенсивности получим последовательность разбиений графа G на компоненты связности $\{\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \dots, \tilde{G}^{(k)}\}$.
2. Для каждого разбиения $\{\tilde{G}^{(1)}, \tilde{G}^{(2)}, \dots, \tilde{G}^{(k)}\}$ выберем доминирующую компоненту связности $\{G'^{(1)}, G'^{(2)}, \dots, G'^{(k)}\}$. Для доминирующих компонент связности разбиений вычислим характеристики $COMP$ и $ENTR$, получим последовательности значений показателей

$$\{COMP(G'^{(1)}), COMP(G'^{(2)}), \dots, COMP(G'^{(k)})\}$$

и

$$\{ENTR(G'^{(1)}), ENTR(G'^{(2)}), \dots, ENTR(G'^{(k)})\}.$$

3. Среди множества интервалов значений интенсивности $(\lambda'_1, \lambda''_1), (\lambda'_2, \lambda''_2), \dots, (\lambda'_k, \lambda''_k)$ выберем такой интервал $(\lambda'_{i_*}, \lambda''_{i_*})$, для которого показатель $COMP(G'^{(i_*)})$ его доминирующей компоненты связности достигает своего локального максимума и при этом ее показатель $ENTR(G'^{(i_*)})$ близок к своему локальному максимуму. Если таких интервалов значений интенсивности несколько, выберем тот, для которого характеристика $COMP$ принимает наибольшее значение.

4. Для выбранного интервала значений интенсивности $(\lambda'_{i_*}, \lambda''_{i_*})$ проверим все компоненты связности на соответствие требованиям 1–3 к компоненте связности, соответствующей интервалу стационарности, из подподраздела 2.2. Для компонент связности, которые удовлетворяют всем требованиям, определим последовательности событий и отрезки реализации потока, соответствующие этим компонентам.
5. Для полученных последовательностей событий очистим матрицу от «шумовых» оценок.

Согласно свойству 6 графа оценок, для получения компонент связности, указывающих на интервалы стационарности состояния s , соответствующие значению интенсивности λ_s , значение интенсивности λ_s должно принадлежать интервалу значений (λ', λ'') , который порождает разбиение (2.2.6) графа на компоненты связности. Значение λ_s неизвестно, однако, согласно свойствам гистограммы оценок, в качестве приблизительного значения $\hat{\lambda}_s$ интенсивности λ_s можно принять абсциссу одного из локальных максимумов гистограммы (значение из полуинтервала, доставляющего максимум гистограммы, например его середину или левую границу).

Интервал (λ', λ'') для получения разбиения (2.2.6) следует выбирать из некоторой окрестности $(\hat{\lambda}_s - \Delta_1^s, \hat{\lambda}_s + \Delta_2^s)$ ($\Delta_1^s, \Delta_2^s \geq 0$) величины $\hat{\lambda}_s$, абсциссы одного из максимумов гистограммы оценок. Предлагается, выбрав достаточно широкую окрестность значения $\hat{\lambda}_s$, исследовать ее, как описано выше, получая последовательность интервалов значений интенсивности путем сдвига интервала (λ', λ'') внутри выбранной окрестности исследуемого максимума гистограммы. Согласно утверждению 1.2, максимум гистограммы, соответствующий наименьшему значению интенсивности асинхронного МС-потока событий, наименее подвержен влиянию «шумовой» составляющей матрицы оценок. То же можно сказать относительно максимума, соответствующего наибольшему значению интенсивности потока. Поэтому в первую очередь необходимо исследовать максимумы с наименьшим и наибольшим значениями абсцисс. Исследование максимумов можно проводить последовательно или одновременно.

В процессе выполнения описанной выше последовательности действий (в случае одновременного исследования двух максимумов), могут возникать компоненты связности, которым соответствуют пересекающиеся отрезки реализации. Такие пересечения должны быть устранены, а последовательности событий, соответствующие пересекающимся отрезкам реализации, разделены на две непересекающиеся последовательности с учетом требований 1–3.

Тот факт, что компонента связности $G_l(V_l, E_l)$ соответствует некоторому интервалу стационарности, означает, что события с номерами $t_{i_0^l}, t_{i_1^l}, t_{i_1^l+1}, t_{i_1^l+2}, \dots, t_{i_n^l}, t_{i_{n+1}^l}$ рассматриваются в качестве интервала стационарности в реализации (1.2.1). В матрице оценок D элементы блока оценок d_{pq} , $p = \overline{i_1^l; i_n^l}$, $q = \overline{p; i_n^l}$, рассматриваются как «внутриинтервальные» оценки интенсивности λ_s . Элементы матрицы оценок d_{pq} , $p = \overline{1; i_0^l}$, $q = \overline{i_1^l; i_n^l}$, а также d_{pq} , $p = \overline{1; i_0^l}$, $q = \overline{i_{n+1}^l; N}$, и d_{pq} , $p = \overline{i_1^l; i_n^l}$, $q = \overline{i_{n+1}^l; N}$ рассматриваются как «шумовые». «Шумовые» оценки необходимо исключить из рассмотрения, заменив их в матрице оценок нулями. Процедуру обнуления «шумовых» оценок, соответствующих событиям $t_{i_0^l}, t_{i_1^l}, t_{i_1^l+1}, t_{i_1^l+2}, \dots, t_{i_n^l}, t_{i_{n+1}^l}$, назовем очисткой матрицы оценок от «шумовых» оценок. Затем необходимо построить гистограмму оценок по очищенной матрице. Это позволит выявить максимумы гистограммы, указывающие на оценки интенсивности других состояний потока, возможно скрытые «шумовой» составляющей матрицы оценок.

Процедура отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности должна состоять из последовательности итераций, на каждой итерации описанная выше последовательность действий применяется к одному или двум локальным максимумам гистограммы оценок начиная с тех, которые наименее подвержены влиянию «шумовых» оценок. В результате из матрицы оценок будут последовательно исключаться «шумовые» оценки интенсивности, соответствующие последовательностям событий тех компонент связности, для которых выполняются требования соответствия интервалам стационарности, и уточняться вид гистограммы оценок.

Однако, данная процедура не гарантирует того, что все события реали-

зации окажутся отнесены к той или иной последовательности событий, соответствующей интервалу стационарности. Процедура должна быть прекращена по достижении количества событий, отнесенных к последовательностям событий, соответствующим интервалам стационарности, наперед заданной величины. После этого оставшиеся события должны быть отнесены к каким-либо последовательностям с учетом требований, предъявляемых к оценкам интервалов стационарности.

2.3.2 Алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности

Пусть имеется реализация (1.2.1) потока событий.

Шаг 1. По реализации потока событий строится матрица оценок D в соответствии с (1.2.5). Задается величина M — число событий, отнесенных к оценкам интервалов стационарности, необходимое для выхода из цикла итераций алгоритма. Номер итерации k полагается равным 1. Полагается $D^{(k)} = D$, $M_k = 0$ (M_k — число событий, отнесенных к последовательностям событий, соответствующим интервалам стационарности на k -ой итерации алгоритма).

Шаг 2. Если $M_k \geq M$, осуществляется переход к шагу 13 алгоритма.

Шаг 3. По матрице $D^{(k)}$ строится гистограмма оценок $H^{(k)}$ в соответствии с (1.4.1) и граф оценок $G^{(k)}$ в соответствии с (2.2.1).

3.1. В гистограмме $H^{(k)}$ определяется первый локальный максимум для исследования. Величина $\underline{\lambda}^{(k)}$ полагается равной абсциссе этого максимума.

3.2. В гистограмме $H^{(k)}$ определяется второй локальный максимум для исследования. Величина $\bar{\lambda}^{(k)}$ полагается равной абсциссе этого максимума.

Шаг 4.

4.1. Задается окрестность $\left(\underline{\lambda}^{(k)} - \underline{\Delta}_1^{(k)}, \underline{\lambda}^{(k)} + \underline{\Delta}_2^{(k)} \right)$ величины $\underline{\lambda}^{(k)}$.

4.2. Задается окрестность $\left(\bar{\lambda}^{(k)} - \bar{\Delta}_1^{(k)}, \bar{\lambda}^{(k)} + \bar{\Delta}_2^{(k)} \right)$ величины $\bar{\lambda}^{(k)}$.

Шаг 5.

5.1. Задается длина $\underline{\Delta}^{(k)}$ интервала значений интенсивности для получения разбиений вида (2.2.6), $\underline{\Delta}^{(k)} < \underline{\Delta}_1^{(k)} + \underline{\Delta}_2^{(k)}$. Задается число разбиений $\underline{N}^{(k)}$,

$\underline{N}^{(k)} \geq 1$. Формируется последовательность интервалов значений интенсивности вида

$$\left(\underline{\lambda}^{(k)} - \underline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\underline{z}, \underline{\lambda}^{(k)} - \underline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\underline{z} + \underline{\Delta}^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, \underline{N}^{(k)}},$$

$$\underline{z} = \frac{\underline{\Delta}_1^{(k)} + \underline{\Delta}_2^{(k)} - \underline{\Delta}^{(k)}}{\underline{N}^{(k)} - 1}.$$

5.2. Задается длина $\overline{\Delta}^{(k)}$ интервала значений интенсивности для получения разбиений вида (2.2.6), $\overline{\Delta}^{(k)} < \overline{\Delta}_1^{(k)} + \overline{\Delta}_2^{(k)}$. Задается число разбиений $\overline{N}^{(k)}$, $\overline{N}^{(k)} \geq 1$. Формируется последовательность интервалов значений интенсивности вида

$$\left(\overline{\lambda}^{(k)} - \overline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\overline{z}, \overline{\lambda}^{(k)} - \overline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\overline{z} + \overline{\Delta}^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, \overline{N}^{(k)}},$$

$$\overline{z} = \frac{\overline{\Delta}_1^{(k)} + \overline{\Delta}_2^{(k)} - \overline{\Delta}^{(k)}}{\overline{N}^{(k)} - 1}.$$

Шаг 6.

6.1. Для каждого интервала значений интенсивности

$$\left(\underline{\lambda}^{(k)} - \underline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\underline{z}, \underline{\lambda}^{(k)} - \underline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\underline{z} + \underline{\Delta}^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, \underline{N}^{(k)}},$$

строятся разбиения $\underline{\widetilde{G}}^{(i)}$, $i = \overline{1, \underline{N}^{(k)}}$ множества вершин графа $G^{(k)}$ по формулам (2.2.6). Для каждого построенного разбиения $\underline{\widetilde{G}}^{(i)}$ определяется доминирующая компонента связности $\underline{G}'^{(i)}$.

6.2. Для каждого интервала значений интенсивности

$$\left(\overline{\lambda}^{(k)} - \overline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\overline{z}, \overline{\lambda}^{(k)} - \overline{\Delta}_1^{(k)} + (i-1)\overline{z} + \overline{\Delta}^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, \overline{N}^{(k)}},$$

строятся разбиения $\overline{\widetilde{G}}^{(i)}$, $i = \overline{1, \overline{N}^{(k)}}$ множества вершин графа $G^{(k)}$ по формулам (2.2.6). Для каждого построенного разбиения $\overline{\widetilde{G}}^{(i)}$ определяется доминирующая компонента связности $\overline{G}'^{(i)}$.

Шаг 7.

7.1. Для доминирующих компонент $\underline{G}'^{(i)}$, $i = \overline{1, \underline{N}^{(k)}}$, вычисляются значения $COMP(\underline{G}'^{(i)})$ по формуле (2.2.7) и $ENTR(\underline{G}'^{(i)})$ по формуле (2.2.8).

Среди доминирующих компонент $\underline{G}'^{(i)}$ находится такая $\underline{G}'^{(i_*)}$, для которой значение $COMP(\underline{G}'^{(i)})$ достигает локального максимума, и одновременно значение $ENTR(\underline{G}'^{(i)})$ наиболее близко к локальному максимуму.

7.2. Для доминирующих компонент $\overline{G}'^{(i)}$, $i = \overline{1; \overline{N}^{(k)}}$ вычисляются значения $COMP(\overline{G}'^{(i)})$ по формуле (2.2.7) и $ENTR(\overline{G}'^{(i)})$ по формуле (2.2.8). Среди доминирующих компонент $\overline{G}'^{(i)}$ находится такая $\overline{G}'^{(i_*)}$, для которой значение $COMP(\overline{G}'^{(i)})$ достигает локального максимума, и одновременно значение $ENTR(\overline{G}'^{(i)})$ наиболее близко к локальному максимуму.

Шаг 8.

8.1. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения $\underline{\tilde{G}}^{(i_*)}$ определяются последовательности событий и отрезки реализации, соответствующие компонентам связности разбиения $\underline{\tilde{G}}^{(i_*)}$.

8.2. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения $\overline{\tilde{G}}^{(i_*)}$ определяются последовательности событий и отрезки реализации, соответствующие компонентам связности разбиения $\overline{\tilde{G}}^{(i_*)}$.

Шаг 9. Для отрезков реализации, выделенных разбиениями $\underline{\tilde{G}}^{(i_*)}$ и $\overline{\tilde{G}}^{(i_*)}$, осуществляется проверка и коррекция отрезков реализации согласно процедуре проверки и коррекции отрезков реализации, полученных по компонентам связности, соответствующим интервалам стационарности (см. подраздел 2.3.3). Отрезки реализации, полученные после проверки и коррекции, считаются отрезками реализации, соответствующими интервалам стационарности, последовательности событий из этих отрезков — отнесенными к интервалам стационарности.

Шаг 10. Вычисляется M_{k+1} — общее число событий реализации, отнесенных к интервалам стационарности, после шага 9.

Шаг 11. Для последовательностей событий и отрезков реализации, полученных в результате процедуры коррекции на шаге 9 алгоритма, выводятся из рассмотрения элементы матрицы $D^{(k)}$, рассматриваемые как «шумовые» оценки, согласно формулам (2.1.4). Полученная в результате матрица обозначается $D^{(k+1)}$.

Шаг 12. $k = k + 1$, переход к шагу 2 алгоритма.

Шаг 13. Осуществляется финальная коррекция отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, окончательно формируется разбиение множества событий реализации на последовательности событий, соответствующие интервалам стационарности, согласно процедуре финальной коррекции интервалов событий, соответствующих интервалам стационарности (см. подраздел 2.3.4).

Шаг 14. Завершение работы алгоритма.

В заключение данного подраздела дадим краткие комментарии к алгоритму.

Алгоритм представляет собой итерационную процедуру исследования максимумов гистограммы оценок и отнесения событий реализации к отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности исследуемого потока событий. Шаг 1 определяет подготовительные действия для начала работы алгоритма, шаг 2 определяет условие останова итераций, шаги 3–11 определяют k -ю итерацию алгоритма, шаг 12 определяет переход к следующей итерации алгоритма, шаг 13 завершает формирование разбиения множества событий из реализации на последовательности событий, соответствующие интервалам стационарности вида (2.1.2).

Величина M в шаге 1, определяющая условие прекращения работы алгоритма, может быть задана произвольным образом, однако должна быть достаточно близка к числу N событий в исследуемой реализации потока событий.

На шаге 3 выбираются максимумы гистограммы для исследования. Предлагается выбирать два максимума: один из левой части гистограммы (со стороны минимальных значений интенсивности исследуемого потока событий), другой из правой (со стороны максимальных значений интенсивности) для того, чтобы за одну итерацию алгоритма исключить из рассмотрения больше «шумовых» оценок. Допустимо повторное исследование максимумов гистограммы оценок после очистки матрицы оценок от «шумовых» элементов, так как состав

оценок, формирующих максимум, может измениться.

Шаги 4, 5 определяют способ задания интервалов значений интенсивности. В шаге 4 выбирается окрестность предполагаемой оценки интенсивности некоторого состояния потока, определяемой как точка максимума гистограммы. В шаге 5 определяется длина интервала значений интенсивности («окна сканирования») и количество исследуемых интервалов значений интенсивности, которые порождают разбиения вершин графа, затем формируется последовательность интервалов интенсивности, происходит сдвиг «окна сканирования» внутри окрестности, заданной в шаге 4. Параметры сдвига определяются заданным в шаге 5 количеством исследуемых разбиений и величиной окрестности.

Шаги 6, 7 и 8 определяют множества компонент связности для выбранных максимумов гистограммы. На шаге 6 для каждого интервала интенсивности из сформированных последовательностей интервалов значений интенсивностей строится порождаемое им разбиение вершин графа на компоненты связности и для каждого разбиения выбирается доминирующая компонента. На шаге 7 строится последовательность характеристик $COMP$ и $ENTR$ для доминирующих компонент связности последовательности разбиений, сформированной на шаге 6, и выбирается то разбиение, для которого характеристики $COMP$ и $ENTR$ одновременно достигают локальных максимумов. На шаге 8 компоненты связности, порождаемые выбранным разбиением, проверяются на соответствие интервалу стационарности.

Так как в алгоритме заложено одновременное исследование двух максимумов гистограммы, то в результате шагов 7 и 8 одна и та же вершина графа может быть отнесена одновременно к двум компонентам связности, относящимся к разным исследуемым максимумам. Так как результатом работы алгоритма должно быть разбиение множества событий реализации, то необходимо устранить пересечение последовательностей событий и, следовательно, отрезков реализации. Для этого на шаге 9 алгоритма применяется процедура проверки и коррекции отрезков реализации, описанная в подподразделе 2.3.3.

На шаге 10 согласно полученным на шаге 9 последовательностям событий и отрезкам реализации осуществляется очистка матрицы оценок D от «шумовой» составляющей, выявленной на данной итерации алгоритма. На шаге 11 по очищенной матрице строятся гистограмма и граф оценок, свободные от части «шумовых» оценок, выявленных на данной итерации алгоритма. На шаге 12 осуществляется проверка условия выхода из итерационной процедуры.

Шаг 13 (процедура финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующих интервалам стационарности) введен для того, чтобы по окончании работы алгоритма получить разбиение множества событий реализации на последовательности, соответствующие интервалам стационарности, т. е. чтобы каждое событие было отнесено к тому или иному отрезку реализации, соответствующему интервалу стационарности. Процедура финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующих интервалам стационарности, описана в подподразделе 2.3.4.

2.3.3 Процедура проверки и коррекции отрезков реализации, полученных по компонентам связности, соответствующим интервалам стационарности

В данном подподразделе опишем процедуру проверки и коррекции компонент связности, соответствующих интервалам стационарности, полученных после шага 8 на некоторой итерации алгоритма, сформулированного в подподразделе 2.3.2. Предварительно приведем несколько замечаний.

Замечание 1. Согласно алгоритму, сформулированному в подподразделе 2.3.2, после шага 8 имеем два множества компонент связности на множестве вершин графа G , соответствующих окрестностям двух исследуемых максимумов гистограммы: $\tilde{G}^{(i_*)}$ и $\bar{G}^{(i_*)}$. Каждая компонента связности $G_l(V_l, E_l)$ с множеством вершин $\{i_1^{(l)}, i_2^{(l)}, \dots, i_{n_l}^{(l)}\}$ и непустым множеством ребер из этих разбиений соответствует отрезку реализации $[t_{i_1^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1}^{(l)}]$. События, наступившие на этом отрезке реализации $\{t_{i_1^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_1^{(l)}}^{(l)}, t_{i_1^{(l)}+1}^{(l)}, t_{i_1^{(l)}+2}^{(l)}, \dots, t_{i_{n_l}^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1}^{(l)}\}$, составляют последовательность событий потока, которая рассматривается как отрезок реализации простейшего потока событий с постоянной интенсивностью. Пред-

полагается также, что отрезок реализации $\left[t_{i_1^{(l)}-1}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1} \right]$ содержится в некотором интервале стационарности реализации исследуемого МС-потока событий. На интервалах стационарности асинхронный МС-поток событий ведет себя как простейший поток с фиксированной интенсивностью. Согласно определению простейшего потока с некоторой интенсивностью λ , интервалы между моментами времени наступления событий потока $\tau_r = t_{i_r^{(l)}+1} - t_{i_r^{(l)}}$, $r = \overline{0; n_l}$, являются независимыми случайными величинами, распределенными экспоненциально с параметром λ . Следовательно, необходимо, чтобы для выборок $\tau_r = t_{i_r^{(l)}+1} - t_{i_r^{(l)}}$, $r = \overline{0; n_l}$ интервалов между моментами наступления событий потока не отвергалась гипотеза об экспоненциальном распределении (с одним и тем же неизвестным параметром). В дальнейшем гипотезу о том, что интервалы времени между наступлениями событий потока $\tau_r = t_{i_r^{(l)}+1} - t_{i_r^{(l)}}$, $r = \overline{0; n_l}$ на интервале времени $\left[t_{i_1^{(l)}-1}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1} \right]$ являются экспоненциально распределенными случайными величинами, будем называть гипотезой об экспоненциальном распределении. Предлагается для рассмотрения такой гипотезы воспользоваться критерием согласия Пирсона [23].

Замечание 2. При рассмотрении гипотезы об экспоненциальном распределении выборки по критерию Пирсона предполагается задание уровня значимости α (достаточно малой величины, являющейся вероятностью ошибки первого рода). Рассмотрим величину α_{\max} наибольшего уровня значимости, при котором не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении величин $\tau_r = t_{i_r^{(l)}+1} - t_{i_r^{(l)}}$, $r = \overline{0; n_l}$. Если α_{\max} больше наперед заданного α , то гипотеза об экспоненциальном распределении не отвергается.

Замечание 3. Применение критерия Пирсона невозможно при малых объемах выборки. С другой стороны, алгоритм отнесения событий реализации к интервалам стационарности (подподраздел 2.3.2) не гарантирует нужного для критерия числа событий в отрезках времени, соответствующих рассматриваемым компонентам связности. Введем ограничение на количество моментов наступления событий на рассматриваемом отрезке времени $\left[t_{i_1^{(l)}-1}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1} \right]$, пусть n_{\min} — минимальное допустимое число событий в исследуемом интервале.

Замечание 4. Как отмечалось ранее, для того, чтобы компонента связности $G_l(V_l, E_l)$ соответствовала интервалу стационарности в реализации, необходимо, чтобы номера вершин компоненты связности $\{i_1^{(l)}, i_2^{(l)}, \dots, i_{n_l}^{(l)}\}$ следовали подряд, возможно с незначительными пропусками. То есть почти все события, которые произошли на отрезке реализации $[t_{i_1^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1}^{(l)}]$, порождаемом рассматриваемой компонентой связности, имеют в компоненте связности соответствующие вершины, и мощность множества вершин компоненты связности приблизительно равна количеству событий, зафиксированных в реализации на порождаемом ею интервале времени: $i_{n_l}^{(l)} - i_1^{(l)} \approx |V_l|$. События, не имеющие соответствующих вершин в множестве вершин компоненты связности, назовем «пропущенными» событиями. Введем в рассмотрение величину $n_{\max}^{\%}$ — максимальный допустимый процент событий потока на отрезке реализации $[t_{i_1^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1}^{(l)}]$, которые не имеют соответствующих вершин в породившей этот отрезок реализации компоненте связности (максимальный допустимый процент «пропущенных» событий).

Замечание 5. Пусть на некоторой итерации работы алгоритма отнесения событий к интервалам стационарности после выполнения шага 8 имеется компонента связности $G_l(V_l, E_l)$ с множеством вершин $\{i_1^{(l)}, i_2^{(l)}, \dots, i_{n_l}^{(l)}\}$ и непустым множеством ребер. Компонента связности соответствует отрезку реализации $[t_{i_1^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1}^{(l)}]$ и последовательности событий из реализации $\{t_{i_1^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_1^{(l)}}^{(l)}, t_{i_1^{(l)}+1}^{(l)}, t_{i_1^{(l)}+2}^{(l)}, \dots, t_{i_{n_l}^{(l)}-1}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}}^{(l)}, t_{i_{n_l}^{(l)}+1}^{(l)}\}$. Введем в рассмотрение функцию $A([t_p, t_q])$ вида

$$\begin{aligned} A([t_p, t_q]) &= A\left([t_p, t_q], \alpha, n_{\min}, n_{\max}^{\%}\right) = \\ &= \begin{cases} \alpha_{\max}, & \alpha_{\max} \geq \alpha, \quad q - p + 1 \geq n_{\min}, \quad \frac{n_{\emptyset}}{q - p + 1} \cdot 100 \leq n_{\max}^{\%}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Здесь α_{\max} — максимальный уровень значимости, при котором не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении интервалов между наступлениями событий потока на отрезке реализации $[t_p, t_q]$, $(q - p + 1)$ — число со-

бытий на рассматриваемом отрезке $[t_p, t_q]$, n_\emptyset — число «пропущенных» событий потока, принадлежащих отрезку времени $[t_p, t_q]$. Очевидно, функция (2.3.9) для рассматриваемого отрезка времени $[t_p, t_q]$ положительна, если для него принимается с уровнем значимости α гипотеза об экспоненциальном распределении интервалов между наступлениями событий потока на этом отрезке, число событий в интервале не меньше допустимого (см. замечание 3), и относительное число событий интервала времени, не имеющих соответствия в компоненте связности, не превышает допустимого (см. замечание 4).

Определение. Будем называть отрезок реализации $[t_p, t_q]$ *допустимым*, если $A([t_p, t_q]) > 0$, и *недопустимым*, если $A([t_p, t_q]) = 0$.

Замечание 6. Допустимые отрезки реализации, относящиеся к левому и правому максимуму, полученные в течении одной итерации алгоритма, могут пересекаться.

Определение. Пусть на некоторой итерации алгоритма отнесения событий к интервалам стационарности получены два допустимых отрезка реализации $[t_{p_1}, t_{q_1}]$ и $[t_{p_2}, t_{q_2}]$ (т. е. $A([t_{p_1}, t_{q_1}]) > 0$ и $A([t_{p_2}, t_{q_2}]) > 0$) таких, что

$$[t_{p_1}, t_{q_1}], [t_{p_2}, t_{q_2}] : t_{p_1} < t_{p_2} < t_{q_1} < t_{q_2}, \quad (2.3.10)$$

т. е. последовательности событий, относящихся к отрезкам реализации $[t_{p_1}, t_{q_1}]$ и $[t_{p_2}, t_{q_2}]$ пересекаются (события $t_{p_2}, t_{p_2+1}, t_{p_2+2}, \dots, t_{q_1}$ принадлежат одновременно двум выделенным отрезкам). Такие события будем называть «спорными» событиями.

Зададимся целью получить из отрезков реализации (2.3.10) два допустимых отрезка реализации $[t_{p_1}, t_k]$, $[t_{k+1}, t_{q_2}]$ такие, что

$$[t_{p_1}, t_k], [t_{k+1}, t_{q_2}] : p_2 \leq k \leq q_1 - 1, \quad (2.3.11)$$

т. е. разнесем «спорные» события по соседним отрезкам реализации.

Рассмотрим функцию $f(k)$ следующего вида:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{(k - p_1 + 1) A([t_{p_1}, t_k]) + (q_2 - k) A([t_{k+1}, t_{q_2}])}{q_2 - p_1 + 1}, & A([t_{p_1}, t_k]) A([t_{k+1}, t_{q_2}]) > 0, \\ 0, & A([t_{p_1}, t_k]) A([t_{k+1}, t_{q_2}]) = 0, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

функция A определена в (2.3.9). Введенная функция равна нулю, если хотя бы один из интервалов $[t_{p_1}, t_k]$, $[t_{k+1}, t_{q_2}]$ является недопустимым; функция равна средневзвешенному (по количеству событий) максимальных уровней значимости, с которыми для интервалов $[t_{p_1}, t_k]$, $[t_{k+1}, t_{q_2}]$ не отвергаются гипотезы об экспоненциальном распределении.

Определение. Пусть имеется два отрезка реализации $[t_{p_1}, t_{q_1}]$, $[t_{p_2}, t_{q_2}]$ вида (2.3.10). Последовательности событий, относящихся к этим отрезкам реализации, пересекаются, пересечением является множество событий, относящихся к отрезку времени $[t_{p_2}, t_{q_1}]$. Назовем *оптимальной коррекцией* для этих отрезков реализации два отрезка времени вида (2.3.11), где значение $k = k^*$ находится из условия

$$k^* : \max_k f(k), \quad k = \overline{p_2, q_1 - 1}, \quad (2.3.13)$$

функция $f(k)$ определена в (2.3.12). В качестве критерия оптимальности выбран максимум функции (2.3.12).

Заметим, что оптимальной коррекции (2.3.11) не существует, если $f(k) = 0$, $k = \overline{p_2, q_1 - 1}$.

С использованием замечаний 1–6 окончательно сформулируем процедуру проверки и коррекции отрезков реализации, полученных по компонентам связности, соответствующим интервалам стационарности (шаг 9 алгоритма отнесения событий реализации МС-потока к интервалам стационарности).

Пусть на некоторой итерации алгоритма отнесения событий реализации к интервалам стационарности подподраздела 2.3.2 получены отрезки реализации

$$[t_{p_1}, t_{q_1}], [t_{p_2}, t_{q_2}], \dots, [t_{p_m}, t_{q_m}]. \quad (2.3.14)$$

Шаг 1. Задается величина α — уровень значимости для критерия согласия Пирсона принятия гипотезы об экспоненциальном распределении, n_{\min} — минимально допустимое число событий, $n_{\max}^{\%}$ — максимальный процент «пропущенных» событий.

Шаг 2. Для заданных α , n_{\min} , $n_{\max}^{\%}$ из совокупности отрезков реализации (2.3.14) удаляются недопустимые отрезки реализации.

Шаг 3. Если среди оставшихся отрезков реализации есть пересекающиеся отрезки вида (2.3.10), для каждой пары пересекающихся отрезков реализации последовательно находится оптимальная коррекция из условия (2.3.13). В случае, если оптимальной коррекции не существует, отрезки удаляются из совокупности (2.3.14).

Шаг 4. Оставшиеся в рассмотрении отрезки реализации и отрезки, полученные в результате коррекции, считаются результатом процедуры проверки и коррекции на данной итерации алгоритма отнесения событий к интервалам стационарности (см. подподраздел 2.3.2). Завершение работы процедуры.

2.3.4 Процедура финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующие интервалам стационарности

В результате работы алгоритма отнесения событий к интервалам стационарности не все события из реализации (1.2.1) окажутся отнесенными к тем или иным отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности. По условию, алгоритм прекращает свою работу после того, как количество событий, отнесенных к отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности, наперед заданного значения M . На шаге 13 алгоритма предлагается отнести оставшиеся события $(N - M + 1)$ к одному из выделенных отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, или сформировать из последовательности таких событий отдельный отрезок реализации, по-прежнему основываясь на величине $A([t_p, t_q])$.

Определение. Пусть алгоритмом определены два отрезка реализации $[t_{p_1}, t_{q_1}]$, $[t_{p_2}, t_{q_2}]$, соответствующих интервалам стационарности, таких, что

$$[t_{p_1}, t_{q_1}], [t_{p_2}, t_{q_2}] : q_1 + 1 < p_2, \quad (2.3.15)$$

и при этом события $\{t_{q_1+1}, t_{q_1+2}, \dots, t_{p_2-1}\}$ не принадлежат ни одному из определенных алгоритмом отрезков реализации, соответствующих интервалу стационарности. Такие события будем называть «неотнесенными» событиями.

Предлагается, основываясь на отрезках реализации (2.3.15), получить два отрезка вида $[t_{p_1}, t_k], [t_{k+1}, t_{q_2}]$ таких, что

$$[t_{p_1}, t_k], [t_{k+1}, t_{q_2}] : q_1 \leq k \leq p_2 - 1, \quad (2.3.16)$$

Для нахождения оптимальной коррекции (2.3.16) отрезков реализации (2.3.15) найдем k^* из условия

$$k^* : \max_k f(k), k = \overline{q_1, p_2 - 1}, \quad (2.3.17)$$

функция $f(k)$ определена в (2.3.12).

Для принятия окончательного решения об оптимальном, в смысле величины (2.3.12), отнесении «неотнесенных» событий к отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности, сравним величины $A([t_{q_1+1}, t_{p_2-1}])$ и $f(k^*)$; если $A([t_{q_1+1}, t_{p_2-1}]) > f(k^*)$, считаем отрезок реализации $[t_{q_1+1}, t_{p_2-1}]$ соответствующим отдельному интервалу стационарности, в противном случае относим рассматриваемые события к отрезкам (2.3.15) согласно условию (2.3.17).

С учетом вышесказанного окончательно сформулируем процедуру финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующих интервалам стационарности (шаг 13 алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности).

Пусть алгоритм отнесения событий к интервалам стационарности (подподраздел 2.3.2) по достижении порогового значения M получены следующие отрезки реализации потока, соответствующие интервалам стационарности:

$$[t_{p_1}, t_{q_1}], [t_{p_2}, t_{q_2}], \dots, [t_{p_m}, t_{q_m}].$$

При этом среди отрезков реализации есть такие, что для них выполняются соотношения вида (2.3.15).

Шаг 1. Задается величина α — уровень значимости для критерия согласия Пирсона принятия гипотезы об экспоненциальном распределении, n_{\min} — минимально допустимое число событий, $n_{\max}^{\%}$ — максимальный процент «пропущенных» событий.

Шаг 2. Если $p_1 \neq 0$, то к совокупности отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, добавляется отрезок $[t_0, t_0]$.

Шаг 3. Если $q_m \neq N$, то к совокупности отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, добавляется отрезок $[t_N, t_N]$.

Шаг 4. Для каждой пары вида (2.3.15) из последовательности отрезков реализации, определенных алгоритмом отнесения событий к интервалам стационарности, $[t_{p_1}, t_{q_1}]$, $[t_{p_2}, t_{q_2}]$, \dots , $[t_{p_m}, t_{q_m}]$ (и добавочных отрезков $[t_0, t_0]$, $[t_N, t_N]$, если необходимо), сравниваются величины $A([t_{q_1+1}, t_{p_2-1}])$ (см. (2.3.9)) и $f(k^*)$ (см. (2.3.12)); если $A([t_{q_1+1}, t_{p_2-1}]) > f(k^*)$, отрезок $[t_{q_1+1}, t_{p_2-1}]$ считается отдельной последовательностью событий, соответствующей интервалу стационарности, в противном случае принимается коррекция отрезков реализации (2.3.15) согласно условию (2.3.17). Завершение процедуры финальной коррекции.

После применения алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности получим отрезки реализации, соответствующие интервалам стационарности потока, заданные номерами начального и конечного события. По этим данным выберем из матрицы оценок только «внутриинтервальные» оценки интенсивности потока событий. Далее, применив к этим данным алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности (подраздел 1.5), получим оценку количества состояний асинхронного МС-потока событий и оценки значений интенсивности потока в каждом состоянии. При достаточной длине реализации можно также оценить значения других параметров состояний исследуемого асинхронного МС-потока событий (см. Приложение Б).

2.4 Оценивание числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с использованием отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности

Пусть в реализации (1.2.1) с помощью алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности для асинхронного МС-потока событий получено m отрезков реализации, соответствующих интервалам ста-

ционарности, вида

$$\begin{aligned} & [t_{p_1}, t_{q_1}], [t_{p_2}, t_{q_2}], \dots, [t_{p_m}, t_{q_m}], \\ & t_{p_l} < t_{q_l}, \quad l = \overline{1, m}, \\ & q_l = p_{l+1} - 1, \quad l = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

$t_{p_l}, t_{q_l}, l = \overline{1, m}$ — моменты наступления событий из реализации (1.2.1). На этих временных отрезках поток ведет себя как простейший с постоянной интенсивностью.

Задача оценивания количества состояний и значений интенсивности исследуемого потока событий заключается в том, чтобы определить, какие из отрезков реализации, полученные с помощью алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности, соответствуют одному и тому же состоянию процесса $\lambda(t)$, т. е. разбить отрезки реализации на группы, соответствующие состояниям исследуемого потока событий. Таким образом, получим оценку состояния процесса $\lambda(t)$ рассматриваемого асинхронного МС-потока событий в любой момент времени на протяжении реализации (1.2.1) за исключением интервалов времени

$$(t_{q_1}, t_{p_2}), (t_{q_2}, t_{p_3}), \dots, (t_{q_{m-1}}, t_{p_m}) \quad (2.4.19)$$

На этих интервалах, предположительно, происходят переходы из одного состояния потока в другое. Моменты времени перехода исследуемого потока из одного состояния в другое неизвестны.

Применив к реализации асинхронного МС-потока событий алгоритм оценивания числа состояний асинхронного МС-потока событий, описанный в разделе 1, получим оценку \hat{n} числа состояний процесса $\lambda(t)$ как количество максимумов гистограммы, построенной по матрице оценок (1.2.5) с использованием только «внутриинтервальных» оценок из треугольных блоков матрицы, соответствующих отрезкам реализации (2.4.18). Абсциссы максимумов гистограммы принимаются в качестве оценок значений интенсивности состояний $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{\hat{n}}\}$. Заметим, что величина m — количество отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, в исследуемой реализации потока событий в общем случае больше, чем величина \hat{n} — оценка числа состояний

потока, так как одно и то же состояние потока может реализоваться на нескольких интервалах стационарности.

Теперь для каждого отрезка реализации из (2.4.18) найдем оценку интенсивности потока по формуле

$$\widehat{\lambda}^{(l)} = \frac{q_l - p_l - 1}{t_{q_l} - t_{p_l}}, \quad l = \overline{1, m}.$$

Таким образом, получим набор оценок интенсивности потока

$$\{\widehat{\lambda}^{(1)}, \widehat{\lambda}^{(2)}, \dots, \widehat{\lambda}^{(m)}\} \quad (2.4.20)$$

соответствующих отрезкам реализации (2.4.18).

Каждая из оценок (2.4.20) есть оценка интенсивности потока при некотором состоянии процесса $\lambda(t)$. Эти оценки построены по всем событиям из отрезка реализации, соответствующего интервалу стационарности, и, следовательно, они обладают минимальной дисперсией среди всех оценок, полученных по всевозможным интервалам между моментами наступления событий внутри указанного отрезка времени.

Предположим, что на отрезках реализации $[t_{p_l}, t_{q_l}]$ и $[t_{p_k}, t_{q_k}]$ реализовалось состояние s процесса $\lambda(t)$: $\lambda(t) = \lambda_s$. Тогда значения $\widehat{\lambda}^{(l)}$ и $\widehat{\lambda}^{(k)}$ есть оценки значения интенсивности λ_s . Очевидно, $\widehat{\lambda}^{(l)} \neq \widehat{\lambda}^{(k)}$, однако эти две оценки будут близки по значению. Кроме того, обе эти оценки участвуют в формировании максимума гистограммы, соответствующего состоянию s , и обе они расположены в окрестности точки максимума, соответствующего состоянию s .

Определим состояние процесса $\lambda(t)$, которое реализовалось на том или ином отрезке реализации, соответствующем интервалу стационарности, следующим образом:

1. имеем оценку количества состояний \widehat{n} исследуемого асинхронного МС-потока событий, реализовавшихся за время наблюдения за потоком, и набор значений оценок интенсивностей состояний $\{\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{\widehat{n}}\}$, полученные с помощью алгоритма, описанного в разделе 1;
2. имеем последовательность отрезков реализации, соответствующих интер-

валам стационарности, (2.4.18), построим последовательность оценок интенсивности потока на этих отрезках времени (2.4.20);

3. для каждой оценки из ряда (2.4.20) найдем ближайшее по модулю к ней значение оценки интенсивности состояния $\hat{\lambda}_s$ из ряда $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{\hat{n}}, \}$. Будем считать, что на соответствующем отрезке реализации, соответствующем интервалу стационарности, реализовалось состояние s асинхронного МС-потока событий; иначе говоря, на отрезке событий $[t_{p_l}, t_{q_l}]$, реализовалось состояние s , если для оценки $\hat{\lambda}^{(l)}$ выполняется условие

$$s = \arg \min_{i=1;\hat{n}} |\hat{\lambda}^{(l)} - \hat{\lambda}_i|.$$

Сформулируем несколько замечаний относительно описанной выше процедуры.

Замечание 1. Если отрезки реализации $[t_{p_l}, t_{q_l}]$ и $[t_{p_k}, t_{q_k}]$, соответствующие интервалам стационарности, относятся к состоянию s процесса $\lambda(t)$, то события, которые произошли на этих отрезках реализации, однородны в том смысле, что, по предположению, наступили с одинаковой интенсивностью λ_s . То есть для выборки случайной величины $\{\tau_r = t_{r+1} - t_r\}$ интервалов между двумя соседними событиями на исследуемых отрезках реализации $[t_{p_l}, t_{q_l}]$ и $[t_{p_k}, t_{q_k}]$ ($r = \overline{p_l; q_l - 1}, \overline{p_k; q_k - 1}$) не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении с одинаковой интенсивностью. То же можно сказать и о совокупности всех отрезков реализации, которые относятся к одному и тому же состоянию процесса $\lambda(t)$. В противном случае гипотеза об экспоненциальном распределении для этих отрезков времени будет отвергаться. Таким образом, чтобы проверить, действительно ли совокупность отрезков реализации $[t_{p_l}, t_{q_l}], [t_{p_k}, t_{q_k}], \dots, [t_{p_v}, t_{q_v}]$ относится к одному и тому же состоянию исследуемого потока событий, необходимо вычислить все $\{\tau_r = t_{r+1} - t_r\}$, где $r = \overline{p_l; q_l - 1}, \overline{p_k; q_k - 1}, \dots, \overline{p_v; q_v - 1}$ и для получившейся выборки проверить гипотезу об экспоненциальном распределении случайной величины τ с одинаковым неизвестным параметром. Таковую гипотезу в дальнейшем будем называть гипотезой об экспоненциальном распределении для совокупности отрезков ре-

ализации. Для проверки такой гипотезы можно воспользоваться критерием согласия Пирсона.

Замечание 2. Оценивание числа состояний процесса $\lambda(t)$ по алгоритму из раздела 1 производится с использованием гистограммы оценок. При построении гистограммы определяющую роль играет выбор шага гистограммы; в том числе, от выбора шага гистограммы зависит и количество ее максимумов. Если шаг гистограммы выбран слишком большим, то, возможно, оценки интенсивностей нескольких различных состояний с близкими по значению интенсивностями сформируют единый максимум. Если же, наоборот, шаг гистограммы выбран небольшим, то оценки интенсивности одного и того же состояния образуют группу близко расположенных максимумов.

На рисунке 2.1 в качестве примера представлены три гистограммы оценок, построенные по очищенной матрице оценок для асинхронного МС-потока событий со следующими характеристиками: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 50$, $\alpha_1 = 0,01$, $\alpha_2 = 0,1$, $\alpha_3 = 0,5$. В первом случае шаг гистограммы равен 10, во втором случае — 2 и в третьем — 0,1. (Напомним, что в данной работе на рисунках представлены огибающие гистограмм, полученные средствами MS Excel.) Первая гистограмма имеет два максимума, первый из которых содержит оценки интенсивности $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 10$, а второй — оценки интенсивности $\lambda_1 = 50$. То есть первый максимум гистограммы сформирован оценками интенсивности двух различных состояний. Вторая гистограмма имеет три максимума, что соответствует количеству состояний исследуемого потока событий. Количество максимумов в третьей гистограмме существенно увеличилось по сравнению со второй гистограммой, однако эти максимумы объединены в три группы, которые соответствуют трем максимумам второй гистограммы и отделены друг от друга минимумами, соответствующими минимумам второй гистограммы. Таким образом, при уменьшении шага гистограммы количество максимумов увеличивается, однако, в случае гистограммы с шагом 0,1, вновь появившиеся максимумы образуют группы на месте одного максимума гистограммы с шагом 2.

Таким образом, последовательность значений максимумов и последова-

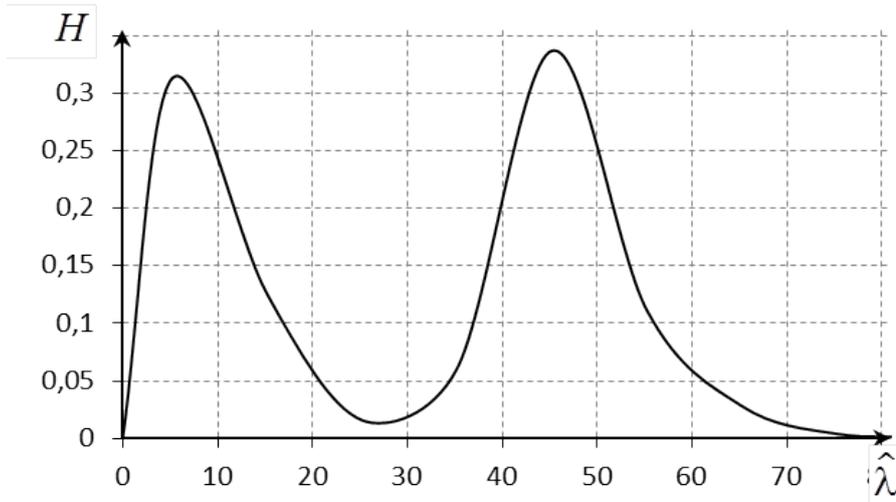
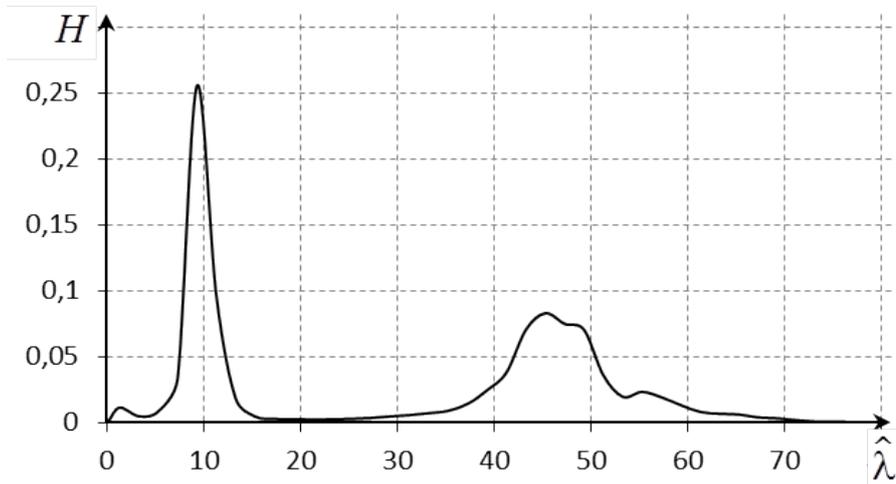
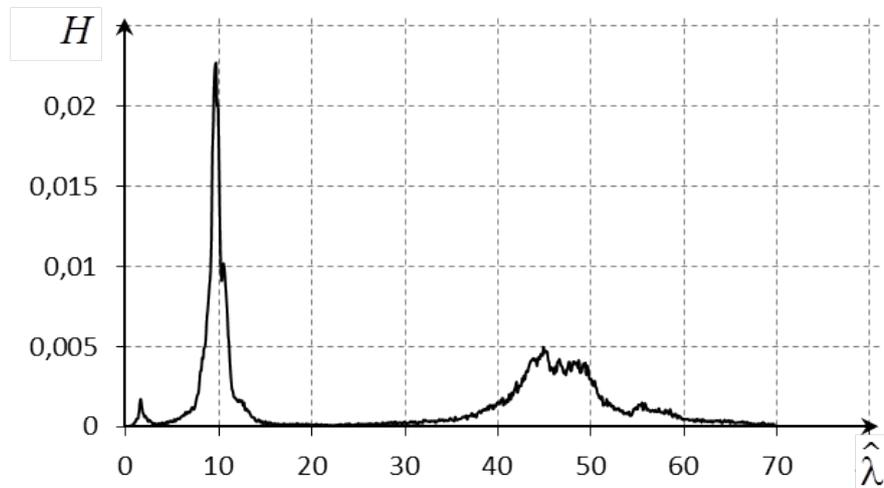
Шаг гистограммы $h=10$ Шаг гистограммы $h=2$ Шаг гистограммы $h=0,1$ 

Рисунок 2.1 — Пример гистограммы, полученной по очищенной матрице асинхронного МС-потока с параметрами: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 50$, $\alpha_1 = 0,01$, $\alpha_2 = 0,1$, $\alpha_3 = 0,5$.

тельность значений минимумов гистограммы с меньшим шагом отражают тенденцию поведения гистограммы. Абсциссы максимальных значений в последовательности максимумов гистограммы указывают на расположение групп максимумов, соответствующих состояниям исследуемого потока. Абсциссы минимальных значений в последовательности минимумов гистограммы являются границами групп максимумов, соответствующих состояниям исследуемого потока. Абсциссы максимумов гистограммы, составляющих группу, близки по значению.

Далее, пусть имеем группу максимумов гистограммы, ограниченную с двух сторон минимумами и составленную из оценок интенсивности некоторого состояния потока. Тогда этой группе максимумов соответствует набор оценок интенсивностей из ряда (2.4.20), которые, в свою очередь, соответствуют совокупности отрезков реализации, принятых в качестве интервалов стационарности, из ряда (2.4.18). Если отрезки реализации из этой совокупности действительно относятся к одному и тому же состоянию потока, то для этой совокупности не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении интервалов между наступлениями соседних событий. Если же гипотеза об экспоненциальном распределении отвергается, то из этого следует, что группа максимумов гистограммы содержит оценки интенсивности более чем одного состояния исследуемого потока событий. В этом случае исследуемая группа максимумов может быть разбита на более мелкие группы.

Таким образом, можно сформулировать рекурсивную процедуру, позволяющую последовательно разделять одну группу максимумов на две, если для соответствующей этой группе совокупности отрезков реализации отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении интервалов между наступлениями событий. В худшем случае конечным итогом действия этой процедуры станет вывод о том, что на каждом из отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, реализовалось отдельное состояние исследуемого потока, и число состояний равно количеству отрезков реализации, полученных алгоритмом отнесения событий потока к интервалам стационарности.

Осталось обсудить вопрос о нахождении точки минимума, которая разделяет группу максимумов на две в случае, если для соответствующей ей совокупности отрезков реализации отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении.

Согласно замечанию 2 (см. также рисунок 2.1), группа максимумов, соответствующая состоянию исследуемого потока, при некотором (большом) шаге гистограммы являлась единым максимумом. Очевидно, что максимум с наибольшим значением ординаты указывает на то состояние потока, во время которого в исследуемой реализации наступило наибольшее количество событий потока, и, следовательно, в матрице оценок содержится наибольшее число оценок интенсивности этого состояния. В окрестности этого максимума, возможно, найдутся другие максимумы, сформированные из оценок интенсивности того же состояния исследуемого потока, они образуют группу максимумов, соответствующих этому состоянию. Такая группа максимумов при увеличении шага гистограммы образует единый максимум, следовательно, она ограничена двумя минимумами. Следующую группу максимумов для исследования следует искать за пределами отрезка, заданного абсциссами минимумов, ограничивающих первую группу максимумов. Затем среди минимумов, абсциссы которых лежат между абсциссами двух полученных максимумов, отыщем наименьший. Абсцисса этого минимума и определит границу между двумя исследуемыми группами максимумов.

Группа максимумов в гистограмме порождает совокупность оценок интенсивности из набора (2.4.20) и, соответственно, совокупность отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, по которым построены эти оценки интенсивности. Если совокупность отрезков реализации оказывается неоднородной в смысле интенсивности наступления событий (гипотеза об экспоненциальном распределении для этой совокупности отвергается), то соответствующая группа максимумов должна быть разделена на две согласно вышеописанному принципу. В противном случае совокупность отрезков реализации, соответствующая рассматриваемой группе максимумов, должна быть отнесена

к одному и тому же состоянию потока. Таким образом, по завершении процедуры деления групп максимумов гистограммы, получим определенное количество совокупностей отрезков реализации, однородных в смысле интенсивности наступления событий. Количество таких совокупностей можно принять в качестве оценки числа состояний исследуемого потока событий, реализовавшихся за время наблюдения; оценку параметра экспоненциального распределения для каждой совокупности отрезков реализации — в качестве оценки интенсивности соответствующего состояния.

2.4.1 Алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, основанный на свойствах гистограммы оценок интенсивности

Пусть имеется последовательность оценок (2.4.20), последовательность локальных максимумов гистограммы, построенной с некоторым шагом h

x	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	\dots	\bar{x}_i	\dots	$\bar{x}_{K_{max}}$
$f(x)$	$f(\bar{x}_1)$	$f(\bar{x}_2)$	$f(\bar{x}_3)$	\dots	$f(\bar{x}_i)$	\dots	$f(\bar{x}_{K_{max}})$

и последовательность ее локальных минимумов

x	\underline{x}_1	\underline{x}_2	\underline{x}_3	\dots	\underline{x}_i	\dots	$\underline{x}_{K_{min}}$
$f(x)$	$f(\underline{x}_1)$	$f(\underline{x}_2)$	$f(\underline{x}_3)$	\dots	$f(\underline{x}_i)$	\dots	$f(\underline{x}_{K_{min}})$

Шаг 1. Задаются величины

$$K_1 = 1, K_2 = K_{max}, \hat{n} = 0, \alpha^*,$$

где K_1 — номер первого максимума в исследуемой группе максимумов, K_2 — номер последнего максимума в исследуемой группе максимумов, \hat{n} — оценка числа состояний исследуемого потока, определяемая алгоритмом, α^* — уровень значимости принятия гипотезы об экспоненциальном распределении для критерия Пирсона.

Шаг 2. Для группы максимумов

$$f(\bar{x}_i), \quad i = \overline{K_1; K_2}$$

формируется совокупность отрезков реализации, соответствующих этой группе максимумов, для которой будет проверяться гипотеза об экспоненциальном распределении:

2.1 находятся \underline{x}_{k_1} и \underline{x}_{k_2} — элементы последовательности минимумов гистограммы, которые ограничивают с двух сторон исследуемую группу максимумов: $\underline{x}_{k_1} < \bar{x}_{K_1} < \underline{x}_{k_1+1}$, $\underline{x}_{k_2-1} < \bar{x}_{K_2} < \underline{x}_{k_2}$;

2.2 формируется исследуемая на данном шаге совокупность отрезков реализации: исследуемая совокупность включает отрезки реализации, для которых оценка (2.4.20), удовлетворяет условию $\underline{x}_{k_1} \leq \hat{\lambda}^{(i)} < \underline{x}_{k_2}$;

Шаг 3. Для совокупности отрезков реализации, полученной на шаге 2, проверяется гипотезу об экспоненциальном распределении интервалов между наступлениями соседних событий. Если гипотеза не отвергается то:

3.1 \hat{n} увеличивается на единицу;

3.2 отрезки реализации из исследуемой совокупности относятся к одному и тому же состоянию исследуемого потока событий;

3.3 вычисляется оценка интенсивности состояния.

В противном случае:

3.4 находится максимальное значение в исследуемой группе максимумов: $f(\bar{x}_{M_1}) = \max f(x) (x \in [\bar{x}_{K_1}, \bar{x}_{K_2}])$;

3.5 находится окрестность максимума $f(\bar{x}_{M_1})$ на половине его высоты: ближайшие значения \underline{x}_{k_l} и \underline{x}_{k_r} , такие что

$$f(\underline{x}_{k_l}) < \frac{1}{2}f(\bar{x}_{M_1}) \leq f(\underline{x}_{k_l+1}) \quad f(\underline{x}_{k_r-1}) \leq \frac{1}{2}f(\bar{x}_{M_1}) < f(\underline{x}_{k_r});$$

3.6 находится максимальное значение в исследуемой группе максимумов, за исключением тех, абсциссы которых принадлежат интервалу $(\underline{x}_{k_l}, \underline{x}_{k_r})$: $f(\bar{x}_{M_2}) = \max f(x), (x \in [\bar{x}_{K_1}, \bar{x}_{K_2}] \setminus (\underline{x}_{k_l}, \underline{x}_{k_r}))$;

3.7 находится наименьшее значение среди последовательности минимумов гистограммы, абсциссы которых расположены между двумя зафиксированными максимумами: $f(\underline{x}_{M_3}) = \min f(x), (x \in (\bar{x}_{M_1}, \bar{x}_{M_2}))$;

3.8 определяются границы новых групп максимумов для исследования K_3 : $\bar{x}_{K_3} < \underline{x}_{M_3} < \bar{x}_{K_3+1}$;

3.9 $K_1 = K_1$, $K_2 = K_3$ и выполняются шаги 2 и 3;

3.10 $K_1 = K_3 + 1$, $K_2 = K_2$ и выполняются шаги 2 и 3.

На шаге 1 алгоритма задаются начальные данные для его выполнения. На шаге 2 формируется выборка для проверки гипотезы об экспоненциальном распределении. Шаг 3 описывает рекурсивную процедуру (подподразделы 3.1–3.3 определяют условие останова рекурсии, подподразделы 3.4–3.10 производят повторение шагов 2 и 3 с новыми данными). Результатом работы алгоритма является \hat{n} — оценка числа состояний исследуемого потока, реализовавшихся за время наблюдения, набор $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{\hat{n}}$ оценок значений интенсивности этих состояний, а также информация о том, какое состояние реализовалось на том или ином отрезке реализации.

По условиям алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности, на отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, события наступают через экспоненциально распределенные интервалы времени с одинаковой интенсивностью. Для каждого отрезка реализации гипотеза об экспоненциальном распределении принимается с некоторым уровнем значимости. Параметр α^* данного алгоритма должен быть согласован с уровнями значимости принятия гипотезы об экспоненциальном распределении для каждого отрезка реализации из исследуемой совокупности, а именно, должен быть не больше, чем минимальный достигаемый уровень значимости из всех, с которыми были приняты гипотезы об экспоненциальном распределении для отдельных отрезков.

Имея большую совокупность данных о событиях, которые предположительно наступили в одном и том же состоянии исследуемого потока, можно точнее оценить интенсивность данного состояния.

Другой подход к оцениванию числа состояний и значений интенсивности исследуемого потока событий с использованием данных об отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, основан на том, что оценки интенсивности потока, полученные по этим отрезкам реализации, относящиеся

к одному и тому же состоянию исследуемого МС-потока событий, близки по значению между собой и к значению интенсивности этого состояния.

Перенумеруем оценки (2.4.20) так, чтобы они оказались упорядоченными по возрастанию:

$$\widehat{\lambda}^{(1)} \leq \widehat{\lambda}^{(2)} \leq \dots \leq \widehat{\lambda}^{(m)}. \quad (2.4.21)$$

Заметим, что здесь номер оценки не соответствует номеру отрезка реализации из ряда (2.4.18).

В ряде (2.4.21) оценки интенсивности, полученные по отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности, в пределах которых события наступали с одинаковой интенсивностью (т. е. оценки интенсивности одного и того же состояния исследуемого потока), будут следовать друг за другом и составлять группы близких по значению элементов. Расстояния между соседними элементами в группе оценок интенсивности одного и того же состояния будут меньше, чем расстояния между следующими друг за другом оценками интенсивности, являющимися элементами разных групп. Такая группировка оценок ряда (2.4.21) является следствием того, что эти оценки, как уже отмечалось, обладают минимальной возможной дисперсией из всех оценок интенсивности состояния, которые можно получить с использованием данных из имеющейся реализации потока, а следовательно, группируются вокруг значения интенсивности этого состояния.

Пусть

$$L_{ij} = \left\{ \widehat{\lambda}^{(i)}, \widehat{\lambda}^{(i+1)}, \dots, \widehat{\lambda}^{(j)} \right\}, \quad i < j \leq m \quad (2.4.22)$$

— последовательность оценок интенсивности из ряда (2.4.21), i — номер начального элемента последовательности, j — номер конечного элемента последовательности.

Определение. Назовем величину

$$c(L_{ij}) = \frac{\widehat{\lambda}^{(j)} - \widehat{\lambda}^{(i)}}{\frac{1}{j-i+1} \sum_{l=i}^j \widehat{\lambda}^{(l)}} \quad (2.4.23)$$

показателем однородности группы L_{ij} .

В (2.4.23) числителем является размах значений в группе, знаменателем — среднее арифметическое значений в группе. Будем говорить, что группа оценок L_{ij} однородна, если

$$c(L_{ij}) \leq c_0, \quad (2.4.24)$$

где c_0 — некоторая наперед заданная положительная величина (пороговое значение показателя однородности). В противном случае ($c(L_{ij}) > c_0$) группу L_{ij} будем называть неоднородной.

Заметим, что группа, состоящая из одного значения, однородна при любом пороговом значении c_0 . Будем считать, что если группа оценок интенсивности L_{ij} однородна, то оценки интенсивности потока из этой группы есть оценки интенсивности некоторого состояния процесса $\lambda(t)$ исследуемого потока событий.

Очевидно, что процедура группировки значений ряда (2.4.21) должна заключаться в последовательном (начиная с группы L_{1k}) разделении группы в случае ее неоднородности на две группы. Границей между группами является максимальная разность между соседними значениями оценок в группе.

2.4.2 Алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, основанный на свойствах оценок интенсивности

Пусть имеется последовательность оценок значений интенсивности (2.4.21).

Шаг 1. Задаются величины

$$c_0, \hat{n} = 0, i = 1, j = m, L_{ij} = L_{1m},$$

c_0 — пороговое значение показателя однородности, \hat{n} — количество групп в ряде (оценка числа состояний исследуемого потока), m — число значений оценок интенсивности.

Шаг 2. Если $c(L_{ij}) < c_0$, то

2.1 величина \hat{n} увеличивается на 1;

2.2 вычисляется оценка интенсивности состояния.

В противном случае

2.3 находится такое l^* , для которого

$$l^* = \max_{l=i, j-1} \left\{ \widehat{\lambda}^{(l+1)} - \widehat{\lambda}^{(l)} \right\};$$

2.4 полагается $i = i$, $j = l^*$, и для группы L_{ij} выполняется шаг 2 алгоритма;

2.5 полагается $i = l^* + 1$, $j = j$, и для группы L_{ij} выполняется шаг 2 алгоритма.

Шаг 2 алгоритма представляет собой рекурсивную процедуру (подподразделы 2.4, 2.5 шага производят повторение шага с новыми данными, подподразделы 2.1, 2.2 определяют условие останова рекурсии). Результатом работы алгоритма являются величина \widehat{n} — оценка числа состояний, и значения $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_{\widehat{n}}$ — значения оценок интенсивности исследуемого асинхронного МС-потока событий.

В заключение отметим, что значение \widehat{n} оценки числа состояний, полученное в результате работы алгоритма, зависит от порогового значения c_0 показателя однородности (2.4.24). Очевидно, чем больше величина c_0 , тем меньше получаемое значение \widehat{n} .

2.5 Выводы

1. Информация о реализации потока событий (1.2.1) представлена в виде графа оценок интенсивности асинхронного МС-потока событий (2.2.1). Рассмотрены свойства графа оценок.

2. Сформулированы требования к компонентам связности, соответствующим интервалам стационарности в реализации асинхронного МС-потока событий.

3. Сформулирован алгоритм отнесения событий потока к интервалам стационарности в реализации асинхронного МС-потока событий.

4. Сформулированы рекурсивные алгоритмы оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного потока событий с применением результатов работы алгоритма отнесения событий потока к интервалам стационарности.

3 Экспериментальное исследование алгоритмов. Численные результаты применения алгоритмов

В разделе 2 представлены алгоритмы исследования реализации асинхронного МС-потока событий с целью оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий:

1. алгоритм отнесения событий из реализации потока к интервалам стационарности, с дополнительными алгоритмами коррекции отрезков реализации и финальной коррекции разбиения;
2. алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока на основании данных об отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, с учетом свойств гистограммы оценок, построенной по очищенной матрице оценок интенсивности исследуемого асинхронного МС-потока событий;
3. алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока на основании данных об отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, с учетом свойств оценок интенсивности потока, построенных по отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности.

Исследование алгоритмов заключается в применении алгоритмов к реализации потока, полученной в результате компьютерного имитационного моделирования, и сравнении результатов работы алгоритмов с параметрами имитационной модели потока и общими результатами реализации имитационной модели.

Таким образом, для исследования разработанных алгоритмов необходимо:

1. построить компьютерную имитационную модель асинхронного МС-потока событий (см. приложение А), задав параметры МС-потока, получить с помощью имитационной модели реализацию моментов наступления событий потока и данные о реализовавшихся интервалах стационарности;

2. считая значения всех параметров и данные о реализовавшихся интервалах стационарности асинхронного МС-потока событий неизвестными, применить к реализации моментов наступления событий потока алгоритм отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности и алгоритмы оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока, получив таким образом для исследуемого потока отрезки реализации, соответствующие интервалам стационарности, оценку числа состояний, оценки значений интенсивности в пределах интервала наблюдения;
3. сравнивая результаты работы алгоритмов с данными имитационной модели (параметрами имитационной модели и данными о реализовавшихся интервалах стационарности), получить численные характеристики качества работы алгоритмов.

Для экспериментального исследования алгоритмов, сформулированных в разделе 2, необходимо разработать программный комплекс, удовлетворяющий следующим требованиям.

1. Программный комплекс должен позволять экспериментатору «вмешиваться» в работу алгоритмов на каждом шаге проведения эксперимента, давать возможность корректировать ход работы алгоритмов, что позволяет повысить интеллектуальность и эффективность использования программного комплекса; возможность контролировать процесс эксперимента позволяет дополнительно изучать алгоритмы и продолжать процесс формализации и алгоритмизации принятия решений в ходе работы алгоритмов.
2. Программный комплекс должен позволять достаточно гибко изменять внутренние параметры алгоритмов. Для повышения степени формализации алгоритмов необходимо сравнивать значения различных параметров, выбираемые на основании формул, заложенных в алгоритм, со значениями, выбираемыми экспериментатором на основании опыта и интуиции. Поэтому необходимо иметь возможность ввода параметров алгоритма вручную и

сравнения эффективности работы алгоритмов с различными параметрами для одних и тех же исходных данных.

3. Программный комплекс должен предоставлять высокую степень визуализации. Во многих случаях в алгоритмах визуальные данные (вид графиков и гистограмм, расположение компонент связности в графе оценок), облегчают процесс принятия решения о значениях внутренних параметров алгоритмов. Многократное проведение экспериментов способствует накоплению опыта и последующей формализации процесса принятия решений экспериментатором.
4. Программный комплекс должен состоять из отдельных блоков, каждый из которых может быть использован независимо. Это позволит менять сценарий эксперимента и проводить отдельные этапы эксперимента изолированно с заранее подготовленными данными.

Программный комплекс, разработанный для экспериментального исследования алгоритмов, сформулированных в разделах 1 и 2, обладает следующими свойствами.

1. Пошаговая визуализация работы всех алгоритмов. Это позволяет более эффективно принимать решения и выбирать параметры алгоритма.
2. Двойной контроль (программно и вручную) принятия решений в процессе выполнения алгоритмов, что позволяет корректировать выполнение шагов алгоритма в случае необходимости.
3. Ввод параметров алгоритмов и промежуточных данных вручную, с возможностью выбора из предложенных программой вариантов, что позволяет изучать эффективность формул, заложенных в алгоритмы.
4. Возможность провести эксперимент повторно, с теми же исходными данными, но другими промежуточными параметрами, для изучения влияния выбора тех или иных параметров на эффективность работы алгоритмов.

5. Возможность на любом шаге эксперимента вернуться на несколько шагов назад и изменить параметры или принятое ранее решение; это необходимо для того, чтобы, при необходимости, скорректировать выбор параметров, не начинать эксперимент с нуля, а иметь возможность изменить лишь часть эксперимента.
6. Возможность сохранения промежуточных результатов эксперимента. Это необходимо для автономного использования блоков программного комплекса, а также для того, чтобы иметь возможность сравнивать данные, получаемые в ходе различных экспериментов и исследовать их с помощью другого программного обеспечения.
7. Возможность сохранения хода эксперимента с последующей возможностью воспроизвести ход эксперимента. Это позволяет сравнивать результаты отдельных шагов алгоритма, возвращаться к уже проделанным экспериментам и анализировать или корректировать их.

Комплекс программ обеспечивает гибкость выбора параметров и принятия решений в ходе эксперимента, интеллектуализацию экспериментов за счет привлечения опыта, знаний и интуиции экспериментатора, возможность анализа алгоритмов для дальнейшей их формализации.

Программный комплекс включает следующие блоки:

Блок 1. Имитационная модель асинхронного МС-потока событий с конечным числом состояний.

Блок 2. Итерационный алгоритм отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности:

а) алгоритм получения последовательности разбиений графа оценок на компоненты связности и выбор из этой последовательности разбиения, перспективного для дальнейшего исследования;

б) процедура проверки и коррекции отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности;

в) процедура финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующих интервалам стационарности.

Блок 3. Алгоритмы оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий по данным об отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности:

а) алгоритм, основанный на свойствах гистограммы оценок, полученной по «внутриинтервальным» оценкам интенсивности асинхронного МС-потока событий;

б) алгоритм, основанный на свойствах оценок интенсивности, полученных по отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности.

Блок 4. Алгоритм оценивания других параметров асинхронного МС-потока событий (матрица вероятностей переходов, параметры длительности состояний).

С использованием данного программного комплекса было проведено несколько серий экспериментов, демонстрирующих работоспособность исследуемых алгоритмов при различных сочетаниях параметров для асинхронных МС-потоков событий.

Эффективность работы алгоритмов и качество оценивания определяется следующими показателями:

1. Сравнивается оценка числа состояний потока, полученная с помощью предложенных алгоритмов, и число состояний, реализовавшееся в за время наблюдения.
2. Среднее (по количеству состояний) относительное отклонение оценок $\hat{\lambda}_i$ значений интенсивности от ближайших к ним истинных значений λ_i интенсивностей, рассчитанное по формуле

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{\lambda}_i - \lambda_i|}{\lambda_i}, \quad (3.0.1)$$

где n — число состояний исследуемого асинхронного МС-потока событий.

3. Процент событий в реализации потока, для которых неверно определено состояние, в котором они наступили (процент неверно отнесенных событий).

В качестве иллюстрации и для обсуждения некоторых особенностей выбора внутренних параметров алгоритмов приведем ход эксперимента для асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями.

3.1 Пример применения алгоритмов к имитационной модели асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями

Для получения реализации компьютерной имитационной модели асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями заданы следующие значения параметров:

$$n = 3, \Lambda = \{2; 10; 50\}, \alpha = \{0, 1; 0, 1; 0, 1\},$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.1.2)$$

В результате моделирования получена реализация асинхронного МС-потока событий с числом событий $N = 999$ и данные о реализовавшихся интервалах стационарности (таблица 3.1).

Таблица 3.1 — Данные об интервалах стационарности

k	p_k	q_k	$\lambda_{(k)}$
1	1	11	2
2	12	322	50
3	323	380	10
4	381	471	50
5	472	519	10
6	520	589	50
7	590	606	10
8	607	643	2
9	644	954	10
10	955	999	50

Применим к полученной реализации алгоритм отнесения событий реализации к интервалам стационарности и прокомментируем шаги алгоритма на каждой итерации.

Шаг 1. Номер итерации k полагаем равным 1. На подготовительном этапе (шаге 1) алгоритма по реализации моментов наступления событий вида (1.2.1) строится верхнетреугольная матрица оценок D (1.2.5). Полагается $D^{(1)} = D$.

Также задается величина M — число событий, отнесенных к отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности, по достижении которого алгоритм переходит к процедуре финальной коррекции разбиения реализации на последовательности событий, соответствующих интервалам стационарности. Очевидно, что для этого необходимо отнести к отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности, большой процент событий из выборки (1.2.1). Напомним, что «неотнесенные» события в результате работы алгоритма будут отнесены к имеющимся оценкам интервалов стационарности или сформируют новые отрезки реализации согласно процедуре финальной коррекции (подподраздел 2.3.4). В данном примере $M = 900$ (90% событий из выборки). Здесь же задается начальное значение числа событий, отнесенных к интервалам стационарности ($M_1 = 0$).

Итерация 1.

Шаг 2. Текущее значение величины M_1 меньше величины M , поэтому переходим к шагу 3 алгоритма.

Шаг 3. По матрице оценок $D^{(1)} = D$ строится гистограмма оценок $H^{(1)}$. На данной итерации алгоритма для построения гистограммы выбран шаг, равный 0,5. Полученная гистограмма $H^{(1)}$ представлена на рисунке 3.1 (напомним, что на рисунках для наглядности представлены огибающие гистограммы оценок, полученные средствами MS Excel).

Отметим, что шаг, с которым построена гистограмма, является одним из параметров чувствительности алгоритма. Основная масса значений оценок интенсивности исследуемого потока (99% всех оценок матрицы $D^{(1)}$) сосредоточена на интервале от 0 до 60, в то время как размах всей выборки значений оценок интенсивности потока (ненулевых элементов матрицы $D^{(1)}$) равен 600. Это связано с тем, что дисперсия оценок интенсивности пропорциональна квадрату значения интенсивности, поэтому некоторые оценки могут быть существенно больше, чем математическое ожидание. В связи с этим необходимо, во-первых, задать шаг гистограммы таким образом, чтобы полученная гистограмма была

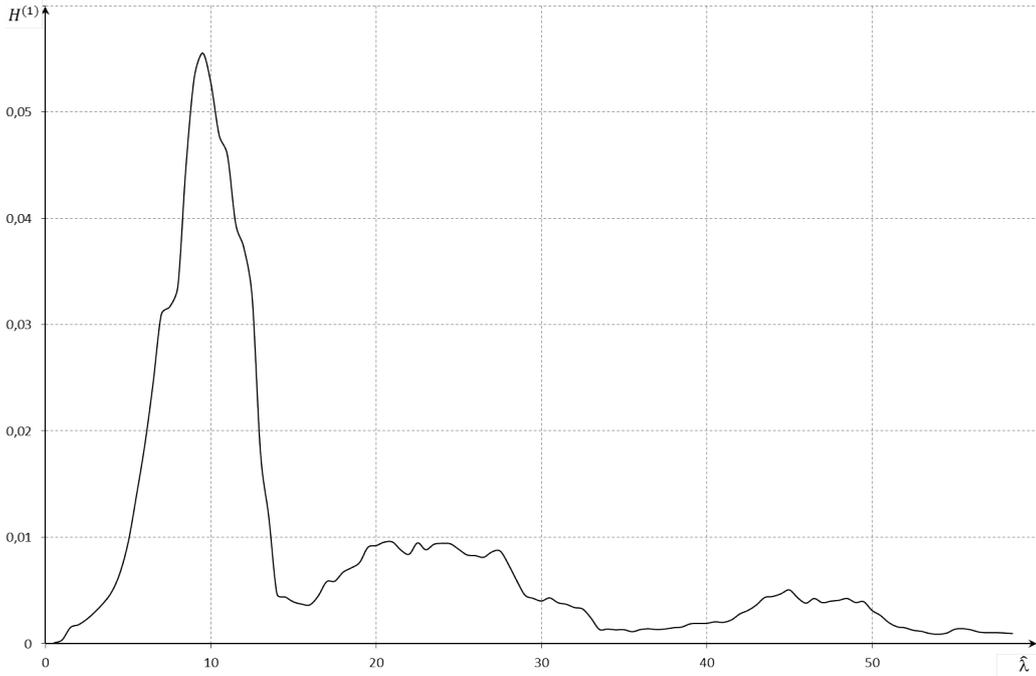


Рисунок 3.1 — Гистограмма $H^{(1)}$ оценок интенсивностей

достаточно информативна, а, во-вторых, использовать для дальнейшего анализа участок гистограммы, содержащий существенный процент (90–99%) всех оценок из матрицы D .

По матрице оценок $D^{(1)} = D$ строится граф $G^{(1)}$ (на 1-ой итерации граф является полным).

На данном шаге необходимо выбрать максимумы гистограммы $H^{(1)}$ для исследования. Как показано в разделе 2, для исследования необходимо выбирать те максимумы, которые наименее подвержены влиянию «шумовых» оценок. Согласно представленному в разделе 2 алгоритму, происходит одновременное исследование обоих максимумов на одной итерации алгоритма.

3.1. В качестве первого исследуемого максимума выбираем максимум гистограммы $H^{(1)}$ с абсциссой $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$.

3.2. В качестве второго исследуемого максимума выбираем максимум с абсциссой $\bar{\lambda}^{(1)} = 44,98$.

Шаг 4. На данном шаге для выбранных максимумов необходимо задать окрестности: $\left(\underline{\lambda}^{(1)} - \underline{\Delta}_1^{(1)}, \underline{\lambda}^{(1)} + \underline{\Delta}_2^{(1)}\right)$ и $\left(\bar{\lambda}^{(1)} - \bar{\Delta}_1^{(1)}, \bar{\lambda}^{(1)} + \bar{\Delta}_2^{(1)}\right)$. Окрестность максимума выбирается исходя из его конфигурации и значения его абсциссы.

4.1. Для величины $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ задается окрестность $(6, 74; 12, 65)$.

4.2. Для величины $\overline{\lambda}^{(1)} = 44,98$ задается окрестность $(42, 98; 55, 01)$.

Шаг 5. На данном шаге для исследуемых максимумов необходимо задать величины, используемые при исследовании окрестностей абсцисс максимумов, определенных на предыдущем шаге алгоритма. Это величина «окна сканирования» ($\underline{\Delta}^{(1)}$ и $\overline{\Delta}^{(1)}$ соответственно) — интервала значений интенсивности, по которому формируются разбиения множества вершин графа на компоненты связности, и количество таких интервалов внутри исследуемой окрестности ($\underline{N}^{(1)}$ и $\overline{N}^{(1)}$). Длина «окна сканирования» также зависит от конфигурации максимума и его абсциссы. Если максимум достаточно выраженный, то можно выбрать «окно сканирования» чуть меньше длины области исследования. Если же максимум недостаточно выражен или очевидно «зашумлен», можно сократить «окно сканирования» до половины от исследуемой области. Кроме того, чем больше значение абсциссы исследуемого максимума, тем шире нужно выбирать «окно сканирования», так как дисперсия оценки интенсивности увеличивается с увеличением значения интенсивности.

5.1. Для максимума гистограммы $H^{(1)}$ с абсциссой $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ задается $\underline{\Delta}^{(1)} = 1$, $\underline{N}^{(1)} = 100$.

5.2. Для максимума с абсциссой $\overline{\lambda}^{(1)} = 44,98$ задается $\overline{\Delta}^{(1)} = 5$, $\overline{N}^{(1)} = 100$.

Шаг 6.

6.1. Для максимума с абсциссой $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ с использованием величин, заданных на шагах 4–5 алгоритма, строятся разбиения графа $G^{(1)}$ на компоненты связности $\underline{G}^{(i)}$, и для каждого из $\underline{N}^{(1)}$ разбиений графа $G^{(1)}$ определяется доминирующая компонента связности $\underline{G}'^{(i)}$, ($i = \overline{1; \underline{N}^{(1)}}$), компонента связности разбиения, имеющая максимальное число вершин.

6.2. Для максимума с абсциссой $\overline{\lambda}^{(1)} = 44,98$ с использованием величин, заданных на шагах 4–5 алгоритма, строятся разбиения графа $G^{(1)}$ на компоненты связности $\overline{G}^{(i)}$, и для каждого из $\overline{N}^{(1)}$ разбиений графа $G^{(1)}$ определяется доминирующая компонента связности $\overline{G}'^{(i)}$, ($i = \overline{1; \overline{N}^{(1)}}$).

Шаг 7.

7.1. Для каждой доминирующей компоненты связности $\underline{G}'^{(i)}$ i -го разбиения ($i = 1; \underline{N}^{(1)}$), полученного на предыдущем шаге, рассчитываются значения компактности $COMP[i]$ и однородности $ENTR[i]$ компоненты. Результаты расчетов для максимума $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ приведены на рисунке 3.2. Среди доминирующих компонент связности выбираем $\underline{G}^{(i_*)}$, для которой значение характеристики $COMP[i]$ наибольшее, при этом значение характеристики $ENTR[i]$ близко к локальному максимуму. По результатам для максимума $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ (рисунок 3.2) функции $COMP$ и $ENTR$ одновременно достигают своих локальных максимумов для разбиений с номерами 1, 58, 65, 76, 86. Предпочтительно разбиение номером 65 ($i_* = 65$), так как для этого разбиения характеристика $COMP$ достигает наибольшего значения.

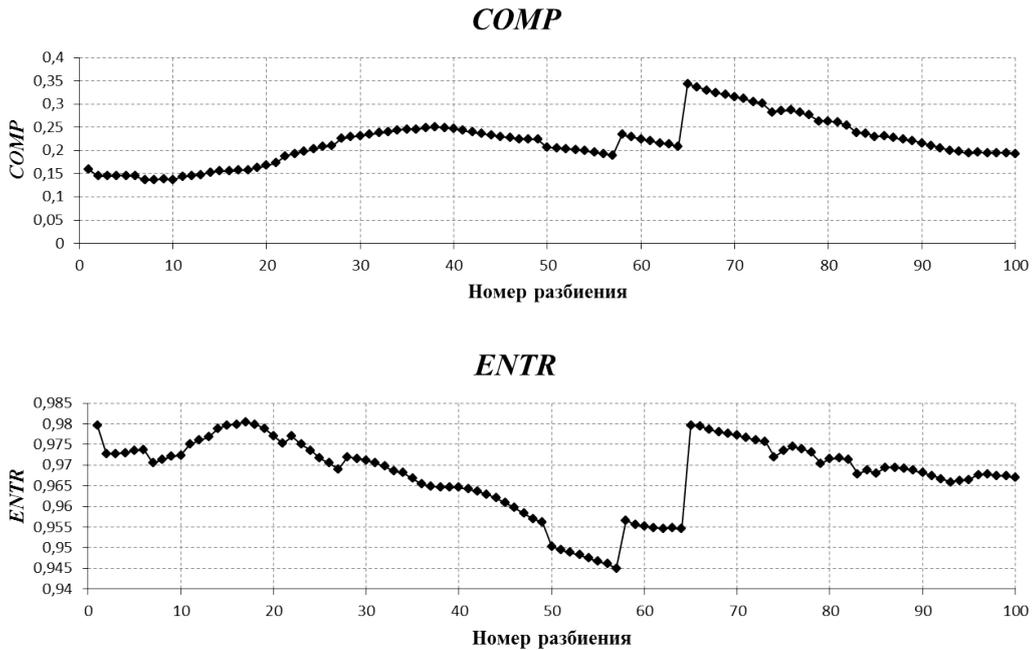


Рисунок 3.2 — Графики $COMP$ и $ENTR$ доминирующих компонент связности для разбиений графа по данным максимума $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ гистограммы $H^{(1)}$

7.2. Для каждой доминирующей компоненты связности $\overline{G}'^{(i)}$ i -го разбиения ($i = 1; \overline{N}^{(1)}$), полученного на предыдущем шаге, рассчитываются значения компактности $COMP[i]$ и однородности $ENTR[i]$ компоненты. Результаты расчетов для максимума $\overline{\lambda}^{(1)} = 44,98$ приведены на рисунке 3.3. По результа-

там для максимума $\bar{\lambda}^{(1)} = 44,98$ среди разбиений, удовлетворяющих условию близости максимумов характеристик $COMP$ и $ENTR$ (11, 15, 31, 38, 43), в качестве $\tilde{G}^{(\bar{i}_*)}$ (рисунок 3.3) выбирается разбиение с максимальным значением показателя $COMP$, т. е. разбиение с номером 11 ($\bar{i}_* = 11$).

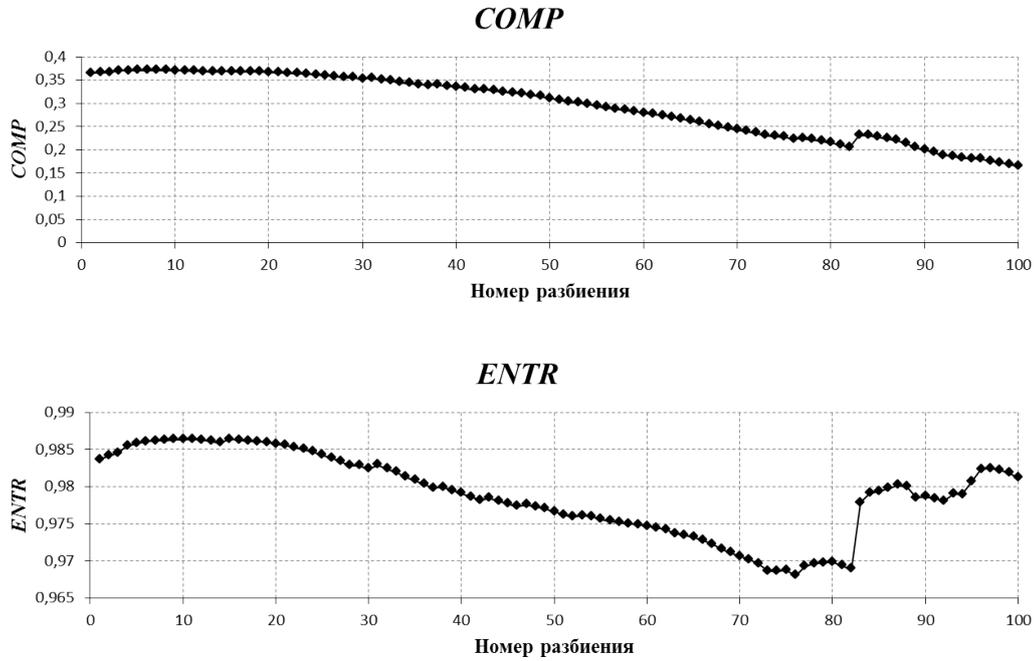


Рисунок 3.3 — Графики $COMP$ и $ENTR$ доминирующих компонент связности для разбиений графа по данным максимума $\bar{\lambda}^{(1)} = 44,98$ гистограммы $H^{(1)}$

Шаг 8.

8.1. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения $\tilde{G}^{(\bar{i}_*)}$ определяются отрезки реализации, соответствующие компонентам связности из разбиения (при этом моментами начала и конца отрезков являются моменты наступления соответствующих событий реализации). Результаты для разбиения $\bar{i}_* = 65$ по данным для максимума $\bar{\lambda}^{(1)} = 9,48$ гистограммы $H^{(1)}$ представлены в таблице 3.2. В этой же таблице приведены результаты расчетов, необходимые для выполнения процедуры проверки и коррекции отрезков реализации на следующем шаге алгоритма; α_{\max} — максимальная доверительная вероятность, с которой по критерию Пирсона [23] принимается гипотеза об экспоненциальном распределении интервалов между моментами наступления событий в соответствующем интервале. Прочерк в графе α_{\max} указывает на

то, что характеристика не может быть рассчитана, и такие отрезки реализации считаются недопустимыми.

Таблица 3.2 — Данные об отрезках реализации, выделенных разбиением $\underline{i}_* = 65$ для максимума $\underline{\lambda}^{(1)} = 9,48$ гистограммы $H^{(1)}$

№ отрезка реализации	№ начального события	№ конечного события	число вершин	% «пропущенных» событий	α_{\max}
1	1	102	102	87,25	0
2	3	80	78	88,46	0
3	4	62	59	79,66	4,69E-73
4	6	51	46	84,78	4,006E-67
5	8	34	27	85,18	0,06962
6	9	19	11	63,63	0,03768
7	148	999	852	38,96	0
8	299	630	332	50,60	0
9	450	451	2	0	—
10	455	614	160	48,12	4,26E-64
11	538	610	73	73,97	0,00044
12	569	607	39	82,05	0,10028
13	576	605	30	86,66	0,38339
14	585	604	20	85,00	0,93082
15	587	603	17	5,88	0,95586

8.2. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения $\overline{G}^{(\overline{i}_*)}$ определяются отрезки реализации, соответствующие компонентам связности из разбиения. Результаты для разбиения $\overline{i}_* = 11$ по данным для максимума $\overline{\lambda}^{(1)} = 44,98$ и результаты расчетов, необходимые для выполнения процедуры проверки и коррекции отрезков реализации на следующем шаге алгоритма, представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 — Данные об отрезках реализации, выделенных разбиением $\overline{i}_* = 11$ для максимума $\overline{\lambda}^{(1)} = 44,98$ гистограммы $H^{(1)}$

№ отрезка реализации	№ начального события	№ конечного события	число вершин	% «пропущенных» событий	α_{\max}
1	10	328	319	0	0,80863
2	373	471	99	4,04	0,04939
3	381	383	3	0	—
4	511	590	80	0	0,15421
5	821	825	5	60	—
6	952	999	48	4,16	0,07382

Шаг 9. На данном шаге осуществляется процедура проверки и коррекции отрезков реализации, полученных на шаге 8 (таблицы 3.2–3.3). Для проверки

отрезков реализации на допустимость использованы следующие значения параметров проверки: $\alpha = 0,01$, $n_{\min} = 5$, $\bar{n}_{\% \max} = 10$. Согласно определению допустимого отрезка реализации, среди отрезков реализации из таблицы 3.2 допустимым является отрезок 15 (все остальные отрезки являются недопустимыми по проценту «пропущенных» событий, кроме отрезка 9, который недопустим по значению характеристики α_{\max}). Среди отрезков реализации из таблицы 3.3 допустимым являются отрезки 1, 2, 4 и 6 (отрезок 3 недопустим по минимальному числу событий в отрезке, отрезок 5 недопустим по проценту «пропущенных» событий). При этом допустимый отрезок 15 в таблице 3.2 пересекается с допустимым отрезком 4 в таблице 3.3, поэтому проводится коррекция выделенных допустимых отрезков реализации (получение двух непересекающихся отрезков с максимальной средневзвешенной величиной α_{\max} из двух пересекающихся). Результаты расчетов для коррекции приведены в таблице 3.4. В таблице $\alpha_{\max 1}$, $\alpha_{\max 2}$ — максимальные доверительные вероятности соответственно для первого и второго отрезков, f — средневзвешенное (по числу событий в 1-ом и 2-ом отрезках) величин $\alpha_{\max 1}$, $\alpha_{\max 2}$.

Таблица 3.4 — Данные для коррекции пересекающихся отрезков реализации [511; 590] и [587; 603]

№ коррекции	отрезок 1	отрезок 2	$\alpha_{\max 1}$	$\alpha_{\max 2}$	f
1	[511; 586]	[587; 603]	0,61417	0,95586	0,67663
2	[511; 587]	[588; 603]	0,50445	0,93358	0,57828
3	[511; 588]	[589; 603]	0,46243	0,85086	0,52508
4	[511; 589]	[590; 603]	0,16183	0,76642	0,25284
5	[511; 590]	[591; 603]	0,15421	0,90091	0,25859

Максимум показателя f достигается для разбиения номер 1. Окончательный список допустимых отрезков реализации, выделенных по результатам исследования гистограммы $H^{(1)}$, представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 — Допустимые отрезки реализации, выделенные после первой итерации алгоритма

№ отрезка	отрезок реализации	число событий	оценка интенсивности
1	[10; 328]	319	44,07
2	[373; 471]	99	43,75
3	[511; 586]	76	41,89
4	[587; 603]	17	12,65
5	[952; 999]	48	44,54

Шаг 10. Вычисляется число M_2 — суммарное число событий в допустимых отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, определенных на данной итерации алгоритма. Согласно данным таблицы 3.5, $M_1 = 559$.

Шаг 11. По отрезкам реализации таблицы 3.5 осуществляется процедура очистки матрицы $D^{(1)}$ от «шумовых» оценок. Полученная матрица обозначается $D^{(2)}$.

Шаг 12. Полагается $k = 2$ и осуществляется переход к шагу 2 алгоритма (начинается 2-я итерация алгоритма).

Итерация 2.

Шаг 2. Текущее значение числа событий, отнесенных к отрезкам реализации, соответствующим интервалам стационарности, (величина M_2) меньше величины M , поэтому осуществляется переход к шагу 3 алгоритма.

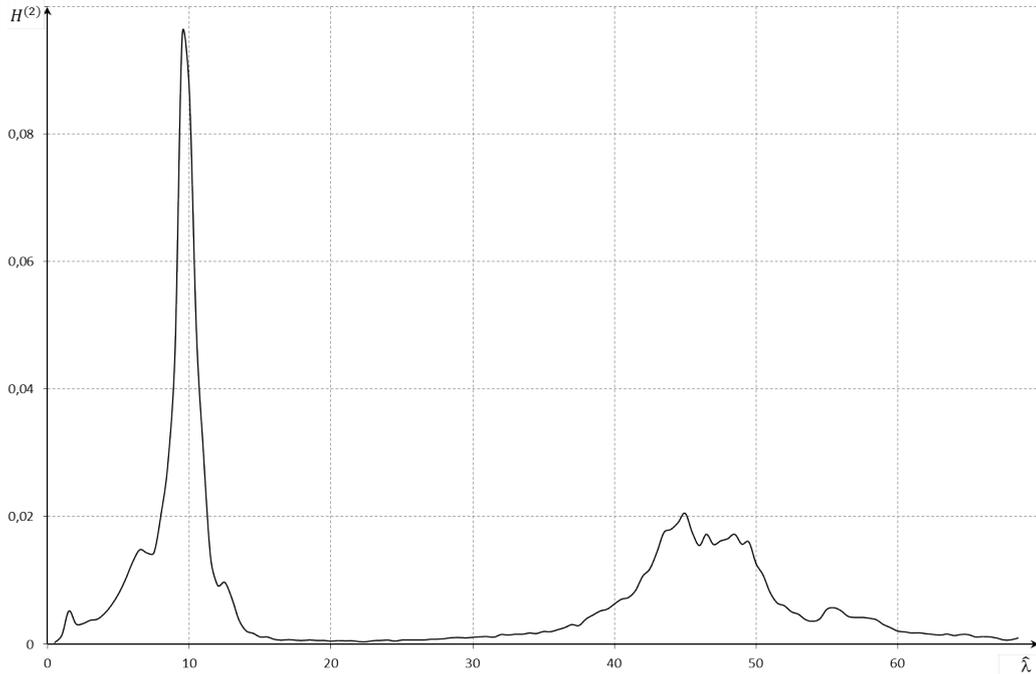


Рисунок 3.4 — Гистограмма $H^{(2)}$ оценок интенсивностей

Шаг 3. По матрице оценок $D^{(2)}$ строятся гистограмма оценок $H^{(2)}$ и граф $G^{(2)}$, представляющий матрицу оценок $D^{(2)}$. Полученная гистограмма $H^{(2)}$ представлена на рисунке 3.4.

При сравнении гистограмм $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ (см. рисунки 3.1 и 3.4 соответственно) визуально заметно существенное сокращение «шума» в интервале значений (15; 33) (за счет очистки матрицы D), при этом в гистограмме $H^{(2)}$ появляется максимум в интервале (0; 3), нуждающийся в дополнительном исследовании. На данном шаге для исследования выбирается максимум с абсциссой $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ и максимум гистограммы $H^{(2)}$ с абсциссой $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ (данный максимум уже исследовался на итерации 1 алгоритма, здесь исследование этого максимума осуществляется для уточнения результатов).

Шаг 4.

4.1. Для максимума с абсциссой $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ задается окрестность исследования (1, 13; 2, 98).

4.2. Для максимума с абсциссой $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ задается окрестность исследования (7, 0; 12, 52).

Шаг 5.

5.1. Для максимума гистограммы $H^{(2)}$ с абсциссой $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ задается $\underline{\Delta}^{(2)} = 1$, число разбиений $\underline{N}^{(2)} = 100$.

5.2. Для максимума с абсциссой $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ задается $\bar{\Delta}^{(2)} = 2$, число разбиений $\bar{N}^{(2)} = 150$.

Шаг 6.

6.1. Для максимума с абсциссой $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ с использованием величин, заданных на шагах 4–5 алгоритма, строятся разбиения графа $G^{(2)}$ на компоненты связности $\underline{G}^{(i)}$, и для каждого из $\underline{N}^{(2)}$ разбиений графа $G^{(2)}$ определяется доминирующая компонента связности $\underline{G}'^{(i)}$, ($i = \overline{1; \underline{N}^{(2)}}$) (компонента связности разбиения, имеющая максимальное число вершин).

6.2. Для максимума $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ с использованием величин, заданных на шагах 4–5 алгоритма, строятся разбиения графа $G^{(2)}$ на компоненты связности $\bar{G}^{(i)}$, и для каждого из $\bar{N}^{(2)}$ разбиений графа $G^{(2)}$ определяется доминирующая компонента связности $\bar{G}'^{(i)}$, ($i = \overline{1; \bar{N}^{(2)}}$).

Шаг 7.

7.1. Для каждой доминирующей компоненты связности $\underline{G}'^{(i)}$ i -го разби-

ния, полученного на предыдущем шаге, рассчитываются значения компактности $COMP[i]$ и однородности $ENTR[i]$. Результаты расчетов для исследуемых максимумов приведены на рисунке 3.5. По этим результатам для максимума $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ (рисунок 3.5) функции $COMP$ и $ENTR$ одновременно достигают своих локальных максимумов для большого количества разбиений, предпочтительным является разбиение 2 ($i_* = 2$).

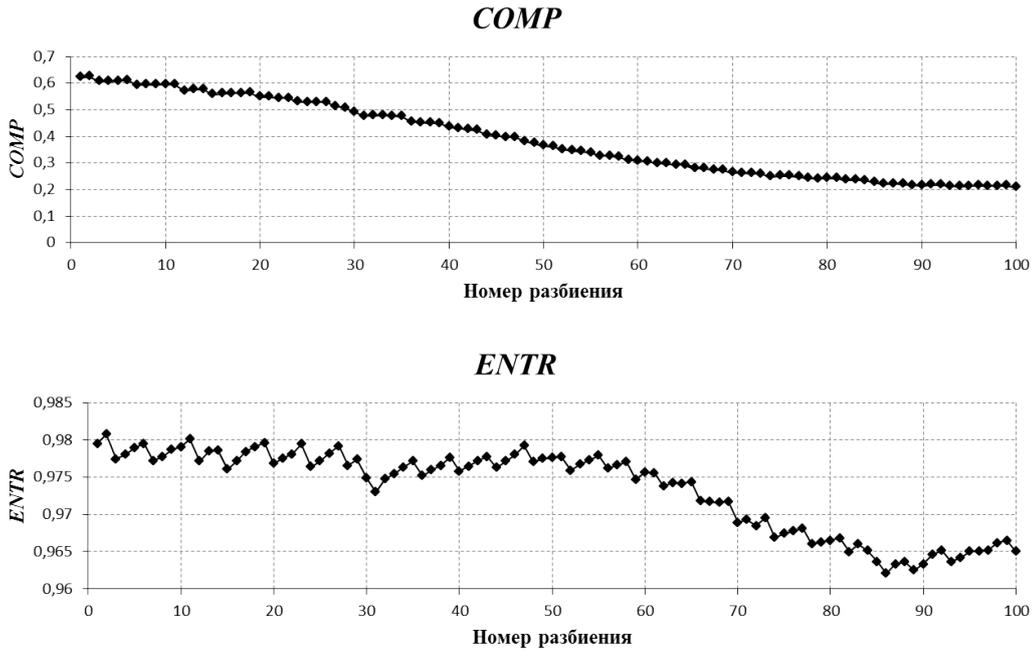


Рисунок 3.5 — Графики $COMP$ и $ENTR$ доминирующих компонент связности для разбиений графа по данным максимума $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ гистограммы $H^{(2)}$

7.2. Для каждой доминирующей компоненты связности $\overline{G}^{(i)}$ i -го разбиения, полученного на предыдущем шаге, рассчитываются значения компактности $COMP[i]$ и однородности $ENTR[i]$ компоненты. Результаты расчетов для исследуемых максимумов приведены на рисунке 3.6. Для максимума $\overline{\lambda}^{(2)} = 9,48$ (рисунок 3.6) функции $COMP$ и $ENTR$ одновременно достигают своих локальных максимумов для разбиений 35, 80, 90, 99 при этом предпочтительнее разбиение 80 ($\overline{i}_* = 80$).

Шаг 8.

8.1. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения i_* определяются отрезки реализации, соответствующие компонентам связности

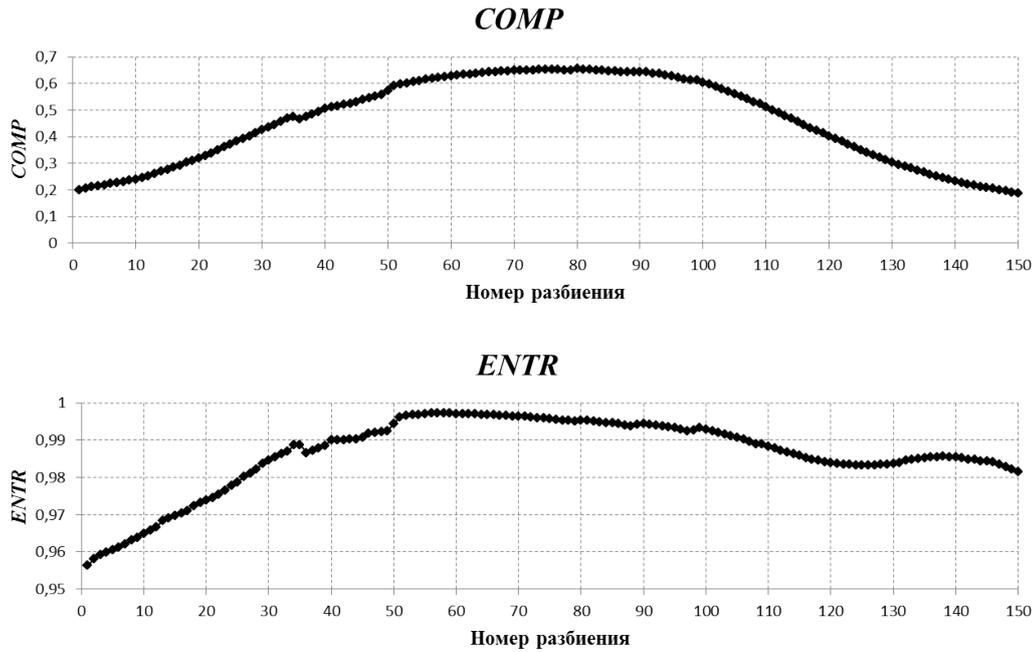


Рисунок 3.6 — Графики COMP и ENTR доминирующих компонент связности для разбиений графа по данным максимума $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ гистограммы $H^{(2)}$

этого разбиения. Соответствующие результаты для разбиения $i^* = 2$ по данным для максимума $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ гистограммы $H^{(2)}$ представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 — Данные об отрезках реализации, выделенных разбиением $\underline{i}_* = 2$ для максимума $\underline{\lambda}^{(2)} = 1,48$ гистограммы $H^{(2)}$

№ отрезка реализации	№ начального события	№ конечного события	число вершин	% «пропущенных» событий	α_{\max}
1	1	9	9	22,22	0,03726
2	604	659	56	0	0,42483
3	793	794	2	0	-
4	795	796	2	0	-
5	894	895	2	0	-

8.2. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения \bar{i}_* определяются отрезки реализации, соответствующие компонентам связности этого разбиения. Соответствующие результаты для разбиения $\bar{i}_* = 80$ по данным для максимума $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 — Данные об отрезках реализации, выделенных разбиением $\bar{i}_* = 80$ для максимума $\bar{\lambda}^{(2)} = 9,48$ гистограммы $H^{(2)}$

№ отрезка реализации	№ начального события	№ конечного события	число вершин в отрезке	% «пропущенных» событий	α_{\max}
1	10	19	10	60	0,07968
2	11	12	2	0	-
3	161	163	3	0	-
4	213	215	3	0	-
5	319	328	10	40	0,41032
6	321	326	6	33,33	0,00205
7	329	372	44	0	0,83634
8	374	375	2	0	-
9	376	377	2	0	-
10	378	379	2	0	-
11	450	451	2	0	-
12	472	510	39	2,56	0,34990
13	516	518	3	33,33	-
14	587	603	17	0	0,95586
15	634	951	318	0	8,77E-12

Шаг 9. Осуществляется процедура проверки и коррекции отрезков реализации таблицы 3.6–3.7. Значения параметров проверки: $\alpha = 0.01$, $n_{\min} = 5$, $\bar{n}_{\% \max} = 10$. Среди отрезков, представленных в таблице 3.6, допустимым является отрезок 2, среди отрезков, представленных в таблице 3.7, допустимыми являются отрезки 7, 12 и 14. При этом отрезок 14 таблицы 3.7 совпадает с отрезком, полученным на предыдущей итерации алгоритма (см. таблицу 3.5, отрезок номер 4).

Таким образом, в результате первых двух итераций допустимыми считаются отрезки реализации, приведенные таблице 3.8.

Таблица 3.8 — Допустимые отрезки реализации, выделенные по результатам 1-ой и 2-ой итерации алгоритма

№ отрезка	отрезок реализации	число событий	оценка интенсивности
1	[10; 328]	319	44,07
2	[329; 372]	44	10,02
3	[373; 471]	99	43,75
4	[472; 510]	39	8,94
5	[511; 586]	76	41,89
6	[587; 603]	17	12,65
7	[604; 659]	56	2,19
8	[952; 999]	48	44,54

Шаг 10. Вычисляется число M_3 — суммарное число событий в допустимых отрезках реализации, выделенных на данной итерации алгоритма. Согласно данным таблицы 3.8, $M_3 = 698$.

Шаг 11. По отрезкам реализации из таблицы 3.8 осуществляется процедура очистки матрицы $D^{(2)}$ от «шумовых» оценок. Полученная матрица обозначается $D^{(3)}$.

Шаг 12. Полагается $k = 3$ и осуществляется переход к шагу 2 алгоритма (начинается 3-я итерация алгоритма).

Итерация 3.

Шаг 2. Текущее значение величины M_3 меньше величины M , поэтому осуществляется переход к шагу 3 алгоритма.

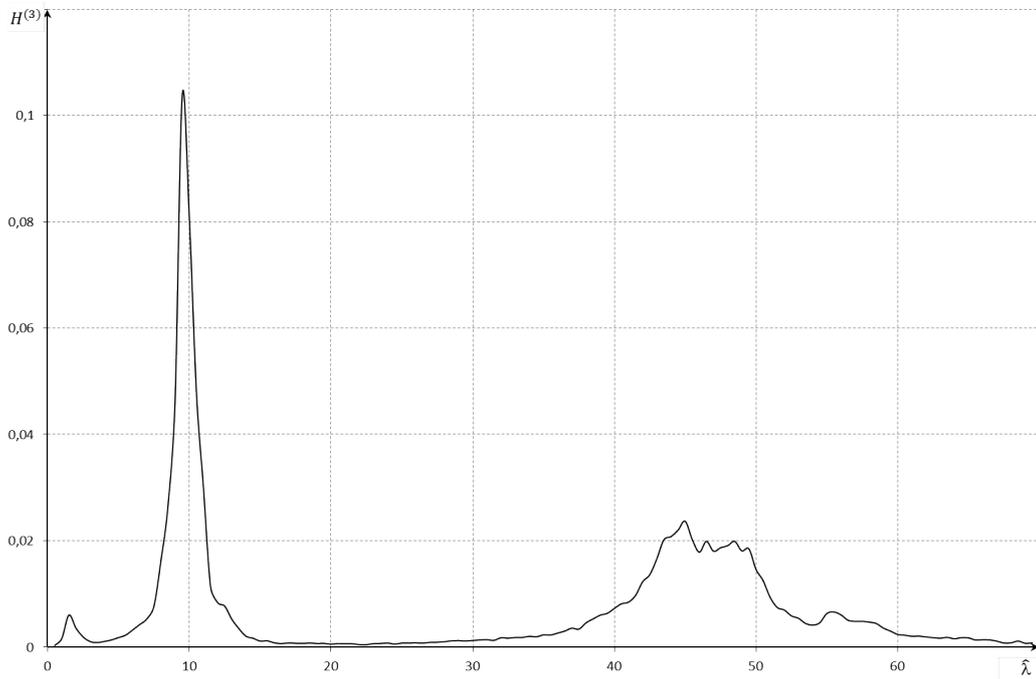


Рисунок 3.7 — Гистограмма $H^{(3)}$ оценок интенсивностей

Шаг 3. По матрице оценок интенсивностей $D^{(3)}$ строится гистограмма оценок $H^{(3)}$ и граф $G^{(3)}$, представляющий матрицу оценок $D^{(3)}$. Полученная гистограмма $H^{(3)}$ представлена на рисунке 3.7.

При сравнении гистограмм $H^{(2)}$ и $H^{(3)}$ (рисунки 3.4 и 3.7) заметно сокращение «шума» между первым и вторым максимумами гистограммы в интервале значений $(1, 48; 9, 48)$. На данном шаге для исследования выбирается максимум с абсциссой $\underline{\lambda}^{(3)} = 9, 48$ и группа максимумов гистограммы $H^{(3)}$ справа в окрестности максимума с абсциссой $\bar{\lambda}^{(3)} = 44, 98$ (оба эти максимума уже исследова-

лись на итерации 1 алгоритма, здесь повторное исследование осуществляется для уточнения результатов).

Шаг 4.

4.1. Для максимума с абсциссой $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ задается окрестность исследования $(9,03; 10,43)$.

4.2. Для максимума с абсциссой $\bar{\lambda}^{(3)} = 44,98$ задается окрестность исследования $(40,0; 53,11)$.

Шаг 5.

5.1. Для максимума гистограммы $H^{(3)}$ с абсциссой $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ задается $\underline{\Delta}^{(3)} = 1$, число разбиений $\underline{N}^{(3)} = 50$.

5.2. Для максимума с абсциссой $\bar{\lambda}^{(3)} = 9,48$ задается $\bar{\Delta}^{(3)} = 5$, число разбиений $\bar{N}^{(3)} = 150$.

Шаг 6.

6.1. Для максимума с абсциссой $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ с использованием величин, заданных на шагах 4–5 алгоритма, строятся разбиения графа $G^{(3)}$ на компоненты связности $\underline{G}^{(i)}$, и для каждого из $\underline{N}^{(3)}$ разбиений графа $G^{(3)}$ определяется доминирующая компонента связности $\underline{G}'^{(i)}$, ($i = \overline{1; \underline{N}^{(3)}}$), компонента связности разбиения, имеющая максимальное число вершин.

6.2. Для максимума $\bar{\lambda}^{(3)} = 44,98$ с использованием величин, заданных на шагах 4–5 алгоритма, строятся разбиения графа $G^{(3)}$ на компоненты связности $\bar{G}^{(i)}$, и для каждого из $\bar{N}^{(3)}$ разбиений графа $G^{(3)}$ определяется доминирующая компонента связности $\bar{G}'^{(i)}$, ($i = \overline{1; \bar{N}^{(3)}}$).

Шаг 7.

7.1 Для каждой доминирующей компоненты связности $\underline{G}'^{(i)}$ i -го разбиения, полученного на предыдущем шаге, рассчитываются значения компактности $COMP[i]$ и однородности $ENTR[i]$. Результаты расчетов для исследуемых максимумов приведены на рисунке 3.8. По этим результатам для максимума $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ (рисунок 3.8) функции $COMP$ и $ENTR$ одновременно достигают своего локального максимума для разбиения 15 ($i_* = 15$).

7.2. Для каждой доминирующей компоненты связности $\bar{G}'^{(i)}$ i -го разбиения

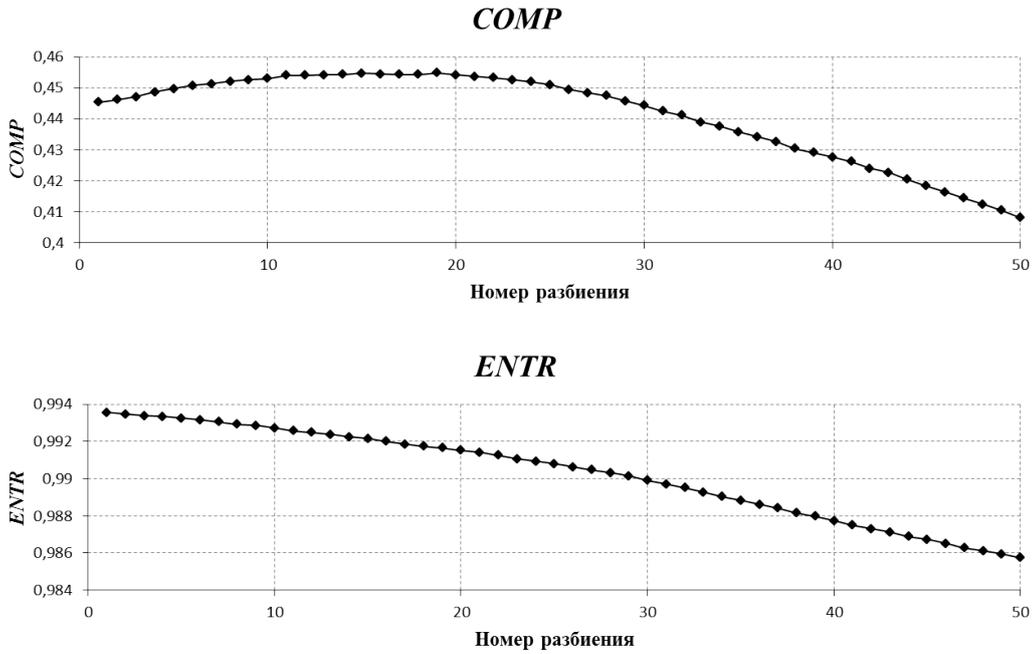


Рисунок 3.8 — Графики $COMP$ и $ENTR$ доминирующих компонент связности для разбиений графа по данным максимума $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ гистограммы $H^{(3)}$

ния, полученного на предыдущем шаге, рассчитываются значения компактности $COMP[i]$ и однородности $ENTR[i]$ компоненты. Результаты расчетов для исследуемых максимумов приведены на рисунке 3.9. Для максимума $\bar{\lambda}^{(3)} = 44,98$ (рисунок 3.9) функции $COMP$ и $ENTR$ одновременно достигают своих локальных максимумов для разбиений 75, 96, 106, 112, 118, при этом предпочтительнее разбиение 75 ($\bar{i}_* = 75$).

Шаг 8.

8.1. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения \underline{i}_* определяются отрезки реализации, соответствующие компонентам связности этого разбиения. Соответствующие результаты для разбиения $\underline{i}_* = 15$ по данным для максимума $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ гистограммы $H^{(3)}$ представлены в таблице 3.9.

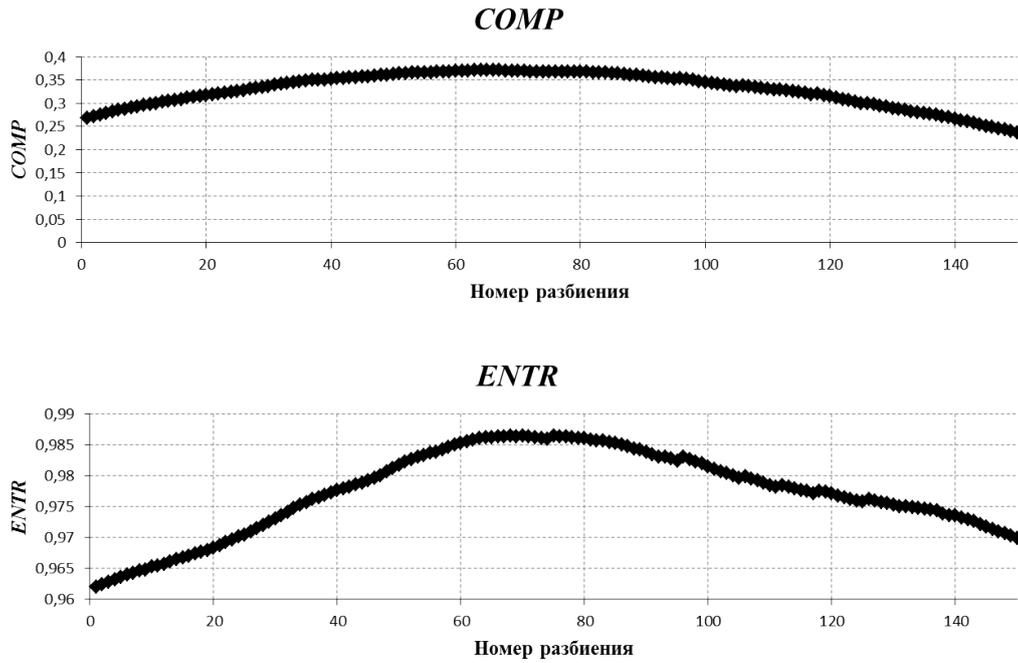


Рисунок 3.9 — Графики COMP и ENTR доминирующих компонент связности для разбиений графа по данным максимума $\bar{\lambda}^{(3)} = 44,98$ гистограммы $H^{(3)}$

Таблица 3.9 — Данные об отрезках реализации, выделенных разбиением $\underline{i}_* = 15$ для максимума $\underline{\lambda}^{(3)} = 9,48$ гистограммы $H^{(3)}$

№ отрезка реализации	№ начального события	№ конечного события	число вершин	% «пропущенных» событий	α_{\max}
1	10	18	9	66,66	0,19274
2	11	12	2	0	-
3	162	163	2	0	-
4	321	326	6	33,33	0,00205
5	322	327	50	0	0,00027
6	329	372	4,54	0	0,83634
7	376	377	2	0	-
8	450	451	2	0	-
9	475	510	36	22,22	0,76533
10	486	491	6	66,66	0,04231
11	487	490	4	50	0,04227
12	489	492	4	50	0,37435
13	516	518	3	33,33	-
14	588	603	16	0	0,933584
15	652	654	3	33,33	-
16	657	658	2	0	-
17	660	951	292	0	0,04271

8.2. По компонентам связности с непустым множеством ребер разбиения \bar{i}_* определяются отрезки реализации, соответствующие компонентам связности этого разбиения. Соответствующие результаты для разбиения $\bar{i}_* = 75$ по данным для максимума $\bar{\lambda}^{(3)} = 44,98$ представлены в таблице 3.10.

Таблица 3.10 — Данные об отрезках реализации, выделенных разбиением $\bar{i}_* = 75$ для максимума $\bar{\lambda}^{(3)} = 44,98$ гистограммы $H^{(3)}$

№ отрезка реализации	№ начального события	№ конечного события	число вершин	% «пропущенных» событий	α_{\max}
1	11	328	317	0	0,99679
2	373	471	99	0	0,04939
3	511	586	76	1,31	0,61417
4	821	825	5	60	-
5	952	999	48	4,16	0,07382

Шаг 9. Осуществляется процедура проверки и коррекции интервалов таблицы 3.9–3.10. Значения параметров проверки: $\alpha = 0.01$, $n_{\min} = 5$, $\bar{n}_{\% \max} = 10$. Среди отрезков реализации из таблицы 3.9 допустимыми являются отрезки 6, 14 и 17, среди отрезков реализации из таблицы 3.10 допустимыми являются отрезки 1, 2, 3 и 5. При этом отрезки 6 и 14 таблицы 3.9 совпадают с отрезками, выделенными на предыдущей итерации алгоритма (см. таблицу 3.8 отрезки 2 и 6), как и отрезки 1, 2, 3 и 5 из таблицы 3.10.

Таким образом, по результатам трех итераций допустимыми считаются отрезки реализации, приведенные таблице 3.11

Таблица 3.11 — Допустимые отрезки реализации, выделенные по результатам трех итераций алгоритма

№ отрезка	отрезок реализации	число событий	оценка интенсивности
1	[10; 328]	319	44,07
2	[329; 372]	44	10,02
3	[373; 471]	99	43,75
4	[472; 510]	39	8,94
5	[511; 586]	76	41,89
6	[587; 603]	17	12,65
7	[604; 659]	56	2,19
8	[660; 951]	292	10,26
9	[952; 999]	48	44,54

Шаг 10. Вычисляется число M_4 — суммарное число событий в допустимых отрезках реализации, выделенных на данной итерации алгоритма. Согласно данным таблицы 3.11, $M_4 = 990$.

Шаг 11. По отрезкам реализации из таблицы 3.11 осуществляется процедура очистки матрицы $D^{(3)}$ от «шумовых» оценок. Полученная матрица обозначается $D^{(4)}$.

Шаг 12. Полагается $k = 4$ и осуществляется переход к шагу 2 алгоритма (начинается 4-я итерация алгоритма).

Итерация 4.

Шаг 2. Текущее значение величина M_4 больше величины M . Алгоритм отнесения событий реализации к интервалам стационарности переходит к шагу 13.

Шаг 13. Из таблицы 3.11, представляющей результаты работы алгоритма, следует, что события с 1-го по 9-е не отнесены ни к одному из выделенных отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности. Для отнесения этих событий к допустимому отрезку реализации $[10, 328]$ или формирования отдельного допустимого отрезка реализации используется процедура финальной коррекции разбиения (раздел 2, подраздел 2.3.4). В результате анализа расчетов, приведенных в таблице 3.12, события $[1, 9]$ составили отдельный отрезок реализации, соответствующий интервалу стационарности.

Таблица 3.12 — Данные для коррекции отрезка $[1; 9]$

№ коррекции	отрезок 1	отрезок 2	$\alpha_{\max 1}$	$\alpha_{\max 2}$	g
1	[1; 2]	[3; 328]	0	0	0
2	[1; 3]	[4; 328]	0	0	0
3	[1; 4]	[5; 328]	0	0	0
4	[1; 5]	[6; 328]	0,00834	0	0
5	[1; 6]	[7; 328]	0,11019	0	0
6	[1; 7]	[8; 328]	0,00159	0,00220	0
7	[1; 8]	[9; 328]	0,39630	0,00117	0
8	[1; 9]	[10; 328]	0,03726	0,80863	0,78746

$$A([1, 9]) = 0,03726$$

Шаг 14. По завершении работы алгоритма отнесения событий реализации к интервалам стационарности на множестве событий реализации асинхронного МС-потока событий определены оценки интервалов стационарности, указанные в таблице 3.13

Таблица 3.13 — Окончательное разбиение множества событий реализации на отрезки, соответствующие интервалам стационарности

№ отрезка	отрезок реализации	число событий	оценка интенсивности
1	[1; 9]	9	1,29
2	[10; 328]	319	44,07
3	[329; 372]	44	10,02
4	[373; 471]	99	43,75
5	[472; 510]	39	8,94
6	[511; 586]	76	41,89
7	[587; 603]	17	12,65
8	[604; 659]	56	2,19
9	[660; 951]	292	10,26
10	[952; 999]	48	44,54

Далее к результатам работы алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности применим алгоритмы оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий. Для этого необходима информация об отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, и оценках интенсивности потока, полученных по этим отрезкам реализации, которая содержится в таблице 3.13. С использованием этих данных построим гистограмму оценок. На рисунке 3.10 представлена гистограмма с шагом 1, построенная с использованием информации из таблицы 3.13.

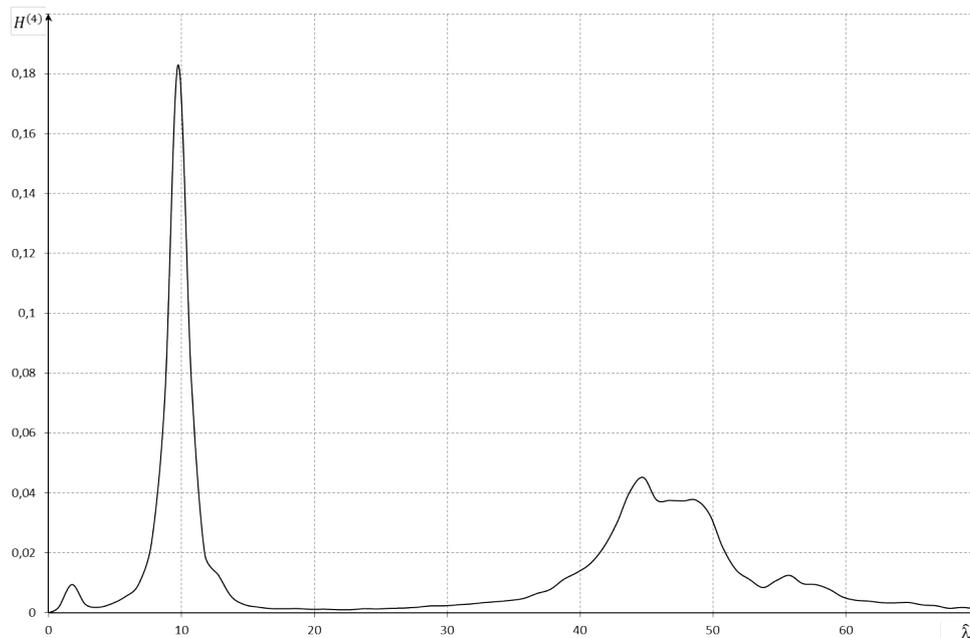


Рисунок 3.10 — Гистограмма оценок, построенная с использованием информации об оценках интервалов стационарности

Визуально гистограмма на рисунке 3.10 содержит три группы максимумов (первая группа — на интервале $(0; 2)$, вторая группа — на интервале $(2; 20)$, третья группа — на интервале $(20; 70)$), соответствующих трем состояниям исследуемого потока событий. Значения максимумов гистограммы расположены в окрестностях значений интенсивности исследуемого потока событий.

Рекурсивный алгоритм (подподраздел 2.4.1), основанный на свойствах гистограммы, последовательно разделяет множество отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности (2.4.18), на группы. Для каждой вновь полученной группы проверяется гипотеза об экспоненциальном распределении. Совокупность отрезков реализации объявляется относящейся к одному и тому же состоянию исследуемого потока, если для этой группы не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении. Результаты работы алгоритма в виде дерева принятия решений представлены на рисунке 3.11.

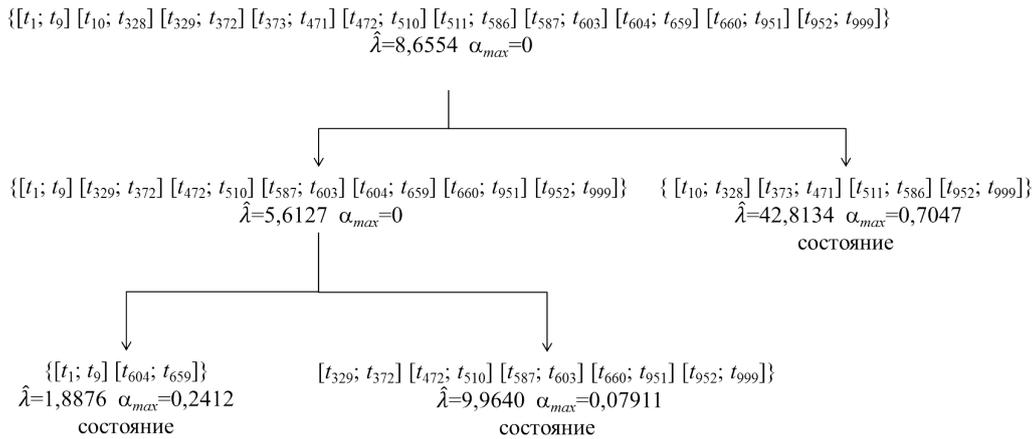


Рисунок 3.11 — Результат работы алгоритма подподраздела 2.4.1

Рекурсивный алгоритм (подподраздел 2.4.2), основанный на свойствах оценок интенсивности, полученных на отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности, последовательно разделяет ряд оценок интенсивности потока на отрезках реализации (2.4.21) на группы. Для каждой вновь полученной группы рассчитывается показатель однородности. Группа оценок интенсивности объявляется относящейся к одному и тому же состоянию, если показатель однородности не превышает наперед заданного значения (в данном случае $c_0 = 1$). В результате работы алгоритма оценивания определено три

группы оценок интенсивности и соответственно три состояния асинхронного МС-потока, результаты расчетов представлены в таблице 3.14.

Таблица 3.14 — Результаты работы алгоритма подподраздела 2.4.2

$$\hat{n} = 3, \hat{\lambda}_1 = 2,07, \hat{\lambda}_2 = 10,21, \hat{\lambda}_3 = 43,75$$

№ интервала	интервал	оценка интенсивности	соответствующая оценка $\hat{\lambda}$
1	[1; 9]	1,29	$\hat{\lambda}_1$
2	[10; 328]	44,07	$\hat{\lambda}_3$
3	[329; 372]	10,02	$\hat{\lambda}_2$
4	[373; 471]	43,75	$\hat{\lambda}_3$
5	[472; 510]	8,94	$\hat{\lambda}_2$
6	[511; 586]	41,89	$\hat{\lambda}_3$
7	[587; 603]	12,65	$\hat{\lambda}_2$
8	[604; 659]	2,19	$\hat{\lambda}_1$
9	[660; 951]	10,26	$\hat{\lambda}_2$
10	[952; 999]	44,54	$\hat{\lambda}_3$

Сопоставляя результаты работы алгоритмов отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности и оценивания числа состояний и значений интенсивности потока событий с данными имитационного моделирования (значениями параметров (3.1.2) и данными для интервалов стационарности, полученными в результате имитационного моделирования, приведенными в таблице 3.1), необходимо отметить следующее:

1. оценка числа состояний $\hat{n} = 3$ совпадает со значением $n = 3$ числа состояний, реализовавшихся в результате имитационного моделирования;
2. относительное отклонение оценок $\hat{\lambda}_i$ значений интенсивности от ближайших к ним истинных значений λ_i интенсивностей, рассчитанное по формуле (3.0.1), составляет 0,06 для алгоритма из подподраздела 2.4.1) и 0,06 для алгоритма из подподраздела 2.4.2) (т. е. оценка значения интенсивности отличается от истинного значения интенсивности на 6 % величины истинного значения);
3. процент событий реализации, неверно отнесенных к соответствующим интервалам стационарности, равен 5,2 %.

Таким образом, совокупность результатов работы алгоритма отнесения событий реализации к интервалам стационарности асинхронного МС-потока событий и алгоритмов оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий можно признать удовлетворительными, исследуемые алгоритмы являются работоспособными.

Пример оценивания других параметров асинхронного МС-потока событий (параметров экспоненциального распределения длительности интервалов стационарности состояний и матрицы вероятностей переходов из одного состояния в другое) рассмотрен в Приложении Б. Пример применения алгоритмов оценивания параметров асинхронного МС-потока событий к реальному потоку см. в [10].

3.2 Численные результаты работы алгоритмов при некоторых сочетаниях параметров

В силу особенностей алгоритма отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности, результаты которого применяются в алгоритмах оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, ожидается, что алгоритм будет давать худшие результаты в следующих случаях:

1. Близкие значения величин λ_i (значений интенсивности наступления событий в состояниях процесса $\lambda(t)$). Близость значений понимается в смысле малого отношения модуля разности значений интенсивности к «размаху» значений интенсивности (разности между максимальным и минимальным значениями интенсивности).
2. «Короткие» интервалы стационарности (в смысле малости произведения интенсивности наступления событий λ_i в i -ом состоянии на среднее время пребывания $1/\alpha_i$ в i -ом состоянии и, следовательно, небольшое количество событий в пределах одного интервала стационарности).
3. Преобладание в реализации событий, произошедших в одном из состояний потока.

Для демонстрации результатов работы алгоритмов, приведенных в разделе 2, при таких неблагоприятных сочетаниях параметров асинхронного МС-потока событий, были проведены эксперименты, численные результаты которых приводятся ниже.

В каждом эксперименте к реализациям асинхронного МС-потока событий применялся алгоритм отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности (см. подподраздел 2.3.2). Затем оценивание числа состояний и значений интенсивности потока производилась тремя способами:

Способ 1: с использованием алгоритма, основанного на свойствах гистограммы, полученной по «внутриинтервальным» оценкам (см. подподраздел 2.4.1).

Способ 2: с использованием алгоритма, основанного на свойствах оценок интенсивности, полученных на отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности (см. подподраздел 2.4.2).

Способ 3: визуальное исследование гистограммы, выявление групп максимумов, соответствующих состояниям процесса $\lambda(t)$ и оценивание λ_i по значениям абсцисс максимумов гистограммы (см. подподраздел 1.5).

Первый эксперимент иллюстрирует зависимость качества оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями от модуля разности между значениями интенсивности состояний $|\lambda_1 - \lambda_2|$.

Для получения реализаций компьютерной имитационной модели асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями были заданы следующие значения параметров: число состояний $n = 2$, параметры распределения длительности интервалов стационарности $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, интенсивность первого состояния $\lambda_1 = 5$, интенсивность второго состояния для каждой новой реализации изменяется в диапазоне $\lambda_2 = \overline{6;35}$ с шагом 1. Каждая реализация наблюдалась на протяжении 100 единиц времени.

Изменения значений показателей качества оценивания в зависимости от модуля разности между значениями интенсивности для первого, второго и тре-

твого способов исследования реализации представлены на рисунках 3.12, 3.13 и 3.14 и в таблицах 3.15, 3.16 и 3.17.

В случаях, когда $\lambda_2 = \overline{6;8}$, с помощью алгоритма отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности определено, что в пределах интервала наблюдения реализовался простейший поток с интенсивностью, близкой по значению к $\lambda_1 = 5$. Начиная с $\lambda_2 = 9$ (т. е. когда модуль разности интенсивностей состояний $|\lambda_2 - \lambda_1|$ достиг четырех), алгоритм отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности обнаруживает более одного интервала стационарности. После очистки матрицы оценок от «шумовых» оценок согласно результатам отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности, гистограмма оценок приобретает вид, характерный для потока с двумя состояниями, поэтому при дальнейшем исследовании реализации способом 3 начиная с $|\lambda_2 - \lambda_1| = 4$ оценка числа состояний исследуемого потока соответствует истинному значению. Однако при дальнейшем исследовании реализации способом 1 для $|\lambda_2 - \lambda_1| \leq 8$ в соответствии с критерием согласия Пирсона для совокупности всех отрезков реализации, полученных на первом этапе исследования, не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении, т. е. с помощью алгоритма оценивания числа состояний и значений интенсивности (см. подраздел 2.4.1) в реализации потока определяется одно состояние с интенсивностью, значение которой расположено между значениями λ_1 и λ_2 . В случае способа 2 показатель однородности группы оценок интенсивности c (2.4.23) достигает заданного порогового значения ($c_0 = 1$) для $|\lambda_2 - \lambda_1| = 11$, и исследование способом 2 также определяет на всем протяжении реализации одно состояние с некоторой средней интенсивностью.

Неверное определение количества состояний потока негативно отражается на других показателях качества оценивания, поэтому для разности значений интенсивностей $|\lambda_2 - \lambda_1| \leq 10$ способы 1 и 2 дают худшие результаты, чем способ 3. Когда же оценка числа состояний потока начинает соответствовать значению числа состояний (а именно $\hat{n} = 2$), с увеличением разности $|\lambda_2 - \lambda_1|$ среднее отклонение оценок интенсивностей от значений интенсивности, задан-

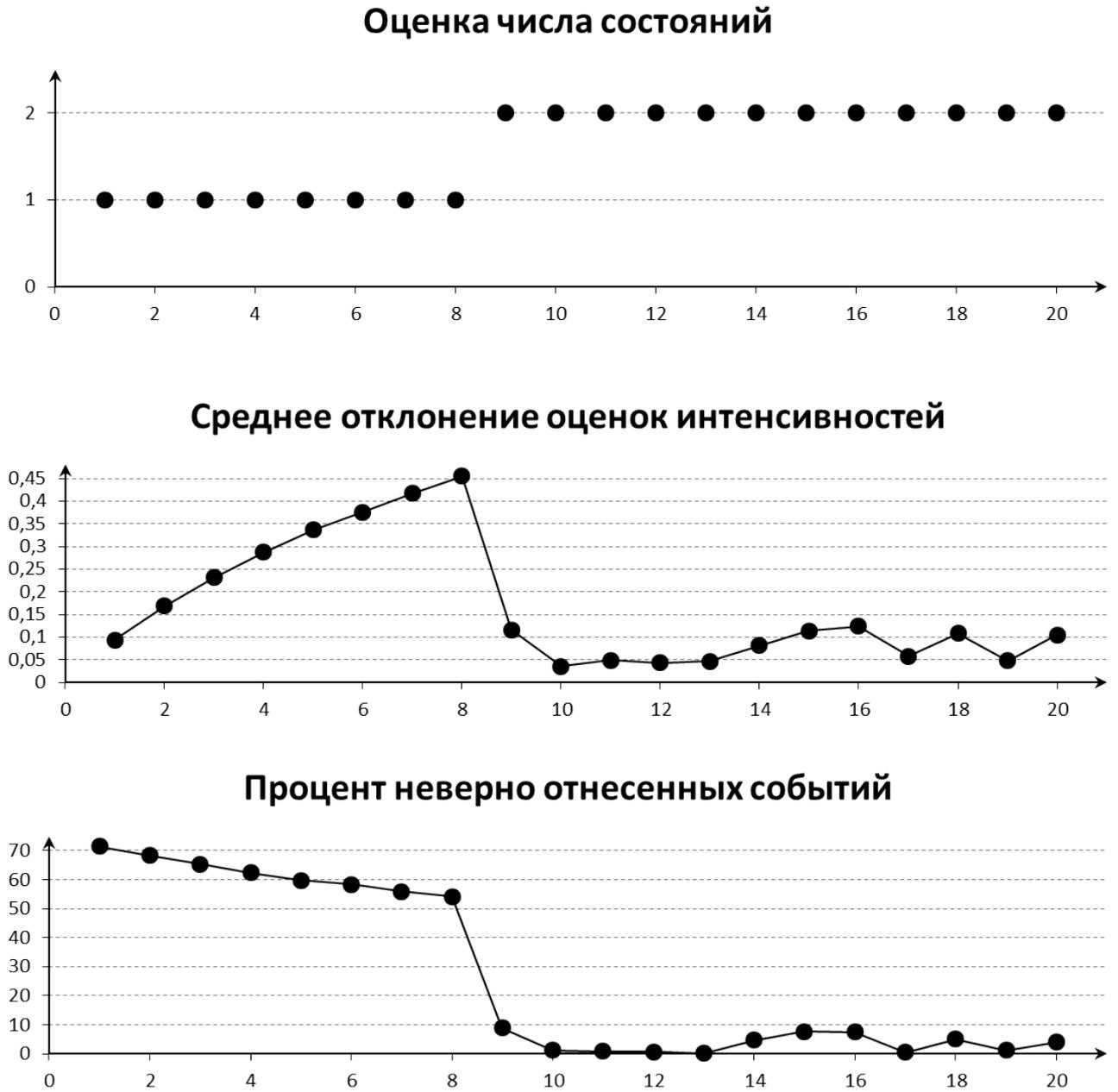


Рисунок 3.12 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \overline{6; 35}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, в зависимости от $|\lambda_2 - \lambda_1|$.

Способ 1

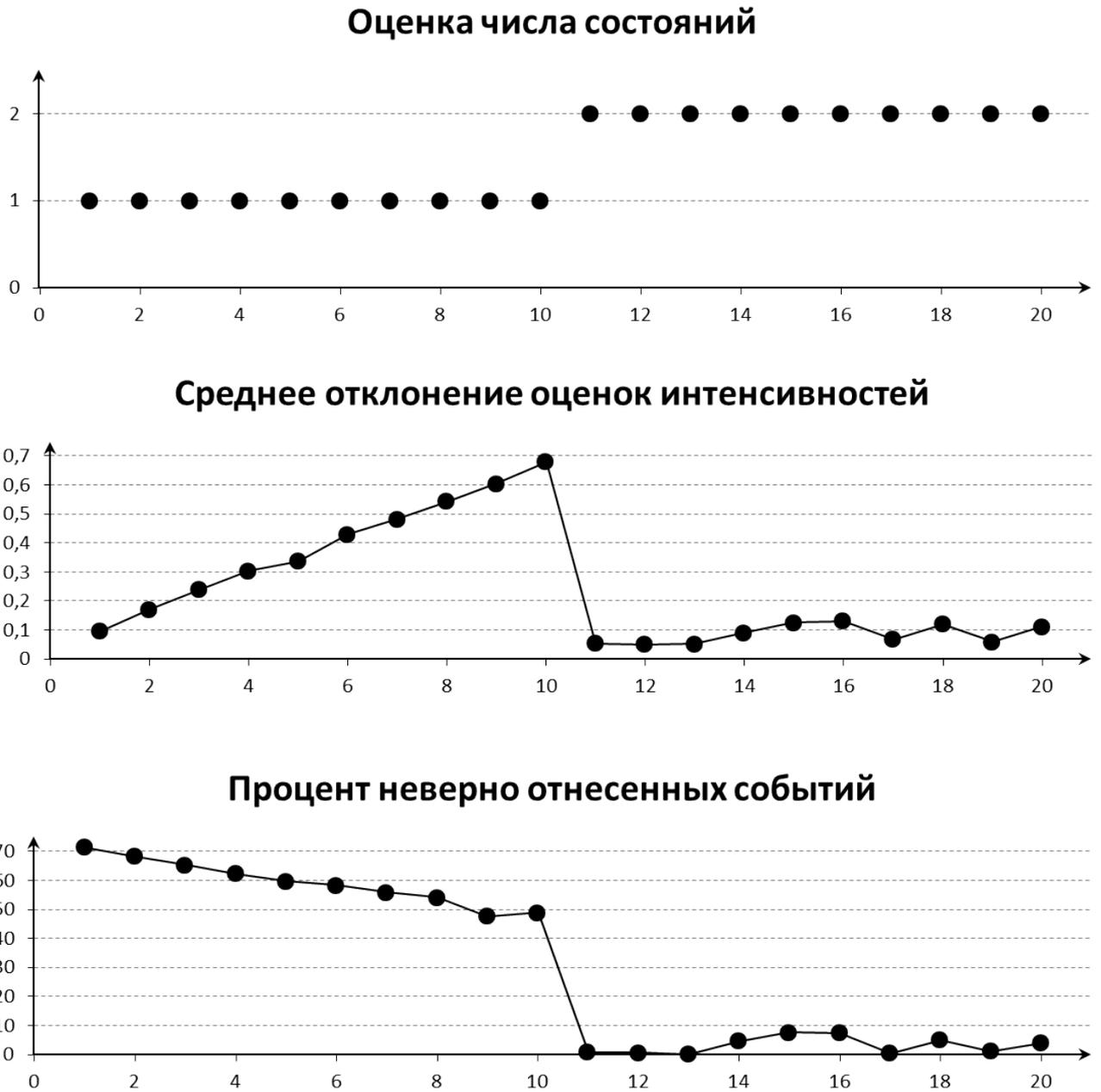


Рисунок 3.13 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \overline{6; 35}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, в зависимости от $|\lambda_2 - \lambda_1|$.

Способ 2

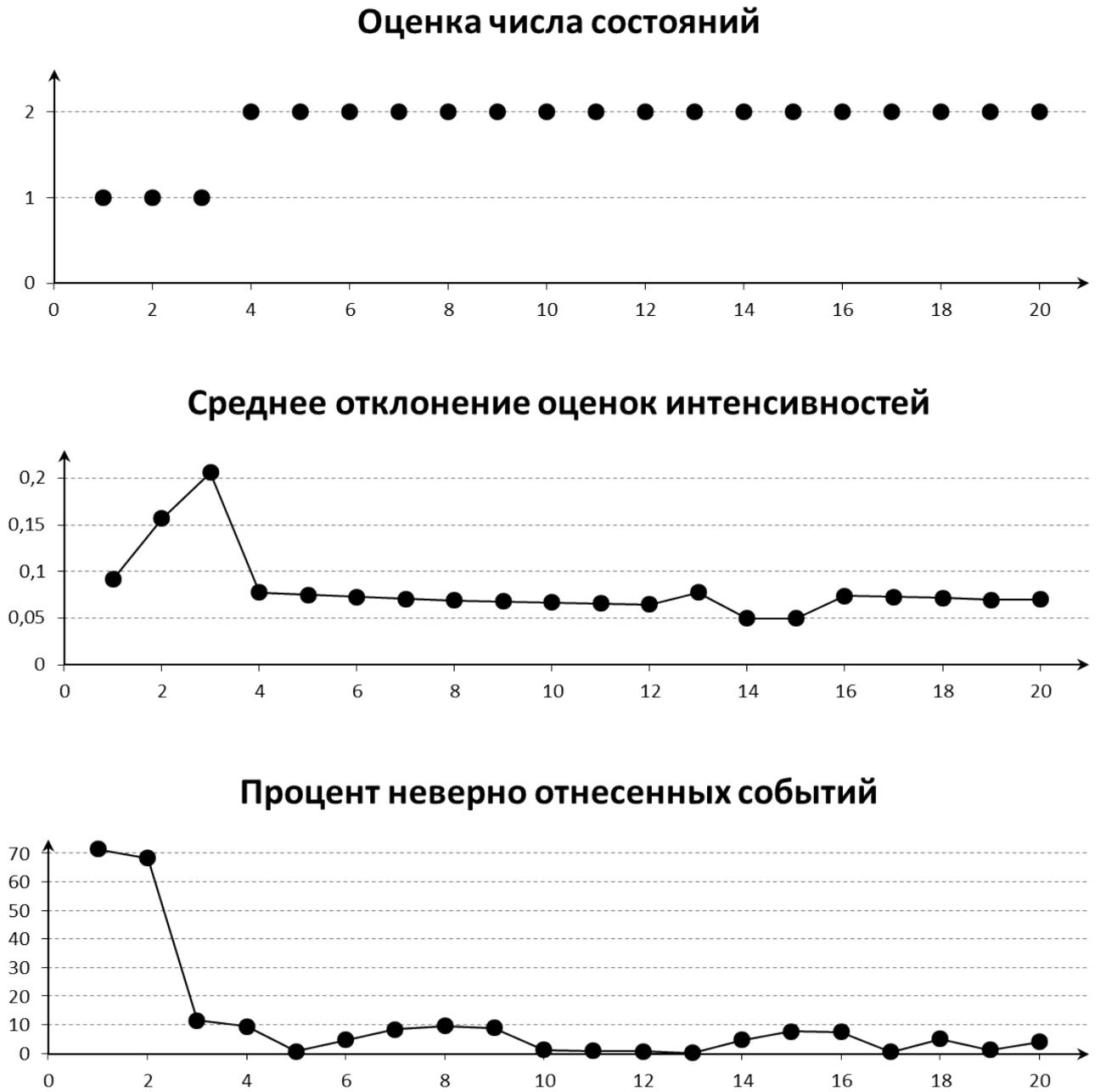


Рисунок 3.14 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \overline{6; 35}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, в зависимости от $|\lambda_2 - \lambda_1|$.

Способ 3

ных в имитационной модели, не превосходит 2 %. Процент неверно отнесенных событий остается меньше 10 %, а начиная с $|\lambda_2 - \lambda_1| = 23$ становится близок к нулю.

Таким образом, в случае исследования реализаций потоков способом 1 среднее отклонение оценок интенсивностей увеличивается для значений разности $|\lambda_1 - \lambda_2| = \overline{1; 8}$ за счет того, что оценка числа состояний не соответствует истинному значению. В дальнейшем, когда оценка числа состояний становится равна значению числа состояний (в данном случае когда $|\lambda_2 - \lambda_1| \geq 8$), показатель среднего отклонения оценок интенсивностей не превосходит 1,5 %. Процент неверно отнесенных событий так же резко уменьшается с 54,2 % при $|\lambda_2 - \lambda_1| = 8$ до 8,9 % при $|\lambda_2 - \lambda_1| = 9$ и в дальнейшем держится в пределах 10 % (см. таблицу 3.15).

Таблица 3.15 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \overline{6; 35}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, в зависимости от $|\lambda_2 - \lambda_1|$. Способ 1

λ_2	$ \lambda_1 - \lambda_2 $	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
6	1	1	0,09	71,55
7	2	1	0,16	68,29
8	3	1	0,23	65,42
9	4	1	0,28	62,4
10	5	1	0,33	59,82
11	6	1	0,37	58,35
12	7	1	0,41	55,93
13	8	1	0,45	54,21
14	9	2	0,11	8,92
15	10	2	0,03	1,13
16	11	2	0,04	0,85
17	12	2	0,04	0,59
18	13	2	0,04	0,11
19	14	2	0,08	4,71
20	15	2	0,11	7,72
21	16	2	0,12	7,46
22	17	2	0,05	0,41
23	18	2	0,10	5,05
24	19	2	0,04	1,23
25	20	2	0,10	3,96

Аналогичную картину можно наблюдать и в случае использования для исследования реализаций способа 2 (см. таблицу 3.16). С увеличением значения разности $|\lambda_2 - \lambda_1|$ при неверной оценке числа состояний исследуемого потока среднее отклонение оценок интенсивностей увеличивается и процент неверно отнесенных событий оказывается более 50 %. В случае, когда число состояний

исследуемого потока оценено корректно, среднее отклонение оценок значений интенсивности держится в пределах десяти процентов, а процент неверно отнесенных событий не превосходит десяти.

Таблица 3.16 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \overline{6; 35}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, в зависимости от $|\lambda_2 - \lambda_1|$. Способ 2

λ_2	$ \lambda_1 - \lambda_2 $	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
6	1	1	0,09	71,55
7	2	1	0,17	68,29
8	3	1	0,23	65,42
9	4	1	0,30	62,41
10	5	1	0,33	59,82
11	6	1	0,42	58,35
12	7	1	0,48	55,93
13	8	1	0,54	54,21
14	9	1	0,60	47,73
15	10	1	0,68	48,86
16	11	2	0,05	0,85
17	12	2	0,04	0,59
18	13	2	0,05	0,11
19	14	2	0,09	4,71
20	15	2	0,12	7,72
21	16	2	0,12	7,46
22	17	2	0,06	0,41
23	18	2	0,11	5,05
24	19	2	0,05	1,23
25	20	2	0,11	3,96

Исследование реализации способом 3 (см. таблицу 3.17) дает лучшие результаты по сравнению со способами 1 и 2, когда разность между интенсивностями состояний невелика, так как начиная с $|\lambda_2 - \lambda_1| = 4$ гистограмма имеет два максимума, абсциссы которых близки к значениям интенсивностей состояний. Далее, при корректном оценивании числа состояний, качество оценивания способом 3 сравнимо с качеством оценивания способами 1 и 2.

Таблица 3.17 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \bar{6}; 35$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,05$, в зависимости от $|\lambda_2 - \lambda_1|$. Способ 3

λ_2	$ \lambda_1 - \lambda_2 $	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
6	1	1	0,09	71,55
7	2	1	0,15	68,29
8	3	1	0,21	11,47
9	4	2	0,07	9,39
10	5	2	0,07	0,73
11	6	2	0,07	4,61
12	7	2	0,07	8,42
13	8	2	0,07	9,61
14	9	2	0,07	8,92
15	10	2	0,07	1,13
16	11	2	0,07	0,85
17	12	2	0,07	0,59
18	13	2	0,07	0,12
19	14	2	0,05	4,72
20	15	2	0,05	7,72
21	16	2	0,07	7,46
22	17	2	0,07	0,41
23	18	2	0,07	5,05
24	19	2	0,07	1,23
25	20	2	0,07	3,96

Второй эксперимент иллюстрирует зависимость качества оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями от длительности интервалов стационарности. Длительность интервалов стационарности влияет на количество событий, которые происходят последовательно в одном и том же состоянии потока. Длительность интервалов стационарности определяется соотношением параметров α_i и λ_i .

Для получения реализации компьютерной имитационной модели асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями были заданы следующие значения параметров: число состояний $n = 2$, интенсивность первого состояния $\lambda_1 = 5$, интенсивность второго состояния $\lambda_2 = 25$, параметры распределения длительности интервалов стационарности для каждой новой реализации изменяются в диапазоне $\alpha_1 = \alpha_2 = \overline{0,1;1}$ с шагом 0,05. Количество событий в каждой исследованной реализации $N = 500$.

На рисунках 3.15, 3.16 и 3.16 и в таблицах 3.18, ?? и 3.20 приведены изменения значений показателей качества оценивания в зависимости от значений параметров распределения длительности интервалов стационарности $\alpha_1 = \alpha_2$.

С увеличением параметров α_1 и α_2 происходит рост числа интервалов

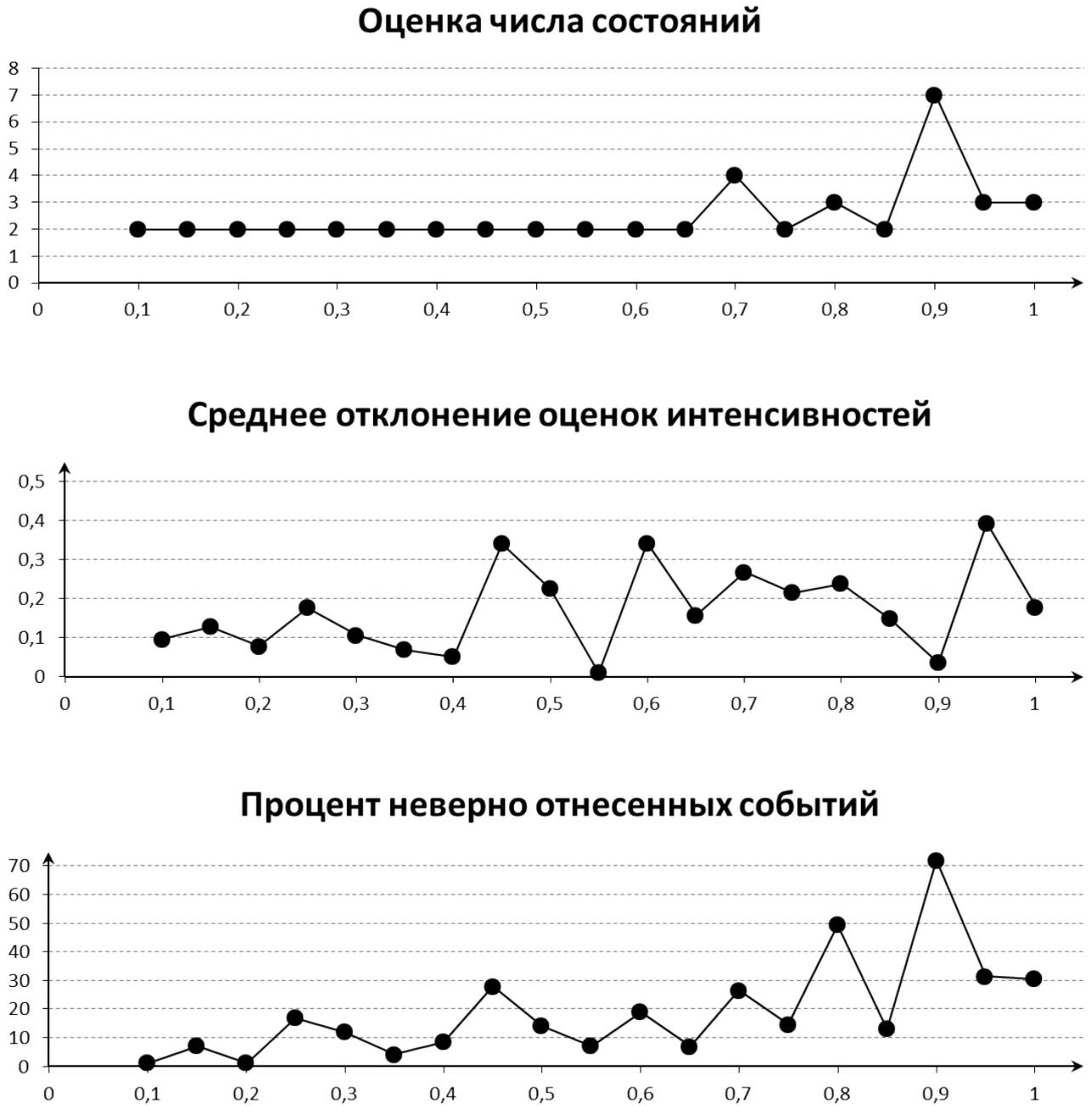


Рисунок 3.15 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \overline{0, 1; 1}$, в зависимости от α_1 .

Способ 1

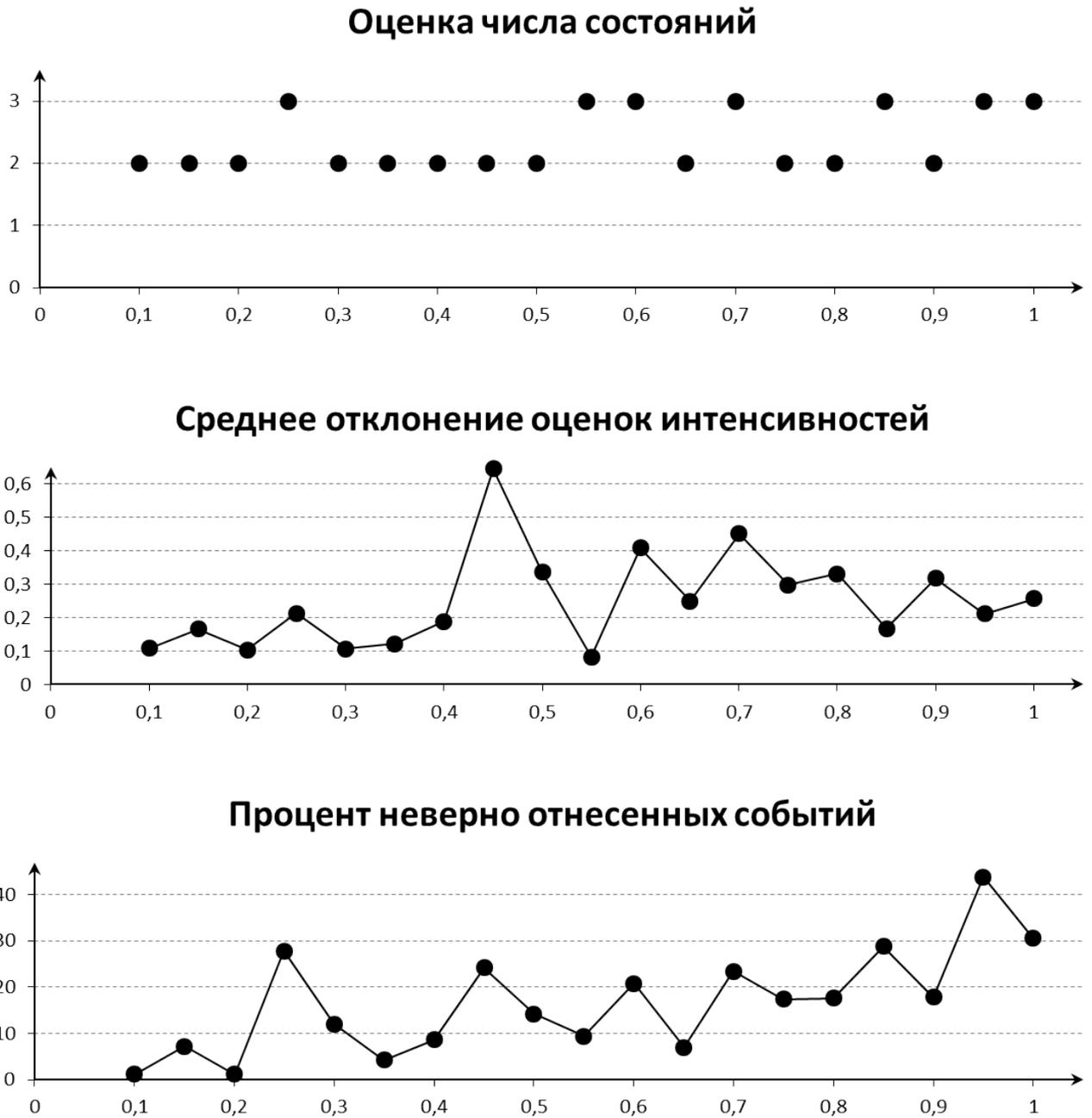
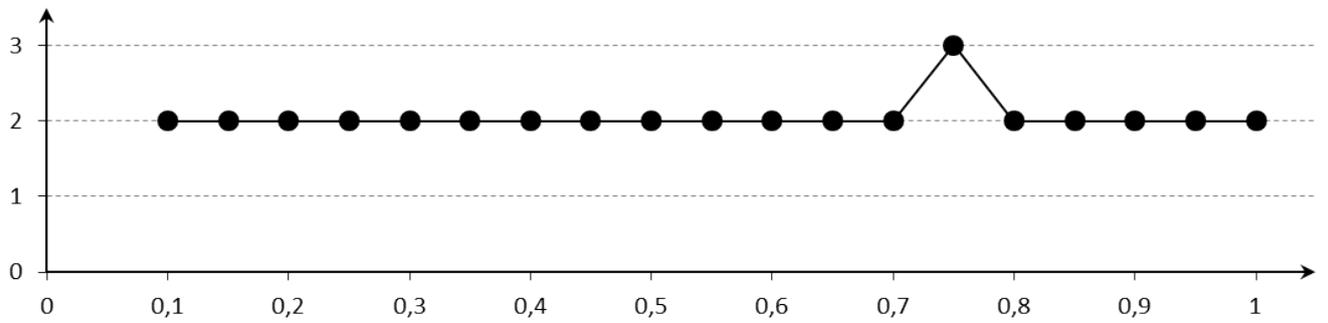


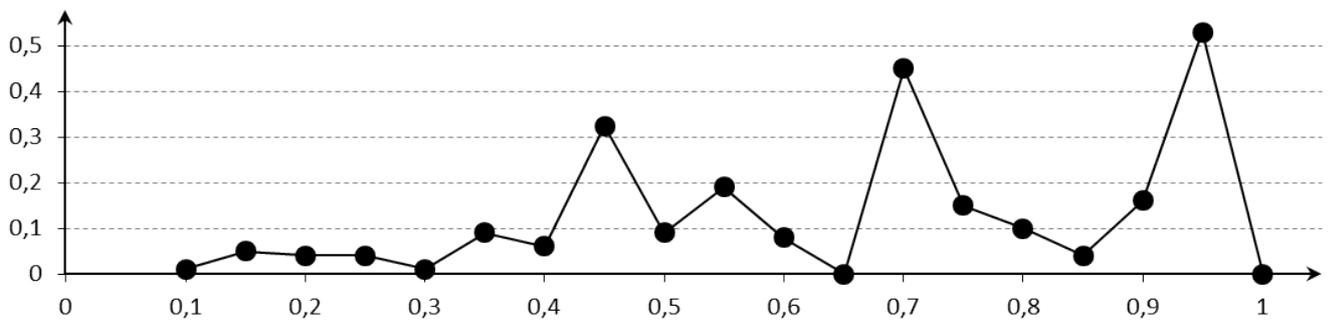
Рисунок 3.16 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \overline{0, 1; 1}$, в зависимости от α_1 .

Способ 2

Оценка числа состояний



Качество оценки



Процент событий

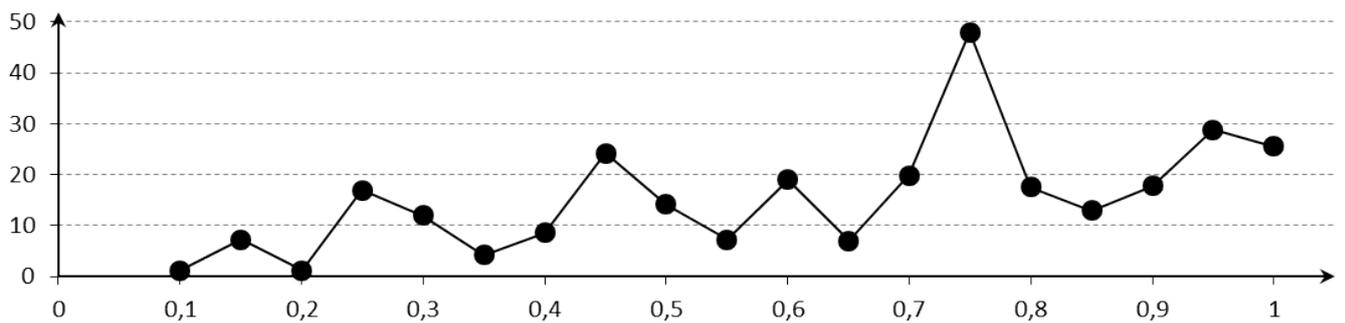


Рисунок 3.17 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \overline{0, 1; 1}$, в зависимости от α_1 .

Способ 3

стационарности, реализовавшихся за время наблюдения за потоком, а число событий в интервале стационарности уменьшается. Уменьшение количества событий в интервалах стационарности ухудшает результаты применения алгоритмов отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности и оценивания числа состояний и значений интенсивности потока по нескольким причинам.

Во-первых, небольшое количество событий в интервале стационарности ведет к тому, что данный интервал не может быть выявлен алгоритмом отнесения событий потока к интервалам стационарности, так как в алгоритме используется параметр n_{min} — минимальное количество событий на отрезке реализации (в данном случае использовался параметр $n_{min}=5$). Кроме того, в реализации могут появиться интервалы стационарности, на протяжении которых не происходит ни одного события. Такие интервалы стационарности также не могут быть обнаружены алгоритмом. Эти факторы увеличивают процент неверно отнесенных событий.

Во-вторых, интервалы стационарности, во время которых реализовалось небольшое количество событий, порождают оценки интенсивности с большой дисперсией, что в свою очередь ведет к неверной оценке числа состояний потока и увеличивает показатель среднего отклонения оценок интенсивностей.

В-третьих, частые смены состояния потока ведут к увеличению количества «шумовых» оценок в матрице оценок. Как следствие, в гистограмме оценок максимумы, сформированные «внутриинтервальными» оценками, оказываются полностью скрыты максимумами, состоящими из «шумовых» оценок, и применение алгоритма отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности оказывается затруднительным.

При исследовании реализаций способом 1 (см. таблицу 3.18) оценка числа состояний стабильно соответствует значению числа состояний исследуемых потоков событий до $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,65$, с дальнейшим увеличением параметров $\alpha_1 = \alpha_2$ в реализации выявляется от трех до семи состояний. Среднее отклонение оценок интенсивностей при адекватной оценке числа состояний принимает

значения от 0,09 % до 34 %. Меньшие значения среднего отклонения оценок интенсивностей наблюдаются при меньших значениях процента неверно отнесенных событий, который при $\alpha_1 = \alpha_2 \leq 0,65$ не превышает 30 %. При дальнейшем увеличении параметров α_1 и α_2 оценка числа состояний исследуемого потока не всегда соответствует числу состояний потока, за счет чего увеличивается процент неверно отнесенных событий. Неверная оценка числа состояний в меньшей мере сказывается на среднем отклонении оценок интенсивностей, так как в этом показателе учитываются только интенсивности состояний, представленных в имитационной модели.

Таблица 3.18 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,1; \bar{1}$, в зависимости от α_1 . Способ 1

$\alpha_1 = \alpha_2$	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
0,1	2	0,09	1,2
0,15	2	0,12	7,2
0,2	2	0,07	1,2
0,25	2	0,17	17
0,3	2	0,11	12
0,35	2	0,06	4,2
0,4	2	0,05	8,6
0,45	2	0,34	28
0,5	2	0,22	14,2
0,55	2	0,01	7,2
0,6	2	0,34	19
0,65	2	0,15	7
0,7	4	0,26	26,6
0,75	2	0,21	14,6
0,8	3	0,23	49,4
0,85	2	0,14	13
0,9	7	0,03	72
0,95	3	0,39	31,4
1	3	0,17	30,6

При исследовании реализации способом 2 и 3 также проявляется зависимость процента неверно отнесенных событий от адекватности оценки числа состояний исследуемых потоков событий (см. таблицы 3.19, 3.20).

Таблица 3.19 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1; \bar{1}$, в зависимости от α_1 . Способ 2

$\alpha_1 = \alpha_2$	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
0,1	2	0,11	1,2
0,15	2	0,16	7,2
0,2	2	0,1	1,2
0,25	3	0,21	27,8
0,3	2	0,11	12
0,35	2	0,12	4,2
0,4	2	0,18	8,6
0,45	2	0,64	24,2
0,5	2	0,33	14,2
0,55	3	0,08	9,4
0,6	3	0,41	20,8
0,65	2	0,24	7
0,7	3	0,45	23,4
0,75	2	0,29	17,4
0,8	2	0,33	17,6
0,85	3	0,16	28,8
0,9	2	0,31	17,8
0,95	3	0,21	43,8
1	3	0,25	30,6

Таблица 3.20 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1; \bar{1}$, в зависимости от α_1 . Способ 3

$\alpha_1 = \alpha_2$	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
0,1	2	0,01	1,2
0,15	2	0,05	7,2
0,2	2	0,04	1,2
0,25	2	0,04	17
0,3	2	0,01	12
0,35	2	0,09	4,2
0,4	2	0,06	8,6
0,45	2	0,32	24,2
0,5	2	0,09	14,2
0,55	2	0,19	7,2
0,6	2	0,08	19
0,65	2	0	7
0,7	2	0,45	19,8
0,75	3	0,15	48
0,8	2	0,1	17,6
0,85	2	0,04	13
0,9	2	0,16	17,8
0,95	2	0,53	28,8
1	2	0	25,6

Третий эксперимент иллюстрирует зависимость качества оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями от того, какое количество событий наступило в том или ином состоянии потока в пределах реализации.

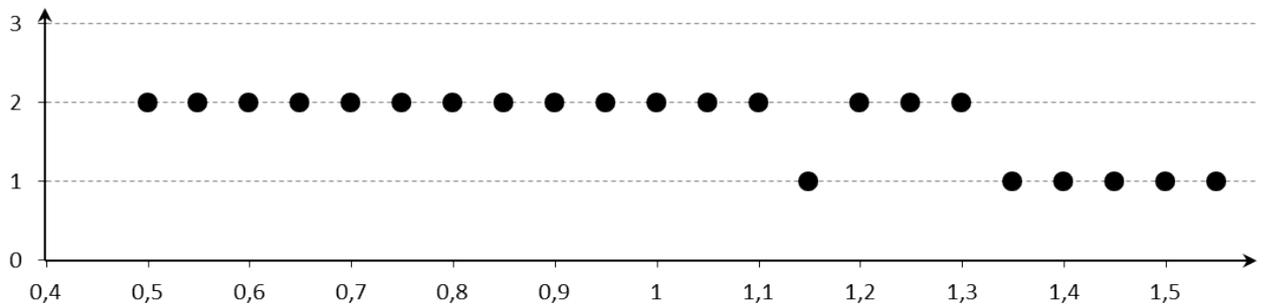
Для получения реализации компьютерной имитационной модели асинхронного МС-потока событий с двумя состояниями были заданы следующие значения параметров: число состояний $n = 2$, интенсивность первого состояния $\lambda_1 = 5$, интенсивность второго состояния $\lambda_2 = 25$, значение параметра распределения длительности интервалов стационарности для первого состояния фиксировано и равно $\alpha_1 = 0,1$, значение параметра распределения длительности интервалов стационарности для второго состояния изменяется в диапазоне $\alpha_2 = \overline{0,5; 1,55}$ с шагом 0,05. Количество событий в каждой исследованной реализации $N = 500$.

На рисунках 3.15, 3.16 и 3.16 и в таблицах 3.21, 3.22 и 3.23 приведены изменения значений показателей качества оценивания в зависимости от значения параметра распределения длительности интервалов стационарности α_2 .

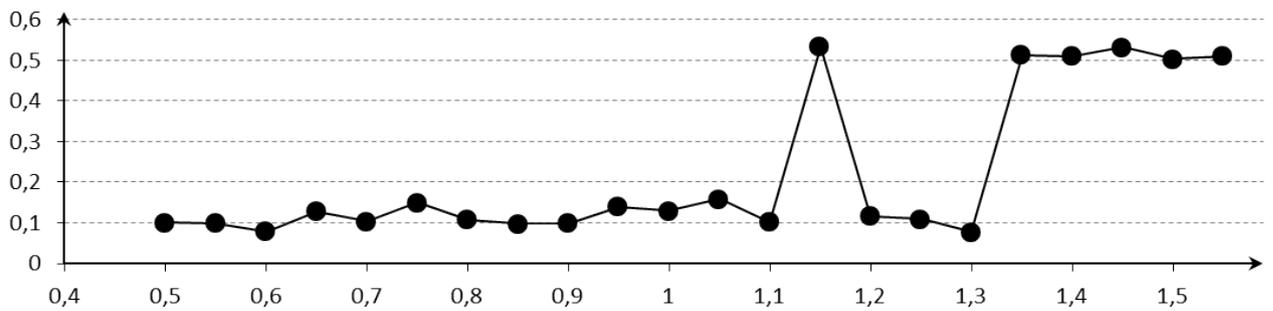
С увеличением параметра α_2 длительности интервалов стационарности второго состояния уменьшаются. Во-первых, это влечет за собой уменьшение количества событий, реализовавшихся во втором состоянии за время наблюдения. Следовательно, в матрице оценок преобладают оценки интенсивности первого состояния, что в свою очередь сказывается на виде гистограммы. Максимум, соответствующий первому состоянию потока, имеет значительно большую ординату, чем максимум, соответствующий второму состоянию, а с дальнейшим уменьшением количества событий, реализовавшихся во втором состоянии, последний оказывается не сформирован. Преобладание в реализации потока событий, реализовавшихся в первом состоянии, ведет также к тому, что, согласно критерию Пирсона (при исследовании реализации способом 1), для всех наступивших событий потока принимается гипотеза об экспоненциальном распределении, т. е. все события считаются наступившими в одном и том же состоянии потока.

Во-вторых, с уменьшением длительности интервалов стационарности уменьшается количество событий, реализовавшихся в пределах одного интервала стационарности. Это, как уже отмечалось, ведет к увеличению дисперсии оценок интенсивности второго состояния и, следовательно, к увеличению среднего от-

Оценка числа состояний



Среднее отклонение оценок интенсивностей



Процент неверно отнесенных событий

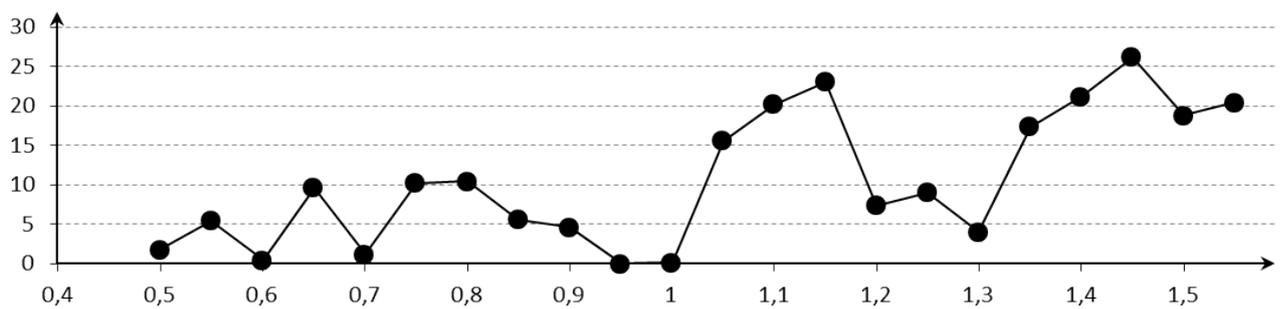


Рисунок 3.18 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = \overline{0, 5; 1, 55}$, в зависимости от α_2 .

Способ 1

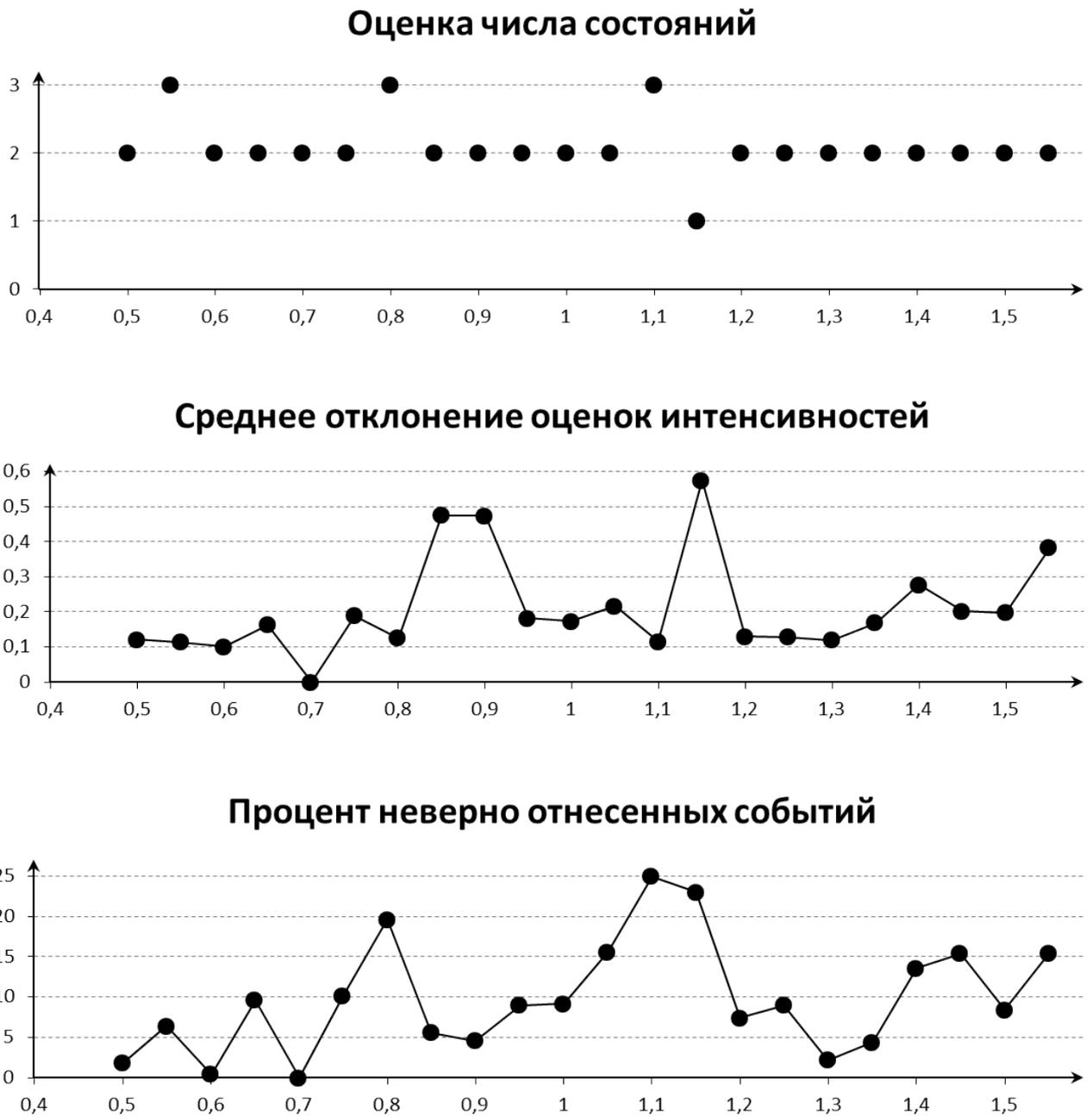
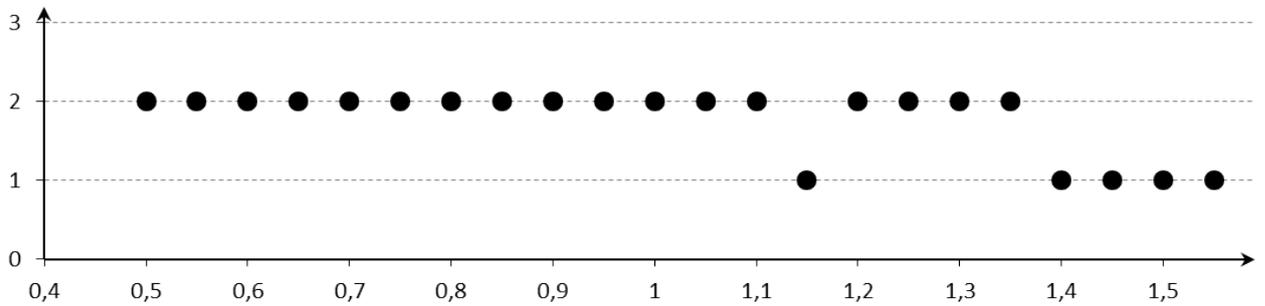


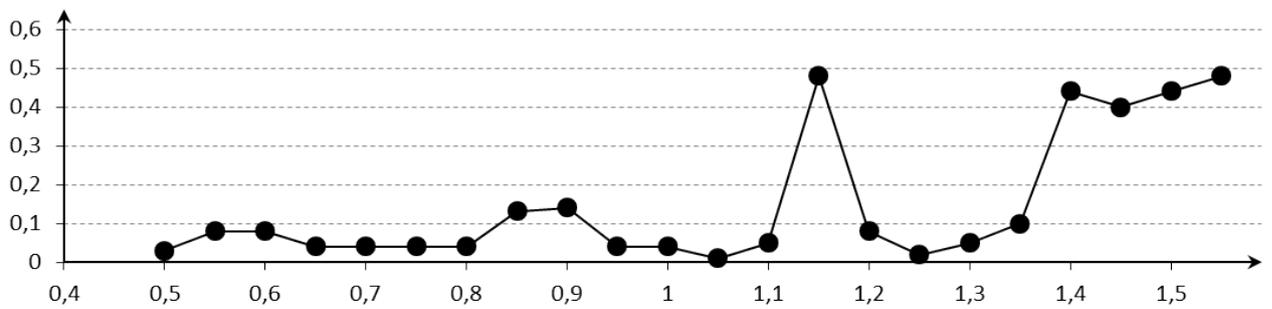
Рисунок 3.19 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = \overline{0,5; 1,55}$, в зависимости от α_2 .

Способ 2

Оценка числа состояний



Среднее отклонение оценок интенсивностей



Процент неверно отнесенных событий

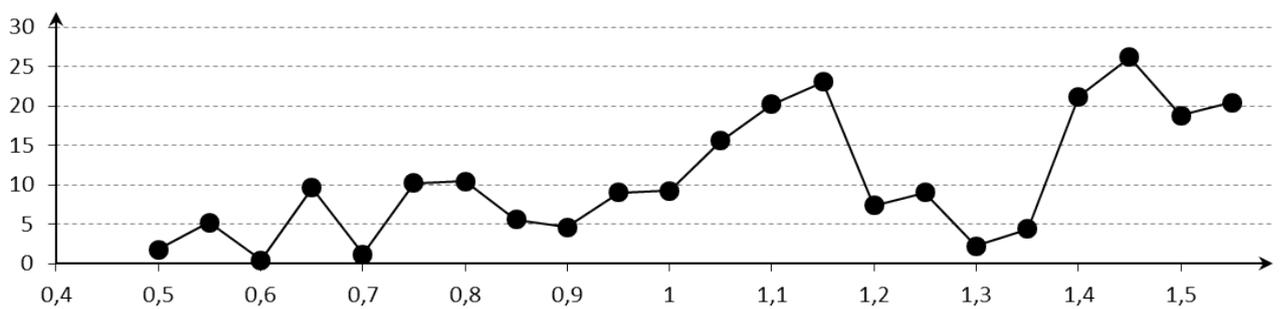


Рисунок 3.20 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = \overline{0, 5; 1, 55}$, в зависимости от α_2 .

Способ 3

клонения оценок интенсивностей состояний от их значений. Кроме того, не все интервалы стационарности, реализовавшиеся за время наблюдения, могут быть выявлены алгоритмом отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности. Это увеличивает процент неверно отнесенных событий.

При исследовании реализаций способом 1 (см. таблицу 3.21), начиная с $\alpha_2 = 1,4$ оценка числа состояний исследуемых реализаций потоков $\hat{n} = 1$, так как для совокупности отрезков реализации, полученных на первом этапе исследования реализаций, согласно критерию согласия Пирсона не отвергается гипотеза об экспоненциальном распределении с параметром, близким по значению к интенсивности λ_1 первого состояния потока событий. При исследовании реализаций способом 3 (см. таблицу 3.23), начиная с $\alpha_2 = 1,4$ гистограмма оценок, построенная по очищенной матрице оценок, имеет единственный максимум, абсцисса которого близка по значению к интенсивности λ_1 первого состояния потока событий. В том и другом случае неверная оценка числа состояний исследуемых потоков привела к резкому увеличению среднего отклонения оценок интенсивностей. Процент неверно отнесенных событий для этих реализаций совпадает с процентом событий реализации, наступивших во втором состоянии процесса $\lambda(t)$.

Ухудшение показателей оценивания в случае исследования реализаций способом 2 в целом согласуется с неверной оценкой числа состояний потока (см. таблицу 3.22). Неверная оценка числа состояний в сторону увеличений ($\hat{n} = 3$ для $\alpha_2 = 0,55$, $\alpha_2 = 0,8$, $\alpha_2 = 1,1$) обусловлена тем, что нашелся отрезок реализации, для которого значение оценки интенсивности значительно превышает оценки интенсивности для других отрезков реализации.

Таблица 3.21 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = \overline{0,5; 1,55}$, в зависимости от α_2 . Способ 1

α_2	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
0,5	2	0,1	1,8
0,55	2	0,1	5,4
0,6	2	0,07	0,4
0,65	2	0,12	9,6
0,7	2	0,11	1,2
0,75	2	0,15	10,2
0,8	2	0,11	10,4
0,85	2	0,09	5,6
0,9	2	0,09	4,6
0,95	2	0,13	0
1	2	0,13	0,13032
1,05	2	0,15	15,6
1,1	2	0,1	20,2
1,15	1	0,53	23
1,2	2	0,12	7,4
1,25	2	0,11	9
1,3	2	0,07	4
1,35	1	0,51	17,4
1,4	1	0,51	21,2
1,45	1	0,53	26,2
1,5	1	0,5	18,8
1,55	1	0,51	20,4

Таблица 3.22 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = \overline{0,5; 1,55}$, в зависимости от α_2 . Способ 2

α_2	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
0,5	2	0,12	1,8
0,55	3	0,11	6,4
0,6	2	0,1	0,4
0,65	2	0,16	9,6
0,7	2	0	0
0,75	2	0,18	10,2
0,8	3	0,12	19,6
0,85	2	0,47	5,6
0,9	2	0,47	4,6
0,95	2	0,18	9
1	2	0,17	9,2
1,05	2	0,21	15,6
1,1	3	0,12	25
1,15	1	0,57	23
1,2	2	0,13	7,4
1,25	2	0,13	9
1,3	2	0,12	2,2
1,35	2	0,16	4,4
1,4	2	0,27	13,6
1,45	2	0,2	15,4
1,5	2	0,19	8,4
1,55	2	0,38	15,4

Таблица 3.23 — Показатели качества оценивания для реализаций асинхронного МС-потока событий $n = 2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 25$, $\alpha_1 = 0, 1$, $\alpha_2 = 0,5; 1,55$, в зависимости от α_2 . Способ 3

α_2	Количество состояний	Среднее отклонение	Процент неверно отнесенных событий
0,5	2	0,03	1,8
0,55	2	0,08	5,2
0,6	2	0,08	0,4
0,65	2	0,04	9,6
0,7	2	0,04	1,2
0,75	2	0,04	10,2
0,8	2	0,04	10,4
0,85	2	0,13	5,6
0,9	2	0,14	4,6
0,95	2	0,04	9
1	2	0,04	9,2
1,05	2	0,01	15,6
1,1	2	0,05	20,2
1,15	1	0,48	23
1,2	2	0,08	7,4
1,25	2	0,02	9
1,3	2	0,05	2,2
1,35	2	0,1	4,4
1,4	1	0,44	21,2
1,45	1	0,4	26,2
1,5	1	0,44	18,8
1,55	1	0,48	20,4

В заключение приведем несколько замечаний относительно применения алгоритмов, сформулированных в разделе 2, работа которых проиллюстрирована в разделе 3.

Как показали приведенные выше примеры, алгоритмы, сформулированные в разделе 2, дают хорошие результаты при достаточно большой разнице между значениями интенсивности состояний, большом количестве событий на каждом интервале стационарности и если в каждом из состояний процесса $\lambda(t)$ реализовалось достаточное количество событий, т. е. если за время наблюдения за потоком реализовалось небольшое число интервалов стационарности с относительно большим количеством событий на каждом интервале стационарности, и разность между интенсивностями наступления событий на этих интервалах стационарности достаточно велика. Конкретные значения разности $|\lambda_1 - \lambda_2|$ и длительностей интервалов стационарности зависят от значений интенсивности состояний исследуемого потока.

Качество отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности с помощью алгоритма зависит от того, какие максимумы были выбраны

для дальнейшего исследования, какая окрестность и «окно сканирования» были выбраны для дальнейшего исследования этого максимума и так далее. Также на качество работы алгоритма влияет выбор различных параметров алгоритма, среди которых в первую очередь следует отметить шаг группировки данных при построении гистограммы оценок. Попытка формализации выбора этих объектов и параметров предпринята в данной работе, однако этот вопрос требует дополнительных исследований.

3.3 Выводы

1. Приведено описание программного комплекса, используемого для экспериментального исследования алгоритмов, сформулированных в разделе 2.

2. Представлено пошаговое описание применения алгоритмов, сформулированных в разделе 2, к реализации потока с тремя состояниями, найдены отрезки реализации, соответствующие интервалам стационарности, оценки числа состояний, оценки значений интенсивности исследуемого потока. Рассчитаны характеристики качества оценивания.

3. Представлены характеристики качества оценивания состояний и значений интенсивности для реализаций асинхронного МС-потока с двумя состояниями при некоторых неблагоприятных сочетаниях параметров потока.

Заключение

В диссертации разработан алгоритм получения оценки числа состояний асинхронного МС-потoka событий и оценок интенсивности асинхронного МС-потoka событий по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Получен аналитический вид смеси плотностей распределения оценки интенсивности простейшего потока событий.

2. Разработан алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потoka событий по моментам времени наступления событий потока, основанный на свойстве смеси плотностей распределения оценки интенсивности простейшего потока событий.

3. Разработан алгоритм отнесения событий реализации асинхронного МС-потoka событий к интервалам стационарности.

4. Разработаны алгоритмы вычисления оценок числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потoka событий, использующие в качестве начальных данных результаты работы алгоритма отнесения событий реализации асинхронного МС-потoka событий к интервалам стационарности: 4.1) разработан алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потoka событий, основанный на свойствах гистограммы оценок, полученной по «внутриинтервальным» оценкам; 4.2) разработан алгоритм оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потoka событий, основанный на свойствах оценок интенсивности на отрезках реализации, соответствующих интервалам стационарности.

5. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритмы.

6. Проведен анализ численных результатов, полученных с помощью программного комплекса с использованием данных, реализованных на имитационной модели асинхронного МС-потoka событий.

Теоретические результаты диссертационной работы в совокупности с программной реализацией разработанных алгоритмов могут быть использованы

при решении задач проектирования адаптивных систем массового обслуживания, функционирование которых зависит от числа состояний интенсивности входящих потоков событий, а также при решении задач оценивания параметров дважды стохастических потоков событий в условиях неизвестного числа состояний интенсивности.

Список использованной литературы

1. Абраменков А. Н. Расчет характеристик стационарных сетевых систем / А. Н. Абраменков, Н. В. Петухова, М. П. Фархадов, И. М. Гуревич // Динамика сложных систем – XXI век. – 2013. – Т. 7. – № 2. – С. 84–93.
2. Апанасович В. В. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте / В. В. Апанасович, А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 256 с.
3. Афанасьева Л. Г. Система с включением резервного прибора / Л. Г. Афанасьева // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1971. – № 6. – С. 93–100.
4. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.1 / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – № 6. – С. 92–99.
5. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.2 / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – № 1. – С. 55–61.
6. Беккерман Е. Н. Об одном свойстве смеси плотностей распределения оценок интенсивности простейшего потока событий / Е. Н. Беккерман, А. М. Горцев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56, № 9/2. – С. 226–228.
7. Беккерман Е. Н. Эвристический алгоритм оценки числа состояний асинхронного МС-потока событий / Е. Н. Беккерман, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 3 (28). – С. 20–31.
8. Беккерман Е. Н. Использование свойств гистограммы оценок простейшего потока событий для выявления интенсивностей аппроксимирующего МС-потока / Е. Н. Беккерман, А. М. Горцев, С. С. Катаева // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой российской конференции с международным участием. Катунь, 09–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 88–89.

9. Беккерман Е. Н. Эвристический метод аппроксимации случайного потока событий МС-поток с произвольным числом состояний / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 9. – С. 20–33.
10. Беккерман Е. Н. Аппроксимация МС-поток реального потока событий / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева, Д. Ю. Кузнецов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2005. – № 14. – С. 248–252.
11. Березин Д. В. Сравнение МП-и ММ-оценок длительности мертвого времени в модулированном МАР-поток событий / Д. В. Березин, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета, Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 3 (36). – С. 26–34.
12. Боккер П. ISDN. Цифровая сеть с интеграцией служб. Понятия, методы, системы / П. Боккер. – Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1991. – 304 с.
13. Ботвинко А. Ю. Математическая модель работы межсетевое экрана для мультимедийного трафика / А. Ю. Ботвинко, К. Е. Самуйлов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2015. – Т. 9. – № 12. – С. 56–60.
14. Бронштейн О. И. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах / О. И. Бронштейн, И. М. Духовный. – М.: Наука, 1976. – 220 с.
15. Бронштейн О. И. Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах / О. И. Бронштейн., В. В. Рыков // Упр. произв.: Тр. III Всес. сов. по авт. упр. (техн. киберн.). – Москва, 1967. – С. 215–224.
16. Бронштейн О. И. Об оптимальных приоритетах в СМО / О. И. Бронштейн, В. В. Рыков // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1965. – № 6. – С. 28–37.
17. Бушланов И. В. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 9. – С. 40–51.

18. Бушланов И. В. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 76–93.
19. Василевская Т. П. О соотношении моделей МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий / Т. П. Василевская, М. Е. Завгородняя, И. С. Шмырин // Вестник Томского государственного университета. Приложение: Доклады V Всероссийской конференции с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» – ISAM'04 и III Сибирской научной школы-семинара с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» SIBECRYPT'04. – Томск, 2004. – № 9(II). – С. 138–144.
20. Васильева Л. А. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости / Л. А. Васильева, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 12. – С. 69–79.
21. Веклеров Е. Б. Об оптимальных абсолютных динамических приоритетах в СМО // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1967. – № 2. – С. 87–90.
22. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 6-е изд. стер. / Е. С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.
23. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М.: Большая российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
24. Волковинский М. И. Анализ приоритетных очередей с учетом времени переключения / М. И. Волковинский, А. Н. Кабалевский. – М.: Эн-изд., 1981. – 167 с.
25. Воробьев Н. М. Об управлении системой массового обслуживания одного вида // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1967. – № 3. – С. 86–93.
26. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1966. – 431 с.

27. Головкин Н. И. СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / Н. И. Головкин, В. О. Каретник, О. В. Пелешок // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С. 75–96.
28. Горцев А. М. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости / А. М. Горцев, М. Е. Завгородняя // Оптика атмосферы и океана. – 1997. – Т. 10. – № 3. – С. 273–280.
29. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний / А. М. Горцев, В. Л. Зуевич // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2 (11). – С. 44–65.
30. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий / А. М. Горцев, А. А. Калягин Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2 (11). – С. 66–81.
31. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока / А. М. Горцев, М. А. Леонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 1 (10). – С. 33–47.
32. Горцев А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания / А. М. Горцев, А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.
33. Горцев А. М. Асинхронный дважды стохастический поток с иницированием лишних событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Дискретная математика. – 2011. – Т. 23. – № 2. – С. 59–65.
34. Горцев А. М. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1 (14). – С. 13–21.

35. Горцев А. М. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Техника средств связи. Сер.: Системы связи. – 1989. – Вып. 7. – С. 46–54.
36. Горцев А. М. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потокком / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Стохастические и детерминированные модели сложных систем: Сб. статей. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. – С. 20–32.
37. Горцев А. М. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 8–16.
38. Горцев А. М. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. Приложение: Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ. – Томск: Изд-во ТГУ – 2006. – № 18. – С. 267–273.
39. Горцев А. М. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вестник Томского государственного университета. – 2002. – № 1 (I). – С. 18–23.
40. Горцев А. М. Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Измерительная техника. – 2003. – № 6. – С. 7–13.
41. Горцев А. М. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Радиотехника. – 1995. – № 7–8. – С. 6–10.
42. Горцев А. М. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская, Т. Н. Шевченко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1993. – Т. 36. – № 12. – С. 67–85.

43. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Вестник Тюмен. гос.ун-та. – 2008. – № 6. – С. 107–119.
44. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2005. – Т. 48. – № 10. – С. 35–49.
45. Горцев А. М. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события / А. М. Горцев, О. В. Ниссенбаум // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2004. – № 284. – С. 137–145.
46. Горцев А. М. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» / А. М. Горцев, М. Е. Паршина // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1999. – Т. 42. – № 4. – С. 8–13.
47. Горцев А. М. Смесь плотностей вероятностей в МАР-потоке событий при непродлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, А. А. Соловьев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 9–2. – С. 241–243.
48. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов МАР-потока событий и условия его рекуррентности / А. М. Горцев, А. А. Соловьев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 3. – С. 32–41.
49. Горцев А. М. Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий / А. М. Горцев, И. С. Шмырин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1999. – Т. 42. – № 4. – С. 19–27.
50. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени /

- А. М. Горцев, И. С. Шмырин // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 1. – С. 52–66.
51. Даниэлян Э. А. Время ожидания в модели с категорийными во времени приоритетами / Э. А. Даниэлян // Кибернетика. – 1980. – № 6. – С. 103–109.
52. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами / Н. Джейсуол. – М.: Мир, 1973. – 279 с.
53. Димитров Б. Н. Периодические пуассоновские процессы и распределения с почти отсутствующей памятью / Б. Н. Димитров, В. В. Рыков, З. Л. Круглый // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 85–100.
54. Дудин А. Н. О задаче оптимального управления многоскоростной системой массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 9. – С. 43–51.
55. Дудин А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. П. Клименок. – Минск: Изд-во БГУ, 2000. – 175 с.
56. Еремина А. Р. Инвариантность стационарного распределения сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями и отрицательными заявками / А. Р. Еремина, Ю. В. Малинковский // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 4. – С. 23–30.
57. Ефросинин Д. В. К анализу характеристик производительности СМО с неоднородными приборами / Д. В. Ефросинин, В. В. Рыков // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 1. – С. 64–82.
58. Ефросинин Д. В. Оптимальное управление системой с постепенными и внезапными отказами / Д. В. Ефросинин, М. П. Фархадов // Надежность. – 2009. – № 1 (28). – С. 27–41.
59. Ефимушкина Т. В. Двухфазная модель процесса передачи видео с учетом межуровневой адаптации в сети LTE / Т. В. Ефимушкина, К. Е. Самуй-

- лов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2014.– Т. 8.– № 5. – С. 16–21.
60. Жидкова Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе $MMPP|M|_{\infty}$ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1. – С. 53–62.
61. Завгородняя М. Е. Оценивание длительности мертвого времени и параметров альтернирующего потока событий методом моментов: дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук / М. Е. Завгородняя. – Томск, 2002. – 122 с.
62. Завгородняя М. Е. Метод расчета производительности кабельных сетей связи / М. Е. Завгородняя, Д. В. Виноградова, А. С. Ивашутенко, С. С. Марьин // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2011. – № 6. – С. 102–107.
63. Задиранова Л. А. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе $MMPP|M|_{\infty}$ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2. – С. 26–34.
64. Задиранова Л. А. Сравнение асимптотик второго и третьего порядка числа занятых приборов в системе $MMPP|M|_{\infty}$ с повторным обслуживанием / Л. А. Задиранова, С. П. Моисеева // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 11–2. – С. 172–177.
65. Задорожный В. Н. Аналитико-имитационные исследования систем и сетей массового обслуживания / В. Н. Задорожный. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. – 280 с.
66. Задорожный В. Н., Ершов Е.С. Оптимизация немарковских сетей с очередями путем перераспределения ресурсов и переходных вероятностей / В. Н. Задорожный, Е. С. Ершов // Омский научный вестник. – 2013. – № 1 (117). – С. 220–224.

67. Зиновьева Л. И. Система массового обслуживания с гистерезисом и резервным прибором, управляемым временем ожидания // Матем. стат. и ее прил. – Томск: Изд-во ТГУ. – 1980. – № 6. – С. 146–152.
68. Зорин А. В. О циклическом обслуживании неординарных рекуррентных потоков // В сборнике: Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2013) Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием им. А. Ф. Терпугова. – 2013. – С. 15–19.
69. Ивницкий В. А. Время до прибытия требования неоднородного полумарковского потока // В книге: Новые информационные технологии в исследовании сложных структур. Материалы Десятой российской конференции с международным участием. – 2014. – С. 92–93.
70. Ивницкий В. А. Моделирование кусочно-непрерывной однолинейной системы массового обслуживания с неоднородным полумарковским потоком // В сборнике: Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2013) Материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием им. А. Ф. Терпугова. – 2013. – С. 23–28.
71. Ивченко Г. И. Теория массового обслуживания / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
72. Касконе А. Система $MAR/G/1/\infty$ в дискретном времени с инверсионной вероятностной дисциплиной обслуживания / Касконе А., Р. Мандзо, А.В. Печинкин, С. Салерно // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 57–69.
73. Катаев С. Г. Алгоритмические и программные средства аналитического и неразрушающего контроля параметров природной среды на основе метода выделения структур: дис. на соискание ученой степени докт. техн. наук / С. Г. Катаев. – Томск, 2012. – 354 с.
74. Кениг Д. Методы теории массового обслуживания / Пер. с англ. под ред. Г.П. Климова. / Д. Кениг, Д. Штойян. – М.: Радио и связь, 1981. – 127 с.

75. Китаева А. В. Непараметрическое оценивание нормированной интенсивности пуассоновского процесса по наблюдениям на заданном интервале / А. В. Китаева, А. Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 169–172.
76. Китурко О. М. Асимптотический анализ доходов в замкнутой НМ-сети с переменным числом приоритетных и беспriorитетных заявок / О. М. Китурко, М. А. Маталыцкий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 3. – С. 38–44.
77. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
78. Климов Г. П. Приоритетные системы обслуживания с ориентацией / Г. П. Климов, Г. К. Мишкой. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 222 с.
79. Коваленко И. Н. О некоторых вопросах оптимального обслуживания требований в системах с ограниченным временем ожидания / И. Н. Коваленко, О. М. Юркевич // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1971. – № 1. – С. 26–35.
80. Кофман А. Массовое обслуживание / А. Кофман, Р. Крюон. – М.: Мир, 1965. – 302 с.
81. Крылова Д.С. Применение в социальных системах СМО с бесконечным накопителем, скачкообразной интенсивностью входного потока и резервным прибором / Д.С. Крылова, Н. И. Головкин // Известия Дальневосточного федерального университета. Экономика и управление. – 2012. – № 1. – С. 93–108.
82. Кухта Т.К. Системы с переменным числом каналов / Т.К. Кухта, Н. Д. Шваб // Кибернетика. – 1975. – № 2. – С. 146–148.
83. Малинковский Ю. В. Стационарные экспоненциальные сети с обходами сообщений и формированием поступающих и обслуживаемых групп заявок случайных размеров / Ю. В. Малинковский, Ю. Чжао // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 71–78.

84. Маталыцкий М. А. Об исследовании некоторых марковских НМ-сетей с дисциплиной обслуживания FIFO и их применении / М. А. Маталыцкий, В. В. Науменко // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер 2. Матэматыка... – 2015. – № 3 (199). – С.142–150.
85. Мова В. В. Об оптимальном назначении приоритетов, зависящих от состояния блуждающей системы с ограниченным числом мест для ожидания / В. В. Мова, Л. А. Пономаренко // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1974. – № 5. – С. 74–81.
86. Мокров Е. В. Модель системы облачных вычислений в виде системы массового обслуживания с несколькими очередями и с групповым поступлением заявок / Е. В. Мокров, К. Е. Самуйлов // Т-Сomm: Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7. – № 11. – С. 139–141.
87. Моисеев А. Н. Исследование высокоинтенсивного МАР-потока / А. Н. Моисеев, А.А. Назаров // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 16–18.
88. Назаров А. А. Оптимальное формирование очередей в многоканальных системах массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 8. – С.36–39.
89. Назаров А. А. Асимптотически пуассоновские МАР-потоки / А. А. Назаров, И. Л. Лапатин // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 4. – С. 72–78.
90. Науменко В. В. Анализ сети с многолинейными системами и ограниченным временем ожидания заявок различных типов / В. В. Науменко, М. А. Маталыцкий // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию Г. А. Медведева, Минск, 23–26 февраля 2015 г. – Минск: РИВШ, 2015. – С. 226–229.
91. Небеев А. В. Исследование многоканальных систем передачи информации методом оптимизации стратегии распределительного устройства /

- А. В. Небеев, В. П. Ревельс // Проблемы передачи информации. – 1970. – Т. 6. – Вып. 3. – С. 96–99.
92. Нежелская Л. А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. – Минск: Изд-во БГУ, 1998. – С. 18–21.
93. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2000. – № 269. – С. 95–98.
94. Нежелская Л. А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1. С. 57–67.
95. Паршина М. Е. Численное решение уравнений метода моментов для альтернирующего потока событий в системе с продлевающимся «мертвым» временем // Масс. обл.: Матер. межд. конф. «Совр. матем. методы иссл. информ.-вычисл. сетей». – Минск: БГУ. – 2001. – С. 166–171.
96. Печинкин А. В. Время пребывания в различных режимах системы обслуживания с неординарными пуассоновскими входящими потоками, рекуррентным обслуживанием и гистерезисной политикой / А. В. Печинкин, Р. В. Разумчик // Информационные процессы. – 2015. – Т. 15. – № 3. – С. 24–336.
97. Печинкин А. В. Стационарные характеристики системы $M2|G|1|R$ с гистерезисной политикой управления интенсивностью входящего потока / А. В. Печинкин, Р. В. Разумчик // Информационные процессы. – 2013. – Т. 13. – № 3. – С. 125–140.
98. Печинкин А. В. Система $МАР/G/1/\infty$ с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом, функционирующая в дискретном времени / А. В. Печинкин, И. В. Стальченко // Вестник Российского

университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2010. – № 2–1. – С. 26–36.

99. Риордан Д. Вероятностные системы обслуживания / Д. Риордан. – М.: Связь, 1966. – 184 с.
100. Рыков В. В. Об оптимальной дисциплине обслуживания в системе со складом / В кн.: Прикладные задачи теоретической кибернетики. – М.: Советское радио, 1966. – С. 437–449.
101. Рыков В. В. Об оптимальных динамических приоритетах в СМО / В. В. Рыков, Э.Е. Лемберг // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1967. – № 1. – С. 25–34.
102. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания / В кн.: Итоги науки и техники. Теор. вероятн. Матем. стат. Теор. киберн. – М.: ВИНТИ, 1975. – Т. 12. – С. 43–153.
103. Соловьев А. Д. Задача об оптимальном обслуживании // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1970. – № 5. – С. 40–49.
104. Ушаков И. А. Оптимальное управление в многоканальной СМО с несколькими потоками событий / И. А. Ушаков, В. П. Чернышев // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1976. – № 5. – С. 95–100.
105. Федосов Е. Н. Фильтрация интенсивности дважды стохастического потока в системах с продлевающимся «мертвым временем» // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика: сборник статей. – Томск: Изд-во Томского госуниверситета, 1999. – С. 157–161.
106. Федоткин М. А. Оценка параметров вероятностной модели интенсивного транспортного потока / М. А. Федоткин, Е. В. Кудрявцев // В сборнике: Труды 17-ой Международной конференции «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN–13, 7–10 октября, Москва). – 2013. – С. 365–372.
107. Федоткин М. А. Имитационная модель циклического управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками / М. А. Федоткин, М. А. Рачинская // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. – 2016. – № 47. – С. 43–51.

108. Цициашвили Г. Ш. Синергетические эффекты в многоканальной системе массового обслуживания с входным потоком Эрланга / Г. Ш. Цициашвили, Н.В. Маркова // Вестник Тихоокеанского государственного университета. – 2015. – № 4 (39). – С. 9–14.
109. Цициашвили Г.Ш. Синергетические эффекты в многоканальных системах обслуживания с групповым поступлением заявок / Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, О.В. Грамотина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 2. – С. 68–72.
110. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления / Э. М. Хазен. – М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.
111. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М.: Физматгиз, 1963. – 235 с.
112. Шмырин И. С. Оптимальное оценивание состояний MАР-потока событий по критерию максимума апостериорных вероятностей состояний // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 9. – С. 101–109.
113. Bartoszewicz J. Queueing systems with a reserve service channel / J. Bartoszewicz, T. Rolski // Zastosow. mat. – 1970. – Vol. 1, № 4. – P. 439–449.
114. Cox D. R. The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1955. – Vol. 51, № 3. – P. 433–441.
115. Cox D. Point processes / D. Cox, V. Isham. – Chapman and Hall, 1980. – 181 p.
116. Dudin A. A Retrial BMAP/PH/N Queueing System with Markov Modulated Retrials / A. Dudin, V. Klimenok // 2012 2nd Baltic Congress on Future Internet Communications, BCFIC 2012. – P. 246–251.
117. Dudin A. Retrial Queue of BMAP/PH/N Type with Customers Balking, Impatience and Non-Persistence / A. Dudin, V. Klimenok // Proceeding of the 2013 Conference on Future Internet Communications, CFIC 2013. – P. 1–6.
118. Fernandez-Alcala R. Recursive Linear Estimation for Doubly Stochastic Poisson Processes / R. Fernandez-Alcala, J. Navarro-Moreno, J.C. Ruiz-

- Molina, A. Oya // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. – 2007. – Vol. 2166. – P. 894–897.
119. Gebhard R.F. A queueing process with bilevel hysteretic service-rate control // Naval. Res. Logist. Quart. – 1967. – Vol. 14, № 1. – P. 55–67.
120. Grindlay Andrew A. Tandem queues with dynamic priorities // Operat. Res. Quart. – 1965. – Vol. 16, № 4. – P. 439–451.
121. Ireland R. J. Optimal control of customer-flow through a systems of parallel queues / R. J. Ireland, M. E. Thomas // Int. J. Syst. Sci. – 1972. – Vol. 2, № 4. – P. 401–410.
122. Ivnitsky V. A. Moments and Correlation Function of Semi-Markov Flow // Труды 17-ой Международной конференции «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-13, 7–10 октября, Москва). – 2013. – С. 431–439.
123. Kingman J. F. C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. – 1964. – Vol. 60, № 4. – P. 923–930.
124. Klimenok V. A BMAP/PH/N Queue with Negative Customers and Partial Protection of Service / V. Klimenok, A. Dudin // Communications in Statistics Part B: Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41. P. 1062–1082.
125. Klimenok V. On the Stationary Distribution of Tandem Queue Consisting of a Finite Number of Stations / V. Klimenok, A. Dudin, V. Vishnevsky // Communications in Computer and Information Science. – 2012. Vol. 291. – P. 383–392.
126. Madhi J. Waiting time distribution in a Poisson queue with a general bulk service rule // Manag. Sci. – 1975. – Vol. 21, № 7. – P. 777–782.
127. Meyer K. H. P. Ein Wartesystem mit heterogenen Kanaelen unter (s,S)-Regel // Proc. Operat. Res., Wuerzburg – Wien, 1973. – P. 295–317.
128. Moder J. Queueing with fixed and variable channels / J. Moder, C. Phillips // Operat. Res. – 1962. – Vol. 10, № 2. – P. 218–231.
129. Murari K. An additional special limited space queueing problem with service in batches of variable size // Operat. Res. – 1968. – Vol. 16, № 1. – P. 83–90.

130. Neuts M. F. A queue subject to extraneous phase channels // *Adv. Appl. Probab.* – 1971. – Vol. 3, № 1. – P. 78–119.
131. Neuts M. F. A versatile Markov point process // *J. Appl. Probab.* – 1979. – Vol. 16. – P. 764–779.
132. Nezhelskaya L. Optimal State Estimation in Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // *Communications in Computer and Information Science.* – 2014. – Vol. 487. – P. 342–350.
133. Oliver Robert M. On a problem of optimum priority classification / Robert M. Oliver, Gerold Pestalozzi // *J. Soc. Industr. and Appl. Math.* – 1965. – Vol. 13, № 3. – P. 890–901.
134. Pankratova E. Queueing System MAP/M/ ∞ with n Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // *Communications in Computer and Information Science.* – 2014. – Vol. 487. P. 356–366.
135. Pattipati Khrishna R. Priority assignment using dynamicprogramming for a class of queueing systems / Khrishna R. Pattipati, David L. Kleinman// *IEEE Trans. Automat. Contr.* – 1981. – Vol. 26, № 5. – P. 1095–1106.
136. Posner M. Single-server queues with service time depend on waiting time // *Operat. Res.* – 1973. – Vol. 21, № 2. – P. 610–616.
137. Romani J. A queueing model with a variable number of channels // *Trabajos de estadística* – 1957. – Vol. 8, № 3. – P. 175–189.
138. Singh V. F. Queue-dependent servers // *J. Eng. Math.* – 1973. – Vol. 7, № 2. – P. 123–126.
139. Snyder D. K. Filtering and detection for doubly stochastic random point processes // *IEEE Transactions on Information Theory.* – 1972. – Vol. IT-18. – P. 91–102.
140. Shorgin S. Queueing Systems with Multiple Queues and Batch Arrivals for Cloud Computing System Performance Analysis / S. Shorgin, A. Pechinkin, K. Samouylov, Y. Gaidamaka, E. Sopin, E. Mokrov // *SDN and NFV: Next Generation of Computational Infrastructure – 2014 International Science and Technology Conference – Modern Networking Technologies, MoNeTec 2014, Proceedings 1, SDN and NFV: Modern Networking Technologies.* 2014. P. 1–4.

141. Teghem J. On uniform hysteretic policies in a queueing system with variable service rates // Cah. Cent. etud. rech. oper. – 1979. – Vol. 21, № 2. – P. 121–125.
142. Vishnevsky V. M. Performance Fnalysis of the BMAPG1 Queue with Gated Servicing and Adaptive Vacations / V.M. Vishnevsky, O.V. Semenova, A.N. Dudin, V.I. Klimenok // Performance Evaluation. – 2011. – Vol. 68, № 5. – P. 446–462.
143. Yandin M. On queueing systems with a variable service capacities / M. Yandin, P. Naor // Naval. Res. Logist. Quart. – 1967. – Vol. 14, № 1. – P. 43–53.
144. Yandin M. Queueing systems with a removable service station / M. Yandin, P. Naor // Operat. Res. Quart. – 1963. – Vol. 14, № 4. – P. 393–405.

Приложение А Описание имитационной модели асинхронного МС-потока событий

Как следует из постановки задачи, результатами работы компьютерной имитационной модели должна быть реализация моментов наступления событий асинхронного МС-потока событий на некотором интервале времени $[0, T]$. Кроме того, программа, реализующая имитационную модель, должна давать возможность сохранять параметры потока и данные о реализовавшихся интервалах стационарности. В силу особенностей алгоритма отнесения событий реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности, данными об интервалах стационарности, используемыми для экспериментального исследования алгоритма, служат номера первого и последнего моментов наступления событий на каждом реализовавшемся в результате имитационного моделирования интервале стационарности, и значение интенсивности, с которой события наступали на интервале.

Для получения описанных данных необходимо в первую очередь получить реализацию траектории процесса $\lambda(t)$. Для этого необходимо иметь возможность получать реализацию экспоненциально распределенной случайной величины с заданным параметром распределения (для получения длительностей интервалов стационарности) и реализацию дискретной случайной величины с заданным распределением вероятностей (для определения перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние). Далее для каждого интервала стационарности необходимо получить реализацию моментов наступления событий на этом интервале, или, что то же самое, реализацию интервалов между наступлениями соседних событий потока. С учетом того, что на интервале стационарности имеет место простейший поток с соответствующей интенсивностью (и, следовательно, интервалы между моментами наступления событий есть независимые случайные величины, экспоненциально распределенные с параметром, равным значению интенсивности), для получения моментов наступления событий на интервале стационарности необходимо получать реализацию экспоненциально распределенной случайной величины с заданным параметром распределения.

С использованием компьютерного датчика псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на $[0, 1]$, нетрудно получить реализацию экспоненциально распределенной случайной величины с заданным параметром распределения и реализацию дискретной случайной величины с заданным распределением вероятностей. Таким образом, результатами имитационного моделирования асинхронного МС-потока событий с параметрами

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \lambda_i > 0, i = \overline{1; n}; \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = \overline{1; n}; \\ \alpha &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \alpha_i > 0, i = \overline{1; n}; \\ P &= \|p_{ij}\|_{n \times n}, 0 \leq p_{ij} \leq 1, i, j = \overline{1; n}; p_{ii} = 0, i = \overline{1; n}; \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i = \overline{1; n} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

является реализация моментов наступления событий потока на интервале наблюдения $[0, T]$

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{N-1} < t_N < T \quad (\text{A.2})$$

и данные о реализовавшихся интервалах стационарности в виде

$$\begin{aligned} &\{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(K)}\}, \lambda^{(k)} \in \Lambda, k = \overline{1; K}, \\ &\{[p_1, q_1], [p_2, q_2], \dots, [p_K, q_K]\}, \\ &1 \leq p_k \leq N, 1 \leq q_k \leq N, p_k < q_k, k = \overline{1; K}, p_k = q_{k-1} + 1, k = \overline{2; K}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где $\lambda^{(k)}$ — значение интенсивности на k -ом интервале стационарности, реализовавшемся в результате имитационного моделирования, p_k, q_k — номера событий из (A.2), являющихся соответственно первым и последним событием на k -ом интервале стационарности.

На рисунке А.1 представлена блок-схема вычисления значения дискретной случайной величины с заданным распределением (DRV) по значению базовой случайной величины (BRV), получаемой с использованием компьютерного датчика псевдослучайных чисел.

На рисунке А.2 представлена блок-схема построения имитационной модели асинхронного МС-потока событий с заданным числом состояний.

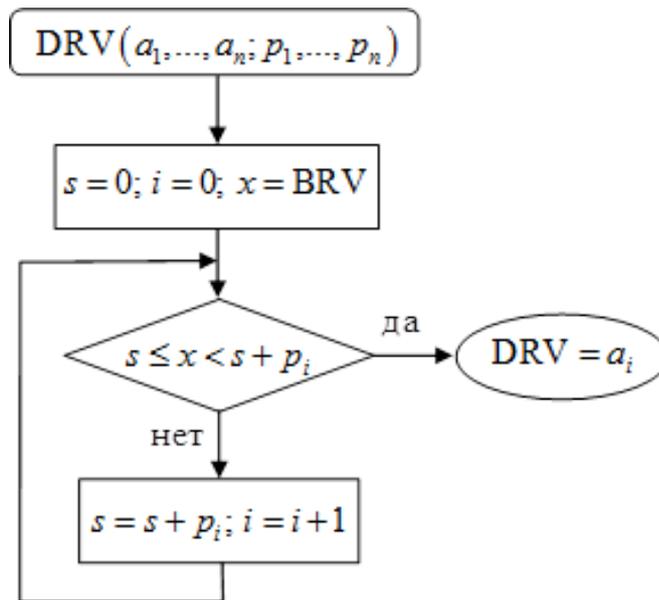


Рисунок А.1 — Блок-схема вычисления значения дискретной случайной величины с заданным распределением

Экспоненциально распределенная с параметром μ случайная величина (ERV) вычисляется по формуле

$$\text{ERV}(\mu) = -\frac{1}{\mu} \ln(x),$$

где x — реализация базовой случайной величины (BRV).

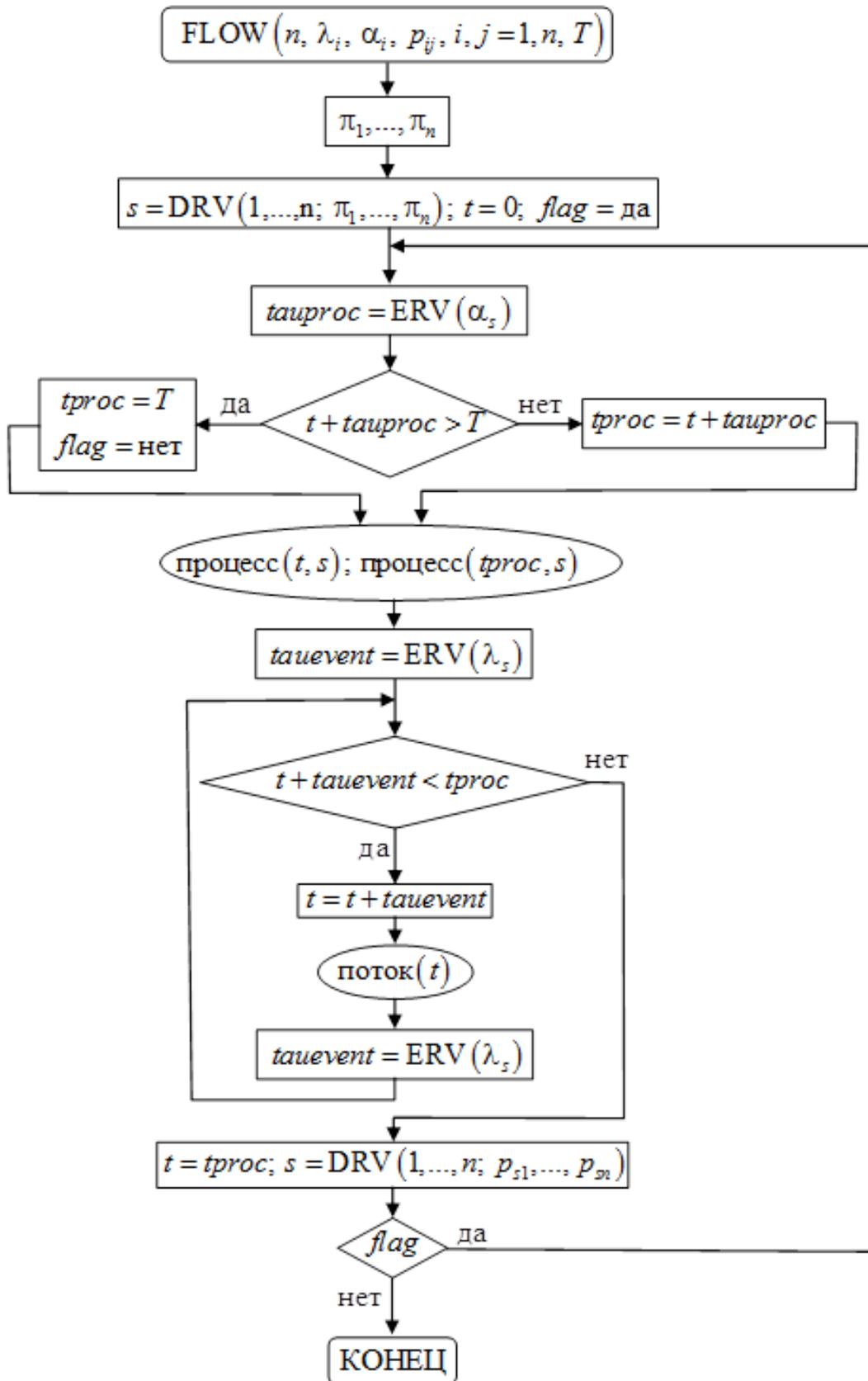


Рисунок А.2 — Блок-схема построения имитационной модели асинхронного МС-потока событий с заданным числом состояний

Приложение Б Пример применения алгоритмов к имитационной модели асинхронного МС-потока событий с тремя состояниями для реализации с большим количеством событий

При исследовании достаточно объемной реализации потока событий (реализации потока с большим числом N моментов наступления событий) существует возможность независимого исследования участков реализации с помощью алгоритма отнесения событий из реализации асинхронного МС-потока событий к интервалам стационарности с последующим применением процедуры финальной коррекции к совокупности полученных отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, по всей реализации. Кроме того, при получении в результате работы алгоритмов достаточно большого числа отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, в пределах одной реализации, очевидно, существует возможность оценивания не только числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий, но и совокупности параметров α_i распределения длительностей интервалов стационарности и матрицы P вероятностей переходов.

Для имитационной модели асинхронного МС-потока событий с параметрами

$$n = 3, \Lambda = \{10; 100; 200\}, \alpha = \{0,5; 0,5; 0,5\},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,0 \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.1})$$

получена реализация моментов наступления событий потока с числом событий $N = 5000$. Данные о реализовавшихся интервалах стационарности приведены в таблице Б.1.

Таблица Б.1 — Данные об интервалах стационарности

k	i_k	j_k	$\lambda^{(k)}$
1	1	54	20
2	55	107	100
3	108	109	20
4	110	676	200
5	677	716	20
6	717	871	100
7	872	979	200
8	980	1055	20
9	1056	1094	100
10	1095	1104	20
11	1105	1334	100
12	1335	1350	20
13	1351	1381	100
14	1382	1504	200
15	1505	1526	20
16	1527	1764	100
17	1765	1988	200

k	i_k	j_k	$\lambda^{(k)}$
18	1989	2006	20
19	2007	2659	200
20	2660	2698	20
21	2699	3514	200
22	3515	3551	100
23	3552	3555	20
24	3556	3574	100
25	3575	3974	200
26	3975	3989	20
27	3990	3996	100
28	3997	4020	20
29	4021	4295	200
30	4296	4297	100
31	4298	4302	20
32	4303	4979	200
33	4980	4999	100

Рассматриваемая реализация событий потока с числом событий $N = 5000$ разбита на 5 участков (отрезков) по 1000 событий в каждом участке. Количество событий на отрезке реализации выбирается исходя из ожидаемой частоты смены состояний потока. Большое количество интервалов стационарности на исследуемом отрезке реализации приводит к увеличению количества «шумовых» оценок в матрице D , что в свою очередь влияет на информативность гистограммы. К каждому из 5 участков применен алгоритм отнесения событий реализации потока к интервалам стационарности. В результате работы алгоритма большинство моментов наступления событий для каждого отрезка отнесено к одному из отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности. Затем исследованные отрезки вновь объединяются в общую реализацию; при этом процент «неотнесенных» событий в общей реализации не превосходит максимального процента «неотнесенных» событий в исследованных отрезках.

Финальная коррекция разбиения проведена по всей реализации потока из 5000 событий, так что каждое «неотнесенное» событие отнесено к одному из соседних интервалов или, в определенных случаях, «неотнесенные» события, следующие подряд, образуют отрезок реализации, соответствующий интервалу стационарности. Полученные в результате отрезки реализации, соответствующие интервалам стационарности, приведены в таблице Б.2.

Таблица Б.2 — Результаты отнесения событий реализации асинхронного МС-потока к интервалам стационарности

№ отрезка	отрезок реализации	оценка интенсивности	α_{max}
1	[1; 54]	19,91	0,11010
2	[55; 88]	92,23	0,99168
3	[89; 92]	149,36	0,20269
4	[93; 107]	88,34	0,018812
5	[108; 674]	193,89	0,28553
6	[675; 711]	18,72	0,54320
7	[712; 858]	85,16	0,23045
8	[859; 978]	188,02	0,69993
9	[979; 1000]	21,51	0,092463
10	[1001; 1065]	21,51	0,31068
11	[1066; 1100]	34,84	0,01130
12	[1101; 1320]	101,52	0,55566
13	[1321; 1361]	25,96	0,41764
14	[1362; 1378]	127,08	0,60960
15	[1379; 1502]	198,12	0,16994
16	[1503; 1529]	24,42	0,63643
17	[1530; 1750]	95,65	0,55621
18	[1751; 1988]	205,47	0,82652
19	[1989; 2004]	16,43	0,57191
20	[2005; 2658]	198,78	0,50445
21	[2659; 2696]	17,59	0,53554
22	[2697; 3000]	206,12	0,83910
23	[3001; 3549]	190,77	0,16797
24	[3550; 3554]	15,91	0,22418
25	[3555; 3977]	190,32	0,04598
26	[3978; 4000]	24,84	0,98424
27	[4001; 4019]	19,63	0,2161
28	[4020; 4297]	189,56	0,21927
29	[4298; 4999]	186,58	0,57754

Полученная совокупность отрезков реализации, соответствующих интервалам стационарности, была исследована с помощью трех различных алгоритмов оценивания числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий. Во всех трех случаях оценка числа состояний потока $\hat{n} = 3$. Распределение отрезков реализации по состояниям процесса $\lambda(t)$ во всех трех случаях совпадает (см. таблицу Б.3).

Таблица Б.3 — Распределение отрезков реализации по состояниям процесса $\lambda(t)$

№ отрезка	отрезок реализации	оценка интенсивности	соответствующая оценка $\hat{\lambda}_i$
1	[1; 54]	19,91	$\hat{\lambda}_1$
2	[55; 88]	92,23	$\hat{\lambda}_2$
3	[89; 92]	149,36	$\hat{\lambda}_3$
4	[93; 107]	88,34	$\hat{\lambda}_2$
5	[108; 674]	193,89	$\hat{\lambda}_3$
6	[675; 711]	18,72	$\hat{\lambda}_1$
7	[712; 858]	85,16	$\hat{\lambda}_2$
8	[859; 978]	188,02	$\hat{\lambda}_3$
9	[979; 1000]	21,51	$\hat{\lambda}_1$
10	[1001; 1065]	21,51	$\hat{\lambda}_1$
11	[1066; 1100]	34,84	$\hat{\lambda}_1$
12	[1101; 1320]	101,52	$\hat{\lambda}_2$
13	[1321; 1361]	25,96	$\hat{\lambda}_1$
14	[1362; 1378]	127,08	$\hat{\lambda}_2$
15	[1379; 1502]	198,11	$\hat{\lambda}_3$
16	[1503; 1529]	24,42	$\hat{\lambda}_1$
17	[1530; 1750]	95,65	$\hat{\lambda}_2$
18	[1751; 1988]	205,47	$\hat{\lambda}_3$
19	[1989; 2004]	16,43	$\hat{\lambda}_1$
20	[2005; 2658]	198,78	$\hat{\lambda}_3$
21	[2659; 2696]	17,59	$\hat{\lambda}_1$
22	[2697; 3000]	206,12	$\hat{\lambda}_3$
23	[3001; 3549]	190,77	$\hat{\lambda}_3$
24	[3550; 3554]	15,91	$\hat{\lambda}_1$
25	[3555; 3977]	190,32	$\hat{\lambda}_3$
26	[3978; 4000]	24,84	$\hat{\lambda}_1$
27	[4001; 4019]	19,63	$\hat{\lambda}_1$
28	[4020; 4297]	189,56	$\hat{\lambda}_3$
29	[4298; 4999]	186,58	$\hat{\lambda}_3$

Оценки интенсивностей состояний и показатели качества оценивания представлены в таблице Б.4.

Таблица Б.4 — Оценки интенсивностей состояний и показатели качества оценивания

	способ 1	способ 2	способ 3
$\hat{\lambda}_1$	21,67	23,87	19
$\hat{\lambda}_2$	95,31	98,03	110
$\hat{\lambda}_3$	192,15	198,68	200
среднее отклонение оценок интенсивностей	0,16	0,21	0,15
процент неверно отнесенных событий	4,4	4,4	4,4

Сравнивая результаты работы алгоритмов со значениями параметров (Б.1) и интервалами стационарности, полученными в результатах имитационного моделирования (таблица Б.1), отметим следующее:

- оценка числа состояний $\hat{n} = 3$ совпадает с истинным значением $n = 3$ числа состояний, реализовавшихся в результате имитационного моделирования;
- среднее относительное отклонение оценок $\hat{\lambda}_i$ интенсивностей, рассчитанное по формуле (3.0.1), для трех способов исследования не превышает 0,22;
- процент событий реализации (1.2.1), неверно отнесенных к соответствующим интервалам стационарности, равен 4,4 %.

С использованием данных таблицы Б.3 строятся оценки остальных параметров (А.1) потока событий — оценки $\hat{\alpha}_i, i = \overline{1;3}$ параметров распределения длительностей интервалов стационарности и оценки $\hat{p}_{ij}, i, j = \overline{1;3}$ вероятностей переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Из данных таблицы Б.3 видно, что в некоторых случаях отрезки реализации, соответствующие одному и тому же состоянию интенсивности, следуют в реализации друг за другом. Однако, согласно выбранной модели потока, по окончании состояния i процесс $\lambda(t)$ не может остаться в том же самом состоянии i , поэтому предварительно данные таблицы Б.3 корректируются (объединяются соседние отрезки реализации, соответствующие интервалам стационарности, относящиеся к одному и тому же состоянию потока). Оценки $\hat{\alpha}_i, i = \overline{1;3}$ строятся по методу максимального правдоподобия [23]. В результате оценивания имеем: $\alpha_1 = 0,53, \alpha_2 = 0,89, \alpha_3 = 0,45$.

Оценки $\hat{p}_{ij}, i, j = \overline{1;3}$ равны отношению числа переходов из состояния i в состояние j к общему числу переходов из состояния i . В результате оценивания имеем:

$$\hat{P} = \begin{vmatrix} 0,0 & 0,555 & 0,444 \\ 0,166 & 0,0 & 0,833 \\ 0,875 & 0,125 & 0,0 \end{vmatrix}$$

В процессе дальнейшего наблюдения за потоком с увеличением объема выборки оценки всех параметров уточняются. Данные оценки могут быть использованы в качестве начальных данных для других методов оценивания параметров асинхронного МС-потока событий.

Приложение В Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебной работе НИ ТГУ

 В. В. Дёмин

11 января 2017 г.



Акт

о внедрении результатов кандидатской диссертации Беккерман Е. Н.
в учебный процесс НИ ТГУ

Настоящим подтверждается, что результаты диссертации Беккерман Е. Н. «Оценивание числа состояний и значений интенсивности асинхронного МС-потока событий», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации», используются в учебном процессе на факультете прикладной математики и кибернетики (ФПМК) Национального исследовательского Томского государственного университета при разработке курсов лекций образовательных дисциплин «Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков» и «Имитационное моделирование телекоммуникационных потоков и систем» для магистрантов, обучающихся по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» (магистерская программа «Математическое и программное обеспечение прикладного вероятностного анализа»).

Председатель методической комиссии ФПМК,

д. ф.-м. н., профессор  А. Г. Дмитренко

