Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Сибиряков Егор Борисович

СТАТИЧЕСКОЕ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СРЕД С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2019

Оглавление

Введение …….…….. 4

Глава 1. Обзор подходов к моделированию микронеоднородных сред …..... 15

1.1. Замена разностных операторов дифференциальными …….... 15

1.2. Достоинства и недостатки метода граничных элементов ……..…….…. 20

1.3. Проявления нелинейных эффектов в сейсмике и сейсмологии ……..….. 22

1.4. Проблемы интеграции геофизики и геодинамики …….…… 23

1.5. Выводы по первой главе …….…..... 25

Глава 2. Осреднение уравнений движения и нелинейные эффекты …….. 27

2.1. Зернистая среда, состоящая из квазисферических частиц ……... 27

2.2. Интегральная геометрия и нелинейность ……...34

2.3. Уравнение движения блочной среды ……..... 36

2.4. Сейсмологический закон Гутенберга−Рихтера ……..... 38

2.5. Малые колебания и комбинационные частоты ……...…….. 41

2.6. Выводы по второй главе …….. 50

Глава 3. Совершенствование метода граничных элементов …….…… 51

3.1. Построение интегрируемых сингулярных ядер для упругостатических задач …… 51

3.2. Обобщение тензора на область ненулевых временных частот …… 63

3.3. Гладкие и финитные ядра …….…… 65

3.4. Использование финитных ядер для моделирования отражения волн от шероховатых границ ……..…… 72

3.5. Выводы по третьей главе ……. 79

Глава 4. Статика, прогноз напряжённого состояния и ориентация трещин в изотропной среде …….……..…….…… 80

4.1. Эффективные упругие модули зернистой среды ..……. 80

4.2. Эффективные упругие модули кавернозной среды ……..... 93

4.3. Расклинивающее давление в зернистых коллекторах и проблема аномально высоких пластовых давлений ……...……..... 99

4.4. Параметры напряжённого состояния, порождаемые силой тяжести и конфигурацией сейсмических границ …….…… 114
4.5. Вычисление преимущественной ориентации трещин, обусловленной рельефом …….…… 131
4.6. Выводы по четвёртой главе …… 141

Заключение …… 143

Список использованной литературы …..……..... 146

Введение

Актуальность темы исследования. Микронеоднородные среды, обладающие структурой, включают в себя как конструкционные материалы (композиты), так и твёрдые тела, содержащие флюиды. Первые, как правило, состоят материалов, не очень сильно отличающихся по своим физико-механическим свойствам (не на порядки). Различие вторых, например, по модулю сдвига, составляет много порядков. По этой причине такие микронеоднородные среды называют контрастными. Зачастую значительные перепады свойств хотя бы по одному параметру приводят к необходимости учёта не только объёмных концентраций различных фаз, но и подробностей строения материала скелета (т.е. структуры порового пространства). Данная работа связана, главным образом, с такими материалами.

При разработке месторождений важное значение приобретает как расчёт напряжённого состояния среды в целом, так и различие давлений в скелете и флюиде. Это должно дать дополнительные возможности обнаружения зон скопления флюидов, помимо обычных структурных методов. Как правило, перспективные участки нефтегазоносных структур связывают с наличием куполообразных поднятий, т.е. антиклинальных структур. Однако, давление в горных породах ведёт себя не тривиально, может с глубиной падать, так что наличие антиклинальных структур совершенно не обязательно для формирования перспективных зон накопления нефти и газа. Наоборот, зоны пониженных давлений могут оказаться аттракторами флюидов, поиск которых и есть одна из главных задач. Эти зоны возникают даже в горизонтально-слоистых средах.

В свою очередь, знание напряжённого состояния и некоторых параметров структуры порового пространства позволяет, в частности, вычислить скорость истечения флюида из пласта в скважину.

В связи с этим, по-прежнему является актуальной задача определения эффективных параметров микронеоднородных сред в зависимости от материала скелета и структуры порового пространства.

Кроме линейно-упругих свойств, характеризуемых упругими модулями, контрастные микронеоднородные среды обладают ещё и специфическими свойствами, которые не характерны для «классических» сплошных сред, например, металлов. В частности, аномально высокие отношения скоростей поперечных и продольных волн, которые формально соответствуют отрицательным коэффициентам Пуассона, необычно сильная нелинейность (которую иногда называют «аномальной», «неклассической», либо «гигантской» нелинейностью). Она во много раз превышает обычную квадратичную нелинейность в металлах и проявляется в генерации комбинационных частот при действии двух вибраторов разной частоты. Это свойство может быть использовано для детектирования микронеоднородности в объёме среды неразрушающими методами. В работе установлены причины того, что нелинейные явления, как правило, обнаруживаются на протяжённых по времени монохромных импульсах. Это может использоваться как для вибрационной сейсморазведки, так и для скважинных, а также лабораторных исследований. Для решения структурных задач как в сейсморазведке, так и в скважинных исследованиях, экспериментаторы обычно стремились к созданию как можно более коротких вибросейсмических сигналов, создавая вибрации в широкой полосе частот. Отмеченные выше нелинейные явления, наоборот, сильнее всего проявляются на узкополосных квазистационарных воздействиях, которые до последнего времени считались малоинформативными.

Также весьма актуальна проблема отражательных свойств шероховатых границ (ими, в частности, являются эродированные границы), не присущих обычным гладким границам, для возможного определения параметров шероховатости. Так как площадь поверхности шероховатых границ существенно больше, чем плоских, то возможно существование особых отражательных свойств таких границ в некотором диапазоне частот, что рассмотрено в данной работе.

Вместе с тем, способы вычисления средних свойств микронеоднородных сред имеют прямое отношение и к прогнозу состояния геологической среды, содержащей флюиды в порах и трещинах. Разрыв давлений в скелете и флюиде

зависит как от напряжённого состояния пласта в целом, так и от структуры порового пространства. Таким образом, методы расчёта параметров микроструктур необходимы не только для решения макроскопических задач, таких, как разрыв давлений в скелете и флюиде, но и для прогноза пластовых давлений флюида.

Прогресс в решении упомянутых задач даст возможность усовершенствовать методы использования результатов классических геофизических методов, например, сейсморазведки, стимулировать поиск не только антиклинальных структур, но и иных зон пониженного давления, а также прогнозировать области аномально высоких пластовых давлений, где разрыв давлений на границе скелет−флюид достигает пороговых значений.

Степень разработанности. Проблемы описания микронеоднородных сред, содержащих флюиды, как сплошных упругих тел с эффективными параметрами, были успешно решены лишь для сред, упругие параметры которых не слишком сильно (не на порядки) отличаются друг от друга [1]. Иными словами, средние свойства микронеоднородной среды с равномерно перемешанными компонентами, которые зависят только от объёмного содержания компонент, но не зависят от каких-либо подробностей их расположения, удовлетворительно определяются для сред, у которых верхняя и нижняя границы упругих модулей компонент достаточно близки.

Однако, для контрастных микронеоднородных сред формулы теории смесей не позволяют адекватно вычислять скорости волн [2]. Этот факт говорит о том, что необходимо учитывать граничные условия на контактах, а это, в свою очередь, означает, что кроме пористости, результат будет зависеть и от удельной поверхности. Главной причиной неадекватности теории смесей в контрастных средах является неограниченно большое отношение модулей сдвига в скелете и флюиде. Работ, связанных с интегральной геометрией порового пространства, относительно немного [3]. Интегральная геометрия имеет дело с коллективными характеристиками порового пространства, которых в изотропном теле четыре. К сожалению, большинство исследователей пытаются найти зависимость эффективных параметров только от одной из них – пористости [4].

Общей теории, позволяющей аналитически вычислить зависимость упругих модулей от всех четырёх интегрально-геометрических характеристик порового пространства пока нет, по этой причине единственным доступным инструментом для решения этой проблемы является численное моделирование.

В отношении описания необычно большой нелинейности при слабых колебаниях построены некоторые модели сплошных сред с достаточно сложным уравнением состояния без учёта конкретного вида микрообъектов [5, 6]. Природа явления связывается с наличием в грунтах как твёрдых, так и весьма мягких элементарных объектов. Однако, это описание не может считаться исчерпывающим, так как зависимость амплитуды комбинационных частот от структуры порового пространства в этом описании не ясна.

Тему расчёта напряжённого состояния геологической среды также нельзя считать полностью решённой. Использование высокопроизводительного метода конечных элементов (МКЭ) в трёхмерном случае приводит к появлению системы большого размера с большим числом обусловленности. Это, в свою очередь, приводит к необходимости использования регуляризационных процедур. Для построения упомянутых процедур очень желательно примерно представлять себе вид будущего решения. В случае, если нормаль к поверхности раздела изменяется достаточно быстро, то регуляризационные процедуры могут в итоге приводить к существенному снижению достоверности результатов численного моделирования. По этой причине желательно найти более надёжные способы решения этой задачи, без использования регуляризации, особенно в случае быстрого изменения вектора нормали к границе раздела.

Задача расчёта скорости истечения флюида из пласта тесно связана с разрывом давлений в скелете и флюиде. Имеется противоречие между описанием среды как сплошного тела, и реальным существенным скачком на контактах зёрен и границах раздела скелет−флюид таких характеристик напряжённого состояния, как, например, вектор нагрузок. Для сплошной среды физически малый объём означает малое различие всех физических характеристик. Проблема расчёта скорости истечения флюида из пласта, как правило, эмпирически описывается с

помощью эффективного давления, т.е. разности давлений в скелете и флюиде, что устраняет сам эффект разрыва давлений при такой геометрии контакта.

Как правило, для вычисления дебитов скважины, используются полуэмпирические методы [7], содержащие неопределённые постоянные, и использующие различные модификации закона Дарси. Такой подход имеет существенные недостатки. В частности, он содержит в качестве входного параметра давление на питающем контуре (вдали от скважины). На самом деле, это давление является функцией напряжённого состояния и структуры порового пространства. Примыкает к проблеме и тема шероховатых границ, т.е. не обязательно высококонтрастных, но с быстрым изменением вектора нормали к границе раздела и достаточно большой площадью контактирующих поверхностей. Несмотря на то, что известны достаточно давно как теоретические работы в области акустики, разрабатываемые для целей неразрушающих методов контроля, основанные на теории Кирхгофа [8], так и численные методы, использующие метод конечных элементов в достаточно широком диапазоне параметров шероховатости отражающего слоя [9], отражательные свойства таких границ не изучены должным образом. Главным результатом работы [9] является построение надёжного инструмента моделирования отражений от шероховатой поверхности для нахождения количественных отличий амплитуд отражённых волн от геометрических характеристик периодической шероховатости. Было бы желательно рассмотреть аналогичную задачу для упругости, а не для акустики, а также попытаться определить частотный диапазон, в котором отражательные свойства шероховатой поверхности будут отличаться качественно от аналогичных свойств гладкой поверхности с теми же упругими параметрами.

Цель и задачи. Целью выполненной работы является установление взаимосвязи между структурой порового пространства, физико-механическими параметрами скелета и флюида и законами деформирования среды на макроуровне, а также параметрами напряжённого состояния среды и его возможной неустойчивости.

Для достижения этой цели были решены следующие научные задачи:

1. В трёхмерной зернистой среде получена зависимость эффективных свойств от структуры порового пространства и двух констант силового взаимодействия как в случае малых, так и в случае конечных деформаций.

2. В зернистой и трещиноватой средах установлена взаимосвязь между появлением комбинационных частот при монохромных колебаниях, дисперсией, слабой нелинейностью и параметрами микроструктуры.

3. Разработан и численно реализован алгоритм вычисления параметров напряжённого состояния слоистой среды с достаточно большими углами наклона структур.

4. Модифицированный метод граничных элементов был применён для решения контактных задач в двухфазной среде при наличии порового давления.

5. Разработан и численно реализован алгоритм вычисления эффективных упругих модулей в зернистой и кавернозной среде.

Научная новизна и личный вклад:

1. Метод граничных элементов был усовершенствован. Это заключалось в изменении ядер и позволило решать упругие задачи смешанного типа без процедур регуляризации. Показано, что этот метод эффективен в случае быстрого изменения вектора нормали на поверхности границ раздела, как в статике, так и в случае стационарных колебаний.

2. В результате численного решения контактных задач предсказано расклинивающее давление в зернистых скелетах, т.е. растягивающие напряжения на контактах при общем сжатии пористого тела под действием давления флюида. Тем самым, заложены физические основы для объяснения возникновения катастрофических явлений в зоне аномальных пластовых давлений.

3. По-новому объяснены необычно сильные нелинейные эффекты в пористых средах, с использованием модели континуума со структурой, а также указана связь нелинейности с параметрами микроструктуры.

4. Установлено, что важнейшими интегрально-геометрическими характеристиками зернистой среды являются пористость, средний объём зерна, а

также среднее число контактов, при произвольном распределении шаров в среде по радиусам.

5. Установлено, что углы наклона и кривизны структур приводят к появлению зон пониженных давлений, которые могут быть аккумуляторами флюидов. Тем самым впервые показано, что геодинамические параметры структур могут быть информативными поисковыми признаками наличия углеводородов в структурах.

Автор принимал решающее участие в получении оригинальных результатов и их анализе, обсуждении и подготовке публикаций по теме диссертации, в совершенствовании метода граничных элементов, в постановке и численном решении контактных задач, в том числе смешанного типа, в интерпретации полученных результатов для объяснения причин возникновения аномально высоких пластовых давлений, в разработке и реализации алгоритма численного решения задачи о параметрах напряжённого состояния, обусловленного границами с быстро изменяющимся вектором нормали. Часть результатов получены совместно с соавторами работ, что отражено в тексте диссертации и в автореферате.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы заключается, с одной стороны, в развитии и совершенствовании существующих методов численного и аналитического моделирования для нахождения эффективных свойств контрастных микронеоднородных сред. С другой стороны, работа позволила объединить не использовавшиеся ранее совместно различные методы моделирования для получения достоверных результатов. Также использовались новые методы интерпретации полученных данных, с одной стороны, для контроля точности и достоверности, с другой стороны, для получения результатов, имеющих практическую значимость.

Практическое значение имеет вывод о характере разрушения зернистой среды под действием порового давления, а это является важным, поскольку при разрушении скелета давление во флюиде возрастает до 50 процентов, что может привести к катастрофическим последствиям. Вторым важным возможным

практическим приложением является рекомендация об использовании узкополосных двухчастотных импульсов для детектирования пор и трещин в среде.

Методология и методы исследования. Основным методологическим приёмом работы является комплексирование аналитических методов вычисления эффективных свойств контрастных микронеоднородных сред, и численных, связанных с удовлетворением граничных условий на сложной, либо быстро изменяющейся, поверхности раздела. В ходе работы находились решения краевых задач с уравнениями как классической теории упругости, так и с уравнениями континуума со структурой.

В работе применялись следующие методы исследования:

1. Замена разностных операторов дифференциальными и переход на макроуровень путём осреднения по ориентациям мезоструктур.

2. Усовершенствованный метод граничных элементов использовался для решения упругостатических задач, а также задач упругих монохромных колебаний. Модификация метода заключалась в изменении ядер интегральных операторов с целью получения оптимального баланса между обусловленностью системы и точностью аппроксимации элементов матрицы.

3. Краевые задачи смешанного типа сводились к обращению матрицы достаточно большой размерности без использования каких-либо регуляризационных процедур.

4. Метод нахождения средних деформаций в замкнутом объёме через вектор перемещений на поверхности, а также тензор средних напряжений в объёме через вектор нагрузок, заданный на ограничивающей поверхности.

5. Длинноволновое приближение для континуума с микроструктурой.

6. Сравнение с лабораторным экспериментом.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что в среде, состоящей из контактирующих частиц квазисферической формы, давление во флюиде (поровое давление) может приводить как к растяжению контактов (расклинивающий эффект), так и к их сжатию (упрочнение), в зависимости, главным образом, от площади контактов.

Сокращение площади контактов под действием порового давления является необратимым. Поэтому повышение давления во флюиде может приводить к неустойчивости скелетов. При этом разрыв контактов при их растяжении приводит к обнулению потенциальной энергии сдвига скелета, что резко увеличивает давление в образовавшейся сыпучей среде. Тем самым заложены физические основы прогноза зон аномально высоких пластовых давлений.

2. В области малых деформаций (порядка 10^{-6}) показано, что удельная поверхность пор в контрастной микронеоднородной среде резко усиливает нелинейные явления в ней. Комбинационные частоты, обусловленные этими нелинейными явлениями, могут дать важную информацию о структуре микронеоднородных сред.

3. Усовершенствования метода граничных элементов, которые заключаются в использовании в качестве ядер перемещений, порождённых не объёмной сосредоточенной силой, а поверхностной (либо её конечным аналогом), повышают его точность. Метод граничных элементов имеет преимущество при решении смешанных краевых задачи теории упругости в широком диапазоне частот в случае быстрого изменения вектора нормали к границе раздела. Преимущество проявляется в том, что решение краевой задачи сводится к системе линейных уравнений, решение которой находится без использования регуляризационных процедур, по причине хорошей обусловленности матрицы системы.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов, полученных аналитическим путём, определяется соответствием данных расчётов и лабораторного эксперимента, а также многочисленными полевыми наблюдениями, связанными с различием видимых частот продольных и поперечных волн, возбуждаемых одним и тем же импульсным источником.

Достоверность результатов численного моделирования определяется хорошей обусловленностью системы линейных уравнений, не потребовавших для обращения использования регуляризационных процедур.

Результаты работы входили в отчёты по междисциплинарным проектам СО РАН № 18 (Деформирование сухих и водонасыщенных грунтов с позиций

механики много-фазных сред, 2006−2008) и №69 (Метастабильные состояния и вероятные сценарии развития катастроф в структурированных геологических средах, 2009−2011), а также в отчёты по проектам РФФИ 03−05−64156−а (Физические основы прогноза разрыва давлений в скелете и флюиде трещиноватых пород коллекторов углеводородов, 2003−2005), 05−05−64503−а (Геофизическое изучение процесса консолидации среды, разрушенной в результате катастрофического землетрясения, 2005−2007), 05−05−64663−а (Теоретическое и экспериментальное моделирование нелинейных свойств геологических пород ВЧР, 2005−2007), 06−05−64772−а (Напряжённое состояние и возникновение диффузии сейсмических волн в микронеоднородных средах, содержащих вязкую жидкость, 2006−2008), 08−01−00207−а (Теоретические аспекты и конструирование современных высокоточных численных алгоритмов решения задач гидродинамики, упругости и томографии, 2008−2010), 10−05−00690−а (Возникновение нелинейных явлений при слабых колебаниях микронеоднородных сред, содержащих флюиды, 2010−2012), 11−01−00147−а (Теоретические основы и инновационные методы конструирования высокоточных алгоритмов численного решения актуальных задач механики сплошных сред и томографии, 2011−2013), 15−05−04165−а (Связь между напряжённым состоянием, структурой порового пространства и давлениями в скелете и флюиде в породах коллекторов углеводородов, 2015−2017).

Также основные результаты докладывались на 68 конференции EAGE (Vienna, 2006), на конференциях «Акустика неоднородных сред» (2007, 2010, Новосибирск), на международной конференции по математическим методам в геофизике "ММГ−2008" (Новосибирск, 2008), на конференции «Сейсмологические исследования Земной коры» (Новосибирск, 2011), на всероссийских семинарах «Геодинамика. Геомеханика и геофизика» (Алтайский край, 2016, 2017), на международной научной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения академика Анатолия Семёновича Алексеева «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей» (Новосибирск, 2013) , международных научных конгрессах ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ (Новосибирск, 2014, 2016,

2017), международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014), четвёртой тектонофизической конференции в ИФЗ РАН «Тектонофизика и актуальные вопросы наук о Земле» (Москва, 2016), на конференции «Марчуковские научные чтения − 2017» (Новосибирск, 2017), на конференции «Геодинамика и напряжённое состояние недр Земли» (Новосибирск, 2017), на международной конференции «ВИЗУАЛЬНАЯ АНАЛИТИКА» в рамках участия в реализации федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-Технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (Кемерово, 2017). Основная часть работы была выполнена в соответствии с планами НИР ИНГГ СО РАН за последние 10 лет.

Тема диссертационного исследования соответствует приоритетным направлениям развития науки в Российской Федерации, утверждённым Указом Президента РФ № 899 от 07 июля 2011 г.: «Рациональное природопользование» (п. 26), перечню критических технологий в Российской Федерации «Технологии поиска, разведки, разработки месторождений полезных ископаемых и их добычи» (п.20), перечню приоритетных направлений фундаментальных исследований «Механика деформируемых тел, перспективных материалов, конструкций и сооружений; трибология» (п. 2.3.3), «Геодинамика, напряжённое состояние земных недр, катастрофические процессы» (п. 5.1.7).

Результаты диссертационной работы используются в учебном процессе на ГГФ НГУ, часть из них была включена в изданное учебное пособие «Динамика микронеоднородных сред, содержащих флюиды» [99].

Публикации. По теме работы опубликовано 34 научные работы, из них 12 работ – в ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из 4 глав и заключения. Текст диссертации содержит 156 страниц и 56 рисунков, список использованной литературы включает 100 наименований.

Глава 1. Обзор подходов к моделированию микронеоднородных сред

1.1. Замена разностных операторов дифференциальными

Объекты, содержащие поры и трещины, заполненные флюидами, являются перспективными с точки зрения обнаружения залежей углеводородов. Очевидно, что такие среды являются не только микронеоднородными, но и контрастными, т.е. такими, в которых перепад хотя бы по одному физико-механическому параметру составляет многие порядки. Теория микронеоднородных сред в значительной степени несовершенна: в контрастных средах невозможно игнорировать условия на границе раздела фаз. То есть необходимо учитывать внутреннюю геометрию пор и трещин, а также учитывать взаимодействие элементарных объектов между собой.

Закономерности деформирования пород с внутренней структурой достаточно давно представляют интерес как с точки зрения аналитического вычисления эффективных характеристик (например, упругих модулей), так и с точки зрения неразрушающих методов контроля, т.е. ответа на вопрос о том, можно ли что-то сказать об изменении структуры порового пространства по изменению каких-либо статических или динамических характеристик.

В качестве одной из перспективных методик аналитического моделирования поведения сложнопостроенных сред в своё время рассматривалась замена разностных операторов дифференциальными с использованием длинноволнового приближения [10]. Это позволяло получать константы среды на макроуровне из параметров микровзаимодействия (взаимодействия на уровне частиц, слагающих среду). Зернистая среда, состоящая из частиц одинакового радиуса и известным законом взаимодействия на контактах, казалось бы, сама собой напрашивается для использования в качестве объекта подобного способа моделирования. В [11] эффективность этой методики была продемонстрирована на одномерной цепочке частиц, взаимодействующих по закону Герца. Там же был рассмотрен вопрос о размере представительного объёма подобной среды (одномерной). Действительно, этот вид моделирования позволяет связать с параметрами микроструктуры не только линейные характеристики (скорость продольных волн), но и нелинейные.

Проблема в том, что эффективные параметры среды можно оценить только качественно, но не количественно, поскольку реальная среда не является одномерной цепочкой, в частности, при таком моделировании о свойствах поперечных волн нельзя сказать вообще ничего. Естественно, что дальнейшее развитие этого подхода привело к двумерному континууму [12], состоящему из однородных шаров одинакового радиуса. Однако, среда, моделируемая любой двухмерной упорядоченной структурой, будет анизотропной. С другой стороны, частицы могут взаимодействовать не только по Герцу. Эти проблемы отчасти были разрешены в [13, 14], с помощью использования эффективных феноменологических констант межчастичного взаимодействия, с учётом того, что наличие на контактной поверхности угла при сдвиговой деформации приводит к выходу за рамки упругости [15]. То есть, отказавшись от одних феноменологических констант, пришлось перейти к другим. Как их вычислять (т.е. определить зависимость от граничных условий) − не известно. Может быть, взять из какого-то эксперимента? Или всё-таки попытаться найти способ их вычисления? В [16] было предложено проводить процедуру осреднения по ориентации мезоструктур, при этом мезоструктура состояла из упорядоченного набора микроструктур (зёрен сферической формы). Таким образом представительным объёмом среды по процедуре проведения осреднения считался объём, содержащий мезоструктуры всех ориентаций. В случае двухмерной упорядоченной системы шаров появляется новая реальность – поперечная волна, её скорость можно измерить и сравнить с результатами теории. В [12−14] представлены результаты вычислений эффективных упругих модулей в двухмерной зернистой среде с одинаковыми зёрнами, расположенными как упорядоченно, так и хаотично, взаимодействующими как по классическому закону Герца, так и по модифицированному, учитывающему сопротивление сдвигу, обусловленное силой трения, частичной цементацией и пр. Как правило, физическая мезомеханика рассматривает материалы (в основном конструкционные) при достаточно больших нагрузках, а мезоструктурами называет реальные структуры и блоки, которые возникают в процессе нагружения. В [16] было предложено обобщить это понятие

и считать мезоструктурой любой минимальный объём среды, позволяющий вычислить силу, действующую на элементарный объект в результате распространения волны, либо иного внешнего нагружения сверхмалой амплитуды. Например, в моноразмерной зернистой среде мезоструктурой будет любое случайно выбранное зерно и все его соседи, с которыми осуществляется контактное взаимодействие. Различие мезоструктур между собой – в их ориентации в пространстве. В изотропной среде ориентации равновероятны. Осреднение (т.е. переход от мезоуровня к макроуровню и вычислению эффективных параметров среды) было предложено осуществлять путём вычисления средней силы (закон взаимодействия двух частиц на микроуровне предполагается известным), действующей на случайную частицу, в зависимости от относительных смещений центров масс соседей из положения равновесия по нормали к площадке контакта и сдвигов центров площадок контакта относительно центра масс зерна. После этого следует проводить осреднение по ориентации (либо по любым другим параметрам, отличающим одну мезоструктуру от другой), путём интегрирования и замены разностных операторов дифференциальными в длинноволновом приближении. Осреднение предложено проводить по некоторому представительному объёму, для которого и выводятся уравнения движения. Его размер должен быть таков, чтобы в нём содержались мезоструктуры со всеми возможными ориентациями, а также остальными параметрами, отличающими одну мезоструктуру от другой, если таковые имеются. Этим (достаточностью размера) будет определяться точность перехода на макроуровень. В результате получатся уравнения движения. В акустическом приближении – уравнения упругости, в которых упругие модули выражаются через параметры микроструктуры. Этот подход, наряду с альтернативными, дал возможность явно получить через параметры микроструктуры не только линейные, но и нелинейные и дисперсионные члены уравнений движения. Кроме того, он позволил объяснить хорошо известный (изложенный, в частности в [17]) феноменологический закон пропорциональности скорости продольных волн в слабоконсолидированном сухом песке одной шестой степени силы поджатия. Однако, несмотря на это, вопросов

осталось много. Изменится ли что-либо принципиально в случае трёхмерных мезоструктур? Как известно, макросвойства среды, содержащей поры и трещины, должны описываться четырьмя интегрально-геометрическими характеристиками: пористость, удельная поверхность, средняя и Гауссова кривизны [18]. Возникает следующий вопрос, а как будут выражаться эффективные характеристики в трёхмерной зернистой среде, состоящей из шаров с известным законом распределения по радиусам? Можно ли сделать какие-либо выводы о качественном поведении сигнала, формируемого импульсной нагрузкой (т.е. нагрузкой с достаточно большой амплитудой, когда об упругости, а тем более линейной, не может быть и речи) в дальней зоне (где линейная упругость вполне адекватно описывает отклик среды на внешнюю нагрузку). Вообще говоря, результаты, полученные, в частности в [16], являются следствием, с одной стороны, закона Герца, с другой, метода замены разностных операторов на дифференциальные. Закон Герца, в свою очередь, есть не что иное, как решение хоть и очень интересной, но частной упругой статической краевой задачи. По этой причине, естественно, возникают вопросы о том, а возможно ли вычислить константы силового взаимодействия через параметры микроструктуры? Возможно ли что-либо вычислить, если площадки контакта достаточно большие (т.е. закон Герца уже не работает)? Или, можем ли мы решить аналогичную краевую задачу, если есть частичная цементация, т.е. изменение граничных условий на контакте? А зависят ли результаты вычислений от такого важного внешнего параметра как поровое давление (чтобы его учесть также нужно изменить граничные условия)? Для ответа на эти вопросы необходимо иметь инструмент для решения соответствующих граничных задач. Как упругостатических, так и задач упругих стационарных колебаний (в том числе в квазистатическом режиме). В свою очередь, наличие этого инструмента (а также грамотная интерпретация результатов) позволит продвинуться в обнаружении зон аномально-высоких пластовых давлений (АВПД) и моделировании некоторых явлений, связанных с этой проблемой, вычислять эффективные упругие модули в кавернозных средах, вычислять параметры напряжённого состояния, порождённые силой тяжести, в слоистых средах, а также

вычислять эффективные отражательные свойства шероховатых границ. Обычная практика экспериментального исследования напряжённого состояния с использованием различного рода прессов имеет дело с нулевыми объёмными силами в каждой точке образца, если его вес ничтожен по сравнению с внешним давлением. В горной механике и в геологии объёмные силы как раз и создают большие напряжения. Поэтому в моделировании напряжённого состояния геологических структур есть некоторая специфика.

Особенностью, например, контактных краевых задач (применяемых в том числе для вычисления эффективных свойств зернистых сред) является наличие углов на площадке контакта, т.е. линий, на которых происходит бесконечно быстрое изменение вектора нормали к поверхности раздела. Как отмечено в [15], это приводит к выходу за рамки упругости. Однако, если размер пластической области достаточно мал (можно пренебречь потерями энергии), то зачастую краевую задачу можно решить с помощью так называемого «эффективного сглаживания», т.е. угол фактически скругляется цилиндром достаточно малого радиуса. Это очень удобно с точки зрения моделирования, ибо позволяет всё время оставаться в рамках упругости.

Основная задача теории упругости состоит в установлении взаимосвязей между вектором нагрузок, приложенным к какой-либо поверхности, и вектором перемещений на этой же поверхности, порождённым упомянутым выше вектором нагрузок. Если на однородной упругой поверхности известны и вектор перемещений, и вектор нагрузок, то задача вычисления вектора перемещений в объёме сводится к вычислению несобственных интегралов [19], т.е. может считаться решённой. Если на поверхности известен только вектор перемещений, либо только вектор нагрузок, то обычно это называется краевой задачей первого, либо второго типа [20]. Выполнение условий на границе раздела (этих условий в трёхмерном случае шесть) приводит фактически к задаче смешанного типа, когда на свободной поверхности заданы компоненты вектора нагрузки, а на любой границе раздела непрерывен вектор перемещений, а также выполняются условия нулевой векторной суммы вектора нагрузок (условия жёсткого контакта).

1.2. Достоинства и недостатки метода граничных элементов

В настоящий момент основным инструментом решения упругих задач является метод конечных элементов (МКЭ). Его главным достоинством является минимальное расходование вычислительных ресурсов из-за использования упрощённых алгоритмов обращения разреженной матрицы. Однако, его недостатки являются продолжениями его же достоинств. Фактическое проведение границ там, где их на самом деле нет, редко остаётся без последствий. Ухудшение обусловленности при увеличении количества узлов в сетке порождает необходимость использования регуляризационных процедур при использовании этого метода [21]. Это приводит к мысли, что было бы очень желательно иметь возможность использовать альтернативные методы решения некоторых видов упругих задач. В частности, на поверхностях, где быстро меняется вектор нормали (малоамплитудная шероховатость, либо угол), либо быстро изменяются начальные данные (например, сосредоточенная нагрузка), интегральные методы решения задачи, в частности, метод граничных элементов (МГЭ), будут обеспечивать лучшую обусловленность системы и позволят находить решения без использования регуляризационных процедур. Не исключаю в будущем использования МГЭ совместно с МКЭ в случае большого количества узлов (в качестве хорошего нулевого приближения на начальной, разреженной сетке). С одной стороны, для контроля достоверности решения, с другой, для использования в регуляризационных процедурах, использующих качественное нулевое приближение на более грубой сетке. Соответственно, наличие достоверного алгоритма решения статических неоднородных задач в слоисто-однородной среде даст возможность вычислять, например, линии тока флюида и ориентацию трещин в среде под действием силы тяжести. В то же время, возможность решения упругих однородных уравнений стационарных колебаний в слоисто-однородных средах с шероховатыми границами раздела позволит такие границы детектировать, соответственно, алгоритм решения краевых задач смешанного типа может быть использован для разработки неразрушающих методов контроля. Самым распространённым из интегральных методов является метод граничных

интегральных уравнений (далее ГИУ), который, в свою очередь, является также разновидностью МГЭ. Этот метод (а также проблемы, связанные с его использованием) достаточно хорошо описан классиками [19−22]. Одним из его достоинств является то, что уравнениям равновесия (или стационарных колебаний) полученное решение удовлетворяет точно (аналитически), соответственно, суммарная погрешность численного решения задачи связана только с погрешностью удовлетворения граничным условиям, что позволяет проще оценивать суммарную погрешность получаемого численного решения. Ещё одно достоинство этого метода отмечено в обзоре [23]. Этот метод очень удобен в случае бесконечно удалённой нижней границы, ибо исключает возникновение ложных отражений от неё. В этих же работах, особенно в [20], отражены и недостатки этого метода. В трёхмерных задачах тензор нагрузок имеет, вообще говоря, неинтегрируемую особенность. По этой причине интегралы следует вычислять в смысле главного значения. На практике это означает потерю точности. Для преодоления этого недостатка использовались разные приёмы. Введение тензора псевдонапряжений, а также сопряжённого оператора [20] нельзя признать эффективным. В ряде работ, в частности, в [24], было предложено использовать многомерное преобразование Фурье по пространственным координатам, что, с одной стороны, даёт для спектров решения гладкие и финитные ядра, что очень удобно, ибо это делает процесс вычисления коэффициентов матрицы значительно менее трудозатратным (не нужно «выкалывать» особенность) и защищённым от человеческих ошибок, с другой стороны, резко ухудшает обусловленность системы, что требует использования регуляризации. В результате потери обусловленности преимущества МГЭ по сравнению с МКЭ становятся совсем не очевидными. В [20] было высказано предположение, что с этим недостатком можно попытаться побороться, изменив ядро, однако эта идея автором не была реализована в полной мере. Несмотря на указанные недостатки, некоторые исследователи развивали этот метод, причём использовали его не только для решения краевых задач линейной теории упругости, но также для вязкоупругости [25] и даже для пороупругости [26].

1.3. Проявления нелинейных эффектов в сейсмике и сейсмологии

Альтернативным подходом к выполнению граничных условий на поверхности скелет−флюид является изменение уравнений движения с тем, чтобы избежать необходимости выполнения граничных условий на сложной поверхности раздела (выполнить их только на внешней границе объёма). То есть, упростить граничные условия, но при этом «усложнить» уравнения, т.е. добавить в них члены, содержащие параметры микроструктуры и понять, сколько же должно быть таких параметров. Проблема построения континуума, обладающего внутренней структурой, возникла сразу же после появления работ М.А. Садовского [27], где была установлена определённая иерархия горных пород. Развитие идей М.А. Садовского привело к появлению дискретных моделей динамического деформирования металлов [28] и горных пород [29, 30]. Однако, наличие характерных размеров неоднородностей не всегда является препятствием для описания субструктур методами механики сплошных сред. Если соединяются материалы одного класса, у которых физико-механические характеристики различаются в разы, но не на многие порядки, то модель сплошного тела может служить хорошим первым приближением. Если же соединяются материалы, упругие модули которых, (хотя бы один из них) отличаются на многие порядки, например, твёрдый скелет и поры, заполненные флюидом, то описание подобной контрастной среды как сплошной перестаёт быть адекватным. В механике сплошной среды предполагается, что близость точек влечёт за собой близость всех свойств среды, напряжений, деформаций и т.д., иначе производные любого поля потеряют смысл. Опыт показывает, что модель сплошной среды адекватно описывает микронеоднородные среды с не очень высокой контрастностью компонент. То есть в том случае, когда усреднение прямых и обратных параметров (например, упругих модулей и податливостей) даёт сопоставимые результаты.

В контрастных микронеоднородных средах, содержащих флюиды, эти условия не выполняются. Для описания подобных сред используются методы интегральной геометрии, которая оперирует коллективными свойствами горных пород, такими как пористость, удельная поверхность, средняя и гауссова кривизна

порового пространства. При этом реальная среда не предполагается сплошной, её сплошной аналог строится методом переноса поля во все точки как порового пространства, так и скелета. К настоящему времени имеется достаточное количество экспериментов, наглядно демонстрирующих нелинейные эффекты в консолидированных горных породах даже при малых деформациях. Кроме того, данные сейсмологии [31−35] и сейсморазведки [36] показывают, что в реальных средах доминирующие частоты продольных и поперечных волн существенно различаются. Удовлетворительного объяснения этому пока нет. Зачастую частоты этих волн относятся как их скорости, так что оказываются близкими длины волн, но не частоты. Опыты [37−41] с двумя вибраторами показали, что возникают комбинационные частоты, помимо двух, возбуждаемых вибраторами. Это явление было правильно оценено как появление нелинейности при слабых колебаниях. Однако, с точки зрения механики сплошной среды, этот эффект, пропорциональный квадрату деформаций, для малых колебаний должен быть пренебрежимо малым. Кроме того, закон распределения землетрясений по энергиям Гутенберга−Рихтера, неожиданно оказался применим и к катастрофам, не связанным с землетрясениями. Можно надеяться, что построение новой модели континуума, содержащего структуру, позволит объяснить указанные явления.

1.4. Проблемы интеграции геофизики и геодинамики

До последнего времени геофизические методы были направлены на определение геологических границ и оценку физических параметров слоёв, составляющих геофизический разрез. Во многих случаях решающим обстоятельством для принятия решений о перспективности того или иного участка территории является конфигурация структуры, т.е. наличие антиклинальных поднятий. Однако, за последнее десятилетие всё большее внимание привлекает не только конфигурация структур, но и напряжённое состояние последних, в частности, распределение давлений в окрестности структур, перспективных на нефть и газ. Этому способствует то обстоятельство, что поведение давления является, вообще говоря, не очень простым. Например, давления, даже в условиях

горизонтального залегания слоёв, непрерывны на границах раздела только в случае равных коэффициентов Пуассона контактирующих сред. Если этого нет, то имеют место скачки давлений на границах, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. В последнем случае возникает резкое понижение давления, так что оно падает с глубиной, а затем снова возрастает. Зоны пониженного давления есть аттракторы флюидов, куда они устремляются при наличии некоторой транспортной системы пор или трещин.

Второй аспект взаимодействия геофизических методов и геомеханики состоит в том, что прогноз напряжённого состояния, в частности, расчёт по сейсмическим данным интенсивности касательных напряжений, даёт возможность вычислить области повышенной трещиноватости, обусловленных силой тяжести и геометрией границ вышележащих пород.

Третий важный геодинамический факт – это разрыв давлений между скелетом и флюидом, без учёта которого невозможен расчёт скорости истечения флюида из пласта в скважину (или наоборот). Он зависит, помимо общего напряжённого состояния, от структуры порового пространства. Поэтому, в настоящее время классические методы геофизики всё чаще дополняются геодинамическими исследованиями состояний и медленных движений геологических структур.

Сложность поставленных проблем связана с различными масштабами явлений, как в динамике, так и при медленных движениях. Если многие волновые явления, а также состояние равновесия в больших масштабах вполне адекватно описываются моделями сплошной среды, то разрыв давлений в скелете и флюиде не может быть адекватно описан в рамках этой модели. Дело в том, что напряжённое состояние сильно меняется на одном отдельном зерне, вплоть до знака вектора нагрузок. Контраст физических свойств скелета и флюида по модулю сдвига составляет много порядков. Вместе с тем, модель сплошной среды требует малого изменения любого состояния в физически бесконечно малом объёме. Это фундаментальная проблема многих тел или многих частиц, которая имеет

длительную историю, и продвижение её, хотя бы в некоторых аспектах, представляется полезным.

Зависимость разрыва давлений в скелете и флюиде от структуры пор и трещин означает зависимость от интегрально-геометрических характеристик пор и трещин. Интегральная геометрия изучает только коллективные характеристики сложных геометрических объектов, не интересуясь их индивидуальными характеристиками. Суть вопроса в том, что индивидуальных характеристик неограниченно много, в то время как коллективных характеристик всего четыре (для изотропного тела). Удельная поверхность пор и трещин есть размерная характеристика порового пространства (размерность которой есть обратная длина), в то время как пористость – безразмерная характеристика, чем, возможно, объясняется её постоянное употребление.

Логично, что попытка количественного описания деформирования контрастных сред (естественно, в предположении равномерного перемешивания в объёме) в рамках модели сплошной среды, используя всего один интегрально-геометрический параметр порового пространства – пористость, необычайно привлекательна по причине простоты моделирования. Однако, очевидно, что рано или поздно такое описание станет неадекватным, и самое простое объяснение явления уже совсем не будет самым правильным. Например, снижение скоростей продольных (P) и поперечных (S) волн при увеличении давления в жидкости (порового давления) в зернистой среде объясняют тем, что поровое давление, якобы, направлено против давления в скелете. Но, с одной стороны, давление – это скаляр, который не может быть направлен никуда, с другой стороны, для объяснения этого явления необходимо честно решать краевую задачу. И результат её решения будет зависеть не только от пористости, но и от удельной поверхности и граничных условий на контакте зёрен.

1.5. Выводы по первой главе

В связи с вышеизложенным, в рамках работы представляется полезным:

1. В рамках модели упругого сплошного тела усовершенствовать методы расчёта напряжённого состояния геологических структур, без существенного ограничения их горизонтальных размеров.

2. Модифицировать МГЭ для решения краевых задач смешанного типа в случае быстрого изменения вектора нормали к границе.

3. Использовать решения контактных задач для разработки физических основ возникновения зон аномально высоких пластовых давлений.

4. Использовать метод замены разностных операторов дифференциальными для вычисления эффективных свойств зернистых сред.

Глава 2. Осреднение уравнений движения и нелинейные эффекты

2.1. Зернистая среда, состоящая из квазисферических частиц

Представим себе трёхмерную среду в виде набора мезоструктур (рисунок 2.1).

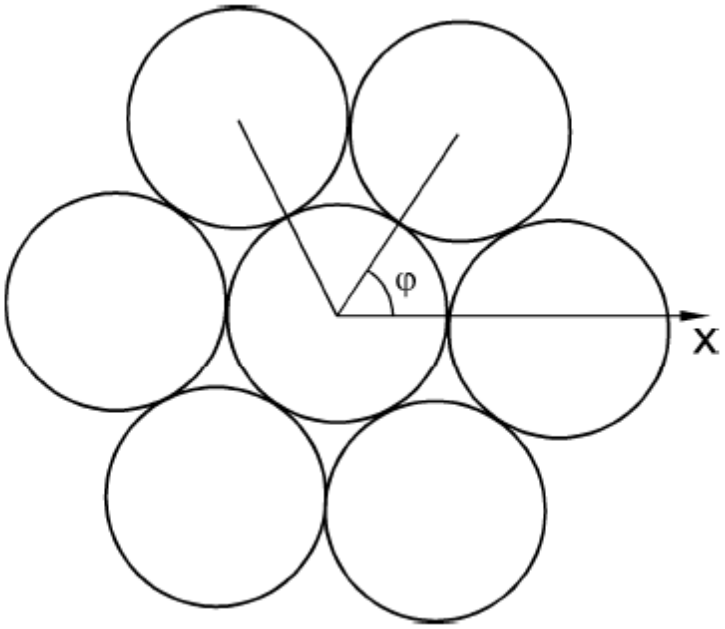

Рисунок 2.1 − Вид мезоструктуры в трёхмерном случае

Каждая мезоструктура состоит из N+1 сферических частиц, отличающихся только радиусами. Зёрна взаимодействуют между собой по закону Герца:

$$F_n = \frac{2E}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{R_1R_0}{R_1+R_0}\right)^{1/2}\delta^{3/2}, \tag{2.1}$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала зерна соответственно, R_0 – радиус шара, R_1 – радиус соседнего шара, δ – сближение центров масс шаров из положения равновесия. Эту же формулу можно записать через упругие модули Ламе (λ и μ):

$$F_n = \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\left(\frac{R_1R_0}{R_1+R_0}\right)^{1/2}\delta^{3/2} = \frac{8}{3}(\lambda+\mu)\gamma^2\left(\frac{R_1R_0}{R_1+R_0}\right)^{1/2}\delta^{3/2}, \tag{2.2}$$

где $\gamma^2 = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)} = (\frac{V_s}{V_p})^2$ есть квадрат отношения скоростей поперечных и продольных волн. Предполагается, что сопротивления касательному смещению нет. Пусть к границам среды приложена начальная статическая сила F_0. Не

уменьшая общности задачи, эту силу можно считать силой всестороннего сжатия. Начальная сила F_0 приводит к сближению центров масс соседних частиц на δ_0. В акустическом приближении разность смещений центров соседних частиц под действием малоамплитудной дополнительной нагрузки (волны) $\Delta U, \Delta V, \Delta W$ по осям X, Y и Z соответственно будет много меньше, чем δ_0. Поэтому из (2.1) силу взаимодействия между двумя частицами можно выразить через $F_0, \Delta U, \Delta V, \Delta W$ и их взаимное расположение в пространстве:

$$F_n = A\delta_n, \tag{2.3}$$

$$A = \left(\frac{3F_0}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{R_1 R_0}{R_1 + R_0}\right)^{1/3} \left(\frac{E}{(1-\nu^2)}\right)^{2/3}, \tag{2.4}$$

$$\delta_n = \Delta U sin\theta cos\varphi + \Delta V sin\theta sin\varphi + \Delta W cos\theta, \tag{2.5}$$

где θ и φ – полярный и азимутальный углы, образующие телесный угол, под которым соседнюю частицу видно из центра зерна.

Сила (2.3) направлена по нормали к площадке контакта и прямо пропорциональна проекции на нормаль разности смещений центров масс двух частиц. Таким образом, при соответствующем смещении по прямой, лежащей в той же плоскости, что и площадка контакта (т.е. сдвиге центра площадки контакта), никакой дополнительной силы не возникает. Однако, существуют модификации закона Герца [15], которые вводят дополнительную касательную силу, возникающую при сдвиге центра площадки контакта относительно центра зерна. Физически появление этой силы объясняется наличием на площадке контакта зон частичного проскальзывания, либо жёсткого сцепления, обусловленного спеканием (цементацией) в зоне контакта. Силы, препятствующие сдвигам, можно записать следующим образом:

$$F_\theta = B\delta_\theta, \tag{2.6}$$

$$F_\varphi = B\delta_\varphi, \tag{2.7}$$

$$\delta_\theta = \Delta U_\alpha cos\theta cos\varphi + \Delta V_\alpha cos\theta sin\varphi - \Delta W_\alpha sin\theta, \tag{2.8}$$

$$\delta_\varphi = -\Delta U_\alpha sin\varphi + \Delta V_\alpha cos\varphi \tag{2.9}$$

При этом $\Delta U_\alpha, \Delta V_\alpha, \Delta W_\alpha$ – разность смещений центров зерна и площадки контакта по осям X, Y и Z соответственно. Отношение B/A меняется от $\frac{2(1-\nu)}{2-\nu}$ – полное отсутствие проскальзывания, до $\frac{(1-\nu)}{2-\nu}$ – предельный случай частичного проскальзывания (спекание только в одной точке) по нелинейному закону. Если среда состоит из квазисферических частиц, как представлено на рис.2.1, то излишек вещества продеформируется в поровое пространство. В этом случае коллективные взаимодействия внутри мезоструктуры, связанные со стеснённостью деформирования, учитывать не нужно, и сила, действующая на частицу со стороны всех соседей, будет равна сумме парных взаимодействий. Заменим разностный оператор дифференциальным, аналогично [75]:

$$\begin{aligned}\Delta = {} & d\left(\frac{\partial}{\partial x}sin\theta cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y}sin\theta sin\varphi + \frac{\partial}{\partial z}cos\theta\right) + \\ & + \frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}sin^2\theta cos^2\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}sin^2\theta sin^2\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}cos^2\theta\right) + \\ & + d^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}sin^2\theta sin\varphi cos\varphi + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}sin\theta cos\theta cos\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}sin\theta cos\theta sin\varphi\right),\end{aligned} \tag{2.10}$$

где d – расстояние между центром зерна и объектом, от относительного перемещения которого зависит сила. Таким образом, для вычисления $\Delta U, \Delta V, \Delta W$ следует выбрать $d = R_1 + R_0$, а для $\Delta U_\alpha, \Delta V_\alpha, \Delta W_\alpha$ соответственно $d = R_0$.

Далее, находим проекции сил на оси X, Y и Z. Например, проекция на ось X $(= mU_{tt})$, где m – масса частицы, есть не что иное, как:

$$F_x = A\delta_n sin\theta cos\varphi + B\delta_\theta sin\theta cos\varphi - B\delta_\varphi sin\varphi = F_x(\Omega, R_1, R_0), \tag{2.11}$$

F_y и F_z получаются аналогичным образом.

На центральную частицу мезоструктуры будет действовать суммарная сила со стороны всех соседних частиц (слагаемые будут отличаться только углами φ и θ, а также радиусами, всего N слагаемых). Осреднение по телесному углу провести достаточно просто. Поскольку суммарная сила, действующая на частицу радиуса R_0, есть произведение функций, зависящих только от соответствующих телесных углов и радиусов, а представительный объём включает в себя мезоструктуры со

всеми возможными ориентациями, то средняя сила, действующая на случайную частицу, вычисляется путём интегрирования. Используя (2.10) и записывая первые значимые (ненулевые) члены разложения, получим уравнения трёхмерной идеальной упругости, в которых:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = V_p^2 = \frac{1}{20\pi\rho R_0^3}\left[\sum_{i=1}^{N} 3A_i(R_0, R_i)(R_0 + R_i)^2 + 2B_i(R_0, R_i)R_0^2\right], \qquad (2.12)$$

$$\frac{\mu}{\rho} = V_s^2 = \frac{1}{20\pi\rho R_0^3}\left[\sum_{i=1}^{N} A_i(R_0, R_i)(R_0 + R_i)^2 + 4B_i(R_0, R_i)R_0^2\right], \qquad (2.13)$$

где $A_i = A(R_0, R_i), B_i = B(R_0, R_i),\ \rho -$ плотность материала зерна. То есть, сначала нужно провести осреднение по радиусам окружения, затем найти среднюю силу в объёме, а коэффициенты между вторыми производными по времени и по координатам и будут соответствующими упругими модулями. При осреднении по радиусам окружения нужно вычислять среднее арифметическое сил, действующих на зерно. Чтобы произвести корректное осреднение, нужно, вообще говоря, знать двухмерную функцию вероятности контакта частицы радиуса R_0 с частицей радиуса R_1 в среде. Проще говоря, нужно знать, с каким количеством частиц каждого радиуса будет в среднем контактировать частица с радиусом R_0, а также каково количество частиц данного радиуса. Однако, если предположить, что перемешивание частиц в среде равномерно, то достаточно знать функцию распределения частиц в среде по радиусам.

Эта функция распределения должна учитывать наличие так называемых «хлопающих контактов» [5]. Телесный угол, под которым частица радиуса R_i видна из центра шара радиуса R_0, есть:

$$\Omega_i = 2\arcsin\frac{R_i}{R_0 + R_i} \qquad (2.14)$$

Если в этот телесный угол попадёт ещё какая-то частица (более мелкая), то она будет не поджата, что даст нелинейный эффект, но на эффективные упругие модули не повлияет никак. Поэтому упомянутая функция распределения должна исключить так называемые «хлопающие» частицы.

Принимая во внимание вышесказанное, пусть у нас есть дискретная функция распределения частиц («не хлопающих») по радиусам в среде. Пусть α_i есть отношение числа частиц радиуса R_i к числу всех частиц в среде, т.е.

$$\sum_i \alpha_i = 1 \tag{2.15}$$

В усреднённой мезоструктуре (точнее, в среднем арифметическом всех мезоструктур), состоящей из N+1 частиц, количество частиц с радиусом R_i есть $\alpha_i(N+1)$. Количество частиц радиуса R_i, находящихся в контакте с частицей радиуса R_j в случае, если $(\alpha_i(N+1)-1) \geq 0$, есть:

$$\begin{aligned} &N_j = \alpha_j(N+1), \text{ при } i \neq j, \\ &N_i = \alpha_i(N+1) - 1, \text{ при } i = j \end{aligned} \tag{2.16}$$

Если же $(\alpha_i(N+1)-1) \leq 0$, то:

$$\begin{aligned} &N_j = \alpha_j N, \text{ при } i \neq j, \\ &N_i = 0, \text{ при } i = j \end{aligned} \tag{2.17}$$

Формулы (2.16), (2.17) означают равномерность перемешивания, т.е. если доля частиц какого-либо радиуса мала, то не будет никаких мезоструктур, где данная частица контактирует с частицей такого же радиуса, а частицы остальных размеров будут распределены в окружении так же, как и в среднем по объёму среды. Если же доля частиц с выбранным радиусом не мала, то доля других частиц в окружении данной будет больше (по сравнению со средней в среде), а доля частиц такого же размера – меньше.

Формула (2.14) определяет телесный угол, под которым один шар виден из центра другого. Максимально возможное число контактов определяется как целая часть отношения полного телесного угла к сумме телесных углов, под которыми видны соседи, с которыми происходит контактное взаимодействие:

$$N_{max} = Int\left(\frac{4\pi}{\sum_i \Omega_i}\right) = Int\left(\frac{2\pi}{\sum_i \arcsin\frac{R_i}{R_0 + R_i}}\right) \tag{2.18}$$

Реальное же число контактов $N \leq N_{max}$. В качестве количественной характеристики плотности упаковки среды, состоящей из сферических зёрен

разного (или одинакового) размера предлагаю ввести величину $J = {}^{N}/_{N_{max}}$, которая будет интегрально-геометрической характеристикой среды. В первом приближении её можно считать не зависящей ни от радиуса конкретной частицы, ни от радиусов соседей. Теперь можно вычислить значения $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ и $\frac{\mu}{\rho}$ (квадраты скоростей продольных и поперечных волн соответственно) для частицы произвольного радиуса, т.е. провести осреднение по радиусам окружения. Аналогично (2.12) и (2.13) получаем:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho} = \frac{1}{20\pi\rho R_0^3}\left[\sum_{i=1}^{N} N_i\,(3A_i(R_0,R_i)(R_0+R_i)^2 + 2B_i(R_0,R_i)R_0^2)\right], \tag{2.19}$$

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{20\pi\rho R_0^3}\left[\sum_{i=1}^{N} N_i(A_i(R_0,R_i)(R_0+R_i)^2 + 4B_i(R_0,R_i)R_0^2)\right], \tag{2.20}$$

где N_i определяется в соответствии с (2.16–2.17), $N = JN_{max}$,

$$N_{max} = Int\left(\frac{2\pi}{\sum_i N_i \arcsin\frac{R_i}{R_0+R_i}}\right) \tag{2.21}$$

Таким образом, N_i и N выражаются неявно через доли частиц каждого радиуса в среде. Теперь можно вычислить упругие модули в среде в целом. Отмечу, что теперь нужно находить не среднее арифметическое сил, действующих на каждую частицу, а среднюю силу в объёме. С одной стороны, это приводит к появлению множителя $(1-f)$, где f – пористость (при условии, что в порах вакуум и никакого силового взаимодействия между скелетом и поровым пространством нет). С другой стороны, нужно не просто находить среднее значение ((2.19), (2.20)), а среднее значение с весом R_0^3, так как вклад каждой частицы в суммарное волновое поле пропорционален её объёму.

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho} = \frac{1-f}{20\pi\rho\overline{R^3}}\sum_j \alpha_j\left[\sum_{i=1}^{N} N_i\left(3A_i(R_{0j},R_i)(R_{0j}+R_i)^2 + 2B_i(R_{0j},R_i)R_{0j}^2\right)\right], \tag{2.22}$$

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{1-f}{20\pi\rho\overline{R^3}}\sum_j \alpha_j\left[\sum_{i=1}^{N} N_i(A_i(R_{0j},R_i)(R_{0j}+R_i)^2 + 4B_i(R_{0j},R_i)R_{0j}^2)\right], \tag{2.23}$$

где $\overline{R^3} = \sum_i \alpha_i R_i^3$ – средний куб радиуса зерна (средний объём), а суммирование идёт по всем возможным i и j. Таким образом, задача о вычислении скоростей продольных и поперечных волн в изотропной среде, состоящей из неодинаковых шаров, взаимодействующих по модифицированному закону Герца (о её важности сказано в [14]), решена. Важнейшими интегрально-геометрическими характеристиками такой среды являются средний объём зерна (а не средний радиус, как предполагалось ранее), пористость и плотность упаковки, равная отношению $J = {N}/{N_{max}}$.

Рассмотрим случай среды, состоящей из шаров равных (достаточно близких) радиусов. В этом случае $R_0 = R_i$, а квадраты скоростей волн есть не что иное, как:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = V_p^2 = \frac{(1-f)N}{20\pi\rho R_0^3}(12A(R_0, R_0)R_0^2 + 2B(R_0, R_0)R_0^2), \tag{2.24}$$

$$\frac{\mu}{\rho} = V_s^2 = \frac{(1-f)N}{20\pi\rho R_0^3}(4A(R_0, R_0)R_0^2 + 4B(R_0, R_0)R_0^2) \tag{2.25}$$

Квадрат отношения скоростей:

$$\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{A + B}{3A + {B}/{2}} \tag{2.26}$$

Нетрудно видеть, что при B=0 (Герцевское взаимодействие) $\gamma^2 = \frac{1}{3}$, т.е. $\lambda = \mu$. В случае полного отсутствия проскальзывания (на всех зёрнах, по всем контактам), когда ${B}/{A} = {2(1-\nu)}/{(2-\nu)}$, параметр γ^2 зависит от коэффициента Пуассона материала зерна и изменяется от 0.57 до 0.5. В предельном случае частичного проскальзывания, когда ${B}/{A} = {(1-\nu)}/{(2-\nu)}$, параметр γ^2 изменяется от 0.46 до 0.42. Если сравнить этот параметр для моноразмерной среды и среды, в которой есть распределение по радиусам, то если $B = 0$, то $\gamma^2 = \frac{1}{3}$ при любом распределении.

При любом $B > 0$ $\gamma^2 > \frac{1}{3}$, однако наличие перемешанных зёрен с различными радиусами уменьшит значение этого параметра по сравнению с моноразмерной средой, что следует из формул (2.22) и (2.23). Следовательно, в моноразмерной

среде параметр γ^2 будет максимальным, если на контактах происходит частичное проскальзывание или цементация.

2.2. Интегральная геометрия и нелинейность

Характерный размер структуры означает, что среднее расстояние между трещиной и её ближайшей соседкой (или среднее расстояние от поры до поры l_0) выражается через удельную поверхность образца σ_0. На рисунке 2.2 показан представительный объём среды, состоящей из отдельных зёрен. Имеет место теорема интегральной геометрии, которая связывает удельную поверхность σ_0, средний размер микроструктуры l_0 и пористость f [42−44].

$$\sigma_0 l_0 = 4(1 - f) \tag{2.27}$$

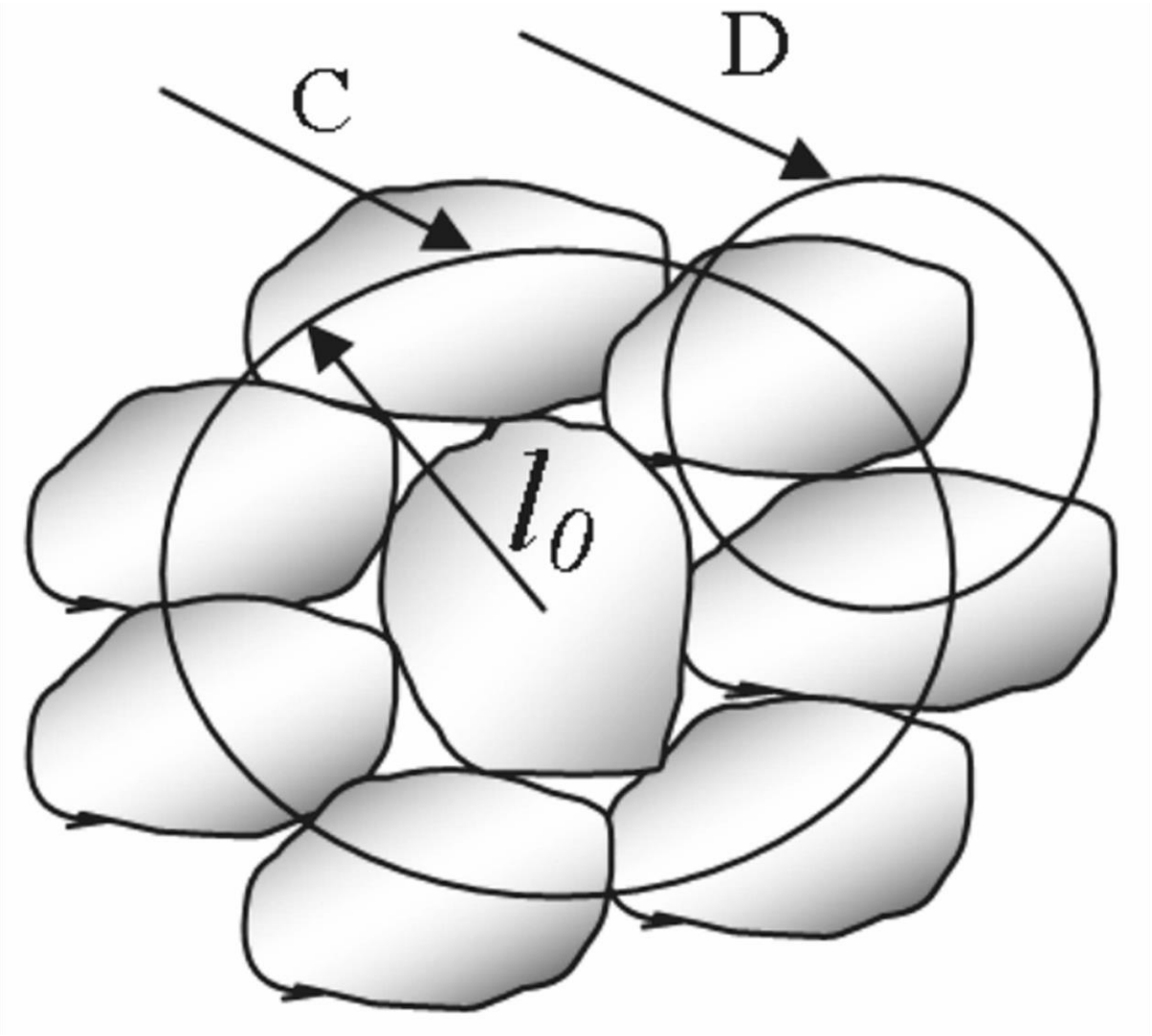

Рисунок 2.2 − Представительный объём среды, состоящей из отдельных зёрен

Как следует из формулы (2.27), можно вычислить линейный размер структуры, если измерена удельная поверхность образца и его пористость. Очевидно, что характерный размер представительного объёма среды не может быть меньше, чем l_0.

Из рисунка 2.2 можно увидеть главное различие между классическим и структурированным континуумами. Суть его в том, что в объёме, ограниченном поверхностью *C*, имеет место компенсация всех внешних сил, а в объёме, ограниченном поверхностью *D*, этого нет, так как часть поверхности нагружена, а другая часть свободна. Другими словами, состояние равновесия может иметь место в сравнительно больших масштабах, и не иметь в малых. Это стирает грань между квазистатикой и динамикой в средах со структурой. Рассмотрим конечный объём, ограниченный сферой радиуса l_0. Поверхностные силы действуют на поверхность элемента, отстоящего на расстоянии l_0 от точки приложения сил инерции (от центра микроструктуры). Возможности устремить элементарный объём к нулю и совместить точки приложения поверхностных сил и сил инерции нет, так как произвольно малый объём перестаёт быть представительным. Перенесём поле в центр тяжести структуры с поверхности и приравняем силам инерции. Конечные расстояния не позволяют разностные отношения автоматически заменить дифференциальными, что приводит к необходимости использования высших производных уравнениях движения.

Перенос поля с поверхности, на которой выполняется уравнение равновесия, в центр тяжести создаёт новую модель непрерывного континуума, содержащего микроструктуру. Фактически эта операция есть размазывание силового поля по объёму микроструктуры с тем, чтобы применять законы сохранения не к реальному телу, а к его непрерывному образу. Некоторые результаты, вытекающие из рассматриваемой модели, были опубликованы в [3]. Одномерный оператор переноса поля из точки x в точку $x \pm l_0$ есть:

$$u(x \pm l_0) = u(x)\exp(\pm l_0 D_x)\,; \qquad D_x = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.28}$$

Формальное разложение выражения (2.28) в ряд Тейлора даёт известную формулу для конечных приращений. Может быть построен аналогичный оператор переноса в трёхмерном пространстве для сферы:

$$P\left(D_x, D_y, D_z, l_0\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \exp\left[l_0\left(D_x n_x + D_y n_y + D_z n_z\right)\right] sin\theta d\theta d\varphi, \qquad (2.29)$$

$$n_x = sin\theta cos\varphi, \quad n_y = sin\theta sin\varphi, \quad n_z = cos\theta \qquad (2.30)$$

Интеграл (2.29) с символическими переменными D_x, D_y, D_z может быть вычислен формально с помощью интеграла Пуассона [45], обоснование таких вычислений дано В.П. Масловым [46]:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\alpha n_x + \beta n_y + \gamma n_z\right) sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} f\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right) sintdt \qquad (2.31)$$

Вычисление оператора P достаточно просто:

$$P\left(D_x, D_y, D_z, l_0\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \exp\left(l_0 t\sqrt{\Delta}\right) dt = \frac{sh(l_0\sqrt{\Delta})}{l_0\sqrt{\Delta}} = E + \frac{l_0^2}{3!}\Delta + \frac{l_0^4}{5!}\Delta\Delta + \cdots \qquad (2.32)$$

2.3. Уравнение движения блочной среды

Используя оператор P, можно написать уравнение движения микронеоднородного тела, если на поле напряжений подействовать упомянутым оператором:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(E + \frac{l_0^2}{3!}\Delta + \frac{l_0^4}{5!}\Delta\Delta + \cdots\right)\sigma_{ik}\right] = \rho\ddot{u}_i, \qquad (2.33)$$

где σ_{ik} − тензор напряжений, u_i − компонента вектора перемещений, ρ − плотность породы. Уравнение (2.33) эквивалентно следующему:

$$\left[\left(E + \frac{l_0^2}{3!}\Delta + \frac{l_0^4}{5!}\Delta\Delta + \cdots\right)\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\right] = \rho\ddot{u}_i, \qquad (2.34)$$

при этом E − единичный оператор. Если средний размер структуры $l_0 \to 0$, то $P \to E$, а уравнение (2.34) совпадает с уравнением движения обычной линейно-упругой сплошной среды. Классический континуум Коши и Пуассона соответствует случаю $P = E$. В случае стационарных колебаний и одномерного

пространства, уравнение (2.34) превращается в обыкновенное уравнение бесконечного порядка вида:

$$\left(E + \frac{l_0^2}{3!}\Delta + \frac{l_0^4}{5!}\Delta\Delta + \cdots\right)u_{xx} + k_s^2 u = 0 \qquad (2.35)$$

Подстановка $u = Aexp(ikx)$ в уравнение (2.35) даёт дисперсионное соотношение для определения неизвестного волнового числа k:

$$\frac{\sin(kl_0)}{kl_0} = \frac{k_s^2}{k^2} \qquad (2.36)$$

В соотношении (2.36) k есть волновое число в микронеоднородной среде. При этом $k_s = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}$ или $k_s = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$ есть обычное волновое число для продольной или поперечной волны в сплошной среде. Вообще говоря, k зависит от размера структуры l_0 или удельной поверхности образца σ_0 в соответствии с формулой (2.27). В случае $l_0 \to 0$, волновое число $k \to k_s$, а скорость волн совпадает со скоростью упругих волн в сплошной среде. Однако, если l_0 мало, но конечно, то скорость волн может уменьшиться вплоть до нуля, если $kl_0 \to \pi m$, где m есть достаточно большое целое число. Таким образом, модель описывает, наряду с обычными сейсмическими волнами, другие волны со скоростями, меньшими, чем в сплошной среде, не ограниченные снизу. Этот эффект уменьшения скорости с ростом размера структуры в большей степени снижает скорость продольных волн, чем поперечных. Это может привести к аномально низким отношениям скоростей поперечных и продольных волн, что формально будет соответствовать отрицательным значениям коэффициента Пуассона. Бесконечно большое число скоростей, соответствующее уравнению (2.36), связано с бесконечным числом степеней свободы в средах, обладающих структурой [47]. Другая важная черта уравнения (2.36) − это существование комплексных корней (а значит, и неустойчивых решений), соответствующих катастрофам в форме параметрических резонансов.

2.4. Сейсмологический закон Гутенберга−Рихтера

Уравнение (2.36) содержит бесконечное (счётное) множество как вещественных, так и комплексных корней. Вещественные корни соответствуют устойчивым решениям, а комплексные описывают неустойчивые состояния. Число комплексных корней увеличивается при уменьшении безразмерной удельной поверхности тела, т.е. произведения удельной поверхности на длину сейсмической волны в соответствии:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 \lambda_s}{8\pi(1-f)} \tag{2.37}$$

Символом λ_s в (2.37) обозначена длина обычной поперечной волны, в то время как $\varepsilon = kl_0$. Теоретическая зависимость числа комплексных корней как функции удельной поверхности в двойном логарифмическом масштабе дана на рисунке 2.3 и представляет собой множество точек, группирующихся в окрестности прямой линии.

Очевидно, что выделяющаяся при акте разрушения кинетическая энергия в точности равна дефициту потенциальной энергии, возникшему благодаря появлению свободной поверхности трещины. А это выражение есть произведение нагрузки, существовавшей до появления трещины на этой плоскости, на перемещение её берегов. Иными словами, дефицит потенциальной энергии, появившийся при возникновении трещины, есть:

$$\bar{E} = \int p_i u_i dS \tag{2.38}$$

Значение интеграла $\bar{E}$ в (2.38) равно кинетической энергии акта разрушения. Эта энергия пропорциональна удельной поверхности трещин. Поэтому можно сопоставить теоретический график удельная поверхность − число неустойчивых решений с экспериментальным графиком распределение числа землетрясений по их энергиям. Эта связь известна как закон Гутенберга−Рихтера. На рисунках 2.3, 2.4 представлены теоретические и экспериментальные графики упомянутых зависимостей.

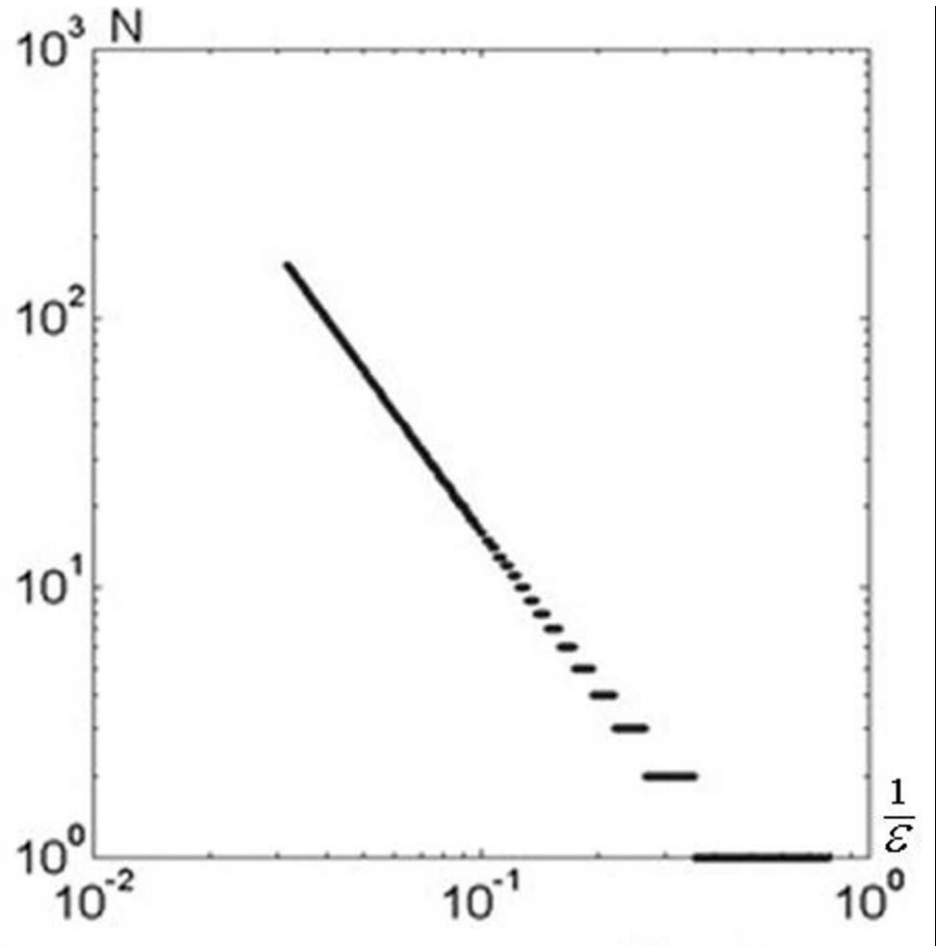

Рисунок 2.3 − Теоретическая зависимость числа неустойчивых решений от удельной поверхности трещин. Тангенс угла наклона γ = 0.5. Видна не единственность решений в форме горизонтальных линий, вернее, достаточно плотного множества отдельных точек

На рисунке 2.3 видны прямолинейные сегменты (на самом деле, это множества отдельных точек) которые показывают некоторую не единственность упомянутых связей, в особенности, в области больших энергий. Экспериментальная зависимость энергии от числа событий (землетрясений) заимствована из книги Ризниченко [48]. Тангенс угла наклона с вертикалью в опыте изменяется от 0.5 до 0.52, и зависит от способа обработки (рисунок 2.4). На теоретическом графике (рисунок 2.3) этот тангенс также близок к 0.5. Интересно, что в области больших энергий (больших поверхностей трещин) на теоретическом графике появляются множества точек, образующие подобия горизонтальных линий. Это области, где нет единственности решений, т.е. разным энергиям соответствует одно и то же число событий.

Эта неединственность обычно интерпретируется как недостаточность статистического материала для землетрясений с большой энергией. Предложенная теоретическая модель объясняет это явление, хотя этот вопрос не может считаться до конца решённым. В результате вычислений выявлено появление запрещённых для катастроф областей энергий (на графике белое поле), разделяющее множества точек. Квантование поля, обусловленное конечными размерами структур, не даёт возможности непрерывного распределения событий по энергиям. Кроме того, почти линейная часть графика говорит о том, что энергия пропорциональна поверхности трещин, а не объёму порового пространства.

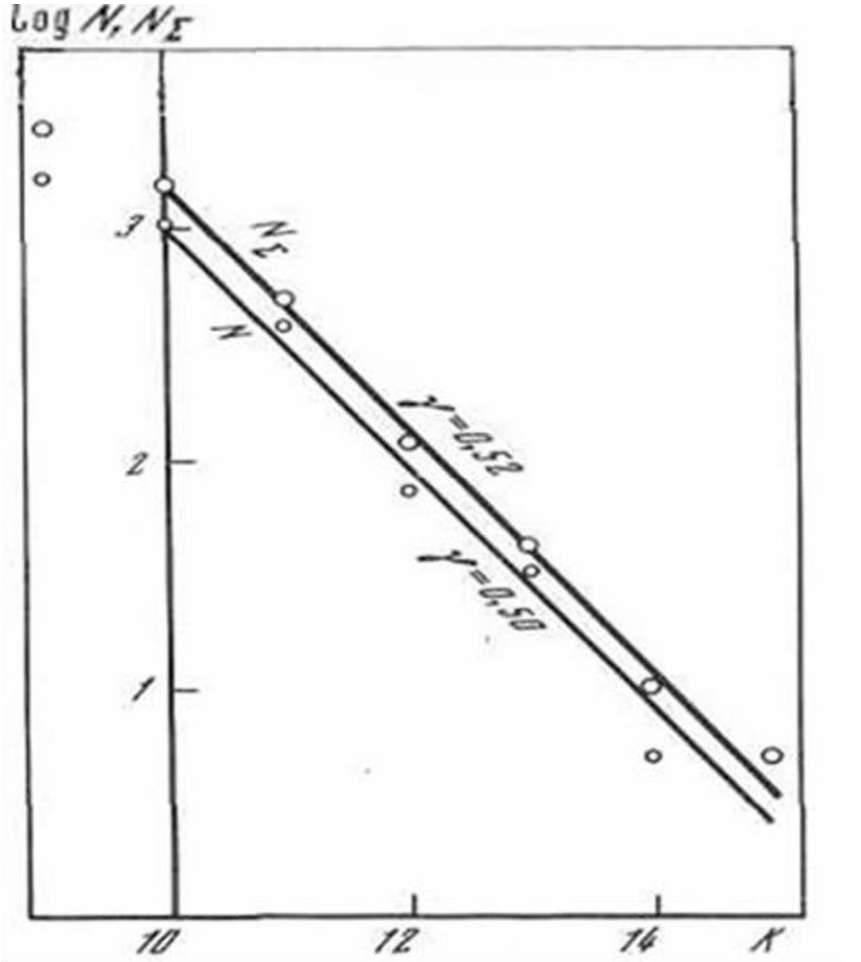

Рисунок 2.4 − Экспериментальная зависимость числа землетрясений от энергии (класса землетрясений), которая пропорциональна удельной поверхности трещин. Тангенс угла наклона γ = 0.5 – 0.52

Поэтому, основные катастрофические события, видимо, носят сдвиговый характер, без существенного раскрытия трещин. Для больших энергий, это может быть и не так. Об этом можно судить по некоторому раструбу, обусловленному

неединственностью решений. Теоретический график на рисунке 2.3 можно истолковать так, что закон Гутенберга−Рихтера описывает, главным образом, сдвиговые землетрясения.

2.5. Малые колебания и комбинационные частоты

Для малых значений l_0 в сравнении с длиной волны, имеется возможность редуцировать уравнение движения бесконечного порядка к уравнению движения четвёртого порядка, пренебрегая членами, содержащими l_0^4 и выше. В этом приближении можно рассмотреть случай квадратичной нелинейности диаграммы напряжение−деформация (рисунок 2.5). Для горных пород и грунтов мы обычно имеем уменьшение углов наклона этой зависимости с ростом деформаций. Редуцированное уравнение движения, полученное из (2.33) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(E+\frac{l_0^2}{3!}\Delta\right)\sigma_{ik}\right]=\rho\ddot{u}_i \tag{2.39}$$

Предполагается зависимость между напряжениями и деформациями в форме:

$$\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\big(u_x-bu_x^2 sign(u_x)\big) \tag{2.40}$$

Обратный оператор $P^{-1}=\frac{l_0\sqrt{\Delta}}{sh(l_0\sqrt{\Delta})}$ существует при условии $l_0\sqrt{\Delta}<\pi E$. Это операторное равенство означает, что $kl_0<\pi$, т.е. обратный оператор заведомо существует при достаточно малых размерах структур в сравнении с длиной волны. Этот обратный оператор P^{-1} имеет вид:

$$P^{-1}=E-\frac{l_0^2}{3!}\Delta+\frac{7l_0^4}{360}\Delta\Delta-\cdots\approx E-\frac{l_0^2}{3!}\Delta \tag{2.41}$$

Используя результат (2.41), можно получить нелинейное уравнения четвёртого порядка, близкое к уравнению Буссинеска [94]:

$$u_{xx}(1-2b|u_x|)=\frac{1}{c_0^2}\left(\ddot{u}-\frac{l_0^2}{3!}\ddot{u}_{xx}\right) \tag{2.42}$$

Уравнение (2.42) содержит нелинейный и дисперсионный члены, соответствующий четвёртой смешанной производной $\ddot{u}_{xx}$ Уравнение Буссинеска содержит четвёртую производную по координате. Наличие нелинейного и

дисперсионного членов наталкивает на мысль о существовании решений в виде солитонов.

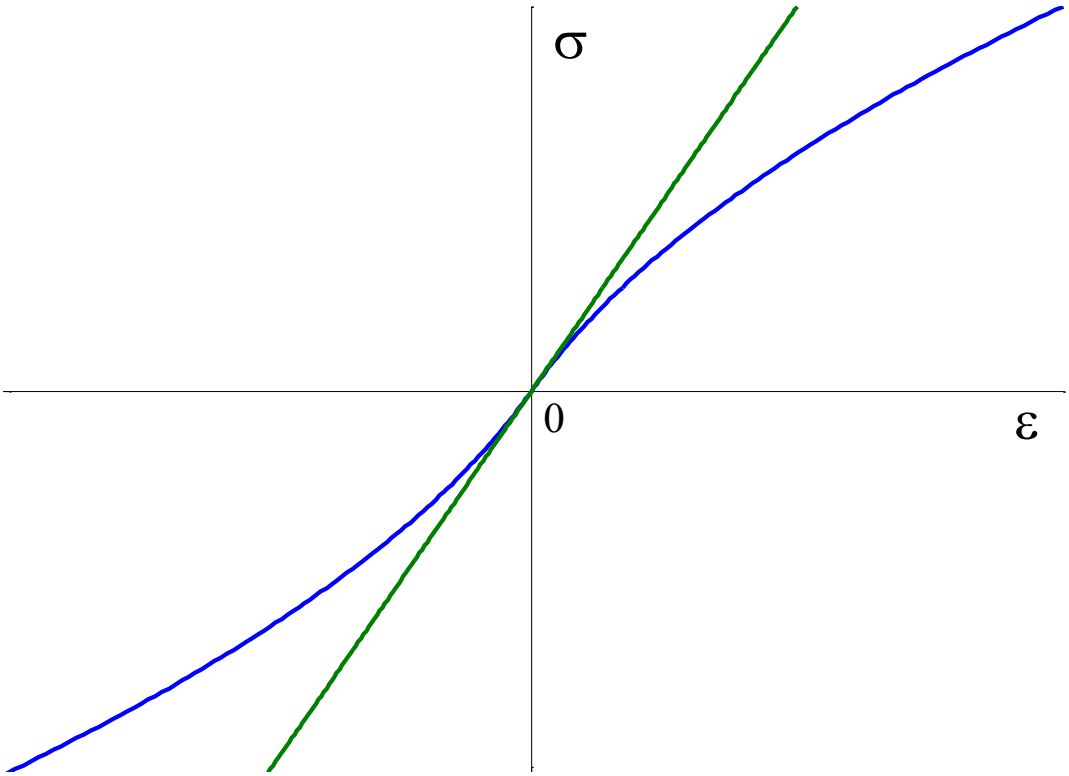

Рисунок 2.5 − Диаграмма напряжение−деформация. По горизонтали деформация, по вертикали напряжение. Диаграмма с положительной кривизной. Скорость возмущений падает с ростом давления

Ищем решение в виде бегущей волны:

$$u = u(z) = c_0 T F(z), \qquad z = \frac{t - x/(c_0\xi)}{T} \tag{2.43}$$

В формуле (2.43) $\xi = const$ есть отношение скорости волны в структурированной среде к скорости волны в сплошной среде. Назовём его дефектом скорости. Этот параметр среды есть положительная величина, которая, в принципе, может быть, как больше, так и меньше единицы, и зависит от параметров микроструктуры. Если значение этого параметра больше единицы, то он соответствует отрицательной кривизне диаграммы напряжение−деформация, т.е. увеличению скорости волны с ростом давления. Он может быть разным для P и S волн. Для обычной упругой среды $\xi = 1$. В этой же формуле $c_0 T = L$ есть некоторая эффективная длина волны, а T − характерное время импульса. F есть безразмерная функция от безразмерного аргумента , $z = \frac{t - x/(c_0\xi)}{T}$, а b − постоянная,

определяющая нелинейность. Подставляя выражение (2.43) в (2.42), получаем обыкновенное нелинейное уравнение четвёртого порядка:

$$F_{zz}(1-\xi^2)+\varepsilon^2 F_{zzzz}+\frac{b}{\xi}(F_z^2)_z=0, \qquad \varepsilon^2=\frac{l_0^2}{3!\,L^2} \tag{2.44}$$

Оно может быть легко проинтегрировано. Подстановка $\theta = F_z$ даёт уравнение второго порядка:

$$\theta(1-\xi^2)+\frac{b}{\xi}\theta^2 sign\theta+\varepsilon^2\theta_{zz}=0 \tag{2.45}$$

Для S волны имеет место аналогичное уравнение:

$$\theta(1-\xi^2)+\frac{b}{\xi}\theta^2 sign\theta+\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}\theta_{zz}=0 \tag{2.46}$$

Если u_x монотонно и положительно, то уравнение (2.42) имеет вид:

$$u_{xx}(1-2bu_x)=\frac{1}{c^2}\left(\ddot{u}-\frac{l_0^2}{3!}\ddot{u}_{xx}\right), \tag{2.47}$$

соответственно, уравнение волны (2.45) принимает форму:

$$\theta(1-\xi^2)+\frac{b}{\xi}\theta^2+\varepsilon^2\theta_{zz}=0, \tag{2.48}$$

и имеет солитонные решения:

$$\theta=\frac{A}{ch^2(\beta z)}, \tag{2.49}$$

где постоянные A, β должны быть выбраны таким образом, чтобы уравнение (2.48) удовлетворялось. Это достигается при значениях постоянных:

$$\xi^2=1+4\beta^2\varepsilon^2, \quad A=\frac{6\xi}{b}\beta^2\varepsilon^2 \tag{2.50}$$

Из (2.50) следует, что солитоны существуют только в случае $\xi > 1$. Это означает, что они устойчивы лишь в случае роста скорости волн с увеличением давления. Большинство горных пород этими свойствами не обладают, особенно, если поровое пространство насыщено газом. Однако, если поры насыщены жидкостью, то существование солитонов возможно.

В случае $\xi < 1$ уравнение (2.48) имеет колебательные решения. Отсутствие в уравнениях (2.47) и (2.48) явной зависимости от аргумента z даёт возможность

понизить порядок нелинейного уравнения до первого, и получить точное решение в неявной форме:

$$\int_0^{\theta} \frac{dG}{\sqrt{D - G^2\left(\frac{1-\xi^2}{\varepsilon^2} + \frac{2Gb}{3\varepsilon^2}\right)}} = \frac{t - x/(c_0\xi)}{T} = z \qquad (2.51)$$

В (2.51) D есть произвольная постоянная. Мы можем считать, что отношение $\frac{1-\xi^2}{\varepsilon^2}$ порядка единицы. Третий член в подкоренном выражении интеграла (2.51) $\frac{2G}{3\varepsilon^2}$ может быть, вообще говоря, очень малым при достаточно малой деформации G, однако, при не очень малых деформациях, благодаря малости знаменателя ε^2, влияние члена высшего порядка малости становится неожиданно большим. Тем самым, наличие дисперсии резко обостряет нелинейные явления. Они гораздо больше, чем просто квадратичные эффекты при малых деформациях.

На рисунке 2.6 показано затухание синусоидального импульса, обусловленного взаимодействию нелинейности и дисперсии при деформациях порядка 10^{-6}.

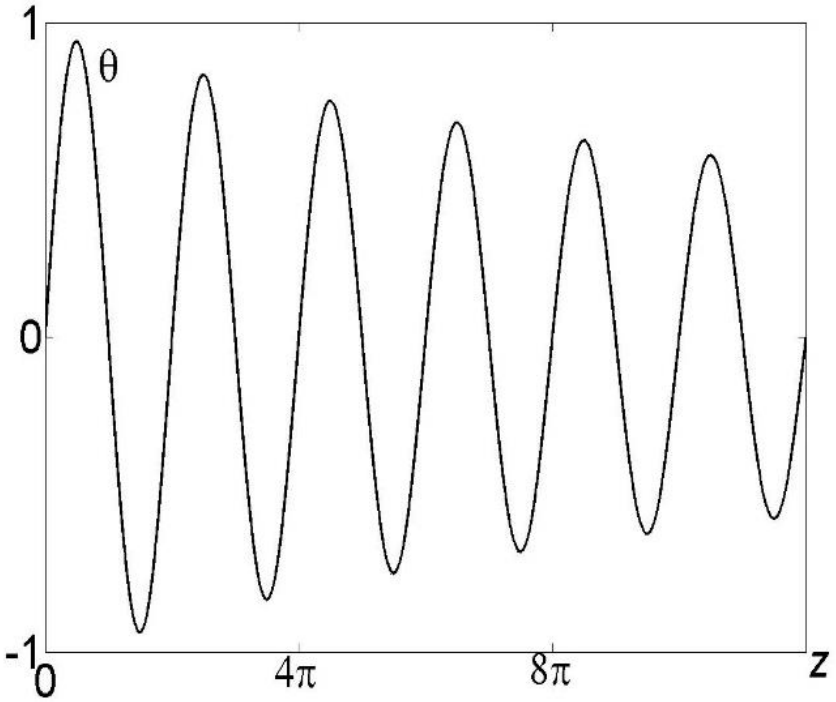

Рисунок 2.6 − Затухание квазисинусоидального импульса с увеличением расстояния. Логарифмический декремент почти постоянный. Амплитуда деформации 10^{-6}

Нелинейный параметр в этом случае не есть малая высшего порядка, он порядка 0.1, (благодаря множителю $\frac{1}{\varepsilon^2}$). Логарифмический декремент близок к постоянной величине. В сплошной среде без дисперсии этот эффект пренебрежимо мал. Дисперсия в данном случае на несколько порядков увеличивает влияние нелинейности.

Уравнение (2.47), также содержит и решения, усиливающее влияние нелинейного члена дисперсионным, в том числе для стоячих волн. Дисперсионное соотношение (2.36) в первом приближении даёт дефект скорости под действием дисперсионного члена, обусловленный структурой:

$$c^2 = c_0^2\left(1 - \frac{l_0^2\omega^2}{6c_0^2}\right) = c_0^2(1-\varepsilon^2) = c_0^2\xi^2 \tag{2.52}$$

Будем искать решение методом последовательных приближений. В нулевом приближении нелинейный член мал, и уравнение линейно. В этом приближении пространственная в временная переменные разделяются. Стоячая волна в случае двух монохромных источников с временными частотами ω_1, ω_2 и единичными амплитудами, приложенных к концам цилиндра длины l, имеет вид:

$$u^0 = cos\omega_1 t\frac{sin\frac{\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)} + cos\omega_2 t\frac{sin\frac{\omega_2}{c_2}x}{sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)} \tag{2.53}$$

Уравнение для следующей по порядку малости поправки имеет вид:

$$u_{xx}^1 - \frac{\ddot{u}^1}{c_0^2} + \frac{l_0^2\ddot{u}_{xx}^1}{6c_0^2} = bu_{xx}^0u_x^0sign(u_x^0), \tag{2.54}$$

$$u_x^0 = -\frac{\omega_1}{c_1}cos\omega_1 t\frac{cos\frac{\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)} + \frac{\omega_2}{c_2}cos\omega_2 t\frac{cos\frac{\omega_2}{c_2}x}{sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)}, \tag{2.55}$$

$$u_{xx}^0 = -\left(\frac{\omega_1}{c_1}\right)^2 cos\omega_1 t\frac{sin\frac{\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)} - \left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 cos\omega_2 t\frac{sin\frac{\omega_2}{c_2}x}{sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)} \tag{2.56}$$

Правая часть первого приближения есть не что иное, как:

$$u_x^0 u_{xx}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1}{c_1}\right)^3 cos^2\omega_1 t \frac{sin\frac{2\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin^2\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)}$$

$$+\frac{\omega_1}{c_1}\left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 cos\omega_1 t cos\omega_2 t \frac{cos\frac{\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)} \frac{sin\frac{\omega_2}{c_2}x}{sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)}$$

$$-\left(\frac{\omega_1}{c_1}\right)^2 \frac{\omega_2}{c_2} cos\omega_1 t cos\omega_2 t \frac{sin\frac{\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)} \frac{cos\frac{\omega_2}{c_2}x}{sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_1}\right)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^3 cos^2\omega_1 t \frac{sin\frac{2\omega_2}{c_2}(l-x)}{sin^2\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)}. \qquad (2.57)$$

Второе и третье слагаемые в (2.57) содержат комбинационные пространственные и временные частоты, например:

$$\frac{\omega_1}{c_1}\left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 cos\omega_1 t cos\omega_2 t \frac{cos\frac{\omega_1}{c_1}(l-x)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)} \frac{sin\frac{\omega_2}{c_2}x}{sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)} = \frac{1}{4}\frac{\omega_1}{c_1}\left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 \times$$

$$\frac{(\cos(\omega_1-\omega_2)\,t + \cos(\omega_1+\omega_2)\,t)\left(sin\left(\frac{\omega_1 x}{c_1}+\frac{\omega_2 x}{c_2}-\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)+sin\left(\frac{\omega_2 x}{c_2}-\frac{\omega_1 x}{c_1}+\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)\right)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)} \qquad (2.58)$$

Соответственно, правая часть (2.58) даст четыре слагаемых в разделённых переменных для первой итерации. Одно из слагаемых с разностными временными и пространственными частотами имеет вид:

$$\frac{1}{4}\frac{\omega_1}{c_1}\left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 \frac{cos(\omega_1-\omega_2)\,t\,sin\left(\frac{\omega_2 x}{c_2}-\frac{\omega_1 x}{c_1}+\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)} \qquad (2.59)$$

Порождённое им слагаемое первого приближения ищется в том же виде:

$$A\frac{cos(\omega_1-\omega_2)\,t sin\left(\frac{\omega_2 x}{c_2}-\frac{\omega_1 x}{c_1}+\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_1}\right)sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_2}\right)}, \qquad (2.60)$$

$$u_{xx}^1 - \frac{\ddot{u}^1}{c_0^2} + \frac{l_0^2 \ddot{u}_{xx}^1}{6c_0^2}$$

$$= \frac{A\,cos(\omega_1 - \omega_2)\,t\,cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)x + l}{c_0}\right)}{sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_0}\right) sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_0}\right)} \left(-\left(\frac{\omega_1}{c_1} - \frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{c_0^2} + \frac{l_0^2(\omega_1 - \omega_2)^4}{6c_0^4} \right)$$

$$= \frac{A l_0^2\,cos(\omega_1 - \omega_2)\,t\,cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)x + l}{c_0}\right) \omega_1^2 \omega_2^2}{c_0^4 sin\left(\frac{\omega_1 l}{c_0}\right) sin\left(\frac{\omega_2 l}{c_0}\right)}, \qquad (2.61)$$

$$A = \frac{\omega_1}{4c_1}\left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 \frac{c_0^4}{l_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \approx \frac{c_0}{4 l_0^2 \omega_1} \qquad (2.62)$$

Результат (2.62) показывает, что слабая нелинейность на стоячих волнах также может усиливаться благодаря малому параметру в знаменателе.

Экспериментальные наблюдения [49] проводились на образце искусственного песчаника длины 1м, диаметра − 0.076м, пористостью − 0.3 и плотностью 2000кг/м^3, подверженного действию вибрационных источников двух различных частот 3457 Гц и 2754 Гц, что представлено на рисунке 2.7.

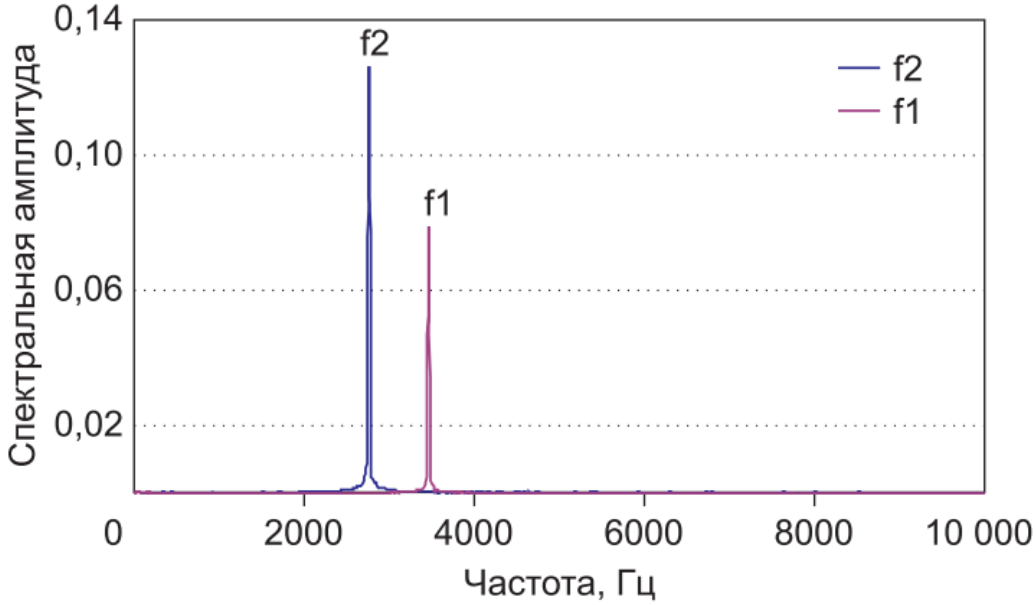

Рисунок 2.7 − Спектры сигналов поперечных волн с частотами f_1 и f_2 на правом и левом торцах образца (Машинский, Егоров, 2011)

Спектры комбинационных сигналов даны на рисунке 2.8, для приёмника, расположенного на расстоянии 75 см от источника. Комбинационные спектры оказываются заметными на фоне основных спектров двух источников, они достигают десяти процентов от амплитуды основных сигналов. Этот эффект был обнаружен ещё в восьмидесятых годах прошлого века при полевых испытаниях вибраторов, однако, причина появления комбинационных частот была неясна. В лабораторных условиях он получен сравнительно недавно и даёт возможность использовать двухчастотное зондирование среды в сейсморазведке. Нелинейные явления лучше всего наблюдаются именно в квазистационарном режиме, в то время как в обычной сейсморазведке стремятся к созданию коротких импульсов. Резюмируя, можно сказать, что малая нелинейность и малая дисперсия порождают вполне заметный эффект появления комбинационных частот при взаимодействии двух вибраторов, излучающих разные частоты, даже в случае слабых колебаний.

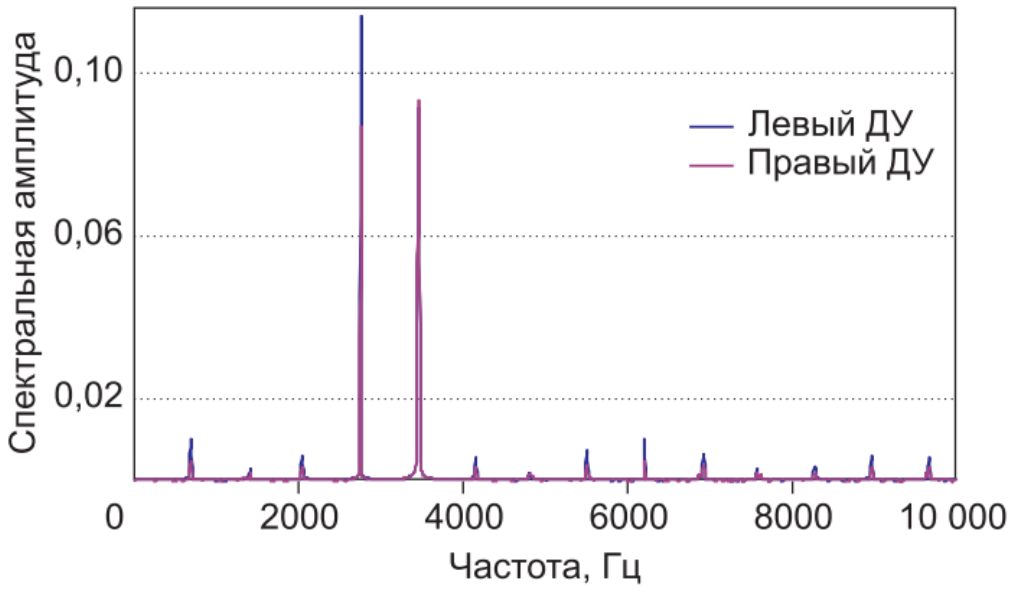

Рисунок 2.8 − Спектры комбинационных частот образца, благодаря нелинейности и дисперсии. ДУ − датчики ускорений (Машинский, Егоров, 2011)

О видимых длинах продольных и поперечных волн. Рассмотрим решения, соответствующие одинаковым длинам поперечных и продольных волн. Скрытая нелинейность порождает некоторые асимптотические решения уравнения (2.46) с одинаковыми длинами продольных и поперечных волн, что чаще всего и

наблюдается на практике. Классические решения уравнений динамической теории упругости дают решения с одной и той же частотой для всего волнового поля, т.е. для любых волн в достаточно большой области. Однако, уравнение (2.46) в асимптотическом случае сверхмалых деформаций, т.е. $\frac{b}{\xi\varepsilon^2} \ll 1$, содержит два независимых параметра ξ^2 и ε^2. Для плоских P и S волн уравнения (2.45), (2.46), при условии $\frac{b}{\xi\varepsilon^2} \ll 1$ имеют вид:

$$\theta\left(1-\xi_p^2\right)+\varepsilon^2\theta_{zz}=0, \quad \theta(1-\xi_s^2)+\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}\theta_{zz}=0 \tag{2.63}$$

Дефекты скорости ξ_p, ξ_s могут быть, вообще говоря, различными для волн разных типов. В случае одинаковых дефектов скоростей $\xi_p = \xi_s$ мы имеем стационарные колебания, соответствующие продольным и поперечным волнам с одинаковыми частотами и разными длинами волн, отличающимися друг от друга в γ раз:

$$G_{zz}+\frac{1-\xi_p^2}{\varepsilon^2}G=0, \qquad H_{zz}+\gamma^2\frac{1-\xi_s^2}{\varepsilon^2}H=0 \tag{2.64}$$

Выбирая скоростные дефекты для сжатия и сдвига разными, например,

$$\frac{1-\xi_p^2}{\varepsilon^2}=\gamma^2\frac{1-\xi_s^2}{\varepsilon^2} \tag{2.65}$$

мы можем получить аналогичные уравнения для стационарных плоских P и S волн с теми же самыми длинами волн, но с различными частотами:

$$G_{zz}+\frac{1-\xi_p^2}{\varepsilon^2}G=0, \qquad H_{zz}+\frac{1-\xi_p^2}{\varepsilon^2}H=0 \tag{2.66}$$

Эти решения чаще всего имеют место в сейсмологии, в сейсморазведке, и на высоких частотах при проведении ультразвукового каротажа [37−41]. Скоростные дефекты ξ_p, ξ_s близки к единице, с точностью до малой величины ε^2. Различия между ними приводят к различным доминирующим частотам сейсмических P и S волн. Таким образом, не слишком малые деформации, порядка 10^{-6}, в сочетании с малой дисперсией, приводят к тому, что частоты продольных и поперечных волн могут различаться. В области же сверхмалых деформаций (10^{-7} и менее) соотношения частот не изменяются.

2.6. Выводы по второй главе

1. Получены значения скоростей продольных и поперечных волн для среды, состоящей из равномерно перемешанных шаров разных размеров. При этом установлено, что важнейшими интегрально-геометрическими характеристиками такой среды являются пористость, средний объём зерна, а также отношение среднего числа контактов к числу контактов, максимально возможному при данном распределении шаров в среде по радиусам.

2. Показано, что отношение скоростей поперечных и продольных волн максимально в том случае, если среда состоит из шаров одинакового радиуса, взаимодействующих по модифицированному закону Герца.

3. Для обычной модели непрерывного континуума нелинейные эффекты исчезающе малы при малых деформациях. Для сред со структурой дисперсия резко увеличивает нелинейные эффекты и делает их практически значимыми. Излучение двух вибраторов с различными частотами в пористых средах порождает заметные амплитуды комбинационных частот даже при малых деформациях.

4. Малая нелинейность и малая дисперсия приводят к формированию различных доминирующих частот продольных и поперечных упругих волн, возбуждаемых как импульсными, так и вибрационными источниками.

Глава 3. Совершенствование метода граничных элементов

3.1. Построение интегрируемых сингулярных ядер для упругостатических задач

Как было отмечено выше, метод ГИУ является частью более общего метода, МГЭ. Рассмотрим суть этого метода и пути его совершенствования. Допустим, что нам нужно найти решение уравнения (системы уравнений) в частных производных, удовлетворяющего каким-либо условиям на поверхности. Для определённости возьмём систему уравнений эластостатики:

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, μ и λ – упругие модули Ламе.

Классики [20] предлагали искать решение в виде интеграла по поверхности (свёртки) с ядром, которое есть отклик (перемещение) в направлении i на нагрузку в виде объёмной дельта−функции, приложенную в направлении k. Вообще говоря, решение нужно найти в произвольной точке объёма x_0 (фиксированная точка). Интеграл же вычисляется по поверхности путём суммирования по бегущей точке поверхности x (в этой же точке вычисляется элемент поверхности):

$$u_i(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int \Gamma_{ik}(x_0, x)\mathrm{F}_k(x)dS_x \tag{3.2}$$

Ядро – тензор $\Gamma_{ik}(x_0, x)$ удовлетворяет уравнениям (3.1) аналитически (точно). Компоненты вектора потенциала $\mathrm{F}_k(x)$ нужно вычислить так, чтобы удовлетворять условиям на границе. Например, если на границе известны все компоненты вектора перемещений $u_i(x_0)$, а множества точек x_0 и x – совпадают, то формула (3.2) превратится в систему интегральных уравнений типа Фредгольма первого рода с искомой функцией $\mathrm{F}_k(x)$. Если все компоненты вектора потенциала известны, то можно вычислить вектор перемещений в любой точке внутри замкнутого объёма. При этом трёхмерная задача будет сведена к системе двухмерных интегральных уравнений, т.е. размерность задачи понизится. В качестве ядра предлагалось выбрать следующее [20]:

$$\Gamma_{ik}(x_0,x)=\frac{1}{2\mu(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}+(\lambda+3\mu)\delta_{ik}\right]\frac{1}{r(x_0,x)}, \tag{3.3}$$

где $r(x_0,x)$ – расстояние между фиксированной и бегущей точками, δ_{ik} – символ Кронекера. Если точку x_0 устремить к поверхности изнутри (внутренняя задача), то в ней (на произвольной поверхности) можно аналитически вычислить нагрузки, рассматривая тензор $\Gamma_{ik}(x_0,x)$ как набор векторов перемещений (столбцов) при фиксированном индексе k (при этом i – соответствующая компонента вектора перемещений, k – направление вектора нагрузок, порождающих эти перемещения). Кроме дельта−функции, будут ещё слагаемые, связанные с ориентацией нормали в фиксированной точке:

$$\begin{aligned}P^{x_0}(\Gamma_{ik}(x_0,x))=P_{ik}(x_0,x)&=2\mu\frac{\partial\Gamma_{ik}}{\partial\boldsymbol{n_0}}+\lambda\boldsymbol{n_0}\mathrm{div}(\Gamma_{ik})+[\boldsymbol{n_0},\mathrm{rot}(\Gamma_{ik})]\\&=\frac{1}{\lambda+2\mu}\left(\mu\delta_{ik}+3(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n_0}}\left(\frac{1}{r}\right)\\&+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left((\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_k})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_i})\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)\right),\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{n_0}$ – вектор единичной нормали в фиксированной точке, $\boldsymbol{e_k}$ и $\boldsymbol{e_i}$ – орты декартовой системы координат. (3.4) есть прямое следствие закон Гука в виде:

$$\sigma_{ik}=\lambda\theta\delta_{ik}+2\mu\varepsilon_{ik}, \tag{3.5}$$

где σ_{ik} – компоненты тензора напряжений, θ – дилатация, ε_{ik} – компоненты тензора деформаций, δ_{ik} – символ Кронекера.

Теперь сформулируем основные уравнения для нахождения решений краевых задач. Итак, есть две системы интегральных уравнений, которые связывают между собой вектор перемещений **u**, вектор нагрузок **p**, связанные между собой с помощью вектора потенциала **F**:

$$\begin{aligned}u_i(x_0)&=\frac{1}{2\pi}\int\Gamma_{ik}(x_0,x)\mathrm{F}_k(x)dS_x,\\p_i(x_0)&=\mathrm{F}_i(x_0)-\frac{1}{2\pi}\int P_{ik}(x_0,x)\mathrm{F}_k(x)dS_x\end{aligned} \tag{3.6}$$

Совместное использование уравнений (3.6) сводит краевую задачу к нахождению вектора потенциала из системы интегральных уравнений первого и второго рода.

Главным недостатком, возникающим при использовании системы (3.6) является структура ядер, а именно, $P_{ik}(x_0, x)$. Если тензор $\Gamma_{ik}(x_0, x)$ содержит интегрируемую особенность (которую можно выколоть аналитически), то из-за последнего члена в тензоре (3.4), выделенного красным цветом, интегралы в уравнениях

$$p_i(x_0) = \mathrm{F}_i(x_0) - \frac{1}{2\pi}\int P_{ik}(x_0, x)\mathrm{F}_k(x)dS_x$$

нужно понимать в смысле главного значения (v.p.). Численное решение подобных уравнений представляет отдельную проблему. Проблема, конечно, не фатальная, но достаточно неприятная. Использование в качестве ядра (3.4) приводит к заметному падению точности решения краевой задачи. С этой проблемой пытались бороться с помощью приёмов разной степени сложности и экзотичности. Например, самый простой приём, использование сопряжённого оператора [20], скорее успокаивает совесть вычислителя, чем реально повышает точность. В [24] для борьбы с сингулярностью было предложено использовать спектральный метод. От сингулярности действительно удалось избавиться, однако, обусловленность системы ухудшилась настолько, что возникла необходимость использования регуляризационных процедур, что приводит к проигрышу основных конкурентных преимуществ МГЭ.

Иная идея была предложена в [20]. Что, если изменить тензор? Так называемый антенный потенциал (матрица Вейля) есть линейная комбинация тензора фундаментальных решений для пространства (3.3) и некоторых вспомогательных функций:

$$M_{ik} = \frac{1}{\lambda + \mu}\left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\Gamma_{ik}(x_0, x) - \frac{1}{2}Z_{ik}(x_0, x)\right), \tag{3.7}$$

при этом:

$$Z_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

$$g = |x_1| \ln(r + |x_1|) - r, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{3.9}$$

Отметим, что функция g является гармонической и $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \frac{1}{r}$. При этом x_1, x_2, x_3 есть проекции радиус−вектора, направленного из фиксированной точки в бегущую, на внешнюю нормаль и две взаимно ортогональные касательные к поверхности.

$$x_1 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}), \qquad x_2 = \left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_{\tau_1}\right), \qquad x_3 = \left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_{\tau_2}\right) \tag{3.10}$$

Следует отметить два позитивных момента. Во-первых, вычисляются проекции радиус−вектора не на оси координат, а на направления, связанные с поверхностью. В частности, на любой поверхности есть выделенное направление – направление внешней нормали. Соответственно, направление оси x_1 совпадает с направлением внешней нормали. Во-вторых, (3.7) совпадает со статическим решением нормальной, либо касательной задачи Лэмба (каждый из столбцов является функцией Грина для полупространства). С физической точки зрения это означает, что у процесса, по-видимому, будет гораздо лучше сходимость и обусловленность, чем при использовании ядер в виде (3.3), (3.4), так как для плоской поверхности граничные условия выполнены автоматически, соответственно, если фиксированная и бегущая точки достаточно близки, то поверхность близка к касательной плоскости, проведённой в фиксированной точке. По мере увеличения расстояния между фиксированной точкой и бегущей, как ядро (3.7), так и тензор нагрузок от него (который будет вычислен ниже), достаточно быстро убывают по модулю, что, вообще говоря, должно приводить к преобладанию диагональных элементов в итоговой матрице системы, а соответственно, к лучшей обусловленности и достоверности. В тензоре нагрузок от M_{ik} (далее он будет

обозначен как P_{ik}), который можно вычислить, используя, например, закон Гука (3.5), данная особенность интегрируема. Это должно дать возможность как повысить точность, так и улучшить обусловленность. Однако в [20] этот тензор был вычислен в предположении, что «не уменьшая общности можно считать нормаль в бегущей точке параллельной нормали в фиксированной точке». То есть любую поверхность «не уменьшая общности» можно считать плоскостью. Соответственно, вычисления вектора нагрузок (3.4) от перемещений, вычисляемых по формуле (3.7) в [20], приводят к результату, в котором симметричный тензор нагрузок не зависит от упругих модулей:

$$P_{ik} = 3\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1^2}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_2^2}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_3} & \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_3} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_3^2}\right)^2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n_0}}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -3\left(\frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Разумеется, что использование тензора (3.11) на самом деле является правильным тогда и только тогда, когда «нормаль в бегущей точке параллельна нормали в фиксированной точке», т.е. когда поверхность – плоскость.

Обозначим частные производные нижними индексами, например:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = g_{12}, \frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = g_{123}$$

Использование формулы (3.4) без упомянутого выше «не уменьшающего общности» предположения даёт правильный ответ. Запишем компоненты исправленного тензора, совпадающие с компонентами (3.11) (первая строка):

$$P_{11} = -3x_1^2\left(\frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_0})}{r^5}\right), P_{12} = -3x_1x_2\left(\frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_0})}{r^5}\right), P_{13} = -3x_1x_3\left(\frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_0})}{r^5}\right) \tag{3.12}$$

Прочие компоненты будут отличаться на второе слагаемое, пропорциональное $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$:

$$
\begin{aligned}
P_{21} &= -3x_1x_2\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left((\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_1}})g_{133}-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_2}})g_{123}\right)\\
P_{22} &= -3x_2^2\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left((\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_1}})g_{233}-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_2}})g_{223}\right)\\
P_{23} &= -3x_2x_3\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left((\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_1}})g_{333}-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_2}})g_{233}\right)\\
P_{31} &= -3x_1x_3\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_1}})g_{123}+(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_2}})g_{122}\right)\\
P_{32} &= -3x_2x_3\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_1}})g_{223}+(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_2}})g_{222}\right)\\
P_{33} &= -3x_3^2\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(-(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_1}})g_{233}+(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau_2}})g_{223}\right)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Формулы (3.12) и (3.13) можно записать и более компактно:

$$
P_{ik} = -3\left(\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})}{r^5}\right)x_ix_k+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial x_k}\begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\boldsymbol{n_0},rot\boldsymbol{n}g)\\ -\frac{\partial}{\partial x_2}(\boldsymbol{n_0},rot\boldsymbol{n}g)\end{bmatrix}
\tag{3.14}
$$

Тензор (3.6) также можно записать в более удобном виде, выделив бездивергентную часть (первое слагаемое):

$$
M_{ik} = \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix}\frac{1}{r}+\frac{x_1^2}{r^3} & \frac{x_1x_2}{r^3} & \frac{x_1x_3}{r^3}\\ \frac{x_1x_2}{r^3} & \frac{1}{r}+\frac{x_2^2}{r^3} & \frac{x_2x_3}{r^3}\\ \frac{x_1x_3}{r^3} & \frac{x_2x_3}{r^3} & \frac{1}{r}+\frac{x_3^2}{r^3}\end{bmatrix}+\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_3}\\ -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_3}\\ -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_3} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_2\partial x_3} & -\frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}\end{bmatrix}
\tag{3.15}
$$

Иногда тот же тензор (3.15) удобнее записывать в виде:

$$
M_{ik} = \frac{1}{2\mu r}\delta_{ik}+\frac{1}{2\mu r^3}x_ix_k+\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ -g_{12} & -g_{22} & -g_{23}\\ -g_{13} & -g_{23} & -g_{33}\end{bmatrix}
\tag{3.16}
$$

Теперь, прежде чем проводить достаточно сложные вычисления на конкретных поверхностях, попробуем убедиться, что тензор нагрузок, представленный в формулах (3.12) и (3.13) правилен, а в формуле (3.11) – нет. Для этого решим аналитически задачу в всестороннем сжатии шара радиуса R, где ответ известен. Предварительно запишем все компоненты ядер (их – девять по перемещениям и

девять по нагрузкам, и они не являются симметричными), которые будут использоваться на произвольной поверхности. Пусть на поверхности в фиксированной точке есть внешняя нормаль и две взаимно ортогональных касательных:

$$\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 20}}$$

В бегущей точке также есть три направления, соответствующих внешней нормали и двум касательным:

$$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}$$

При этом направление оси x_1 совпадает с направлением нормали в бегущей точке $\boldsymbol{n}$. Этому же направлению в индексах соответствует индекс «1». Соответственно, направления осей x_2 , x_3 совпадают с направлениями $\boldsymbol{e_{\tau 1}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}$, и им соответствуют индексы «2, 3». Соответственно, компоненты тензора для интегральных уравнений, где свободным членом является вектор перемещений имеют вид:

$$M_{n_0 n} = M_{11}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) + M_{21}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{31}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.17)$$

$$M_{n_0 e_{\tau 1}} = M_{12}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) + M_{22}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{32}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.18)$$

$$M_{n_0 e_{\tau 2}} = M_{13}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) + M_{23}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{33}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.19)$$

$$M_{e_{\tau 10} n} = M_{11}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{n}) + M_{21}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{31}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.20)$$

$$M_{e_{\tau 10} e_{\tau 1}} = M_{12}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{n}) + M_{22}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{32}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.21)$$

$$M_{e_{\tau 10} e_{\tau 2}} = M_{13}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{n}) + M_{23}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{33}(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.22)$$

$$M_{e_{\tau 20} n} = M_{11}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{n}) + M_{21}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{31}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.23)$$

$$M_{e_{\tau 20} e_{\tau 1}} = M_{12}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{n}) + M_{22}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{32}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}), \quad (3.24)$$

$$M_{e_{\tau 20} e_{\tau 2}} = M_{13}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{n}) + M_{23}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{33}(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) \quad (3.25)$$

Аналогично вычисляются компоненты тензора нагрузок от ядра (т.е. для уравнений, где свободным членом является вектор нагрузок). В этом виде тензоры и следует использовать в уравнениях (3.6).

Далее, будем использовать на сфере систему сферических координат с переменным радиусом (рисунок 3.1), аналогично изложенному в [86].

Повернём оси координат так, чтобы внутренняя нормаль в фиксированной точке x_0 имела бы координаты (0, 0, 1). Если упомянутая точка имеет сферические

координаты θ_0 и φ_0, то перейти к этой системе координат можно с помощью следующего поворота исходного декартова базиса с ортами ***i, j, k***:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e_{x1}} \\ \boldsymbol{e_{x2}} \\ \boldsymbol{e_{x3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - cos^2\varphi_0(1 + cos\theta_0) & -sin\varphi_0 cos\varphi_0(1 + cos\theta_0) & sin\theta_0 cos\varphi_0 \\ -sin\varphi_0 cos\varphi_0(1 + cos\theta_0) & 1 - sin^2\varphi_0(1 + cos\theta_0) & sin\theta_0 sin\varphi_0 \\ -sin\theta_0 cos\varphi_0 & -sin\theta_0 sin\varphi_0 & -cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Запишем координаты бегущей точки *x* относительно фиксированной точки с переменным сферическим радиусом *r*. Обозначим за ψ полярный, а за $\tilde{\varphi}$ – азимутальный углы.

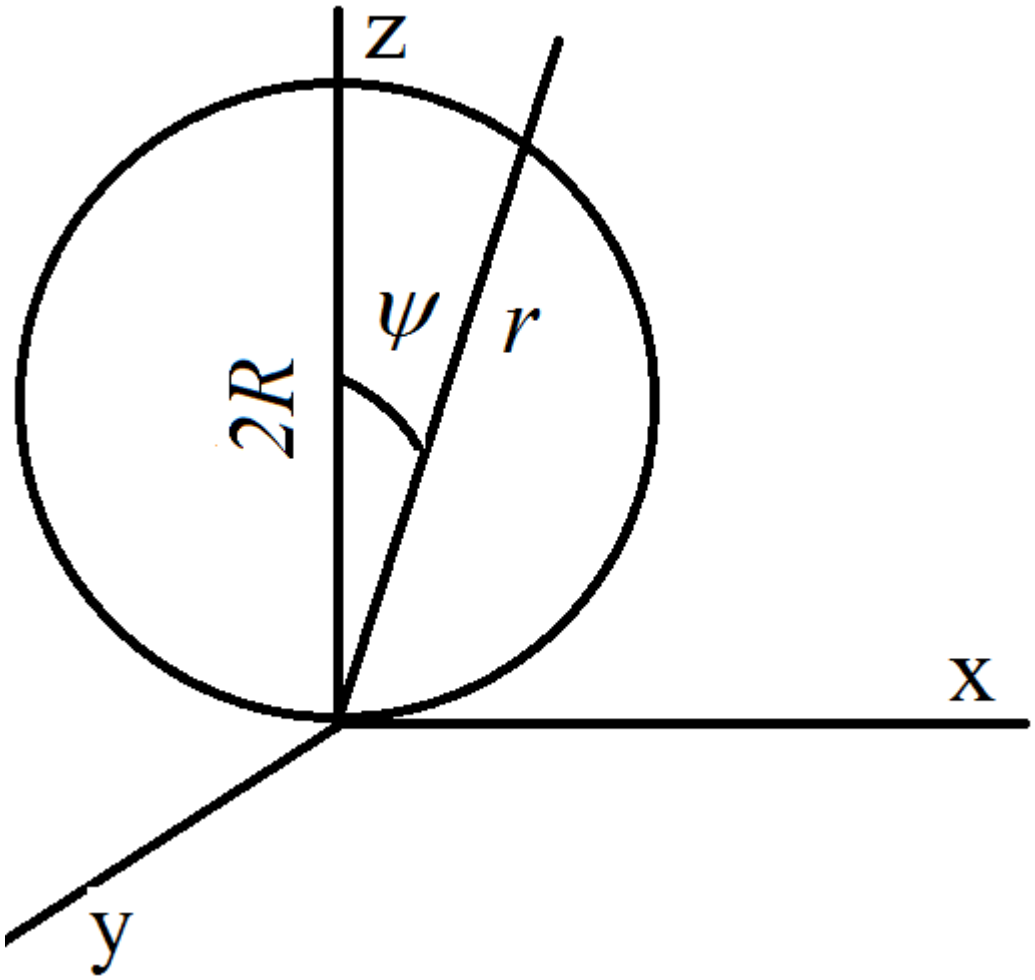

Рисунок 3.1 − Сферическая система координат с переменным радиусом

При этом $\boldsymbol{e_{x1}}$, $\boldsymbol{e_{x2}}$ и $\boldsymbol{e_{x3}}$ – орты декартовой системы координат, повёрнутой относительно исходной в соответствии с (3.26):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_r} &= \boldsymbol{e_{x1}} sin\psi cos\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{x2}} sin\psi sin\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{x3}} cos\psi \\ \boldsymbol{e_\psi} &= \boldsymbol{e_{x1}} cos\psi cos\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{x2}} cos\psi sin\tilde{\varphi} - \boldsymbol{e_{x3}} sin\psi \\ \boldsymbol{e_{\tilde{\varphi}}} &= -\boldsymbol{e_{x1}} sin\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{x2}} cos\tilde{\varphi} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Найдём расстояние между фиксированной и бегущей точками:

$$r = 2Rcos\psi \tag{3.28}$$

Для того, чтобы вычислить нормаль и касательные, запишем декартовы проекции радиус−вектора в этой же системе координат:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= rsin\psi cos\tilde{\varphi} = Rsin2\psi cos\tilde{\varphi}, \\ \tilde{y} &= rsin\psi sin\tilde{\varphi} = Rsin2\psi sin\tilde{\varphi}, \\ \tilde{z} &= rcos\psi = R(1 + cos2\psi) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Далее, вычисляем внешнюю нормаль в бегущей точке и элемент поверхности в этих координатах:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e_{x1}} sin2\psi cos\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{x2}} sin2\psi sin\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{x3}} cos2\psi = \boldsymbol{e_r} cos\psi + \boldsymbol{e_\psi} sin\psi \tag{3.30}$$

$$dS_x = 2Rrsin\psi d\psi d\tilde{\varphi} \tag{3.31}$$

При этом интегрирование по углу ψ следует проводить от 0 до $\pi/2$, а по $\tilde{\varphi}$ – от 0 до 2π. Введение подобной системы координат возможно не только на сфере, но и на любой замкнутой поверхности. Её преимуществом является то, что элемент поверхности пропорционален расстоянию между точками $dS_x \sim r$. Это означает, что при численном решении интегральных уравнений от особенности вида $\frac{1}{r}$ можно будет избавиться без интегрирования особенности. Также можно вычислить два взаимно ортогональных касательных направления, выбирая их так, чтобы тройка векторов оставалась правой и чтобы направления ортов в фиксированной (ψ=π/2) точке были бы строго определёнными ($\boldsymbol{n_0} = -\boldsymbol{e_{x3}}$; $\boldsymbol{e_{\tau 10}} = -\boldsymbol{e_{x1}}$; $\boldsymbol{e_{\tau 20}} = \boldsymbol{e_{x2}}$) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_{\tau 1}} &= -\boldsymbol{e_r} sin\psi cos\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_\psi} cos\psi cos\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{\tilde{\varphi}}} sin\varphi, \\ \boldsymbol{e_{\tau 2}} &= \boldsymbol{e_r} sin\psi sin\tilde{\varphi} - \boldsymbol{e_\psi} cos\psi sin\tilde{\varphi} + \boldsymbol{e_{\tilde{\varphi}}} cos\varphi \end{aligned} \tag{3.32}$$

Выразим $\boldsymbol{e_{\tau 1}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}$ через $\boldsymbol{e_{x1}}, \boldsymbol{e_{x2}}, \boldsymbol{e_{x3}}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_{\tau 1}} &= \boldsymbol{e_{x1}}\big((1 + cos2\psi)cos^2\tilde{\varphi} - 1\big) + \boldsymbol{e_{x2}} sin\tilde{\varphi} cos\tilde{\varphi}(1 + cos2\psi) - \boldsymbol{e_{x3}} sin2\psi cos\tilde{\varphi} \\ \boldsymbol{e_{\tau 2}} &= -\boldsymbol{e_{x1}} sin\tilde{\varphi} cos\tilde{\varphi}(1 + cos2\psi) + \boldsymbol{e_{x2}}(1 - (1 + cos2\psi)sin^2\tilde{\varphi}) + \boldsymbol{e_{x3}} sin2\psi sin\tilde{\varphi} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Теперь можно вычислить скалярные произведения, являющиеся координатами:

$$x_1 = r(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{n}) = rcos\psi, \tag{3.34}$$

$$x_2 = r(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) = -rsin\psi cos\tilde{\varphi}, \tag{3.35}$$

$$x_3 = r(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) = rsin\psi sin\tilde{\varphi} \tag{3.36}$$

Далее, для вычисления компонент тензора после поворота, необходимо вычислить девять скалярных произведений:

$$(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) = -cos2\psi, \tag{3.37}$$

$$(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) = -sin2\psi cos\tilde{\varphi}, \tag{3.38}$$

$$(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) = sin2\psi sin\tilde{\varphi}, \tag{3.39}$$

$$(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{n}) = -sin2\psi cos\tilde{\varphi}, \tag{3.40}$$

$$(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) = 1 - (1 + cos2\psi)cos^2\tilde{\varphi} = 1 - 2cos^2\psi cos^2\tilde{\varphi}, \tag{3.41}$$

$$(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) = sin\tilde{\varphi}cos\tilde{\varphi}(1 + cos2\psi) = 2cos^2\psi sin\tilde{\varphi}cos\tilde{\varphi}, \tag{3.42}$$

$$(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{n}) = sin2\psi sin\tilde{\varphi}, \tag{3.43}$$

$$(\boldsymbol{e_{\tau 20}}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) = sin\tilde{\varphi}cos\tilde{\varphi}(1 + cos2\psi) = 2cos^2\psi sin\tilde{\varphi}cos\tilde{\varphi}, \tag{3.44}$$

$$(\boldsymbol{e_{\tau 10}}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) = 1 - (1 + cos2\psi)sin^2\tilde{\varphi} = 1 - 2cos^2\psi sin^2\tilde{\varphi} \tag{3.45}$$

Предположим, что есть только одна (нормальная) компонента вектора потенциала. В этом случае нужно вычислить только одну компоненту тензора (3.17) (ядра) $M_{n_0 n}$ для вычисления потенциала, и одну компоненту ядра $P_{n_0 n}$ для вычисления нагрузок, используя уже известный потенциал. Принимая во внимание, что ($\int M_{e_{\tau 10} n}\ dS_x = \int M_{e_{\tau 20} n}\ dS_x = \int P_{e_{\tau 10} n}\ dS_x = \int P_{e_{\tau 20} n}\ dS_x = 0$)

$$\begin{aligned} M_{n_0 n} = {} & M_{11}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) + M_{21}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + M_{31}(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) \\ & = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3}\right)(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1 x_2}{r^3}\right)(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + \frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1 x_3}{r^3}\right)(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}}) \\ & + \frac{1}{2(\lambda + \mu)}\left(\frac{1}{r}\right)(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n}) - \frac{1}{2(\lambda + \mu)}\left(\frac{x_2(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 1}}) + x_3(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{e_{\tau 2}})}{r(r + x_1)}\right) \\ & = -\frac{cos2\psi}{2\mu r}(1 + cos^2\psi) - \frac{sin2\psi sin\psi cos\psi}{2\mu r} \\ & + \frac{1}{2(\lambda + \mu)r}\left(-cos2\psi + \frac{sin\psi sin2\psi}{1 + cos\psi}\right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Вычислим интеграл по сфере, учитывая, что первая часть выражения (3.46), выделенная красным цветом, при интегрировании по сфере даёт ноль, а также, что $\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} = 2\pi$:

$$\frac{1}{2\pi}\int M_{n_0n}\ dS_x =$$

$$= \frac{R}{(\lambda+\mu)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-cos2\psi + \frac{sin\psi sin2\psi}{1+cos\psi}\right)sin\psi d\psi$$

$$= \frac{R}{(\lambda+\mu)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2cos^2\psi + 2cos\psi(1-cos\psi)\right)sin\psi d\psi$$

$$= \frac{R}{(\lambda+\mu)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2cos\psi - 4cos^2\psi)sin\psi d\psi = \frac{2R}{3(\lambda+\mu)} \qquad (3.47)$$

Аналогично вычисляем упомянутую проекцию для P_{ik} (тензора нагрузок):

$$P_{n_0n} = P_{11}(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{n}) + P_{21}(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 1}}) + P_{31}(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 2}})$$

$$= -\frac{3x_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})^2}{r^5}$$

$$+\frac{\mu}{\lambda+\mu}((\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 1}})^2 g_{133} + (\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 2}})^2 g_{122} - 2(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 1}})(\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 2}})g_{123})$$

$$= -\frac{3x_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n_0})^2}{r^5} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{((\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 1}})^2 + (\boldsymbol{n_0},\boldsymbol{e_{\tau 2}})^2)}{r(r+x_1)}$$

$$= -3\frac{cos^3\psi}{r^2} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{sin^2 2\psi}{r^2(1+cos\psi)}$$

$$= \frac{1}{2Rr}\left(-3cos^2\psi + \frac{4\mu}{\lambda+\mu}(cos\psi - cos^2\psi)\right) \qquad (3.48)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int P_{n_0n}\ dS_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-3cos^2\psi + \frac{4\mu}{\lambda+\mu}(cos\psi - cos^2\psi)\right)sin\psi d\psi \qquad (3.49),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int P_{n_0n}\ dS_x = -1 + \frac{2}{3}\frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad (3.50)$$

Итак, теперь можно решить аналитически задачу о всестороннем сжатии шара методом ГИУ. Нормальное перемещение, приложенное к поверхности шара, постоянно и пропорционально радиусу:

$$U_{n0} = \alpha R \qquad (3.51)$$

Предположим, что у вектора потенциала есть только одна ненулевая компонента – нормальная. Это значит, что:

$$U_{n0} = \frac{1}{2\pi}\int M_{n_0 n}\, F_n\, dS_x \tag{3.52}$$

Далее, предположим, что эта компонента – константа (она удовлетворяет уравнению):

$$F_n = F_{n0} = \frac{2\pi U_{n0}}{\int M_{n_0 n}\ dS_x} = \frac{3(\lambda+\mu)\alpha R}{2R} = \frac{3\alpha(\lambda+\mu)}{2} \tag{3.53}$$

Потенциал – вспомогательный вектор, не имеющий физического смысла, однако, он позволяет вычислить нагрузку. Принимая во внимание равенство нулю касательных компонент вектора потенциала, получаем:

$$p_{n0} = F_{n0} - \frac{1}{2\pi}\int P_{n0n}F_n dS_x = F_{n0} - \frac{F_{n0}}{2\pi}\int P_{n0n}dS_x = \frac{3\alpha(\lambda+\mu)}{2} + \frac{3\alpha(\lambda+\mu)}{2}$$
$$-\frac{2}{3}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\times\frac{3\alpha(\lambda+\mu)}{2} = \alpha(3\lambda+3\mu-\mu) = \alpha(3\lambda+2\mu) \tag{3.54}$$

(3.54) есть правильный ответ. Отмечу, что использование тензора (3.11) дало бы другой ответ − $\alpha(3\lambda+3\mu)$. Получение правильного ответа является хорошим тестом на то, что мы находимся на верном пути. Метод имеет смысл тестировать и использовать дальше, решая различные краевые задачи.

Вообще говоря, никто не запрещает использовать так называемый сопряжённый базис, когда за координаты, от которых зависят ядра (3.7), (3.12), выбираются проекции радиус−вектора на нормаль и касательные не в бегущей, а в фиксированной точке некоторой поверхности. Это подразумевает, что перемещения во внутренних точках объёма вычисляются на некоторой виртуальной поверхности, как правило, параллельной границе раздела, (на которой задаются граничные условия). Такой способ выбора переменных может быть удобен для решения трёхмерных краевых задач в одномерно-неоднородной, либо трансверсально-изотропной среде. Соответственно, координаты будут вычисляться не по формулам (3.10), а немного иначе:

$$x_1 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n_0}), \qquad x_2 = \left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e_{\tau_{10}}}\right), \qquad x_3 = \left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e_{\tau_{20}}}\right) \tag{3.55}$$

3.2. Обобщение тензора на область ненулевых временных частот

Иные виды ядер. А возможно ли использовать тензор (3.7) для решения задач упругих стационарных колебаний (которые иногда называют динамикой)?

Для этого нужно каждое из слагаемых аналитически продолжить на область ненулевых частот, таким образом, чтобы вместо уравнения (3.1) удовлетворять уравнению:

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{u}) + k^2\boldsymbol{u} = \mathbf{0}\,, \tag{3.56}$$

где $k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$ – пространственная частота.

Первый подход был предложен в [91]. Первое слагаемое продолжить аналитически в область ненулевых частот достаточно просто – нужно взять тензор фундаментальных решений уравнения упругих стационарных колебаний для пространства:

$$\Gamma_{ik}(x_0, x) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\delta_{ik} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left[\frac{\cos(kr)}{r} - \frac{\cos(\gamma kr)}{r}\right]\right), \tag{3.57}$$

при этом $\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$ определён в (2.26).

Теперь об аналитическом продолжении второго слагаемого – тензора Z_{ik}. Первый столбец Z_{ik} (3.8) есть градиент от $\frac{\partial g}{\partial x_1}$. В статике g (3.9) удовлетворяет уравнению Лапласа. Чтобы первый столбец матрицы удовлетворял уравнению (3.56), необходимо, чтобы функция g удовлетворяла уравнению Гельмгольца, включающего параметр γ^2:

$$\Delta g + \gamma^2 k^2 g = 0 \tag{3.58}$$

Дивергенция от второго и третьего столбца матрицы (3.8) равна нулю. Следовательно, чтобы эти столбцы удовлетворяли упругому уравнению стационарных колебаний, необходимо, чтобы функция g в этих столбцах также удовлетворяла уравнению Гельмгольца, но с другим параметром:

$$\Delta g + k^2 g = 0 \tag{3.59}$$

Далее, функция g будет построена для второго уравнения Гельмгольца. Существует два способа нахождения g, дающие похожие, но немного различные результаты в итоге. Первый – аналитический, через разложение g по функциям Бесселя первого рода. Возможно, этот способ аналитического перехода от решений уравнения Лапласа к уравнению Гельмгольца будет иметь ценность для тестирования более простого, численного нахождения функции g.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + r_\tau^2}} = \int_0^\infty J_0(k_r r_\tau)\exp(-k_r|x_1|)dk_r \tag{3.60}$$

Далее J_m – функции Бесселя первого рода с целым индексом. (3.60) и прочие свойства несобственных интегралов от функций Бесселя с экспоненциальным множителем можно прочитать в справочнике [45].

Итак, как видно функция $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Как её преобразовать, чтобы она удовлетворяла уравнению Гельмгольца (3.59) и стремилась к функции (3.9) при $k \to 0$? Для этого нужно функцию Бесселя сместить по пространственной частоте. Новая функция имеет вид:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = \int_0^\infty J_0(\sqrt{k_r^2 + k^2} r_\tau)\exp(-k_r|x_1|)dk_r \tag{3.61}$$

Функцию Бесселя можно разложить [45]:

$$J_0\left(\sqrt{k_r^2 + k^2} r_\tau\right) = J_0(k_r r_\tau)J_0(k r_\tau) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(k_r r_\tau)J_{2m}(k r_\tau) \tag{3.62}$$

Используем формулы из того же источника [45], чтобы два раза вычислить первообразную по переменной выделенного направления x_1.

$$\int_0^\infty J_{2m}(k_r r_\tau)\exp(-k_r|x_1|)dk_r = \frac{(r - |x_1|)^{2m}}{r r_\tau^{2m}} \tag{3.63}$$

Поскольку $r_\tau^{2m} = (r - |x_1|)^m (r + |x_1|)^{2m}$, то (3.63) можно записать в виде:

$$\int_0^\infty J_{2m}(k_r r_\tau)\exp(-k_r|x_1|)\,dk_r = \frac{1}{r}\frac{(r - |x_1|)^m}{(r + |x_1|)^m} \tag{3.64}$$

Обозначим вспомогательную функцию для статической задачи g (3.9) за g_0. Отметим, что эта функция получена как дважды взятый неопределённый интеграл от $\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{\sqrt{x_1^2+r_\tau^2}}$ по переменной x_1. В результате дважды проведённого взятия неопределённого интеграла получаем, что:

$$g = g_0(x_1, r_\tau) J_0(kr_\tau) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \left[\frac{r+\frac{|x_1|}{2m}}{4m^2-1}\frac{r_\tau^{2m}}{(r+|x_1|)^{2m}}\right] J_{2m}(kr_\tau) \tag{3.65}$$

Второй способ, также изложенный в [91] – найти функцию g и три её производные численно (он чаще всего использовался в дальнейшем в расчётах) на двухмерной сетке параметров (создать библиотеку из 10 файлов). Далее на любой конкретной поверхности вычислять эту функцию с помощью интерполяции, используя библиотеку значений и производных в некоторых узлах. Функцию g_0 можно представить в виде интеграла:

$$g_0 = \int_0^\infty \frac{J_0(k_r r_\tau)\exp(-k_r|x_1|) - 1 + k_r|x_1|J_0(k_r)}{k_r^2} dk_r \tag{3.66}$$

Соответственно, можно вычислить и функцию g, осуществив аналитическое продолжение в область ненулевых частот:

$$g = \int_0^\infty \frac{J_0(\sqrt{k_r^2+k^2}r_\tau)\, e^{-k_r|x_1|} - J_0(kr_\tau) + k_r|x_1|J_0(k_r)J_0(kr_\tau)}{k_r^2} dk_r \tag{3.67}$$

Напомню, что нужно будет построить две функции, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца (3.58) и (3.59).

3.3. Гладкие и финитные ядра

Есть и ещё один способ построения ядер, изложенный в [98]. Он позволяет подобрать оптимальный баланс между точностью решения краевой задачи и обусловленностью системы линейных уравнений. Предварительно заметим, что у ядра (3.15) только пять независимых компонент. Как видим, функция g зависит только от двух переменных x_1, r_τ, геометрический смысл которых изложен выше. Если в качестве индексов i и k использовать эти два направления, то,

соответственно, третье направление – их векторное произведение (ортогональное обоим). В этом случае тензор (3.15) будет иметь вид:

$$M_{ik} = \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} \frac{1}{r} + \frac{x_1^2}{r^3} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} g_{11} & \frac{x_1 r_\tau}{r^3} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} g_{1r_\tau} & 0 \\ \frac{x_1 r_\tau}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} g_{1r_\tau} & \frac{2}{r} - \frac{x_1^2}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} g_{r_\tau r_\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{g_{r_\tau}}{r_\tau} \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Это наводит на мысль о том, что для решения задач упругих стационарных колебаний можно использовать тензор, столбцы которого есть отклики (компоненты вектора перемещений) полупространства на сосредоточенную нормальную, либо одну из двух касательных нагрузках в цилиндрических координатах (задача Лэмба), полагая, что координата в выделенном направлении $z = x_1, r = r_\tau$. При этом упомянутые выше координаты x_2, x_3 связаны с r_τ соотношениями:

$$\begin{aligned} x_2 &= r_\tau cos\varphi \\ x_3 &= r_\tau sin\varphi \end{aligned} \tag{3.69}$$

Казалось бы, если использовать в качестве ядер тензор Грина для полупространства, то можно достичь оптимального баланса точности и обусловленности, поскольку для плоскости в этом случае граничные условия будут выполнены автоматически, а любая поверхность в случае, если бегущая и фиксированная точки близки, является плоской. Напомню, что на любой поверхности есть одно выделенное направление – вектор внешней нормали к поверхности. По этой причине в качестве координаты $x_1 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ выбирается скалярное произведение радиус−вектора, начало которого находится в фиксированной точке объёма, а конец в бегущей точке поверхности, на нормаль в бегущей точке. В зависимости от знака x_1 ядрами будут решения либо для верхнего, либо для нижнего полупространства. Также на поверхности есть два взаимно ортогональных касательных направления: $\boldsymbol{e}_{\tau_1}, \boldsymbol{e}_{\tau_2}$. Напомню, что:

$$x_2 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_{\tau_1}), x_3 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_{\tau_2}), r_\tau = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, x_2 = r_\tau cos\varphi, x_3 = r_\tau sin\varphi \tag{3.70}$$

Однако, решение задачи Лэмба в цилиндрических координатах [19] в случае стационарных колебаний сохраняет практически все недостатки аналогичного тензора фундаментальных решений для безграничного пространства (3.57). Решение задачи о нормальном ударе по полупространству имеет вид:

$$U_n = \int_0^\infty J_0(k_r r_\tau) \frac{{k_r}^2}{2\pi\mu R(k_r,k)} \left(2{k_r}^2 \exp(-|x_1|\nu_s) - (2k_r^2 - k^2)\exp\left(-|x_1|\nu_p\right)\right) dk_r$$
$$U_r = \int_0^\infty J_0'(k_r r_\tau) \frac{{k_r}^2}{2\pi\mu R(k_r,k)} \left(-2\nu_s\nu_p \exp(-|x_1|\nu_s) + (2k_r^2 - k^2)\exp\left(-|x_1|\nu_p\right)\right) dk_r \quad (3.71)$$

При этом $\nu_s = \sqrt{k_r^2 - k^2}$, $\nu_p = \sqrt{k_r^2 - \gamma^2 k^2}$, k_r есть мнемонический параметр интегрирования, $R = 4k_r^2\sqrt{k_r^2 - k^2}\sqrt{k_r^2 - \gamma^2 k^2} - (2k_r^2 - k^2)^2$ – знаменатель Рэлея. Упомянутые недостатки очевидны. Во-первых – интервал интегрирования бесконечен (потеря точности). Во-вторых – в некоторой точке знаменатель Рэлея обращается в ноль (ещё большая потеря точности).

Дальнейшая модернизация ядер производилась в два этапа: замена бесконечного промежутка интегрирования на конечный, затем сдвиг по пространственным частотам. Оба этих этапа в итоге это дали существенное (на порядок) повышение точности вычисления ядер. Дело в том, что дельта−функция представляет собой хороший инструмент для аналитического моделирования. Однако, при использовании численных методов нагрузку лучше сосредотачивать не в точке, поскольку численное моделирование ограничено пространственными частотами Найквиста (обратно пропорциональными шагу разбиения), а на одной (или нескольких) малых площадках. Это означает, что интегрировать в (3.71) нужно не до бесконечности, а до обратного характерного размера разбиения. То есть вместо классической поверхностной дельта−функции при использовании численных методов правильнее использовать её конечный аналог, имеющий ограниченный пространственный спектр (т.е. фактически это дельта−функция, «размазанная» на несколько элементарных ячеек). Заметим, что (3.71) есть отклик по перемещениям на нормальную нагрузку (касательные компоненты, естественно, нули), представленную в виде:

$$\delta(S) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} k_r J_0(k_r r_\tau) dk_r \tag{3.72}$$

Сказанное выше о конечном аналоге дельта−функции означает, что в (3.72) предел интегрирования будет не бесконечность, а какое-то конечное число N. Это означает, что «излишнюю» обусловленность мы «поменяем» на дополнительную точность.

Избавиться от проблем, связанных с обращением в ноль знаменателя Рэлея не так сложно. Для этого нужно выбрать несколько иное приближение к дельта−функции. Ведь её представление, не единственно. Например, $\delta(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r}$, в то же время $\delta(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\cos(kr)}{r}$. Если первое представление более уместно для статики, то второе – для стационарных колебаний. Каким же образом исправить (3.72), чтобы вычислять ядра быстро, точно и достоверно? Ответить на этот вопрос можно с помощью следующей правдоподобной аналогии. Отличие $\frac{1}{r}$ от $\frac{\cos(kr)}{r}$ в том, что первая формула удовлетворяет уравнению Лапласа, а вторая – Гельмгольца. Параметр уравнения Гельмгольца k во второй формуле примерно одинаковым образом действует на все три измерения. Поскольку в (3.72) δ – функция поверхностная, то есть r_τ содержит в себе две координаты (два измерения), а не одну, то представляется целесообразным исправить (3.72), учитывая предыдущие замечания о пределе интегрирования, следующим образом:

$$\delta_1(S) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{N} k_r J_0\left(r_\tau\sqrt{k_r^2 + 2k^2}\right) dk_r \tag{3.73}$$

Отметим, что существенное повышение точности следует из гладкости и финитности ядер. Это даёт возможность изменить (3.71) и получить два из пяти членов матрицы ядер:

$$\begin{aligned} U_n &= \int_0^{N} J_0(\nu_3 r_\tau)\frac{k_r \nu_2}{2\pi\mu R_1(k_r,k)}\left(2\nu_3^2\exp(-|x_1|\nu_1) - (2k_r^2 + 3k^2)\exp(-|x_1|\nu_2)\right) dk_r \\ U_r &= \int_0^{N} J_0'(\nu_3 r_\tau)\frac{k_r \nu_3}{2\pi\mu R_1(k_r,k)}\left(-2\nu_1\nu_2\exp(-|x_1|\nu_1) + (2k_r^2 + 3k^2)\exp(-|x_1|\nu_2)\right) dk_r \end{aligned} \tag{3.74}$$

при этом параметры немного изменяются (смещаются по пространственной частоте по сравнению с (3.71)):

$$\nu_1 = \sqrt{k_r^2 + k^2}, \qquad \nu_2 = \sqrt{k_r^2 + k^2(2-\gamma^2)}, \qquad \nu_3 = \sqrt{k_r^2 + 2k^2},$$

$$R_1 = 4(k_r^2 + 2k^2)\sqrt{k_r^2 + k^2}\sqrt{k_r^2 + k^2(2-\gamma^2)} - (2k_r^2 + 3k^2)^2 \qquad (3.75)$$

Важным здесь является то, что знаменатель R_1 нигде не обращается в ноль (за исключением случая $k = 0$ – статика, где нужно просто раскрыть неопределённость). Кроме того, решение (3.75) ограничено при $x_1 = r_\tau = 0$. Если число N устремить к бесконечности, то (3.75) будет стремиться к классическому решению об отклике упругого полупространства на сосредоточенную нормальную нагрузку. При этом оно будет «не менее фундаментальным», чем (3.71), зато гораздо более точно вычисляемым.

Осталось использовать решение для касательного монохромного удара по полупространству, необычайно изящно изложенное в [50]. Проведём те же вычисления, только будем искать отклик не на (3.72), а на (3.73), а также используем более удобную систему обозначений. Если $x_1 \geq 0$ и касательная нагрузка прикладывается в направлении $\boldsymbol{e_{\tau 1}}$ (оно же совпадает с направлением оси x_2), то вектор перемещений в полупространстве имеет вид [98]:

$$\boldsymbol{M_{x2}} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{N}} \left\{ \frac{k_r \exp(-|x_1|\nu_1)}{2\pi\mu\nu_1} \begin{bmatrix} 0 \\ [J_0(\nu_3 r_\tau) + J_0''(\nu_3 r_\tau)]\mathrm{e}_{\boldsymbol{r}} cos\varphi \\ J_0''(\nu_3 r_\tau)\mathrm{e}_{\boldsymbol{\varphi}} sin\varphi \end{bmatrix} \right.$$

$$+ \frac{k_r(\nu_1^2 + \nu_3^2)\exp(-|x_1|\nu_1)}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \begin{bmatrix} -\nu_3 J_0'(\nu_3 r_\tau)\mathrm{e}_{\boldsymbol{n}} cos\varphi \\ \nu_1 J_0''(\nu_3 r_\tau)\mathrm{e}_{\boldsymbol{r}} cos\varphi \\ \nu_1[J_0(\nu_3 r_\tau) + J_0''(\nu_3 r_\tau)]\mathrm{e}_{\boldsymbol{\varphi}} sin\varphi \end{bmatrix} \qquad (3.76)$$

$$\left. - \frac{2k_r\nu_1\nu_3 \exp(-|x_1|\nu_2)}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} \begin{bmatrix} -\nu_2 J_0'(\nu_3 r_\tau)\mathrm{e}_{\boldsymbol{n}} cos\varphi \\ \nu_3 J_0''(\nu_3 r_\tau)\mathrm{e}_{\boldsymbol{r}} cos\varphi \\ \nu_3[J_0(\nu_3 r_\tau) + J_0''(\nu_3 r_\tau)]\mathrm{e}_{\boldsymbol{\varphi}} sin\varphi \end{bmatrix} \right\} dk_r,$$

здесь $\mathrm{e}_{\boldsymbol{r}}$ и $\mathrm{e}_{\boldsymbol{\varphi}}$ соответствуют радиальному и азимутальному направлению цилиндрической системы координат, при этом связь с координатами, использовавшимися ранее, определяется соотношениями (3.70). Теперь найдём все ненулевые компоненты конечного аналога тензора фундаментальных решений для

полупространства. Если перейти к компонентам $\boldsymbol{e_n}$, $\boldsymbol{e_{r_\tau}}$, $\boldsymbol{e_\varphi}$ (соотношение между $\boldsymbol{e_{r_\tau}}$, $\boldsymbol{e_\varphi}$ и $\boldsymbol{e_{\tau_1}}, \boldsymbol{e_{\tau_2}}$ определяются с помощью соотношений (3.69)), то увидим, что:

$$M_{nn} = \int_0^N J_0(\nu_3 r_\tau) \frac{k_r \nu_2}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} (2\nu_3^2 \exp(-|x_1|\nu_1) - (\nu_1^2 + \nu_3^2) \exp(-|x_1|\nu_2))\, dk_r, \quad (3.77)$$

$$M_{nr} = \int_0^N J_0'(\nu_3 r_\tau) \frac{k_r \nu_3}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} (-2\nu_1\nu_2 \exp(-|x_1|\nu_1) + (\nu_1^2 + \nu_3^2) \exp(-|x_1|\nu_2))\, dk_r \quad (3.78)$$

$$M_{rn} = \int_0^N J_0'(\nu_3 r_\tau) \frac{k_r \nu_3}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} (2\nu_1\nu_2 \exp(-|x_1|\nu_2) - (\nu_1^2 + \nu_3^2) \exp(-|x_1|\nu_1))\, dk_r, \quad (3.79)$$

$$M_{rr} = \int_0^N J_0''(\nu_3 r_\tau) \frac{k_r \nu_1}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} ((\nu_1^2 + \nu_3^2) \exp(-|x_1|\nu_1) - 2\nu_3^2 \exp(-|x_1|\nu_2))\, dk_r$$

$$+ \int_0^N (J_0(\nu_3 r_\tau) + J_0''(\nu_3 r_\tau)) \frac{k_r \exp(-|x_1|\nu_1)}{2\pi\mu\nu_1} dk_r, \quad (3.80),$$

$$M_{\varphi\varphi} = \int_0^N -(J_0(\nu_3 r_\tau) + J_0''(\nu_3 r_\tau)) \frac{k_r \nu_1}{2\pi\mu R_1(k_r, k)} ((\nu_1^2 + \nu_3^2) \exp(-|x_1|\nu_1) - 2\nu_3^2 \exp(-|x_1|\nu_2))\, dk_r$$

$$- \int_0^N J_0''(\nu_3 r_\tau) \frac{k_r \exp(-|x_1|\nu_1)}{2\pi\mu\nu_1} dk_r \quad (3.81)$$

Остальные компоненты тензора равны нулю: $M_{n\varphi} = M_{\varphi n} = M_{\varphi r} = M_{r\varphi} = 0$. Таким образом, ядра для решения задач второго рода (на поверхности заданы нагрузки, найти перемещения) построены. Представление ядер в виде конечных аналогов функции Грина для полупространства приводит к тому, что решение системы (3.56) естественным образом ищется в виде конечной суммы, а не интегралов (3.6) или (3.2).

То есть решение ищется в виде:

$$U_i(x_0) = \sum M_{ik}(x_0, x) \mathrm{F}_k(x) \quad (3.82)$$

Вектор нагрузок можно вычислить аналитически с помощью закона Гука ($p_i(x_0) = \sigma_{ik} n_{0k}$):

$$p_i(x_0) = -\sum P_{ik}(x_0, x) \mathrm{F}_k(x) \quad (3.83)$$

Каким образом решения для полупространства (3.77)−(3.81) можно использовать для нахождения решений краевых задач на произвольных поверхностях? Если кратко, то ядра нужно правильно сориентировать, аналогично рассмотренному выше примеру о всестороннем сжатии шара, разобранному в начале данной главы.

То есть все необходимые проекции $M_{ik}(x_0, x)$ могут быть вычислены как компоненты вектора после применения операции вращения. В то же время необходимые компоненты тензора нагрузок $P_{ik}(x_0, x)$, вычисляются как компоненты тензора второго ранга после вращения. Обратим внимание на то, что новые ядра в форме (3.77)−(3.81) не зависят ни от вида граничных условий, ни от геометрии поверхности. Из всех величин, определяемых геометрией поверхности, они зависят только от $|x_1|$ и r_τ, точнее, от их максимальных значений на поверхности. Поэтому перед решением конкретной упругой задачи (а особенно серии задач) имеет смысл сначала определить максимальные расстояния между точками, которые возможны на этой поверхности (эти расстояния и будут верхней границей для $|x_1|$ и r_τ, нижняя граница, очевидно, ноль). После этого можно создать библиотеку, которая будет представлять собой эти пять двухмерных функций (3.77)−(3.81), вычисленных на определённой сетке, а также их частные производные, вплоть до третьих включительно. Таким образом, при решении конкретной группы задач на фиксированной частоте стационарных колебаний появляется возможность избежать вычисления в каждой точке поверхности упомянутых выше интегралов, используя двухмерную формулу Тейлора. Например, если известно, что нужно будет решать задачи, в которых максимальное расстояние между точками будет равно 2 (см. примеры ниже), то можно положить число N в (3.77)−(3.81) равным 200. Вычисление в каждой точке векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{e_{\tau 1}}$, $\boldsymbol{e_{\tau 2}}$, их скалярных произведений в фиксированной и бегущей точках, а также параметров $x_1, x_2,\ x_3,\ r_\tau$ и элемента поверхности, а также столбца свободных членов (который зависит от граничных условий), происходит несравнимо быстрее, чем вычисление интегралов. Поэтому процесс вычисления матрицы коэффициентов для системы линейных уравнений, предназначенной для

нахождения вектора−потенциала, становится вполне приемлемым по времени (см. примеры ниже).

Далее запишем ненулевые компоненты упомянутого выше ядра в статике (в предположении, что $x_1 \geq 0$), которые также использовались для решения краевых задач на поверхностях с быстро изменяющимся вектором нормали. Для этого нужно раскрыть неопределённость $k \to 0$. Можно отметить, что при $N \to \infty$ компоненты вышеупомянутого тензора (3.84)−(3.88), совпадают с компонентами тензора (3.15), что и следовало ожидать.

$$M_{nn} = \int_0^N J_0(k_r r_\tau) \frac{\exp(-|x_1|k_r)}{4\pi\mu(1-\gamma^2)} \left(1 + k_r|x_1|(1-\gamma^2)\right) dk_r, \tag{3.84}$$

$$M_{rn} = \int_0^N -J_0'(k_r r_\tau) \frac{\exp(-|x_1|k_r)}{4\pi\mu(1-\gamma^2)} \left(-\gamma^2 + k_r|x_1|(1-\gamma^2)\right) dk_r, \tag{3.85}$$

$$M_{nr} = \int_0^N -J_0'(k_r r_\tau) \frac{\exp(-|x_1|k_r)}{4\pi\mu(1-\gamma^2)} \left(\gamma^2 + k_r|x_1|(1-\gamma^2)\right) dk_r, \tag{3.86}$$

$$M_{rr} = \int_0^N \Big(2J_0(k_r r_\tau)(1-\gamma^2) + J_0''(k_r r_\tau)(1-2\gamma^2) + k_r|x_1|(1-\gamma^2)J_0''(k_r r_\tau)\Big) \frac{\exp(-|x_1|k_r)}{4\pi\mu(1-\gamma^2)} dk_r, \tag{3.87}$$

$$M_{\varphi\varphi} = \int_0^N \Big(J_0(k_r r_\tau) - J_0''(k_r r_\tau)[1-2\gamma^2] - k_r|x_1|(1-\gamma^2)\big(J_0(k_r r_\tau) + J_0''(k_r r_\tau)\big)\Big) \frac{\exp(-|x_1|k_r)}{4\pi\mu(1-\gamma^2)} dk_r \tag{3.88}$$

3.4. Использование финитных ядер для моделирования отражения волн от шероховатых границ

Шероховатость низкоконтрастной границы раздела можно назвать микронеоднородностью второго рода. В отличие от объёмных контрастных включений с огромными перепадами физико-механических свойств компонентов,

быстрое изменение нормали вполне может привести к неожиданным отражательным свойствам слабоконтрастных слоёв. Проблема отражения от малоамплитудных шероховатых поверхностей интересна не только для сейсмологии (для понимания природы глубоко залегающих границ), но и сейсморазведки (выявления эродированных границ), а также для акустики (в том числе для выявления дефектов неразрушающими методами). В связи с этим представляет несомненный интерес поиск не только количественных, но и качественных различий полных волновых полей при отражении от гладкой и шероховатой поверхностей. Существенная часть информации о структуре слоисто-однородных сред получается благодаря обработке данных об отражённых волнах. Однако, процедуры обработки полагают границы гладкими. В связи с этим возникает вопрос, в каких случаях обработка этих данных может привести к предположению о том, что граница является шероховатой? Для ответа на этот вопрос необходимо эффективно решать краевые задачи на подобных поверхностях.

Один из первых эффективных инструментов вычисления отражения от негладких поверхностей заключался в использовании лучевого разложения [8]. Однако, в случае достаточно быстрого изменения вектора нормали к поверхности это давало очень большие погрешности, что и не скрывалось авторами. Аналитические методы [8], использующие метод малых возмущений (как правило, метод Рэлея, Кирхгоффа, или их модификации) предполагают предельно простую геометрию поверхности раздела. Главное, чтобы вектор нормали к поверхности изменялся не очень быстро. Использование метода конечных элементов для подобных границ раздела зачатую приводит к плохо обусловленным системам [21], что требует проведения регуляризационных процедур. Используем модифицированный МГЭ для нахождения численного решения задачи об отражении от границы с быстро изменяющимся вектором нормали.

Формулировка задач. Найти решение системы (3.56) при условии, что на верхней границе задан источник, т.е. зависимость вектора нагрузок от координат, нижняя граница простирается до бесконечности, на границе двух сред выполняются условия жёсткого контакта (три по перемещениям и три по вектору

нагрузок). Верхняя свободная поверхность, к которой прикладывается известная нагрузка – плоскость (z=0). В качестве границы раздела использовалась либо плоскость (z= − 0.5), либо шероховатая поверхность. Её уравнение есть $z = -0.5 + 0.01 * (\cos(10\pi x) + \cos(10\pi y))$ (рисунок 3.2).

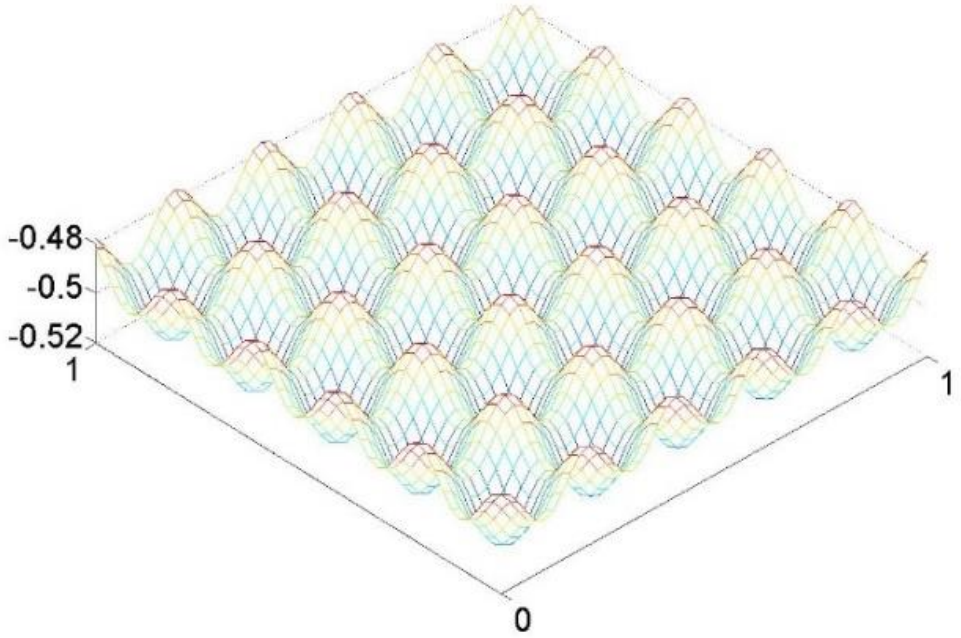

Рисунок 3.2 − Шероховатая поверхность раздела. $z = -0.5 + 0.01 * (\cos(10\pi x) + \cos(10\pi y))$ x и y изменяются от 0 до 1

Параметр k изменяется от 0.1 до 20, что соответствует эффективной длине S волны от 20π до $\pi/_{10}$. Упомянутая частотная область покрывает диапазон от квазистатики до лучевой динамики. Нагрузка на верхней поверхности осесимметрична и имеет только нормальную компоненту, равную $p_n = \exp(-1000 \times r^2)$. $r \in [0, 1]$. Упругие константы верхнего слоя: $\lambda = \mu = \varrho = 1$. Нижний слой имеет такие же параметры, за исключением $\mu^- = 1.2$.

Условия на границе раздела – непрерывность вектора перемещений и нулевая векторная сумма вектора нагрузок. Использовались цилиндрические координаты с равномерной сеткой 25×25 на каждой из поверхностей. На верхней поверхности вычислялся вектор перемещений, порождённый нагрузкой и двухслойной средой при различных частотах k.

Видно, что данная задача сводится к краевой задаче смешанного типа (третьего рода) по причине необходимости удовлетворения условий на границе

раздела как по перемещениям, так и по нагрузкам. Кроме того, очень быстро меняется как вектор нагрузки на верхней (свободной) поверхности (моделируется сосредоточенный источник), так и вектор нормали на границе раздела. Задачи на нахождение вектора потенциала решались с помощью конечных сумм (т.е. путём решения системы линейных уравнений) (3.82), (3.83) и использованием в качестве ядер (3.77)−(3.81), аналогично описанному в [98]. Использование модифицированных ядер позволяет существенно расширить класс некорректных задач, которые можно решать без применения регуляризационных процедур. Есть основания предполагать, что для подобных задач этот алгоритм даёт оптимальное сочетание точности и обусловленности конечной системы, ибо интегральные (суммирующие) методы при быстром изменении нормали к поверхности рано или поздно должны стать наиболее оптимальными (т.е. обеспечивающими максимальную точность при фиксированном количестве точек).

Результаты вычислений. Отражение осесимметричного сигнала от шероховатой поверхности даёт угловую компоненту на всех частотах (эта компонента при отражении от гладкой поверхности есть ноль). Однако, на достаточно коротких волнах амплитуда этой компоненты слишком мала по сравнению с поверхностной волной. Угловая компонента представлена на рисунке 3.3 при k=10. К сожалению, амплитуда этой компоненты уменьшается при удалении от источника.

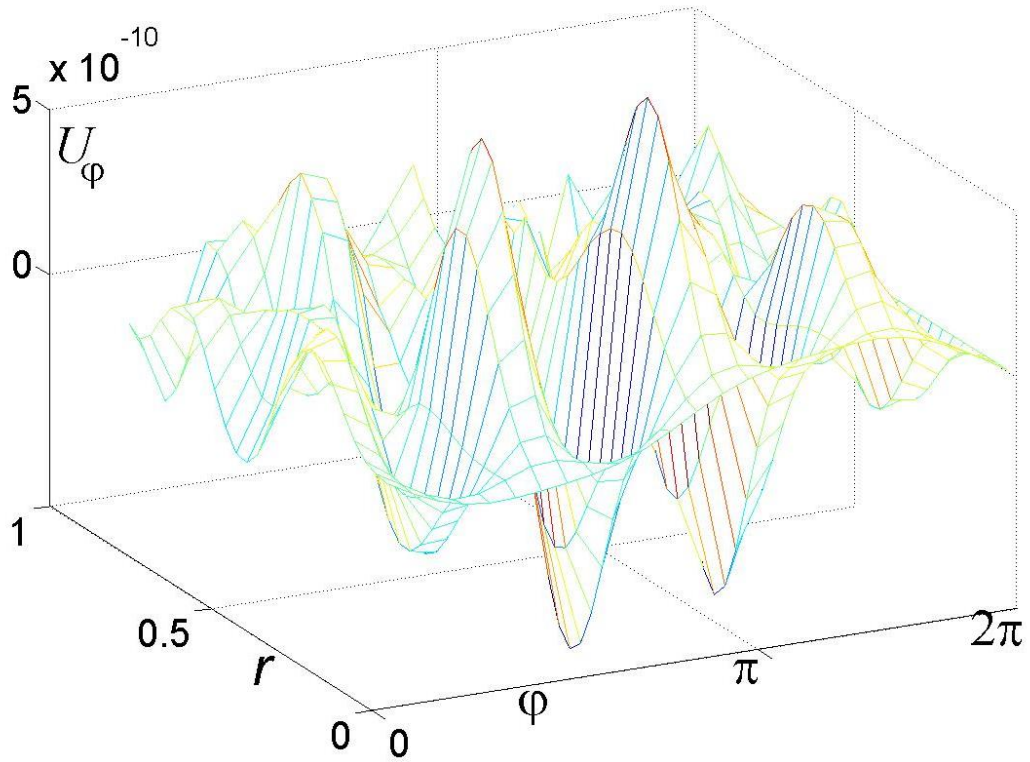

Рисунок 3.3 − Угловая компонента (e_φ) вектора перемещений на верхней границе, порождённая шероховатой границей раздела (k=10)

Разность радиальных компонент, порождённых гладкой и шероховатой границами раздела (k=10) представлена на рисунке 3.4. На высоких частотах шероховатость может быть выделена вычитанием радиальных компонент, полученных при отражениях от гладкой и шероховатой поверхностей соответственно. Эта разность есть квазипериодический сигнал с незначительным амплитудным затуханием. Угловая компонента (e_φ) вектора перемещений на свободной поверхности, порождённая отражением от шероховатой поверхности, представлена на рисунке 3.5 при k=0.1. Это означает, что, если волна достаточно длинная (квазистатика), то затухание угловой компоненты становится незначительным, и её амплитуда становится сравнимой с амплитудой поверхностных волн.

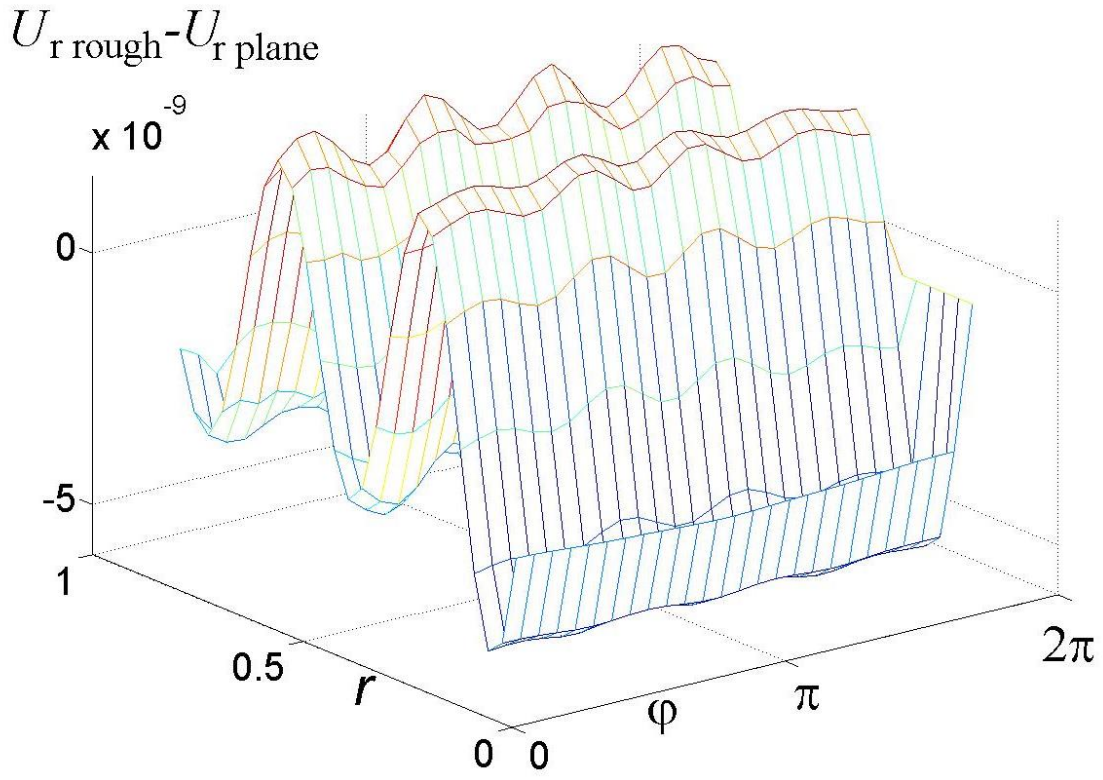

Рисунок 3.4 − Зависимость разности между радиальными компонентами, порождёнными отражениями от плоской и шероховатой границ (k=10)

Если вернуться во временную область и построить угловой аналог сейсмограммы, т.е. зависимость угловой компоненты вектора перемещений от времени и угла при фиксированном (единичном) расстоянии от источника, $U_{\varphi}(1, \varphi, t)$, то можно выделить волны, соответствующие этому перемещению, и определить их скорость. Выяснилось, что при отражении от шероховатой границы в некотором диапазоне частот образуются волны (точнее, пара волн) с очень низкой скоростью распространения, причины возникновения которых рассматривались в [18]. Их вполне можно идентифицировать как медленные крутильные волны, скорость которых при данных параметрах численных экспериментов примерно в десять раз меньше скорости поперечных волн. Также существенно меньше их геометрическое расхождение (рисунок 3.6).

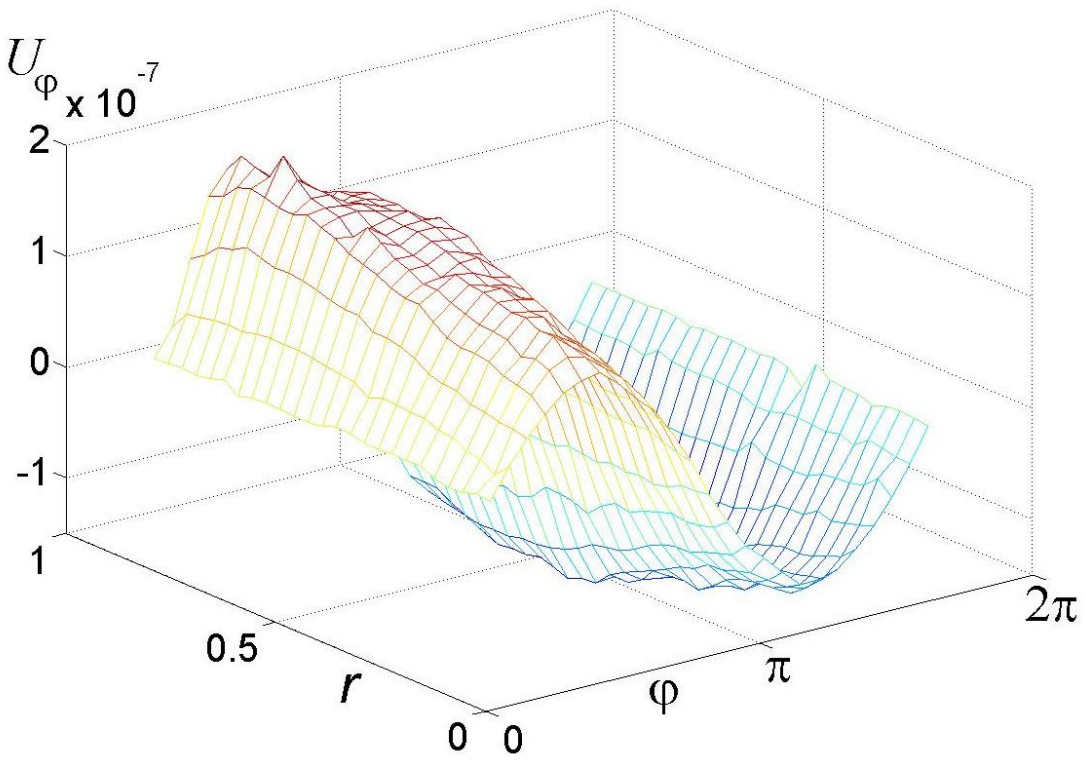

Рисунок 3.5 − Угловая компонента (e_φ) вектора перемещений на верхней поверхности, порождённая отражением от шероховатой поверхности (k=0.1)

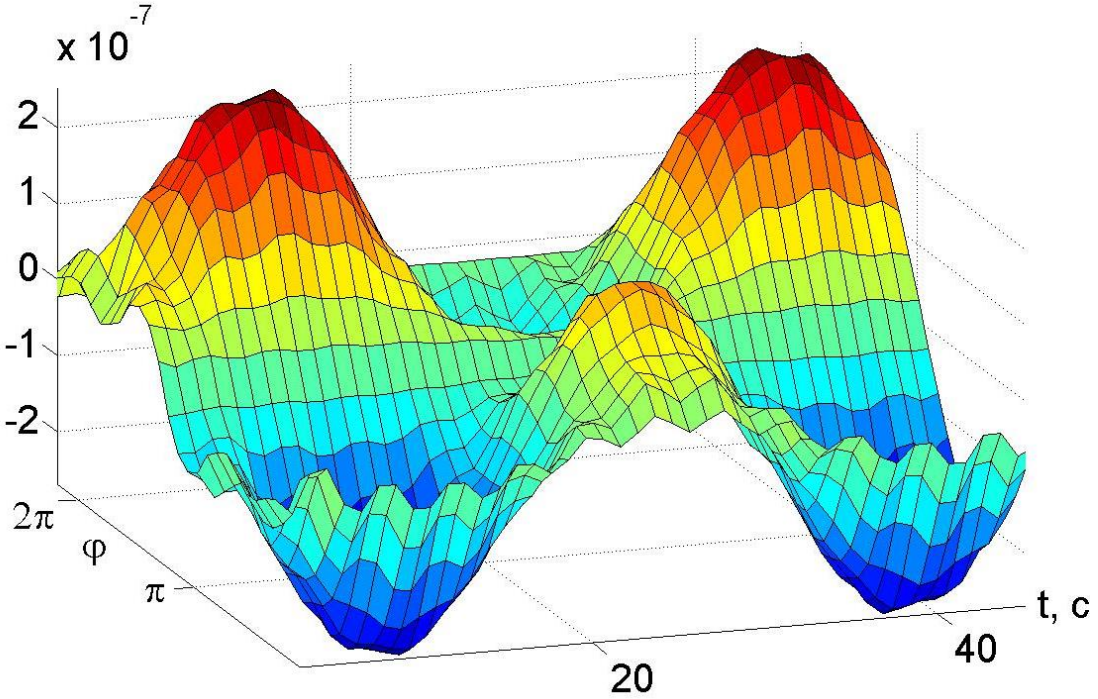

Рисунок 3.6 − Круговой аналог сейсмограммы, т.е. зависимость угловой компоненты вектора перемещений от угла и времени при фиксированном расстоянии до центра источника $U_\varphi(1, \varphi, t)$

3.5. Выводы по третьей главе

Приведённые выше различные модернизации метода граничных интегральных уравнений, произведённые путём изменения ядер, дают серьёзные основания полагать, что получен надёжный инструмент как для решения упругостатических, так и задач упругих стационарных колебаний, с помощью единого алгоритма.

1. Во всех модернизированных ядрах удалось избавиться от неинтегрируемой особенности в тензоре нагрузок.

2. Новые ядра являются откликами не на объёмную дельта−нагрузку, а на поверхностную, либо её конечный аналог. При этом наилучшую обусловленность дают ядра, порождённые поверхностной дельта−нагрузкой (3.11) с функцией g в виде (3.65) либо (3.67).

3. Финитные ядра ((3.77)−(3.81)), являющиеся откликом на конечный аналог дельта−нагрузки, дают большую точность при вычислении коэффициентов матрицы линейной системы, использующейся для нахождения вектора потенциала.

4. Модифицированный МГЭ имеет преимущества по сравнению с МКЭ при быстром изменении вектора нормали к поверхности раздела, особенно для граничных задач смешанного типа. Преимущества модифицированных ядер по сравнению с традиционно ранее использовавшимися (3.57) объясняется тем, что новые ядра являются откликами на дельта−нагрузку, приложенную к плоскости, а любая гладкая поверхность в окрестности любой из своих фиксированных точек приближённо является плоскостью.

5. Шероховатая граница раздела порождает угловую компоненту вектора перемещений на свободной границе при осесимметричном источнике. В случае, если граница раздела плоская, эта компонента отсутствует.

6. Возможно, что медленные волны порождаются не объёмными включениями в сплошную среду, а шероховатостью границ раздела.

Глава 4. Статика, прогноз напряжённого состояния и ориентация трещин в изотропной среде

4.1. Эффективные упругие модули зернистой среды

Второй набор уравнений в системе (3.6), содержащий компоненты вектора нагрузок, является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода с ядром, содержащим интегрируемую особенность (там задан вектор нагрузок). По этой причине в качестве первого шага использования тензора в виде (3.7) было бы разумно попытаться вычислить эффективные параметры гранулированных геологических сред, используя понятие представительного объёма. Уравнения при заданных нагрузках для вектора потенциала будут решаться самым простым способом – методом последовательных приближений.

Было бы интересно получить зависимости эффективных упругих модулей гранулированной среды от порового давления и структуры порового пространства, что позволит анализировать возможные качественные сценарии развития деформации (хрупкой или пластической) гранулированной среды, не выходя за рамки упругости. Также интересно было бы посмотреть, будет ли характер разрушения среды зависеть от типа флюида, заполняющего поровое пространство.

Проблема понимания параметров и механизмов деформационного поведения гранулированных (зернистых) сред под воздействием внешних статических и динамических нагрузок имеет в геологии как фундаментальный, так и прикладной аспект. Особенности физико-механического поведения при сейсмических толчках таких рыхлых грунтов, в особенности содержащих жидкий и газовый (в различных сочетаниях) поровый флюид проявляются в формировании, наряду с разрывными и сейсмогравитационными структурами, специфического класса поверхностных проявлений: излияний (иногда с фонтанированием) водных масс и осадков различной зернистости из трещин, песчаных вулканов, грифонов, просадок, оплывневых дислокаций. Подобные структуры, согласно обобщениям [51] являются характерным атрибутом 8−9 балльных и более сильных землетрясений.

Как правило, они возникают на участках с неглубоким залеганием грунтовых вод и преимущественно характерны для осадков от илистой до песчаной размерности.

В тоже время деформационные структуры, связанные с сейсмическими событиями, регулярно выделяются при изучении осадочных толщ и несут важную информацию о палеогеодинамических параметрах территорий. Начиная с работы [52], они выделяются в особый класс, называемый “*сейсмиты”* (*seismites*) [53−64]. Лабораторные эксперименты демонстрируют принципиальную возможность получения морфологически подобных структур, при вибрационном воздействии на рыхлые осадки в различных режимах нагружения [65, 66].

Параметры внутреннего напряжённого состояния природных гранулированных геологических сред, определяющие их деформационное поведение, в геологии описываются лишь на качественном уровне. Для объяснения процессов формирования разных по морфологии деформационных структур предложены механизмы гидропластичности, флюидизации и разжижения [67−70], различие между которыми базируется на соотношении внутреннего (порового) и внешнего (литостатического) давлений, действующих на слабосцементированный влагонасыщенный осадок.

Представляется, что подобные механизмы также имеют существенное значение и для понимания процессов структурирования неконсолидированных и слабоконсолидированных зернистых сред в прибрежных зонах под действием волновых колебаний водных масс, в том числе штормового и цунамигенного характера [71], а также для выяснения механического поведения зернистых осадков в процессах их переотложения в водных условиях (обломочные, зернистые, флюидизированные и турбидитные потоки).

Характеристики исследуемой модели гранулированной среды. В алевритах и песках частицы представляют собой многогранники, приближающиеся с усилением степени окатанности к сферической форме. Поэтому идеализированная модель структуры их минерального скелета может быть представлена в виде набора шаров.

В природе гранулированные среды характеризуются различной степенью заполнения порового пространства водой (степенью водонасыщения): от единицы, соответствующей состоянию полной влагоёмкости, т.е. полному заполнению порового пространства водой, до нуля, когда поровое пространство заполнено газовой фазой, в том числе парами воды. В дальнейшем исследуются эти два крайних состояния. Кроме того, в рассматриваемой модели вся свободная вода в поровом пространстве рассматривается как гравитационная, т.е. не связанная с поверхностью частиц и не удерживаемая капиллярными и менисковыми силами. Это объясняется тем, что жидкая влага в песчаных грунтах находится преимущественно в виде свободной воды, при незначительных количествах физически связанной; по существующим оценкам максимальная молекулярная влагоёмкость песков, т.е. их способность удерживать в своей структуре физически связанную воду, не превышает 2% [72].

Попытаемся оценить характер деформационного поведения (механизмов деформации) гранулированной флюидонасыщенной среды в зависимости от упругих модулей скелета и структуры порового пространства.

Это означает, что необходимо вычислить зависимость эффективных упругих модулей от порового давления, удельной поверхности, пористости, а также зависимость порового давления от внешнего (статического) напряжённого состояния и интегрально-геометрических характеристик среды. Построим математическую модель среды

Математическая модель зернистой среды. Математически среда смоделирована зёрнами сферической формы с радиусом равным 1. Координатная сетка разбита по углам θ и φ на 51×51 равных частей. При этом среднее число контактов равно 8, т.е. имеется 8 равных площадок контакта зерна с другими зёрнами, центры которых образуют вписанный в шар куб и площадь каждой из которых равна 1/16 части от площади сферы. Оставшаяся часть сферы граничит с флюидом. Осреднение производится путём поворота площадок контакта на определённый телесный угол и вычислением среднего арифметического.

Очевидно, что гранулированные геологические среды относятся к разновидности контрастных микронеоднородных сред, у которых перепад упругих свойств между скелетом и флюидом составляет многие порядки. Количественное и качественное описание воздействия возмущения на подобную среду, требует адекватного учёта граничных условий процессов деформирования на всей поверхности раздела скелет−флюид. Попытки игнорировать это обстоятельство и заменить контрастную микронеоднородную среду некоторым эквивалентным сплошным телом приводят к трудностям теоретического объяснения ряда экспериментальных фактов (например, роста коэффициента Пуассона с увеличением дифференциального давления в газонасыщенных средах, и падения в насыщенных жидкостью [73], вариаций коэффициента Пуассона при компактировании металлических гранул в зависимости от внешнего давления [74]).

Задача вычисления перемещений на достаточно произвольной замкнутой поверхности в зависимости от заданных на границе нагрузок или нагрузок по заданным на границе перемещениям, либо напряжённого состояния в случае смешанной задачи, когда на одной части поверхности заданы нагрузки, а на другой – перемещения, может быть применена для расчёта средних упругих характеристик гранулированной среды путём замены разностных операторов дифференциальными [75].

Если известны структура минерального скелета (упаковка зёрен) и законы взаимодействия на контактах, то путём осреднения сил, действующих на зерно, возможно вычислить средние упругие модули среды (алгоритм описан в главе 2). Однако, случаев, когда такие законы известны – единицы (например, закон Герца – типичная задача смешанного типа). Более того, если среда является многофазной, то совершенно неясно, как учитывать взаимодействие фаз (главный недостаток теории смесей), даже если закон взаимодействия зёрен на контактах известен. Таким образом, для нахождения эффективных упругих модулей необходимо решать упругую статическую задачу.

Вычисление упругих модулей гранулированной среды. Естественно, что при решении в качестве теста задачи о всестороннем сжатии шара с

использованием компонент тензоров (3.7) получается правильный ответ. Хотелось бы, однако, исследовать скорость сходимости при наличии не только нормальных, но и касательных нагрузок, а заодно и опробовать методику вычисления упругих модулей. Итак, зададим в среде с λ=μ=1 постоянное напряжение σ_{xx}=1, т.е. $p_x = sin\theta cos\varphi, p_y = p_z = 0$. Вырежем в среде сферу радиуса R=1. Зная напряжения в каждой точке границы, можно задать нагрузки. Задав нагрузки, найдём вектор потенциала, используя систему уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$p_i(x_0) = \mathrm{F}_i(x_0) - \frac{1}{2\pi}\int P_{ik}(x_0, x)\mathrm{F}_k(x)dS_x, \qquad (4.1)$$

где $p_i(x_0)$ – вектор нагрузок в точке поверхности ($p_i = \sigma_{ik}n_k$). Решать уравнение будем методом последовательных приближений. На рисунке 4.1 изображена x−компонента вектора нагрузки (нулевое приближение для той же компоненты вектора потенциала).

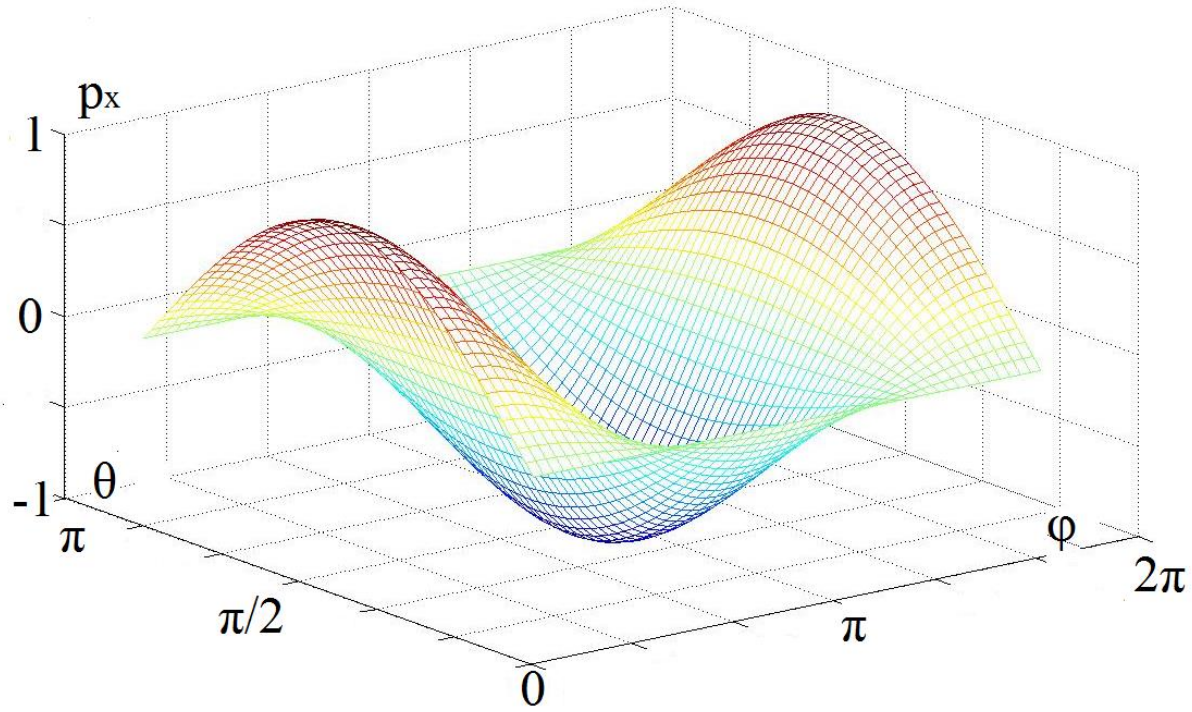

Рисунок 4.1 − x – компонента вектора нагрузки на сфере в зависимости от полярного и азимутального углов, задаваемая формулой $p_x = sin\theta cos\varphi, p_y = p_z = 0$

На рисунке 4.2 – та же компонента вектора потенциала после 15 приближений (пятнадцати итераций с использованием уравнений (4.1)).

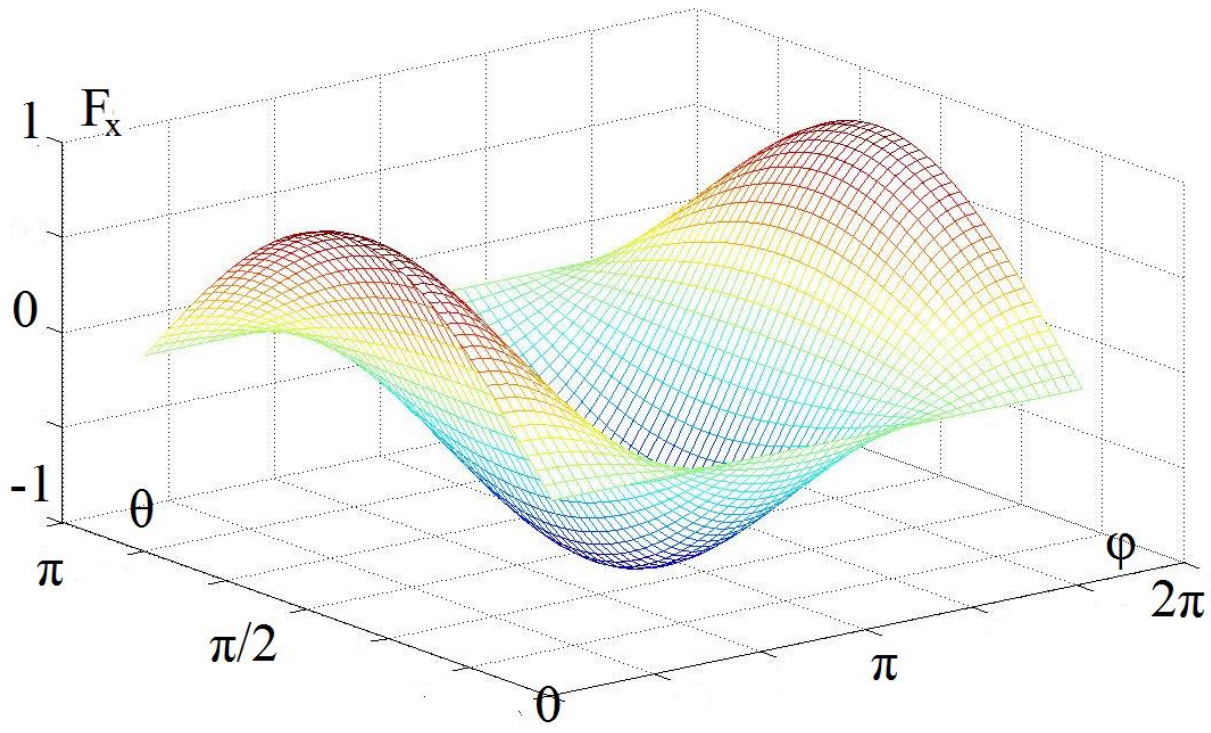

Рисунок 4.2 − x − компонента вектора потенциала после 15 приближений

На рисунке 4.3 – разность между ними.

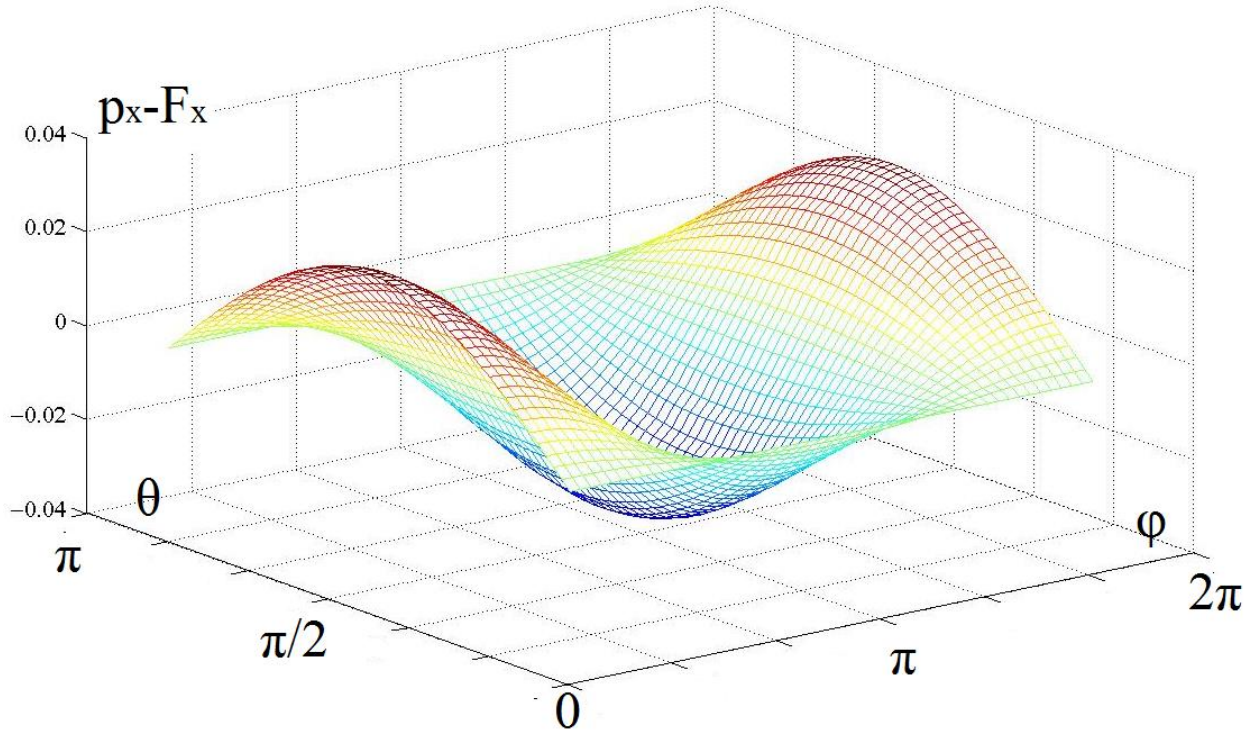

Рисунок 4.3 − Разность между нулевым и пятнадцатым приближением при вычислении x−компоненты вектора потенциала. Грубая визуальная оценка погрешности вычисления вектора потенциала при данном числе итераций – около 5%

Как видно, скорость сходимости достаточно хорошая. Далее, зная вектор потенциала, вычислим перемещения на границе по формулам:

$$u_i(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int M_{ik}(x_0, x)\mathrm{F}_k(x)dS_x, \tag{4.2}$$

где $M_{ik}(x_0, x)$ определяются с помощью формул (3.15) и геометрии поверхности. Подробно получение его компонент описано в главе 3.

На рисунке 4.4 изображена та же компонента вектора перемещений.

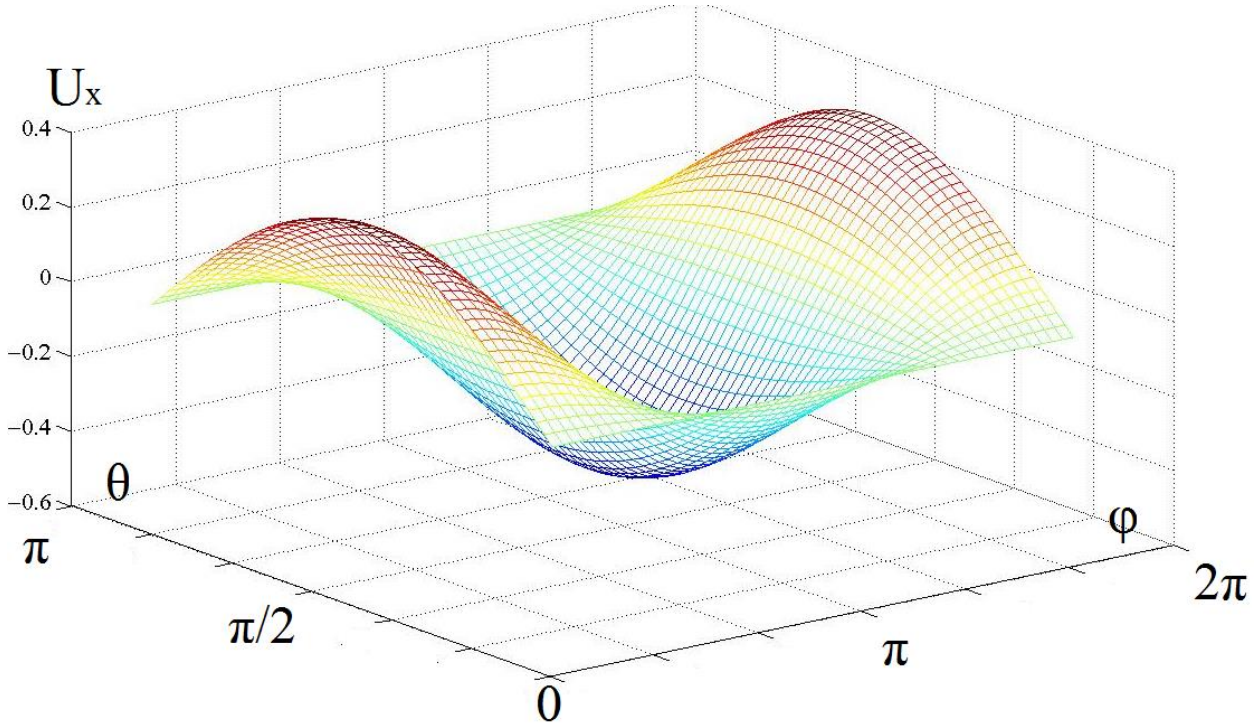

Рисунок 4.4 − x – компонента вектора перемещений на сфере единичного радиуса, порождённая вектором нагрузок, задаваемым формулой $p_x = sin\theta cos\varphi, p_y = p_z = 0$

Зная перемещения на поверхности, можно вычислить средние деформации в объёме с помощью теоремы о градиентах:

$$\int_V gradf dV = \int_S f\boldsymbol{n}\, dS \tag{4.3}$$

Соответственно, это даёт возможность вычислить средние значения производных в объёме, например:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_S f n_x dS \tag{4.4}$$

После этого, зная нагрузки на поверхности, можно вычислить средние значения напряжений в объёме:

$$\overline{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V}\int p_i x_k dS \tag{4.5}$$

Знание как средних по объёму напряжений, так и деформаций, даёт возможность вычислить средние упругие модули. Если замкнутое тело упругое и однородное, то это даёт возможность проверить независимым образом точность решения краевой задачи, ибо средние упругие модули должны совпадать с упругими модулями, использовавшимися в ядрах $M_{ik}(x_0, x)$ и $P_{ik}(x_0, x)$ ((4.1), (4.2)). Получится достаточно жёсткий интегральный критерий точности, суммирующий все систематические погрешности. С другой стороны, если внутри тела есть какое-либо поровое пространство, на границах которого ставятся определённые условия, то формулы ((4.4), (4.5)) можно использовать для вычисления средних эффективных упругих модулей, присущих среде в целом. В результате получилось, что при разбиении поверхности (единичной сферы) по углам θ и φ на 51×51 частей погрешность вычисления упругих модулей составляет менее 0.3%. Для сравнения можно сказать, что использование традиционных тензоров фундаментальных решений для пространства (3.3), (3.4) даёт примерно на порядок худшую интегральную точность. Отсюда можно сделать вывод, что с помощью тензоров (3.15) и (3.12), используемых в качестве ядер в уравнениях (3.6), можно успешно решать краевые задачи теории упругости.

Теперь попытаемся построить представительный объём среды, воспользовавшись тем, что она гранулированная. Главное отличие микронеоднородной среды от рассмотренного выше теста будет в том, что часть поверхности сферы будет контактировать с флюидом (т.е. нормальная компонента вектора нагрузок должна будет совпадать с давлением во флюиде), а оставшаяся часть будет находиться в контакте со скелетом. При этом следует принять во внимание, что в изолированных порах давление может быть каким угодно и совершенно не зависеть от напряжённого состояния скелета, но если поры сообщаются, то связь между давлением в скелете и флюиде становится хотя и

сложной, но вполне определённой. Эта связь определяется, прежде всего, удельной поверхностью, а также величиной и знаком кривизны поверхности раздела скелет−флюид. Трещиноватые и зернистые среды обладают разной структурой порового пространства. Если для зернистых сред характерны постоянный (отрицательный) знак кривизны порового пространства, а также близкие значения средней и Гауссовой кривизны, то для трещиноватых коллекторов характерно резкое изменение кривизны от нулевых значений до исключительно высоких (как положительных по знаку, так и отрицательных). Кроме того, средние и Гауссовы кривизны в трещиноватых телах могут существенно отличаться друг от друга. Даже при элементарно простом среднем напряжённом состоянии, которое определяется весом вышележащих горных пород и коэффициентом бокового распора (или отношением V_s/V_p), соотношение давлений в скелете и флюиде существенным образом зависит от удельной поверхности, а также от знака и величины средней и Гауссовой кривизны. Для начала ограничимся моделированием зернистых сред (для моделирования трещиноватых сред необходимо будет использовать многосвязную область). Будем считать, что элементарная представительная микроструктура подвержена действию таких нагрузок, которые вызывают одинаковые деформации твёрдой фазы и флюида на границах микроструктуры. При этом, естественно, соответствующие нагрузки оказываются различными, что соответствует простому напряжённому состоянию плоскопараллельной среды. Предпринятые ранее попытки оценки упругих модулей [1], основанные на методах механики композитов и теории осреднения дифференциальных операторов для контрастных микронеоднородных сред, не учитывают межфазового взаимодействия, которое заключается в том, что скелет и флюид не могут свободно проникать друг в друга. Объём, равный интегралу $\int U_n dS$ по поверхности раздела скелет−флюид, делённый на объём порового пространства, как раз и является мерой межфазового взаимодействия, количественно показывающей разность деформаций в скелете и флюиде при одинаковой деформации, приложенной к поверхности. С помощью подобного подхода можно решать две задачи. Во-первых, можно рассматривать зависимость

эффективных упругих модулей от структуры порового пространства, рассматривая поровое давление как независимый параметр. Во-вторых, рассматривая поровое давление как функцию от напряжённого состояния среды (т.е. при отсутствии внешней нагрузки поровое давление равно нулю), можно, определив деформацию в скелете и флюиде, определить зависимость порового давления от структуры порового пространства и упругих модулей среды.

Будем моделировать среду следующим образом. Центральный шар радиуса 1 окружён идентичными шарами таким образом, что центры масс соседних шаров совпадают с точками пересечения рёбер некоторого куба. Этот куб и возьмём в качестве представительного объёма, так как этот объём в среде будет повторяться. Несмотря на то, что моделируемая среда будет анизотропной, вычислить эффективные упругие модули изотропной среды можно с помощью осреднения по телесному углу поворота куба. Таким образом, в представительном объёме будет один целый шар и восемь октантов. Пористость и удельная поверхность в таком объёме будут связаны. Например, в случае точечных контактов объём твёрдой фазы будет равен 8π/3, а объём среды $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3$. Таким образом, пористость будет равна примерно 0.32. В случае если контакты не точечные, пористость будет существенно меньше. Например, если выбрать площадки контакта так, чтобы их суммарная площадь поверхности была равна половине площади поверхности сферы (расстояние между центрами масс соседних зёрен станет 2−0.25 = 1.75), объём среды будет равен $\left(\frac{4-0.5}{\sqrt{3}}\right)^3$, а объём твёрдой фазы $\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{24}\right)$. Пористость соответственно равна только 0.08. Если приложить к поверхности данной среды деформацию ε_{xx} = 1, то поровое пространство и скелет будут деформироваться по-разному за счёт того, что на площадках контакта скелет−флюид будут другие граничные условия. Если вычислить компоненты деформации скелета и флюида, а также средние значения напряжений в объёме, то можно будет вычислить и упругие модули среды. Средние напряжения в объёме вычисляются через нагрузки на поверхности представительного объёма. Средние

по объёму деформации вычисляются через деформации на поверхности, а также через средние деформации скелета и флюида. Средние параметры деформации зерна можно вычислить с помощью процедуры, изложенной выше, проводя вычисления по отдельному зерну. Если заменить плоские площадки контакта на выпуклые сегменты, то, по принципу Сен-Венана, нагрузки на сегментах будут такими же, что и на плоских площадках контакта. Таким образом, решение задачи о нахождении упругих модулей сводится к решению задачи теории упругости на отдельном зерне. На рисунке 4.5 изображена x − компонента вектора перемещений на единичной сфере с 8 площадками контакта скелет−скелет, площадь каждой из которых равна 1/16 части площади поверхности сферы, деформация на контакте скелет−скелет $\varepsilon_{xx} = 1$, поровое давление $p_0 = 0$.

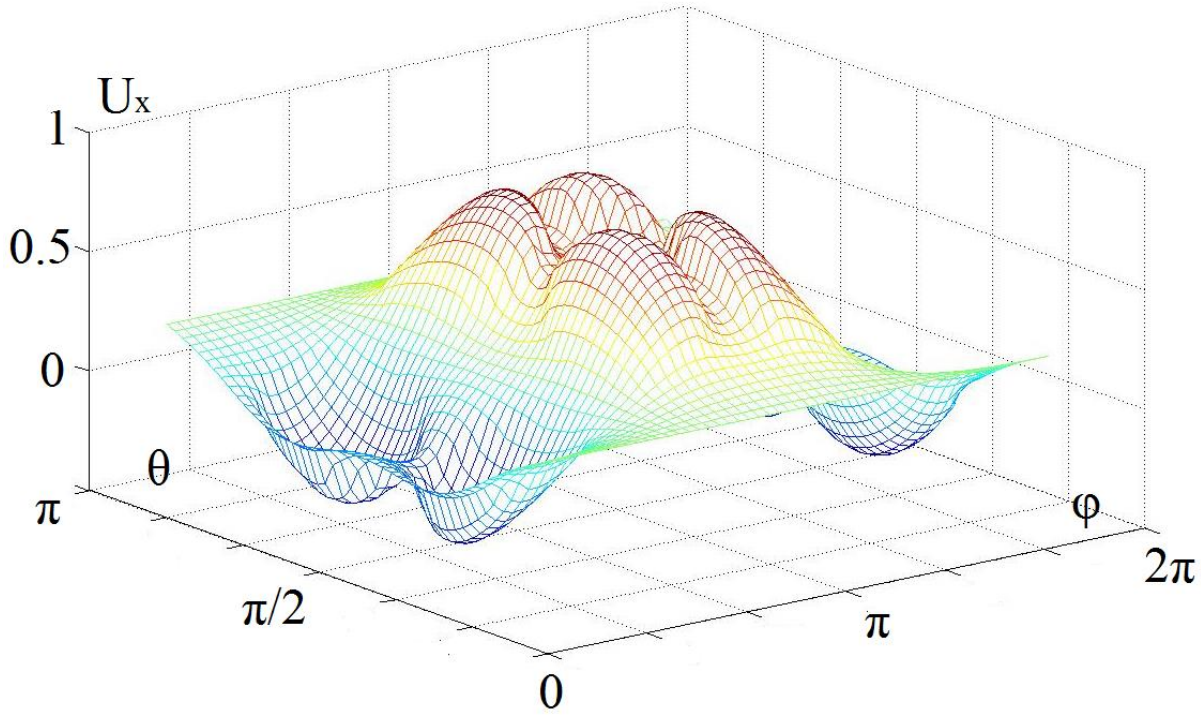

Рисунок 4.5 − x – компонента вектора перемещений на единичной сфере с 8 площадками контакта скелет−скелет, деформация на контакте скелет−скелет $\varepsilon_{xx} = 1$, поровое давление $p_0 = 0$

На рисунках 4.6 и 4.7 изображена зависимость эффективного μ и $\lambda+2\mu$ от порового давления при тех же условиях.

Отрицательное значение порового давления может иметь место при наличии капиллярных сил. Видно, что с ростом порового давления растёт как λ, так и μ.

Однако параметр γ падает с ростом порового давления. Следует отметить, что параметр γ зависит, вообще говоря, не от типа флюида, а от давления во флюиде. При наличии сильной внешней нагрузки, вызывающей разрушение, данный подход, естественно, не применим для точных расчётов разрушения, однако, результаты, полученные выше, позволяют сделать качественный вывод о характере процесса разрушения.

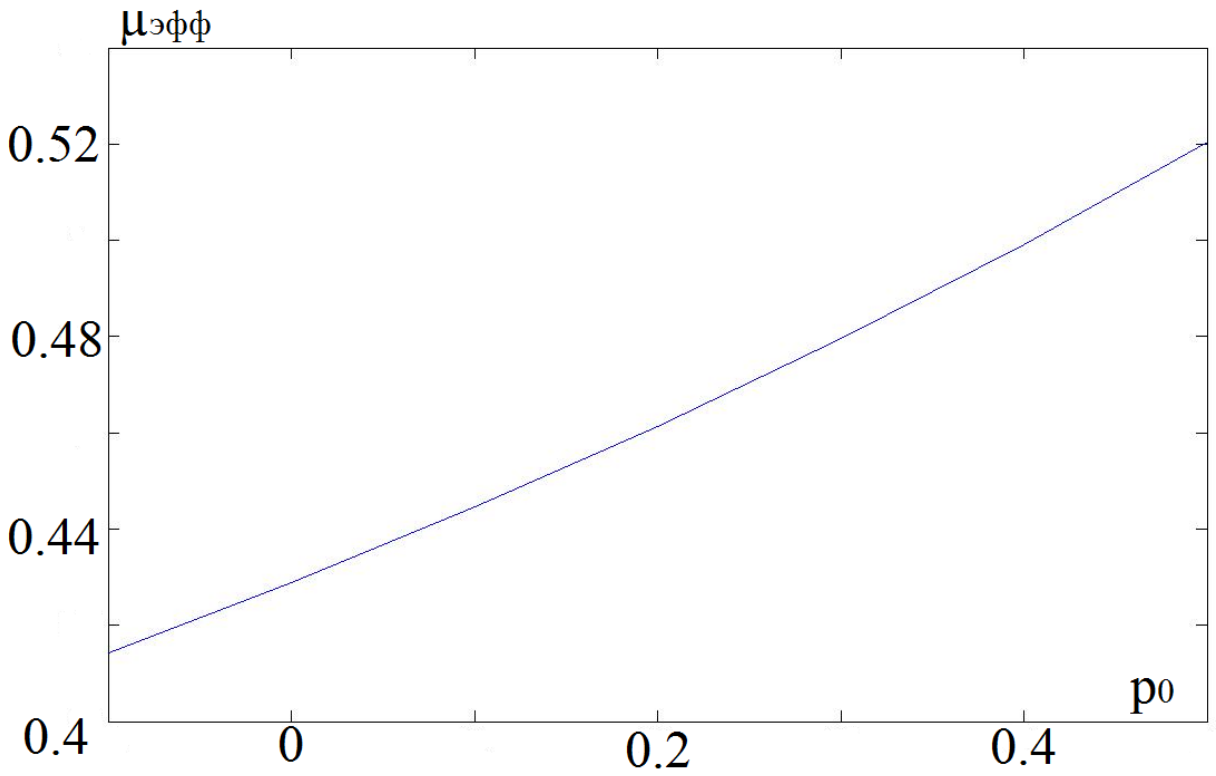

Рисунок 4.6 − Зависимость эффективного μ среды от порового давления

На рисунке 4.8 представлена зависимость отношения скоростей поперечных и продольных волн $\gamma=V_s/V_p$ от порового давления. Поскольку нагрузка нарастает за какой-то конечный промежуток времени, на начальном этапе разрушения уравнения упругости достаточно адекватно описывают процесс. Если параметр γ падает с ростом нагрузки, то будет происходить флюидизация и разжижение среды. Как правило, вода в порах находится под существенно большим давлением, чем воздух.

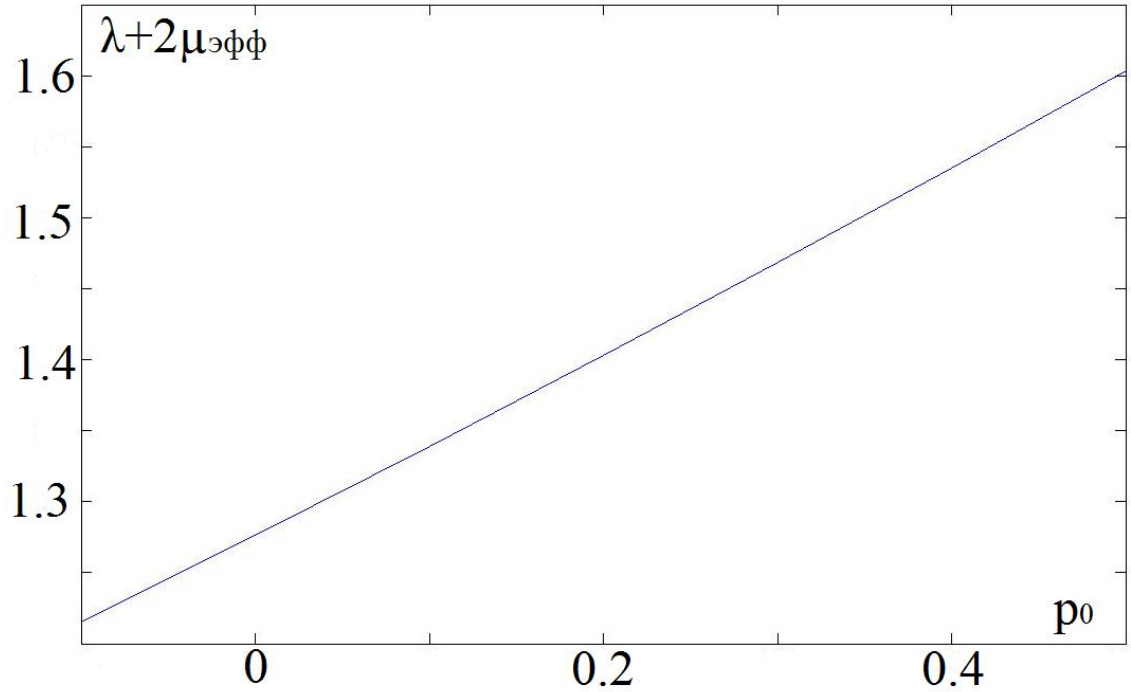

Рисунок 4.7 − Зависимость эффективного λ+2μ среды от порового давления

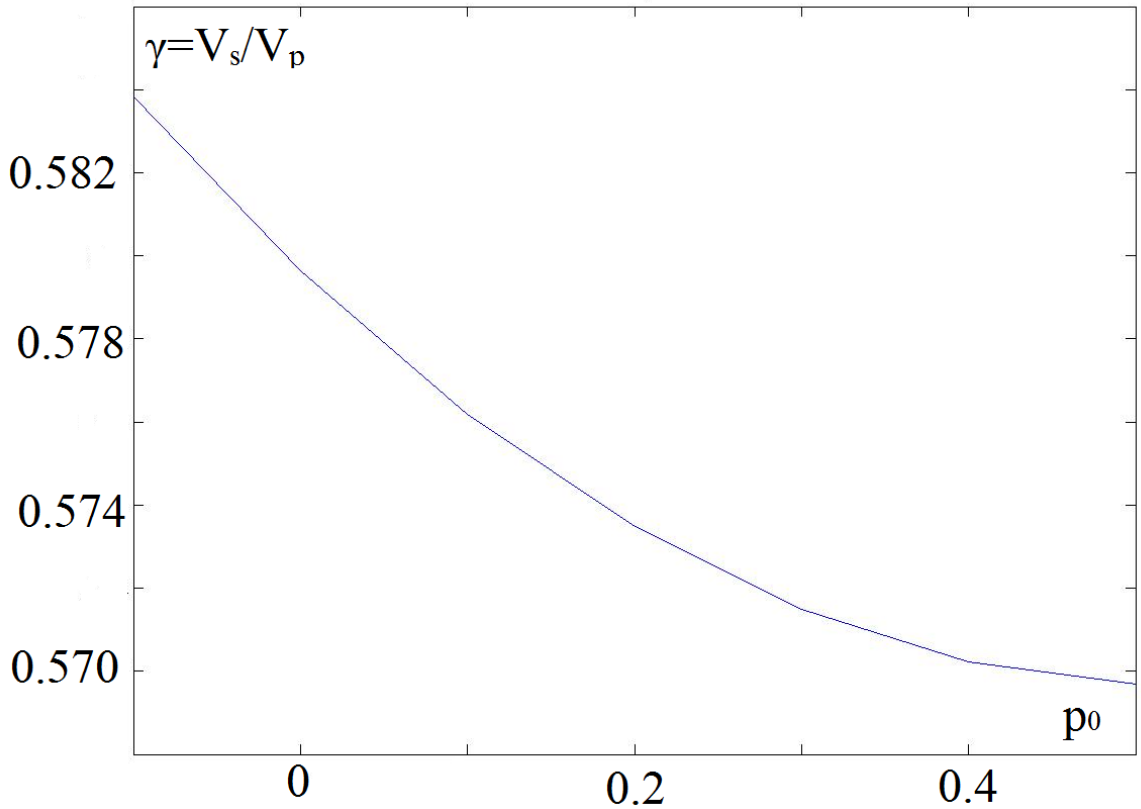

Рисунок 4.8 − Зависимость эффективного отношения γ=Vs/Vp среды от порового давления

Рост внешней нагрузки приводит к росту параметра $\int U_n dS$, что ещё более усиливает поровое давление. Если же поровое пространство заполнено воздухом, то поровое давление под влиянием этого фактора расти практически не будет (так как воздух значительно более сжимаем, чем вода). Соответственно, характер разрушения будет хрупким, с образованием системы трещин.

4.2. Эффективные упругие модули кавернозной среды

Попробуем разобраться, а возможно ли использовать метода граничных интегральных уравнений для вычисления эффективных упругих модулей кавернозных (т.е. с положительной кривизной порового пространства) микронеоднородных сред. Это означает, что для решения этой задачи с помощью упомянутого выше алгоритма, необходимо использовать метод потенциала для решения трёхмерных упругостатических задач в многосвязных областях. Попытаемся рассмотреть, как в кавернозных средах отношение V_s/V_p зависит от порового давления и от удельной поверхности порового пространства.

Главным геометрическим отличием кавернозных сред от зернистых является положительная кривизна порового пространства. То есть для вычисления упругих модулей аналогично способу, описанному в [76, 87−90], необходимо решать упругую задачу для многосвязной области, состоящей из шара с наполненными флюидом полостями внутри. При этом на внешней поверхности направление нормали определяется аналогично описанному выше, а на внутренних поверхностях (в которых заключён флюид), нормаль считается направленной от тела, имеющего упругие модули λ и μ (рисунок 4.9).

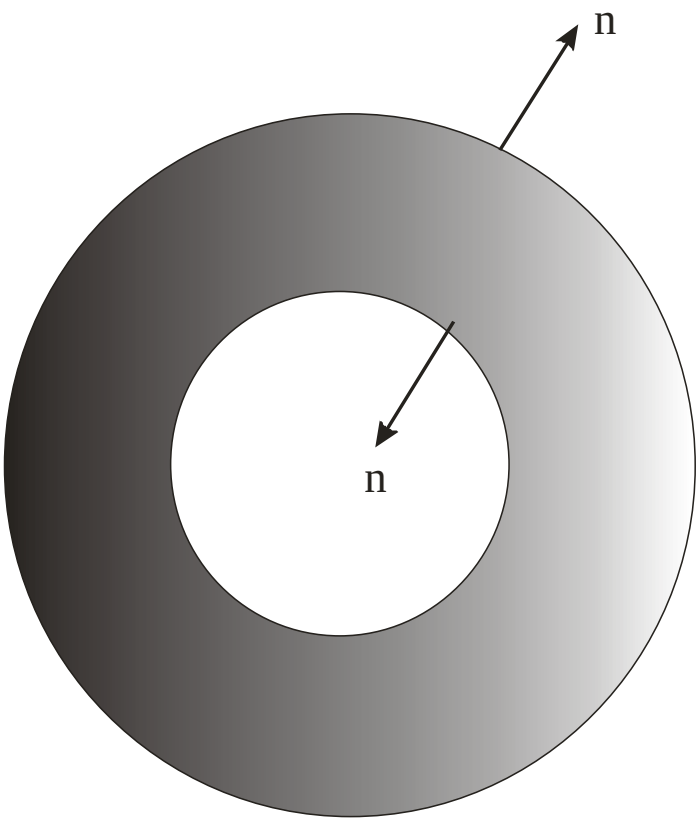

Рисунок 4.9 − Ориентация вектора нормали в многосвязной среде. Во внутренней полости заключён флюид

Во всех задачах об эффективных свойствах кавернозных сред, рассмотренных ниже, вектор потенциала вычислялся, в отличие от [76] не методом последовательных приближений, а путём сведения интегральных уравнений к линейной системе. Далее, упругие константы Ламе материала скелета $\lambda=\mu=1$, также, как и в задачах, рассмотренных в данной главе выше.

Представляется разумным вычислить упругие модули для сред, обладающих одинаковой пористостью, но с разной удельной поверхностью порового пространства. Для этого поровое пространство моделировалось одной, шестью, девятью сферическими полостями, а также эллипсоидом вращения. Радиус шара был равен 1. В первом, втором и третьем случаях пористость была одинаковой и равной 0.125, к поверхности шара прикладывался вектор нагрузок, равный $\delta_{i3}\cos\theta$. Удельная поверхность соответственно – 6, $6\sqrt[3]{6}$ и $6\sqrt[3]{12}$. В четвёртом случае полуоси эллипсоида вращения были равны 0.2 и 0.8, соответственно пористость – 0.032, удельная поверхность ≈ 12, а на внешней поверхности нагрузки были равны $\delta_{i1}\sin\theta\cos\varphi$. Поровое давление во всех случаях равно нулю.

Итак, первый случай. Внутри единичного шара одна сферическая полость, её объём 0.125. Вектор нагрузок на поверхности имеет вид: $p_x = p_y = 0, p_z = cos\theta$ (иными словами, вектор нагрузок на поверхности есть ни что иное, как $\delta_{i3}\cos\theta$). Удельная поверхность порового пространства – 6. Граница внутренней полости представляет собой свободную поверхность, давление на которой равно поровому. Нагрузка на внешней поверхности задана. Перемещения предстоит вычислить, решив интегральное уравнение, в котором интегрирование проводится по двум поверхностям. Зная и нагрузку, и перемещения на замкнутой поверхности, можно найти средние упругие модули в объёме.

Внешняя поверхность шара разбивалась по углам θ и φ на 41×41 площадок, а полость радиуса 0.5 на 21×21 соответственно.

На рисунке 4.10 представлена вертикальная компонента вектора перемещений на внешней поверхности сферы. В результате вычислений получаются следующие значения эффективных упругих модулей среды для первого случая: μ= 0.57, $\lambda+2\mu$= 1.39; V_s/V_p= 0.64.

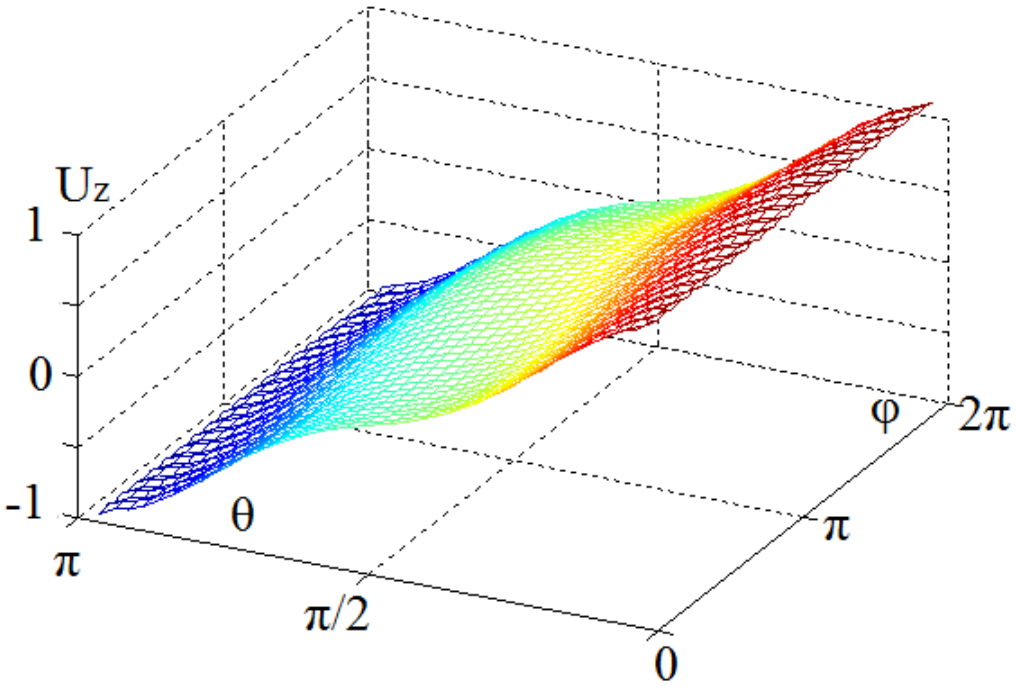

Рисунок 4.10 – z − компонента вектора перемещений на поверхности шара (первый случай)

Во втором случае (шесть сферических полостей радиуса 0.275, находящихся в центрах граней куба со стороной 1, расположенного в центре шара) внешняя

поверхность разбивалась по углам на 41×41 частей, а поверхность полостей – на 13×13 частей. На рисунке 4.11 представлена вертикальная компонента вектора перемещений на внешней поверхности среды. Значения эффективных упругих модулей получились равными μ= 0.65; $\lambda+2\mu$= 1.91; V_s/V_p= 0.58.

В третьем случае 8 сферических полостей радиуса 0.24 находились в вершинах куба со стороной 1, а девятая – в центре шара. Все сферы разбивались по углам на 17×17 частей.

На рисунке 4.12 представлена вертикальная компонента вектора перемещений на внешней поверхности.

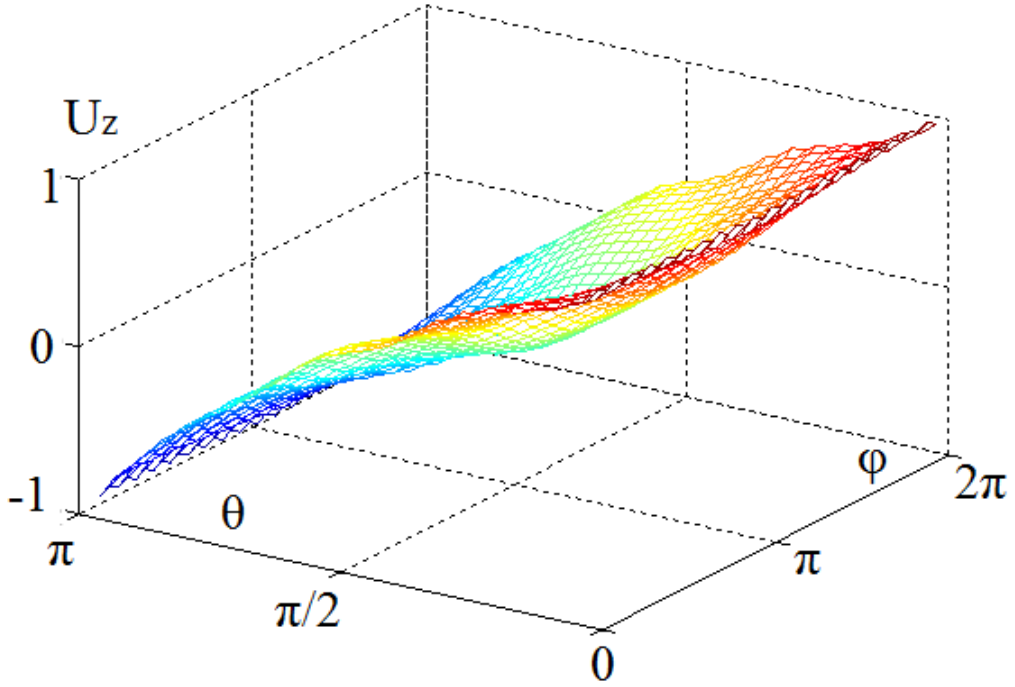

Рисунок 4.11 − Вертикальная компонента вектора перемещений на внешней поверхности среды (второй случай)

Значения эффективных упругих эффективных упругих параметров среды – μ= 0.5; $\lambda+2\mu$= 0.92; V_s/V_p=0.74 (что соответствует отрицательному коэффициенту Пуассона).

В четвёртом случае полость представляла собой эллипсоид вращения с полуосями 0.2 и 0.8, соответственно пористость – 0.032, удельная поверхность ≈ 12, а на внешней поверхности нагрузки были равны $\delta_{i1}\sin\theta\cos\varphi$, т.е. $p_y = p_z = 0$, $p_x = sin\theta cos\varphi$. Поровое давление во всех случаях равно нулю.

На рисунке 4.13 представлена x − компонента вектора перемещений на внешней поверхности среды. Эффективные упругие модули – μ= 0.85;λ+2μ= 2.09; V_s/V_p= 0.64 (то есть отношение V_s/V_p совпадает с первым случаем, когда пористость выше почти в 3 раза).

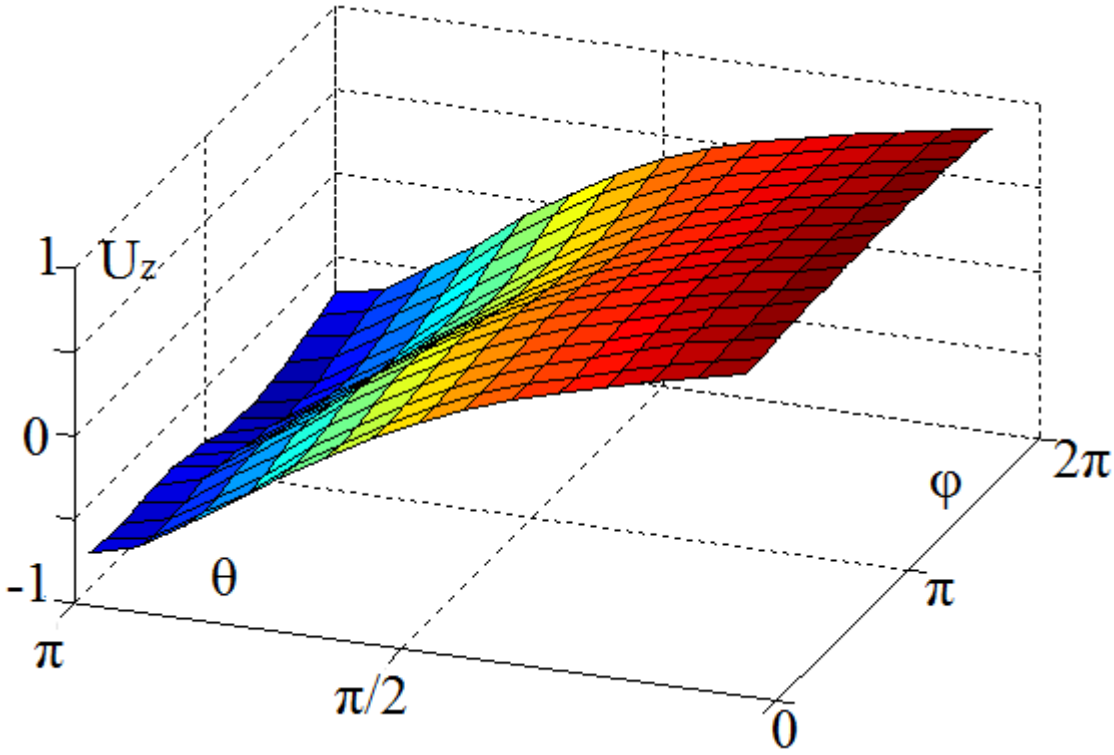

Рисунок 4.12 − Вертикальная компонента вектора перемещений на внешней поверхности среды (третий случай)

Упругие модули среды при ненулевом поровом давлении вычислялись только для случая одной полости с радиусом 0.5 в шаре, при условии, что на внешнюю поверхность среды приложена внешняя нагрузка, равная $0.01\times\delta_{i3}\cos\theta$, поровое давление p_0=0.1, т.е. λ, μ >> p_0 >> δp (δp – амплитуда нагрузки, приложенной к среде), что качественно соответствует реальным волновым процессам. Далее, в уравнения (4.1) с тензорами (ядрами), вычисляемыми по формулам (3.12), (3.13), (3.15) для нахождения потенциала на поверхности полости необходимо подставлять не p_0, а изменение порового давления под действием нагрузки, приложенной к внешней поверхности среды, равное $p_0\frac{\int U_n dS}{V_0}$, где $\int U_n dS$ − интеграл по поверхности раздела скелет−флюид от нормальной компоненты

вектора перемещений (изменение объёма под действием внешней нагрузки), V_0 – начальный объём полости.

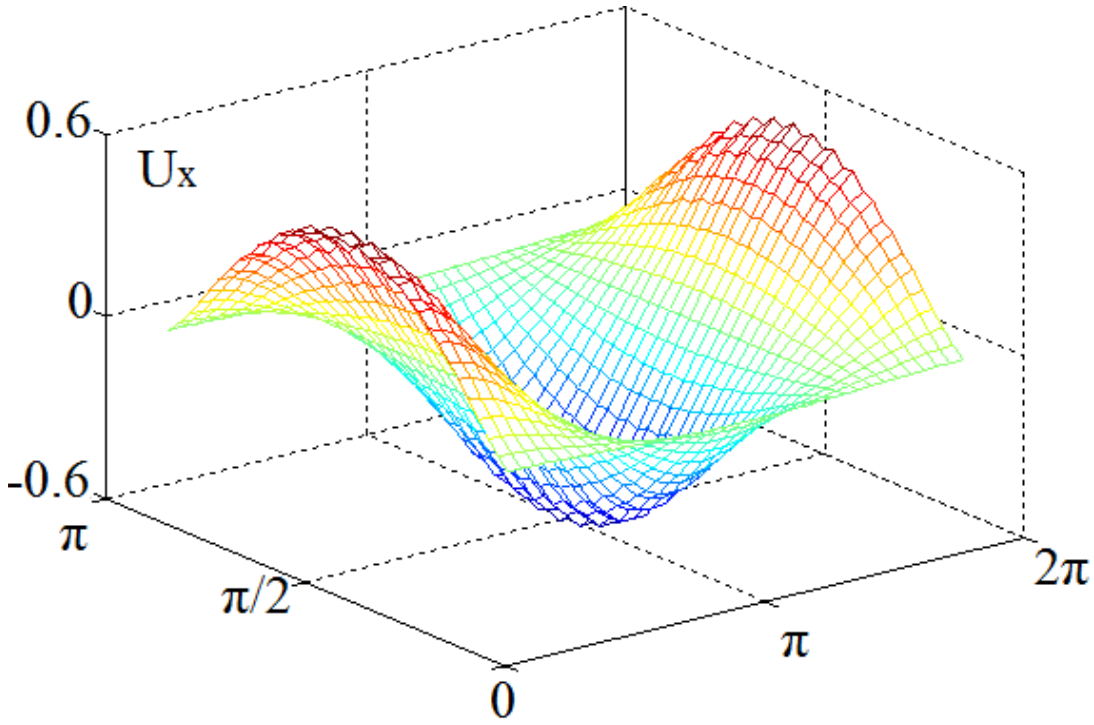

Рисунок 4.13 − x − компонента вектора перемещений на внешней поверхности среды для четвёртого случая

Т.е. вектор нагрузок на поверхности раздела скелет−флюид определяется путём подбора, так, чтобы $p_0 \frac{\int U_n dS}{V_0}$ совпало с требуемой точностью с полученным в ходе решения задачи $\int U_n dS$. В этом случае внешняя поверхность среды разбивалась по углам на 41×41 площадок, а поверхность полости – на 31×31. В результате упругие модули среды получились равными: μ= 0.57; $\lambda+2\mu$= 1.66; V_s/V_p= 0.59.

Можно сделать вывод, что в кавернозных, и, по-видимому, в трещиноватых средах, отношение $\gamma = V_s/V_p$ с ростом порового давления падает. В тоже время можно утверждать, что упомянутое выше отношение существенно зависит от удельной поверхности порового пространства, а не только от пористости, т.к. при равной пористости получились различные значения упругих модулей.

4.3. Расклинивающее давление в зернистых коллекторах и проблема аномально высоких пластовых давлений

Эта часть работы посвящена изучению природы появления расклинивающего давления в зернистой среде в зависимости от площади контакта. Под расклинивающим давлением понимается противоположные по знаку нормальные нагрузки на разных частях замкнутой элементарной микроструктуры. Обычно это обстоятельство не принимается во внимание, так как предполагается, что в среде действуют в каждой точке некоторые «средние» нагрузки. Тем самым исследуемый эффект есть важнейшее следствие реальной несплошности среды.

Будет показано, что снижение скоростей поперечных и продольных волн под действием порового давления существенно зависит от геометрии контакта. В частности, в случае малых площадок контакта расклинивающее давление может существенно превосходить давление жидкости в порах. Если же площадь контакта достаточно велика, то имеет место обратный эффект – возникновение сжимающих напряжений на площадке контакта, что можно считать упрочнением.

В настоящее время известно, что изменение скоростей поперечных и продольных волн в микронеоднородной среде, содержащей флюиды, зависит от разности внешнего давления и давления во флюиде, эффективного давления $P_э=P_{вн} - P_{пор}$ [77]. Общепринятое истолкование этой зависимости сводится к тому, что поровое давление «препятствует» внешнему давлению закрыть поры и трещины. Его нельзя считать удовлетворительным, так как оба давления – скаляры (не могут быть никуда направлены) и оба осуществляют сжатие среды. Косвенным признанием этого обстоятельства является то, что для удовлетворительного объяснения экспериментальных данных иногда приходится вводить безразмерный множитель неясной физической природы, так, что $P_э=P_{вн} - nP_{пор}$, $n\leq1$ [78].

В действительности, возникает достаточно сложное напряжённое состояние на зерне, при котором контакты зёрен и боковая поверхность последних испытывают разные нагрузки, которые могу различаться не только величиной, но и знаком. Тем самым, рассматривать зернистую среду как сплошное тело никак

нельзя, усреднение поля напряжений по объёму среды просто исключает возможность конструктивного изучения отмеченного явления.

Для выяснения природы расклинивающих, а возможно и противоположных эффектов, следует проинтегрировать уравнение равновесия выделенного элементарного объёма, подвергнутого действию как внешнего давления на площадках контактов, так и давлению флюида. Напряжённое состояние и нагрузки на контактах должны быть определены в ходе решения задачи, аналогично изложенному в [89].

Среда предполагается заключённой в жёсткий цилиндр, на вертикальных стенках которого приложено внешнее давление, а давление в жидкости в порах осуществляется независимым образом при неизменном положении пресса.

Постановка и решение задачи. Поверхность представляет собой часть сферы единичного радиуса (полярный угол изменяется от θ_0 до $\pi - \theta_0$) и две симметричные круговые площадки контакта радиуса $\sin\theta_0$ (рисунки 4.14, 4.15).

Видно, что действуют два различных процесса (рисунок 4.14). Справа показано, что сжатие сферы приводит к дополнительному сжатию на площадке контакта. Слева – иллюстрация того, что сжатие вдоль кромки контакта приводит к возникновению дополнительных растягивающих напряжений. Что же возобладает?

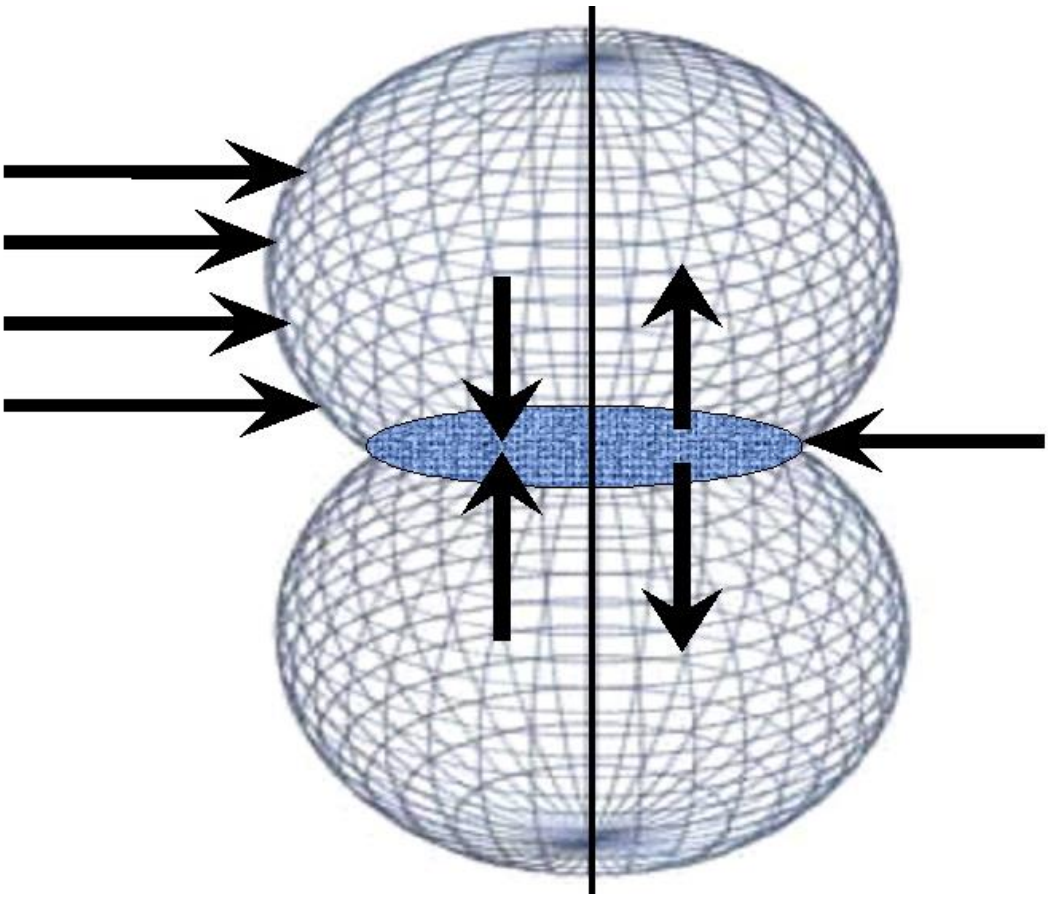

Рисунок 4.14 − Постановка задачи. Иллюстрация двух различных процессов.

На сфере заданы все компоненты вектора нагрузки $p_n = -1$, $p_\theta = p_\varphi = 0$. Упругие модули зерна $\lambda = \mu = 1$. На площадках контакта равны нулю все компоненты вектора перемещения (условия жёсткого контакта). На части поверхности, свободной от контактов, задано давление p_0 (равное p_n). Требуется найти нормальную компоненту вектора нагрузок на площадках контакта. Такая постановка соответствует экспериментальной ситуации, когда положение пресса фиксировано, а напряжённое состояние в зерне изменяется в соответствии с инжекцией дополнительного малого объёма жидкости в поровое пространство.

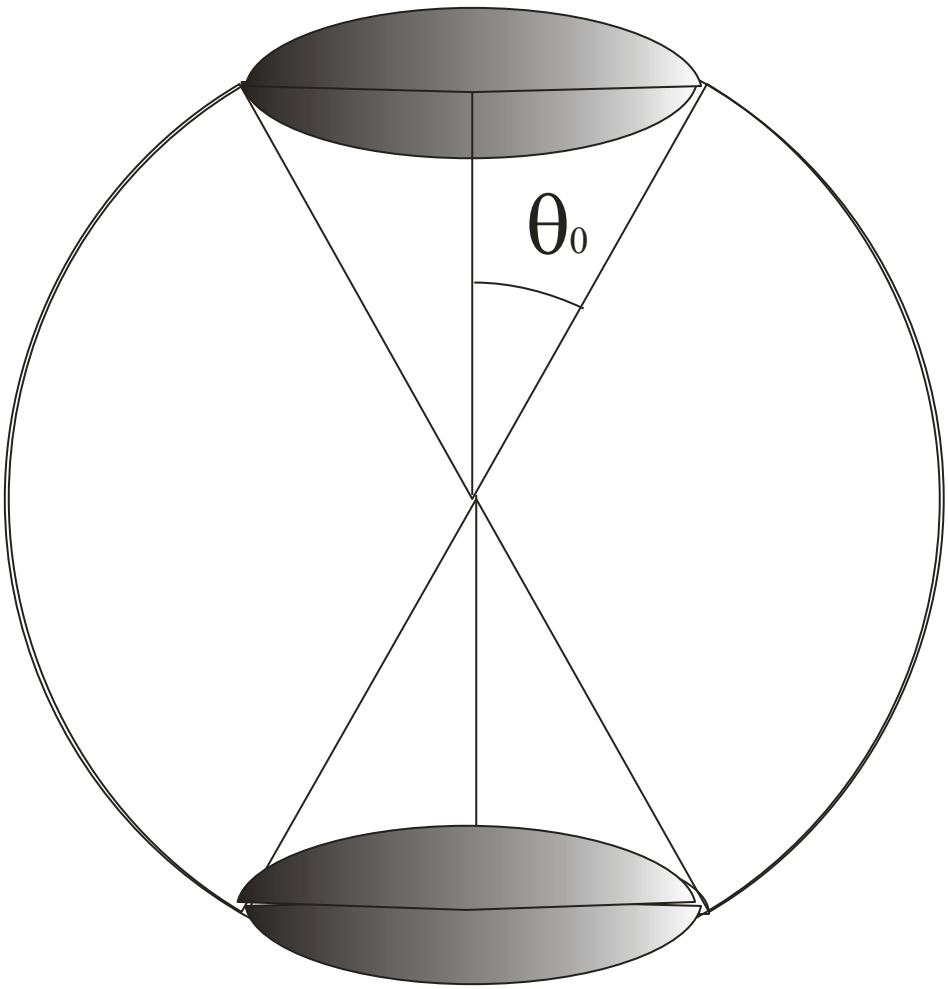

Рисунок 4.15 − Постановка задачи. Сфера и две площадки контакта. θ_0 – полярный угол

Задача решалась методом граничных интегральных уравнений с использованием ядер, вычисляемых точно также, как и в предыдущем параграфе (3.7). Таким образом, для нахождения вектора потенциала получается система, в которой часть уравнений являются интегральными уравнениями типа Фредгольма второго рода, а часть – первого. Система уравнений может быть решена путём преобразования в соответствующую систему линейных уравнений. Однако в данной группе задач был использован иной метод решения, схожий с изложенным в [79]. Он заключается в том, что вектор потенциала **F** ищется в виде разложения в двойной ряд Фурье. В результате для нахождения искомых коэффициентов разложения необходимо решить систему линейных уравнений, в которой число фиксированных точек x в точности совпадало бы с количеством коэффициентов разложения вектора потенциала. При этом для вычисления интегралов, входящих

в систему можно взять значительно более плотную сетку по бегущей точке *y*, тем самым, повысить точность.

Результаты вычислений показали, что:

1. компонента потенциала F_φ (φ – азимутальный угол) равна нулю на всех поверхностях;
2. нормальные и радиальные компоненты вектора потенциала на верхней и нижней площадках контакта совпадают;
3. все компоненты потенциала не зависят от азимутального угла φ.

Данные результаты показывают состоятельность указанного приёма решения задачи, так как все перечисленные обстоятельства с одной стороны, очевидны из соображений осевой симметрии граничных условий, с другой стороны, могут нарушаться при недостаточно корректном выполнении вычислений (либо плохой обусловленности системы).

Кроме того, найденные коэффициенты разложения достаточно быстро убывают с ростом номера гармоники, а увеличение количества членов разложения существенно не меняет решения. Следовательно, полученное решение системы уравнений является устойчивым, использования стандартных регуляризационных процедур не потребовалось. После нахождения потенциала вычислялась нормальная компонента вектора нагрузки на площадке контакта в точках, находящихся внутри площадки. На границе площадки контакта и сферы вектор нагрузки находился путём интерполяции.

Результаты расчётов представлены на рисунках 4.16−4.20. Видно, что с ростом отношения радиуса площадки контакта к радиусу зерна средняя нормальная нагрузка на контакте растёт. Также можно отметить, что при достаточно больших площадках контакта (рисунок 4.16) имеют место не только расклинивающие, но и обратные эффекты (p_z<0), что можно интерпретировать как упрочнение среды. Средняя нагрузка в этом случае увеличивается при действии порового флюида. Среда в целом упрочняется.

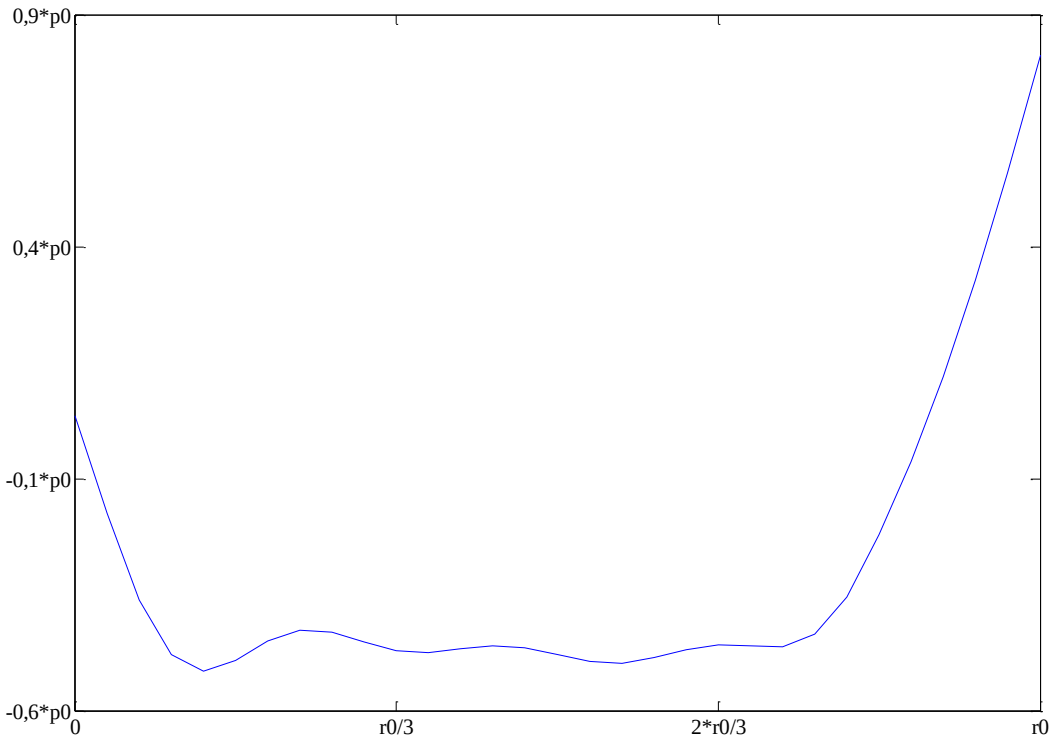

Рисунок 4.16 − Зависимость нормальной компоненты вектора нагрузок от расстояния до центра площадки контакта при $\theta_0 = \pi/3$. Среднее значение нормальной нагрузки $p_{zсреднее} = -0.231p_0$. p_0 – поровое давление. Преобладает сжатие

На рисунках 4.17−4.20 поровое давление приводит к растягивающим нагрузкам на контактах, что вызывает расклинивающий эффект. Следовательно, расклинивающее давление зависит не от пористости, а, скорее, от удельной поверхности порового пространства.

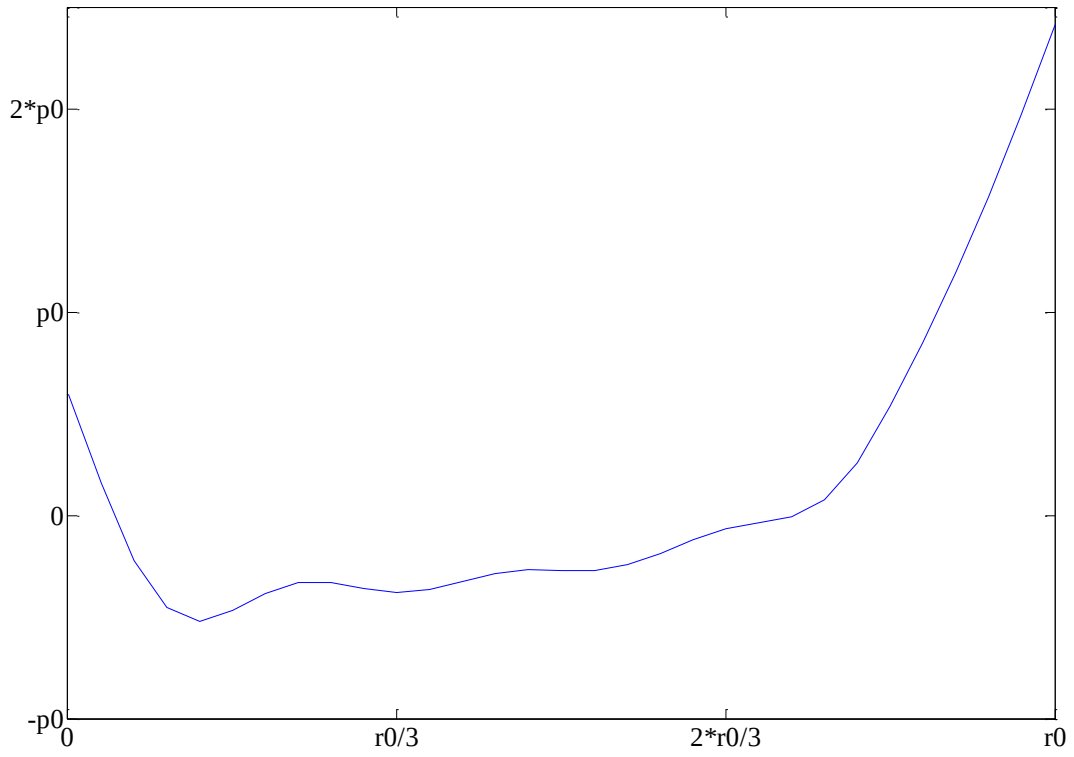

Рисунок 4.17 − Зависимость нормальной компоненты вектора нагрузок от расстояния до центра площадки контакта при $\theta_0 = \pi/6$. Среднее значение нормальной нагрузки $p_{zсреднее} = 0.346p_0$. Преобладает растяжение

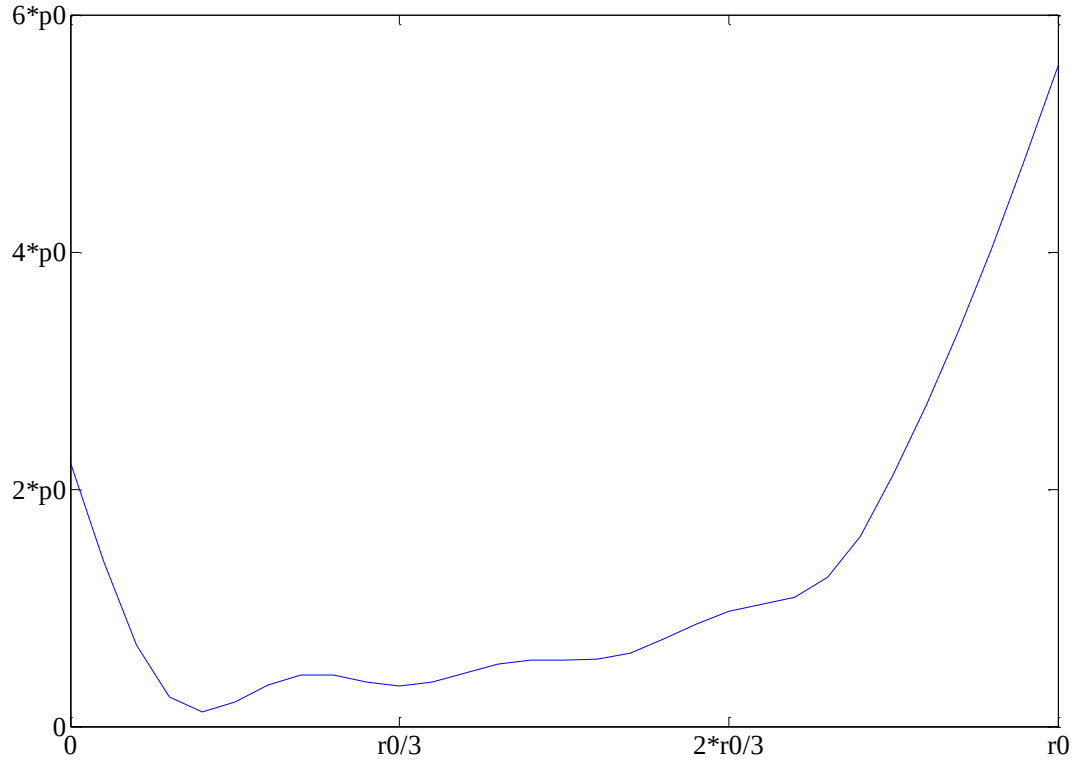

Рисунок 4.18 − Зависимость нормальной компоненты вектора нагрузок от расстояния до центра площадки контакта при $\theta_0 = \pi/12$. Среднее значение нормальной нагрузки $p_{zсреднее} = 1.735p_0$. Преобладает растяжение

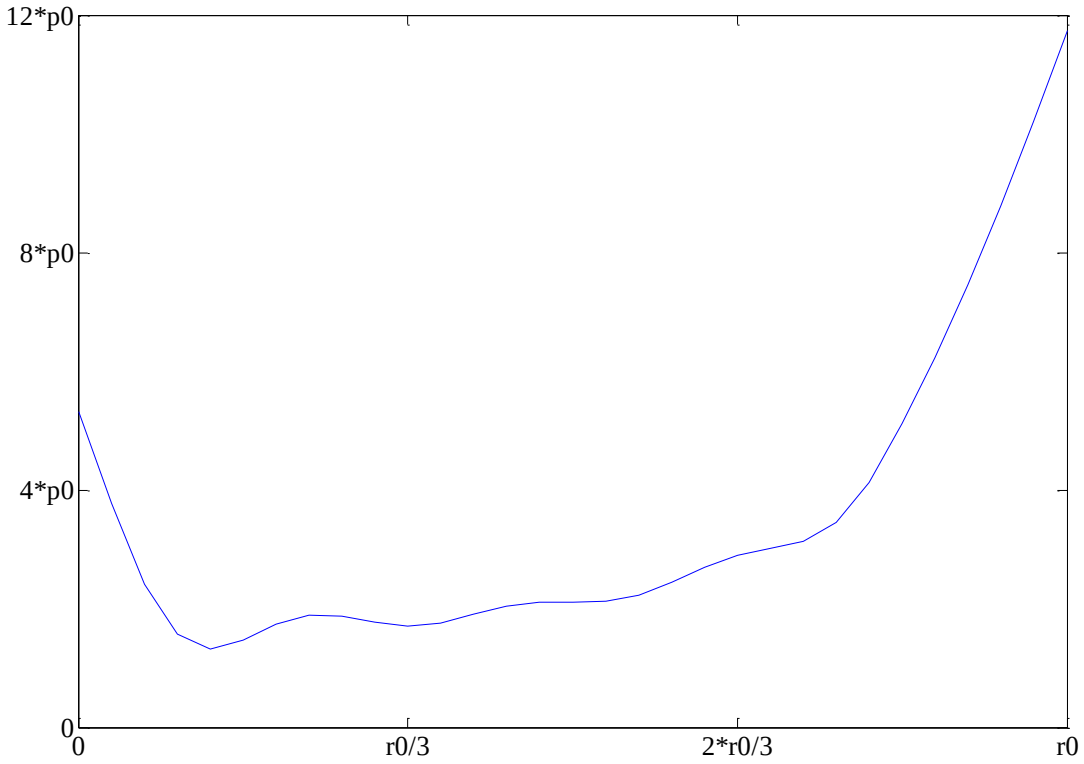

Рисунок 4.19 − Зависимость нормальной компоненты вектора нагрузок от расстояния до центра площадки контакта при $\theta_0 = \pi/24$. Среднее значение нормальной нагрузки $p_{zсреднее} = 4.374p_0$. Преобладает растяжение

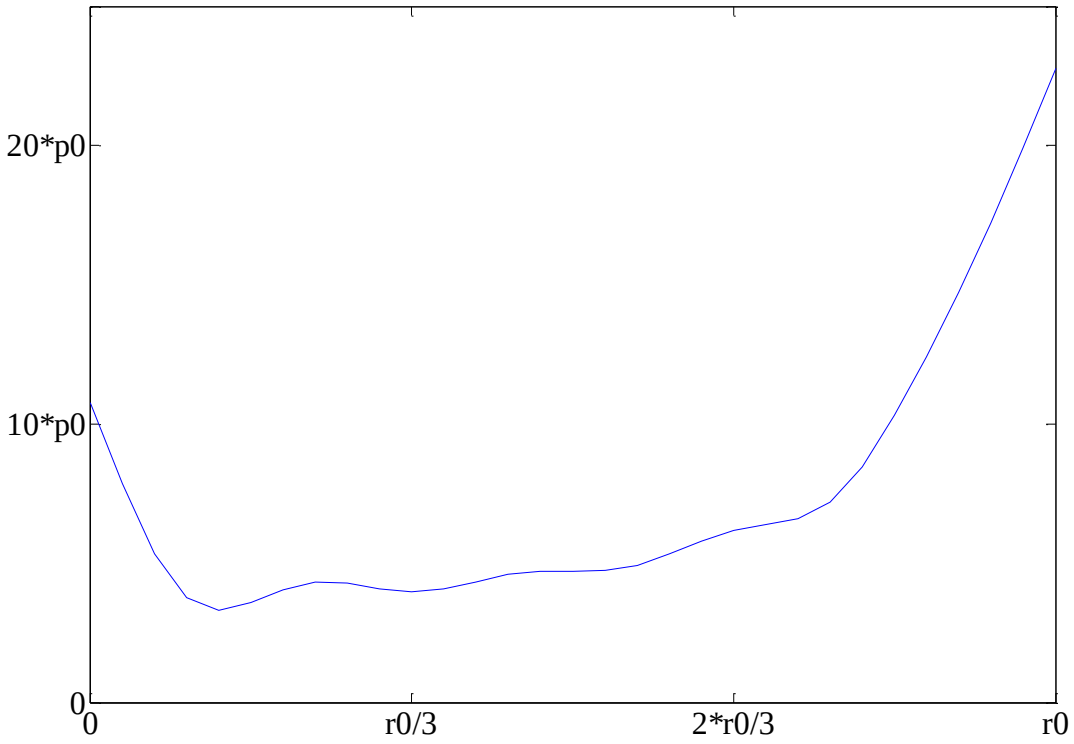

Рисунок 4.20 − Зависимость нормальной компоненты вектора нагрузок от расстояния до центра площадки контакта при $\theta_0 = \pi/48$. Среднее значение нормальной нагрузки $p_{zсреднее} = 8.949p_0$. Преобладает растяжение

Напряжённое состояние на отдельном зерне и средние значения отношения скоростей поперечных и продольных волн. Упругое тело, ограниченное жёсткими стенками, обладает весьма простым напряжённым состоянием, при котором вектор перемещений содержит лишь одну вертикальную компоненту U_z, горизонтальные компоненты равны нулю. Соответственно, тензор деформаций представлен только одной компонентой ε_{zz} . Уравнение равновесия имеет предельно простой вид, именно:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \tag{4.6}$$

его решение есть не что иное, как

$$\sigma_{zz} = P = const, \tag{4.7}$$

где P – внешнее давление пресса. Используя закон Гука в форме:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} = P, \\ &\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} = \lambda\varepsilon_{zz} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}P, \end{aligned} \tag{4.8}$$

получаем, что отношение боковых и вертикальных напряжений связано с коэффициентом Пуассона или отношением скоростей продольных и поперечных волн, т.е.:

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma^2 = 1 - 2\left(\frac{V_s}{V_p}\right)^2 \tag{4.9}$$

Если площадки контакта симметричны, то изменение параметра γ зависит от среднего расклинивающего давления на площадке контакта $P_{disjoining}$:

$$1 - 2\gamma^2 = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{P(1 - 2\gamma_0^2) + P_{disjoining}}{P + P_{disjoining}} \tag{4.10}$$

Таким образом, изменение параметра γ есть:

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 \frac{P}{P + P_{disjoining}} \tag{4.11}$$

В последней формуле γ_0 есть отношение скоростей поперечных и продольных волн для сухой среды, лишённой флюида.

Отсюда следует, что отношение скоростей падает при насыщении пор жидкостью с ростом порового давления, если площадки контакта достаточно малы.

В настоящее время зоны аномально высоких пластовых давлений определяют по падению скоростей продольных волн. Представляется разумным принимать во внимание также падение отношения скоростей поперечных и продольных волн.

Результаты расчётов показали, что имеют место как расклинивающие эффекты, на площадках достаточно малой площади в сравнении с поверхностью зерна, так и упрочняющие явления на площадках сравнительно больших. Таким образом, снижение упругих модулей, которое в некотором смысле эквивалентно растяжению структуры, происходит не всегда, а зависит от структуры порового пространства. Эти же выводы справедливы и для более сложной геометрии контакта, а также для квазистатического режима нагружения.

Численные эксперименты, аналогичные проведённым выше, проводились и для более сложной геометрии контактов (без осевой симметрии) с поиском решений в виде конечных сумм (3.82), (3.83) и ядер в виде (3.77)−(3.81), а также виде (3.84)−(3.88) в случае ненулевых частот, с граничными условиями жёсткого контакта на площадках, и гидростатического давления, равному поровому, на оставшейся части поверхности зерна [96, 97]. Число площадок контакта было всегда равно восьми. Зависимость этого процесса от частоты стационарных колебаний порового давления проводилась для моделирования гидроразрыва или иных динамических нагрузок на частотах, соответствующих длинам поперечных волн, заведомо превышающих характерный размер зерна.

Представительным объёмом зернистой среды вполне может быть один шар с восемью плоскими площадками контактов, если прочая среда заменена адекватной системой сил, согласно принципу Сен-Венана. Также разумно решать задачу в рамках линейной упругости, т.е. в предположении, что потери энергии, обусловленные наличием концентраторов на кромке контактов, достаточно малы. Поверхность, представленная на рисунке 4.21, задавалась параметрически, т.е. каждая из двух с половиной тысяч точек находилась либо на сфере, либо на одной из площадок контактов. Фактически это означало, что кромка контакта скруглялась таким образом, что нормаль изменялась быстро, но непрерывно.

Распределение нагрузок в дальнейшем для удобства восприятия даётся на индикаторной поверхности. Для сопоставления результатов вычислений с геометрией зерна эта же поверхность представлена на рисунке 4.22 в параметрических координатах с помощью индикаторной функции (I). Эта функция равна единице, если точка находится на площадке контакта, и нулю, если на оставшейся части сферы, на которой зерно граничит с флюидом.

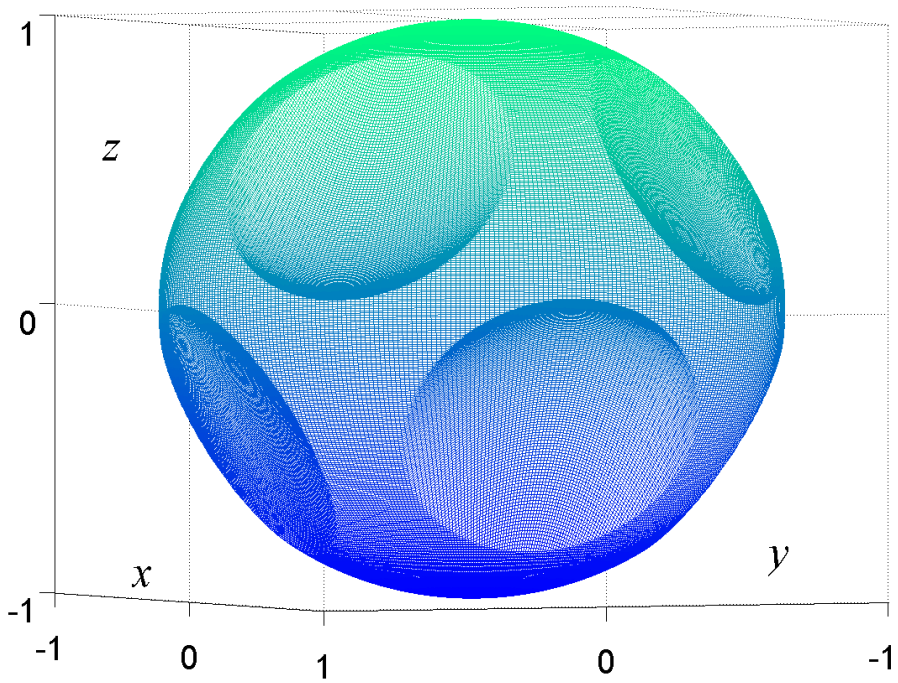

Рисунок 4.21 − Единичный шар с восемью удалёнными сегментами, которые определяют площадки контактов. Эти контакты не меняют своих координат и образуют жёсткий каркас. Остальная часть поверхности есть граница раздела скелет−флюид

На рисунке 4.23 представлен единичный шар с шестью удалёнными плоскими сегментами, являющимися площадками контакта, а на рисунке 4.24 аналогичным образом определённая индикаторная функция (I).

С точки зрения механики нужно решать упругую краевую задачу смешанного типа. На контакте задаётся ноль перемещений, на оставшейся части сферы – гидростатическая нагрузка с единичным поровым давлением.

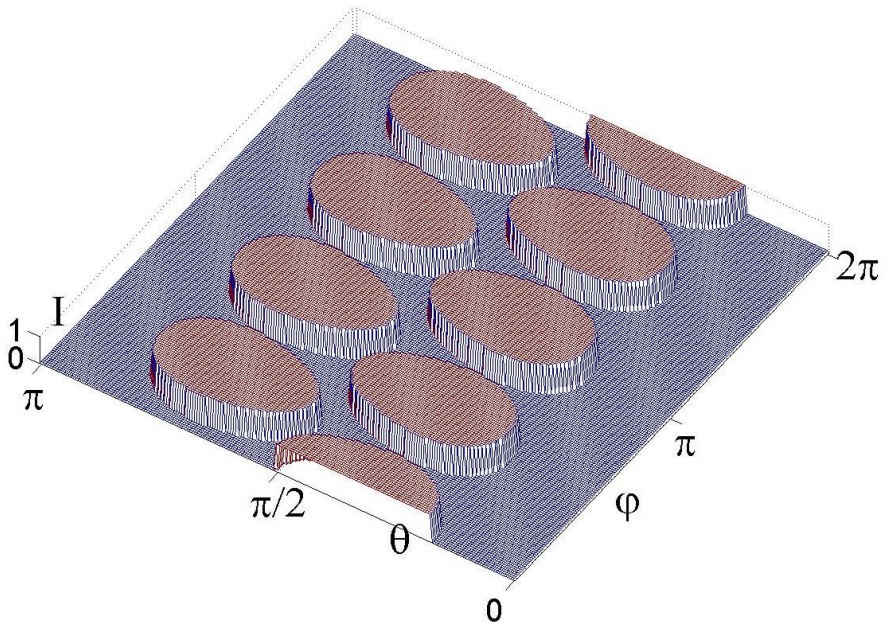

Рисунок 4.22 − Вспомогательная (индикаторная) поверхность в координатах θ, φ (углы сферической системы координат), восемь площадок контакта. I = 0, если точка находится на сфере, I = 1, если на плоской площадке контакта

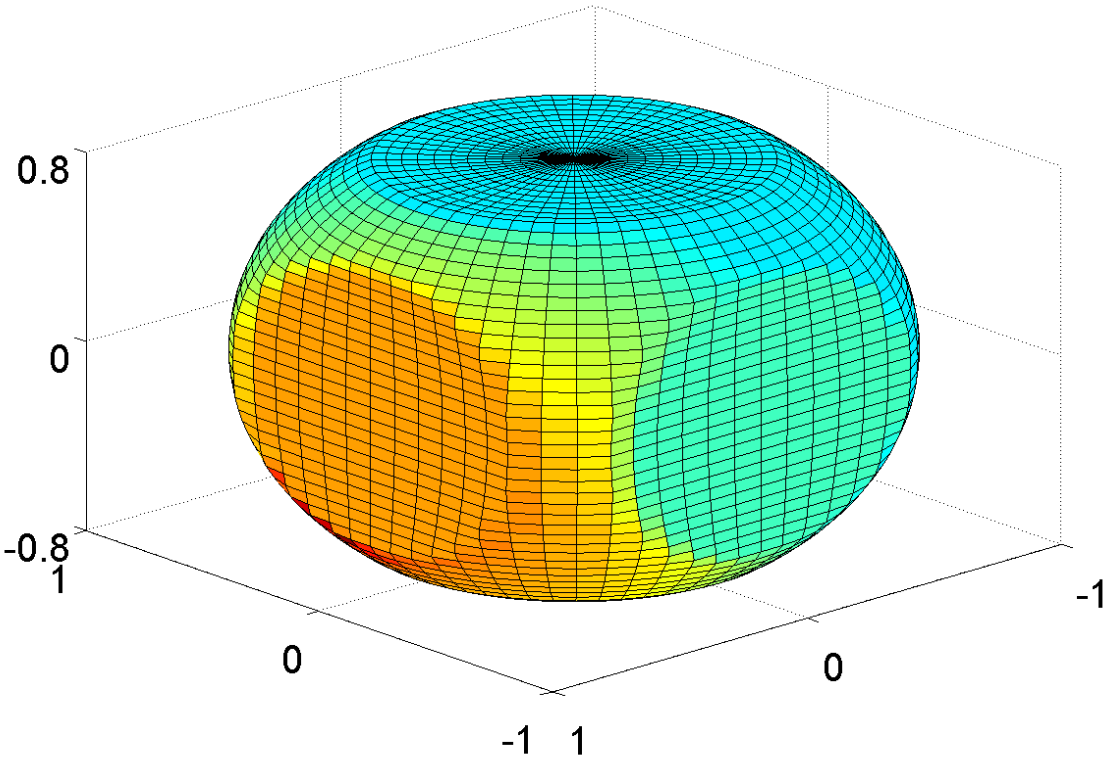

Рисунок 4.23 − Единичный шар с шестью симметричными плоскими площадками контакта

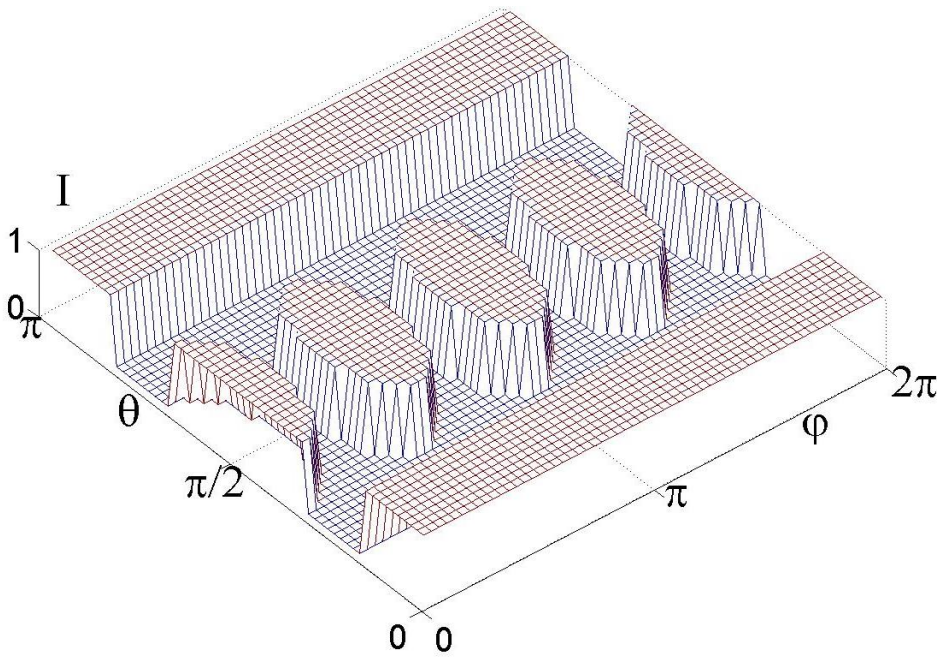

Рисунок 4.24 − Вспомогательная (индикаторная) поверхность в координатах θ, φ (углы сферической системы координат), шесть площадок контакта. I = 0, если точка находится на сфере, I = 1, если на плоской площадке контакта

Как отмечено выше, МГЭ имеет преимущества не только в случае бесконечной протяжённости одной из границ, но и для решения краевых задач на поверхностях с быстро изменяющимся вектором нормали.

В условиях совсем не гладких поверхностей, на которых задаются граничные условия, интегральный метод будет иметь преимущество в части достоверности получаемых результатов, в том числе будет обеспечивать лучшую обусловленность системы уравнений (её размерность 7500×7500).

Типичные примеры вычислений представлены на рисунках 4.25−4.27. На рисунке 4.25 представлено распределение нормальных нагрузок на поверхности зерна при единичном давлении флюида в случае восьми площадок контакта, а на рисунке 4.26 − та же компонента вектора нагрузок в случае шести площадок контакта.

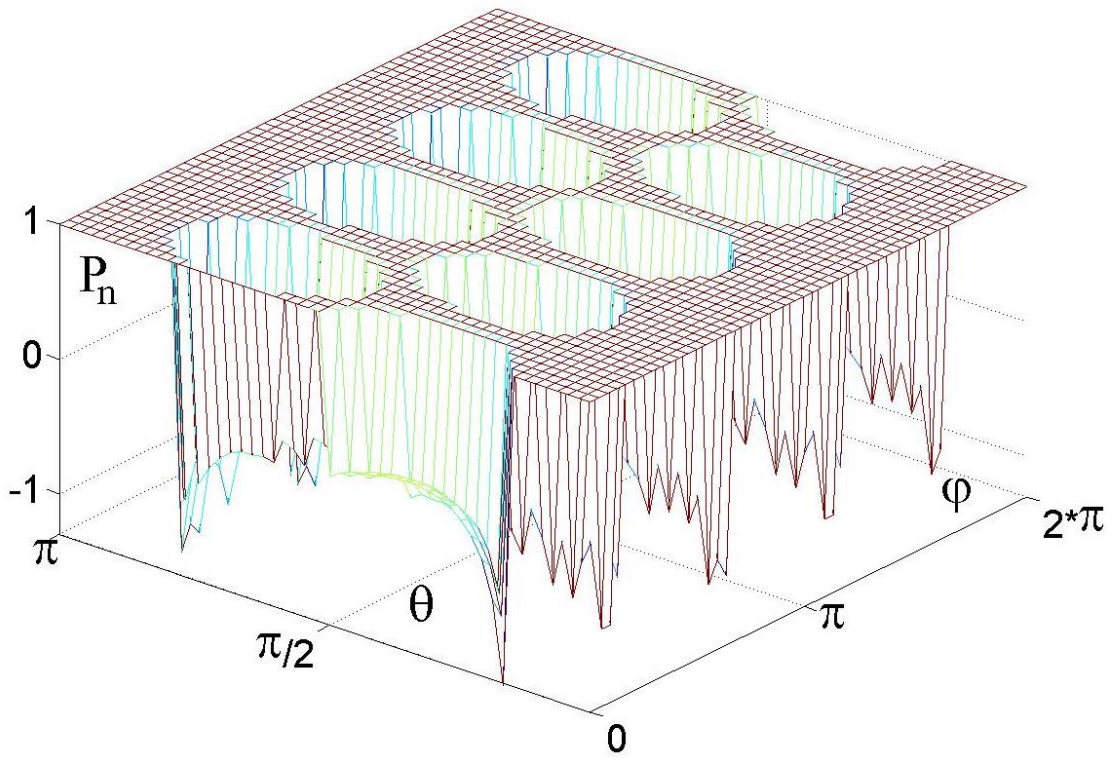

Рисунок 4.25 − Распределение нормальных нагрузок на поверхности зерна в случае восьми площадок контакта. Вне площадок контакта нормальная нагрузка совпадает с заданным единичным поровым давлением и является сжимающей. На площадках контакта знак воздействия в основном отрицательный, а это соответствует растяжению (расклинивающему давлению). Величина растяжения примерно равна давлению в жидкости

Расчёт показал, что распределение нагрузок вблизи контактов достаточно сложное. Однако, знак нормальной нагрузки в основном отрицательный, что соответствует растяжению, несмотря на сжатие границы раздела скелет−флюид. Максимум растяжений приурочен к кромке контакта и достигает величины порового давления. В центре контакта растяжения в два раза меньше.

На рисунке 4.27 представлена одна из касательных нагрузок, направление которой совпадает на сфере с направлением $\boldsymbol{e_\theta}$, вызванная поровым давлением, в случае восьми площадок контакта. Знаки нагрузок разные из-за разного знака нормалей у противоположных площадок контактов, но напряжения те же самые. Видно, что касательная нагрузка достигает величины порового давления в окрестности кромки контакта и способствует его деструкции.

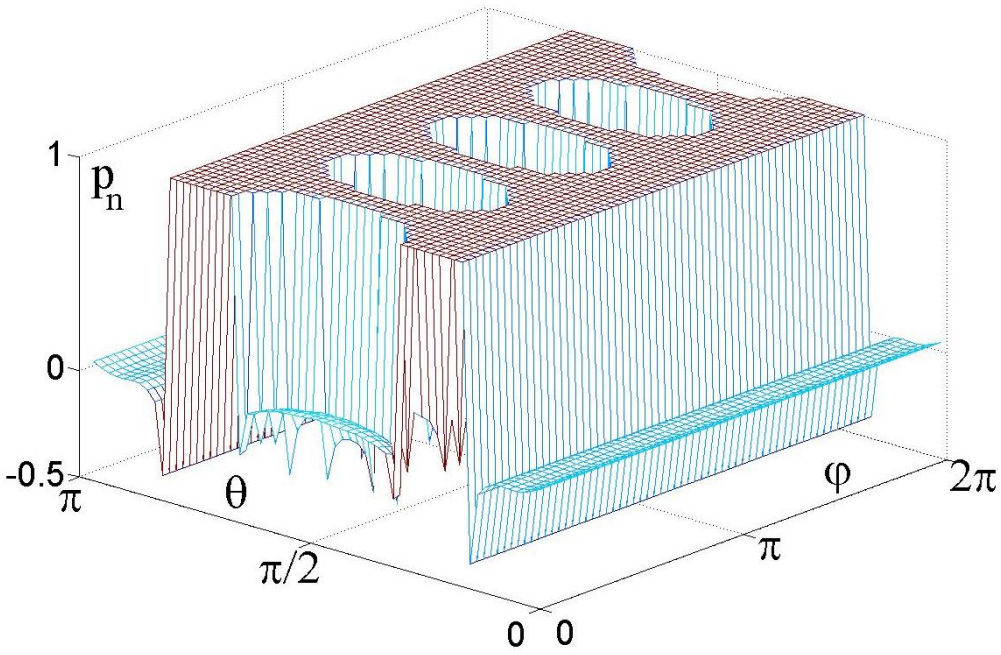

Рисунок 4.26 − Распределение нормальных нагрузок на поверхности зерна в случае шести площадок контакта

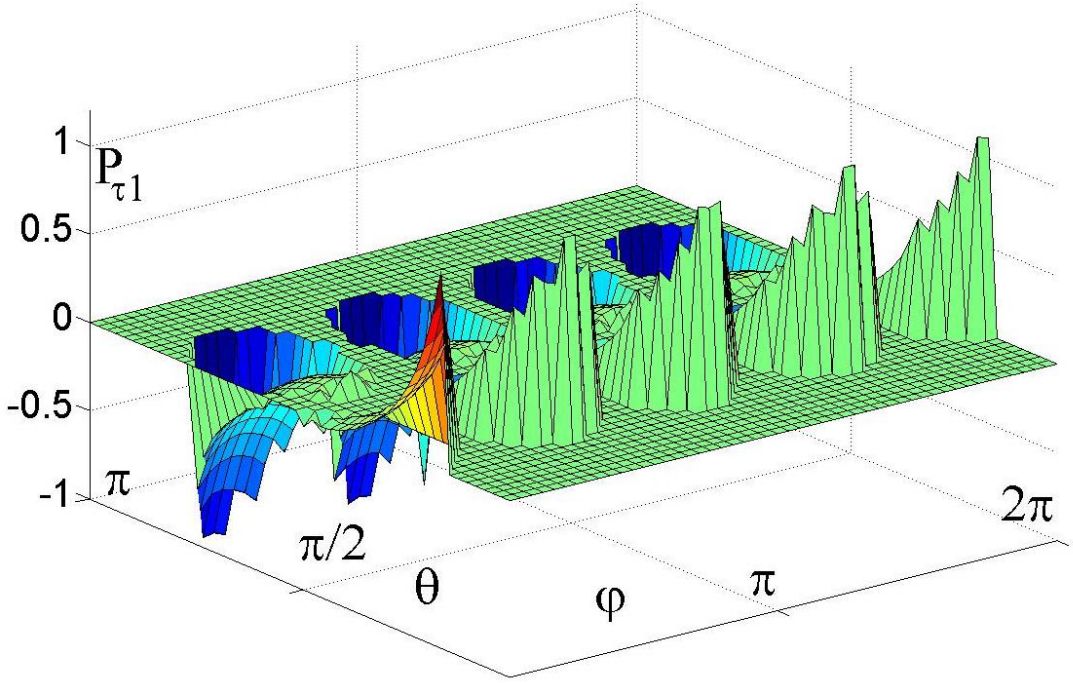

Рисунок 4.27 − Распределение одной из касательных нагрузок на поверхности зерна в случае восьми площадок контакта

Вместе с тем, стационарные колебания, при тех же граничных условиях, несколько ослабляют отмеченные эффекты, даже при частотах, для которых длина волны соизмерима с размером микроструктуры. Если флюид изолирован непроницаемыми пластами сверху и снизу, то при элементарном напряжённом

состоянии среды в целом, т.е. при соотношении боковых и вертикальных напряжений в отношении $\frac{\nu}{1-\nu}$, (ν – коэффициент Пуассона), давление во флюиде больше, чем в скелете. Если расклинивающие давления разорвут скелет, и зёрна станут изолированными, то давление в пласте возрастёт скачком на 30−50 процентов в зависимости от коэффициента Пуассона. Видимо, подобного рода ситуации и определяют важность прогноза аномально высоких пластовых давлений флюида при вскрытии нефтяного пласта. Вместе с тем, действие растягивающих нагрузок должно приводить к снижению пластовых скоростей продольных и поперечных волн, что может быть некоторым признаком состояния предразрушения скелета и превращения его в сыпучую среду. Кроме того, результаты расчёта показали, что уменьшение площади контакта усиливает явления растяжения. Это означает, что, начавшись, указанный процесс не остановится и будет продолжаться до полного разрушения среды.

Таким образом, задача прогноза аномально высоких пластовых давлений флюида в порах требует не только знания общего напряжённого состояния структуры, но и данных о структуре порового пространства.

Снижение пластовых скоростей продольных и поперечных волн может свидетельствовать о состоянии предразрушения зернистых скелетов.

Разрыв связей на контактах скелетов означает исчезновение энергии сдвига. Если это происходит быстро, то резко возрастает энергия сжатия и давление во флюиде мгновенно возрастает на 30−50 процентов, что может вызвать катастрофу. При медленном течении процесса будет возрастать температура.

4.4. Параметры напряжённого состояния, порождаемые силой тяжести и конфигурацией сейсмических границ

Области локального понижения давлений вполне могут быть вероятными аккумуляторами флюидов в геологических структурах. Соответственно, интересным является вопрос обнаружения областей пониженного давления в слоистых структурах, содержащих антиклинальные поднятия. Логично предположить, что для сравнительно пологих структур формулы расчёта разрыва

давлений на границах будут достаточно простыми. Для структур с большими углами наклона было бы логично использовать методы граничных элементов.

Ниже будет показано, что области пониженного давления могут быть не только вблизи купола, но и на расстояниях, смещённых по горизонтали от вершины купола, причём, это смещение порядка амплитуды самой структуры. Очевидно, что прогноз напряжённого состояния геологических структур представляет достаточно сложную задачу, которая для разных классов структур должна иметь свою специфику. Тем не менее, некоторые элементы напряжённого состояния, имеющие важный геологический смысл, например, области пониженных давлений, куда должны устремляться флюиды, рассчитываются сравнительно просто и связаны не только с углами падения структуры, но и с кривизной антиклинальной поверхности в каждой точке. Отрицательная кривизна антиклинальных структур вызывает дополнительное боковое растяжение пород и способствует дальнейшему падению горного давления в окрестности купола структуры.

Построению трёхмерных гидродинамических моделей подземных резервуаров в настоящее время уделяется недостаточное внимание. В результате обработки сейсмических данных выявляются, в основном, лишь границы структур. В тоже время информация о напряжённо-деформированном состоянии нефтяного пласта может быть весьма полезна. Например, области повышенных значений второго инварианта девиатора тензора напряжений (интенсивность касательных напряжений) могут быть зонами повышенной пористости и проницаемости. Также, зная тензор напряжений в объёме, можно вычислить преимущественную ориентацию трещин [80]. Разумеется, эти данные могут рассматриваться как предварительные, ибо для движения флюидов требуется некоторая транспортная система.

Знание распределения давления в объёме ещё более важно. Области пониженного давления могут быть естественными природными насосами и аккумулировать флюиды (естественно, при наличии пор и трещин в продуктивном пласте). Для расчёта напряжённого состояния подземных резервуаров необходимо знать скорости продольных и поперечных волн, а также плотность. В [80] был

использован приближённый алгоритм расчёта напряжённого состояния для структур с очень малым углом наклона. Там же было показано, что *даже в случае горизонтально-слоистых напластований (плоскопараллельной среды), напряжённое состояние уже не является гидростатическим.* Вертикальные напряжения в этом случае равны весу вышележащих пород *P,* в то время как горизонтальные напряжения существенно меньше и равны $P(1-2\gamma^2)$, где $\gamma = V_S/V_P$ есть отношение скоростей поперечных и продольных волн. Данные по интервальным скоростям продольных волн брали по результатам обработки данных 3D сейсмики, плотность и скорости поперечных волн были экстраполированы из скважинных данных.

Интересно было бы рассмотреть с одной стороны, ещё более простой, чем упомянутый выше, приближённый способ расчёта напряжённого состояния в случае небольших углов наклона купола, а также более точный алгоритм, основанный на методе граничных интегральных уравнений, в случае достаточно крутой структуры.

Знание распределения давления в объёме представляет особый интерес, так как области пониженного давления могут быть естественными природными насосами и аккумулировать флюиды (естественно, при наличии пор и трещин в продуктивном пласте). Для расчёта напряжённого состояния подземных резервуаров необходимо знать скорости продольных и поперечных волн, а также плотность.

Горизонтально-слоистые структуры. Определение напряжений в трёхмерных структурах требует интегрирования уравнения равновесия с граничными условиями на поверхности слоёв. Если имеется слоистая среда с пологими структурами, то в нулевом приближении можно рассмотреть напряжённое состояние горизонтально-слоистой среды. Даже в этом, простейшем случае оно не является гидростатическим. Если g − ускорение силы тяжести, а ρ – плотность среды, то вертикальное напряжение $\sigma_{zz} = -\rho g z$ просто равно весу вышележащих пород. Если использовать закон Гука в форме $\sigma_{ik} = \lambda\theta\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}$, то $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{zz}$, а $\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}$, прочие компоненты тензора напряжений

есть ноль. Следовательно, напряженное состояние не является гидростатическим. Отношение напряжений зависит от отношения скоростей поперечных и продольных волн:

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{zz}} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2\gamma^2, \tau = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2} = \gamma^2 \sigma_{zz} = \gamma^2\, \rho g z, \qquad (4.12)$$

здесь $\gamma = {V_s}/{V_p}$, $\tau -$ интенсивность касательных напряжений, т.е. мера уклонения от гидростатического напряжённого состояния. Давление есть след тензора напряжений:

$$P = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = -\rho g z \left(1 - \frac{4}{3}\gamma^2\right) = P_0 \left(1 - \frac{4}{3}\gamma^2\right), \qquad (4.13)$$

где P_0 есть вес вышележащих пород. Таким образом, давление не только меньше веса вышележащих пород, но и испытывает скачок при переходе из слоя в слой, если при этом изменяется величина отношения скоростей поперечных и продольных волн. Этот скачок равен: $\Delta P = \frac{4}{3}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)P_0$. Очень интересна ситуация, когда на верхнем слое отношение γ меньше, чем на нижнем. В этом случае давление на границе скачком уменьшается (по модулю), так что нижележащий слой становится областью низкого давления, и, соответственно, вероятным аккумулятором флюидов. На рисунках 4.28 и 4.29 представлена зависимость давления от глубины в горизонтально-слоистой среде в относительных единицах. На глубине Н проходит граница раздела. Справа $\gamma_1 > \gamma_2$ и скачок давлений положителен, справа ситуация противоположная, и скачок давлений отрицателен.

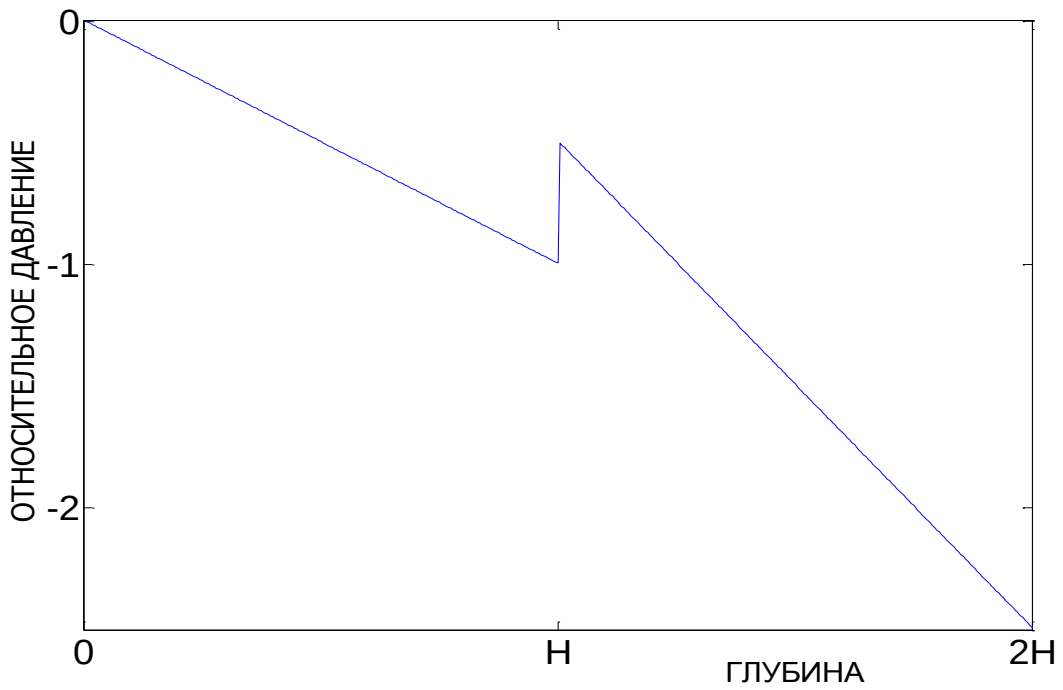

Рисунок 4.28 – Зависимость давления от глубины в горизонтально-слоистой структуре. Отношение γ сверху меньше, чем снизу. Давление на границе раздела скачком уменьшается (по модулю)

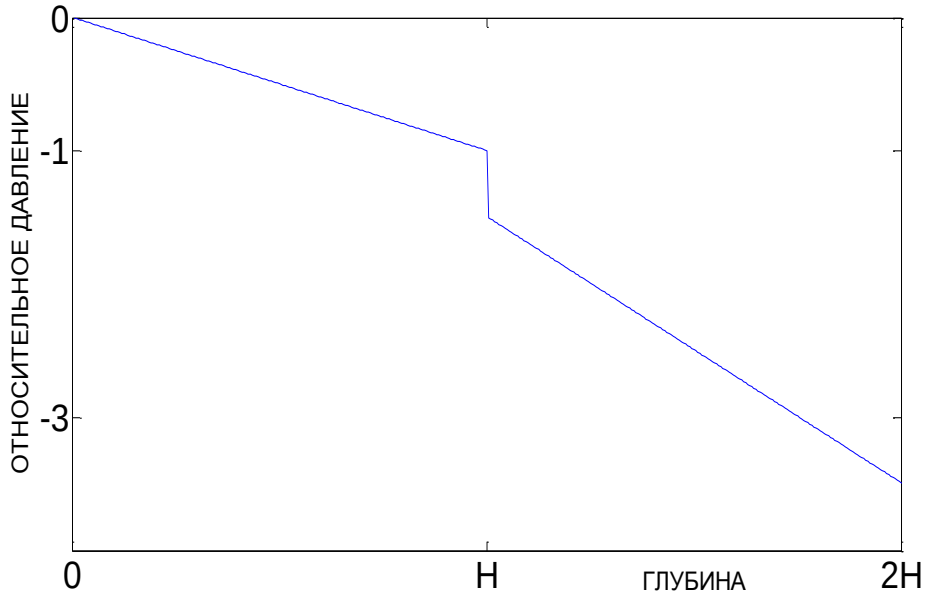

Рисунок 4.29 – Зависимость давления от глубины в горизонтально-слоистой структуре. Отношение γ сверху больше, чем снизу. Давление на границе раздела скачком увеличивается (по модулю)

Пологие антиклинальные структуры. При наличии структуры требуется решить гораздо более сложную систему уравнений равновесия с условиями

жёсткого контакта на границе раздела. Предположим, что на границе раздела $z = z_0(x, y)$ компоненты вектора нагрузки имеют вид:

$$p_x = -\rho g z_0(x, y) n_x;\ p_y = -\rho g z_0(x, y) n_y;\ p_z = -\rho g z_0(x, y) \qquad (4.14).$$

Это предположение связано с малостью вклада интеграла Пуассона в поле перемещений (и нагрузок) по объёму структуры в сравнении с аналогичным полем, обусловленным весом вышележащих пород. Это условие заведомо не выполнимо на сравнительно малых глубинах залегания структур, но для глубин более одного километра и амплитуды структур порядка сотни метров и менее, это предположение оправдано, и тем лучше работает, чем глубже расположена структура. Если интеграл Пуассона по объёму структуры *VS* очень мал по сравнению с объёмом вмещающих пород *V1*, то разностью второго и третьего интегралов можно пренебречь, и поле вертикальных перемещений представляется элементарной формулой:

$$u_k^1 = \frac{1}{V_{s1}^2} \int\limits_{V1} \Gamma_{kz}^1(x, y) dV_y + \frac{1}{V_{s1}^2} \int\limits_{VS} \Gamma_{kz}^1(x, y) dV_y - \frac{1}{V_{s2}^2} \int\limits_{VS} \Gamma_{kz}^2(x, y) dV_y$$
$$= -\rho_1 g \frac{z^2}{2(\lambda + 2\mu)} \qquad (4.15)$$

Далее, предположим, что горизонтальные компоненты перемещения на границе $z = z_0(x, y)$ с хорошей степенью точности связаны с вертикальными следующими соотношениями:

$$u_x = u_z \cos(n, x)\,;\ u_y = u_z \cos(n, y) \qquad (4.16)$$

Разумеется, это предположение не годится для структур с большими углами наклона, и справедливость его весьма ограничена. Тем не менее, это простое предположение на самом деле достаточно содержательное, что будет видно из дальнейшего рассмотрения. Оно позволяет связать некоторые элементы напряжённого состояния не только с физическими параметрами слоёв, но и с геометрией структур, т.е. с углами наклона структуры и её кривизной. При этом роль упомянутых выше факторов различна на разных глубинах, что является

весьма неожиданным. В безграничном пространстве вертикальное перемещение определяется элементарной формулой:

$$u_z = -\rho_1 g \frac{z_0^2}{2(\lambda + 2\mu)} \tag{4.17}$$

Суть предположения состоит в том, что на границе $z = z_0(x, y)$ поле перемещений даётся приближённой формулой $u_z = -\rho g \frac{z_0^2(x,y)}{2(\lambda+2\mu)}$. Поэтому

$$e_{xx}[z_0(x,y)] = -u_{z,x} \frac{z_{0x}}{\sqrt{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}} - u_z \frac{z_{0xx}}{\sqrt{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}} \left(1 - \frac{z_{0x}}{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}\right), \tag{4.18}$$

где

$$u_{z,x} = -\frac{\rho g z_0 z_{0,x}}{\lambda + 2\mu} \tag{4.19}$$

Формулу (4.18) можно переписать в виде:

$$e_{xx}[z_0(x,y)] = -\frac{\rho g z_0}{\lambda + 2\mu} \frac{z_{0x}^2}{\sqrt{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}} - \frac{\rho g z_0^2}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{z_{0xx}}{\sqrt{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}} \left(1 - \frac{z_{0x}}{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}\right) \tag{4.20}$$

Полная дилатация (относительное уплотнение или разуплотнение) на границе $z = z_0(x, y)$ даётся приближённой формулой:

$$\theta[z_0(x,y)] = -\frac{g z_0}{V_p^2} \left(1 + \frac{z_{0x}^2 + z_{0y}^2}{\sqrt{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}}\right) - \frac{g z_0^2}{2V_p^2} \frac{(z_{0xx} + z_{0yy})}{\sqrt{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}} \left(1 - \frac{z_{0x} + z_{0y}}{1 + z_{0x}^2 + z_{0y}^2}\right) \tag{4.21}$$

Плоская дилатация $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ в случае отрицательной кривизны структуры есть растяжение, которое снижает полную дилатацию и, следовательно, давление по обе стороны границы. По сравнению с горизонтально-слоистой структурой давление будет меньше именно благодаря возникновению плоской дилатации. В зависимости от угла наклона и кривизны структуры влияние плоской дилатации

(т.е. отличие напряжённого состояния от горизонтально-слоистой среды) может быть как значительным, так и пренебрежимо малым. В данном приближении вертикальная компонента деформации $\left(\varepsilon_{zz} = -\frac{gz_0}{V_p^2}\right)$ не зависит от плотности пород, а только от глубины и скорости продольных волн. Если на границе $z = z_0(x, y)$ имеем место скачок скорости продольной волны, то тем самым возникает и скачок, как вертикальной деформации, так и дилатации в целом. Что касается полной дилатации, то она зависит не только от упомянутых параметров (скорости поперечных и продольных волн), но также и от конфигурации структуры. Влияние структуры проявляется в виде суммарного эффекта углов наклона (первые производные по горизонтальным координатам) и кривизны (вторые производные). Очевидно, что если скорости продольных волн не меняются при переходе через границу (случай весьма редкий) то дилатация непрерывна, а в общем случае, конечно, терпит разрыв. Давление есть произведение дилатации на модуль всестороннего сжатия, который также меняется при переходе через границу раздела. В формуле (4.21) следует понимать, что $z = z_0(x, y)$. В антиклинальных структурах знак второй производной, связанный с кривизной, отрицательный. Для сферического купола второе слагаемое по модулю может быть как больше первого, так и меньше его. Поэтому антиклинальная структура действует как фактор изменения давления нетривиальным образом. В тех местах, где углы наклона максимальны, возникает дополнительное сжатие. В окрестности купола влияние углов минимально, и главный вклад в эффект понижения давления вносит кривизна структуры. Что касается вклада первого слагаемого в (4.21), связанного только с углами наклона, то этот вклад положителен, т.е. давление монотонно возрастает с ростом тангенса угла наклона. В целом, для структур большой протяжённости, влияние геометрических параметров самой структуры на понижение давления сравнительно мало. Здесь главную роль играет скачок отношения скоростей продольных и поперечных волн на поверхности антиклинального поднятия.

По формуле (4.21) на границе вычисляется дилатация и давление. Оно разрывается на границе, если при переходе через границу рвётся отношение

скоростей продольных и поперечных волн. В этом приближении дилатация и давление зависят от углов наклона границы и кривизны структуры. Далее определялась зависимость плоской дилатации от первого и второго слагаемого т.е. от углов наклона и кривизны структуры. Выяснилось, что влияние кривизны на падение давления в типичных геологических структурах может существенно превосходить влияние углов, что является неожиданным результатом.

Поверхность пологой антиклинальной структуры задавалась явной формулой:

$$z_0 = H - h * \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right) \tag{4.22}$$

При этом H принимало значения 3000м и 1500м, h (амплитуда структуры) – была постоянной и равнялась 50 м, параметр a – (эффективная ширина структуры) принимала значения 1000м и 500 м. Данные параметры изменялись для того, чтобы определить влияние глубины и эффективной ширины антиклинальной структуры на величину плоской дилатации и падение давления в окрестности купола.

На рисунке 4.30 представлено отношение плоской дилатации, обусловленной углами наклона структуры, к вертикальной деформации при H = 3000м, a = 1000м (первое слагаемое в (4.21)). По горизонтальной оси отложено расстояние в метрах от центра структуры, по вертикальной оси – дополнительная радиальная деформация сжатия, отнесённая к вертикальной деформации. Видно, что влияние углов наклона на дополнительное сжатие незначительно в сравнении с вертикальным сжатием.

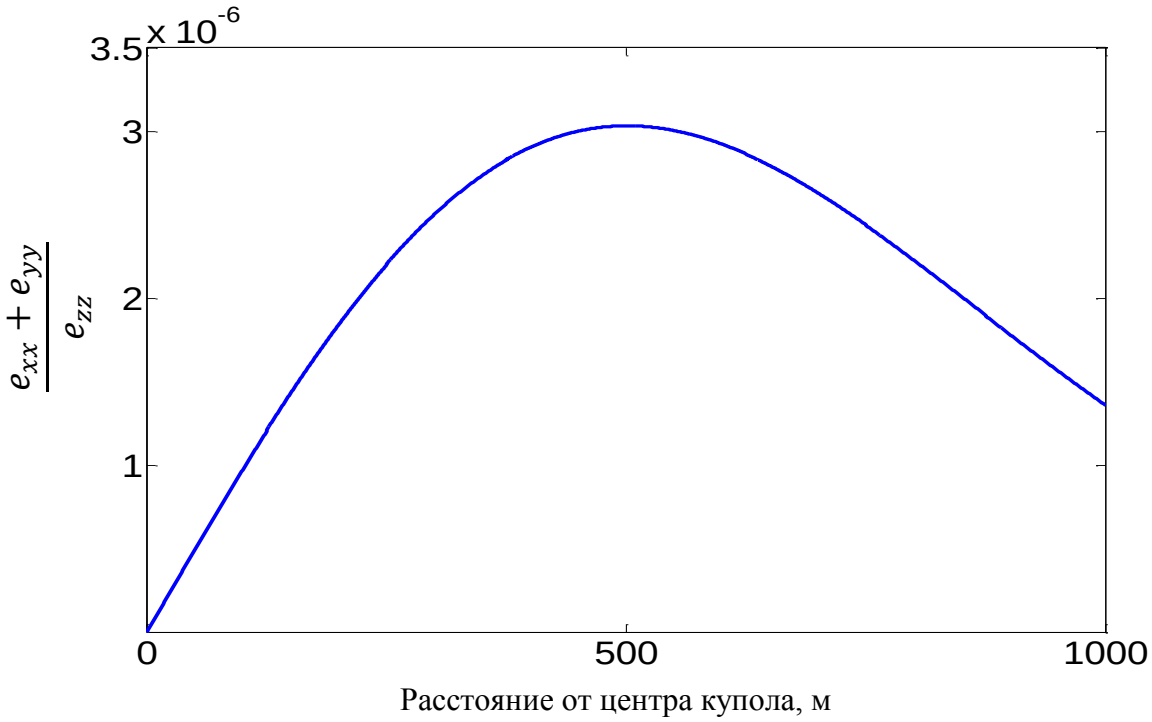

Рисунок 4.30 − Вклад углов наклона в дополнительное сжатие в зависимости от расстояния от центра купола и точки наблюдения. По горизонтальной оси − расстояние в метрах, по вертикальной оси – отношение дополнительной дилатации сжатия, обусловленной углами наклона, к вертикальной дилатации при H = 3000м, *a* = 1000м

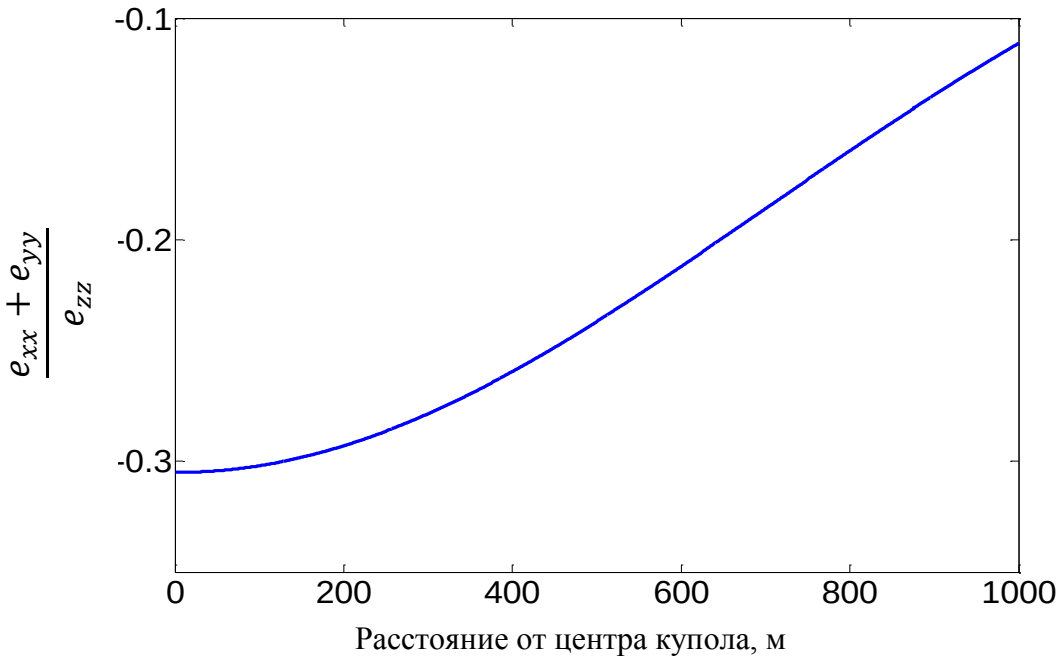

Рисунок 4.31 − Вклад кривизны структуры в горизонтальное растяжение в зависимости от расстояния между центром купола и точкой наблюдения. По горизонтальной оси − расстояние в метрах, по вертикальной оси − отношение дополнительной дилатации растяжения, обусловленной углами наклона, к вертикальной дилатации при H = 3000м, *a* = 1000м.

На рисунке 4.31 для той же ситуации дано влияние кривизны структуры (отрицательной кривизны) на радиальное растяжение (т.е. второе слагаемое в (3)). Видно, что эффект растяжения более значительный и составляет примерно треть вертикальной деформации. Для структуры с вдвое меньшим горизонтальным размером, но с той же амплитудой аналогичные зависимости проявляются более резко. На рисунках 4.32, 4.33 представлены те же зависимости, что и на рисунках 4.34, 4.35, но при H = 3000м, *a* = 500м.

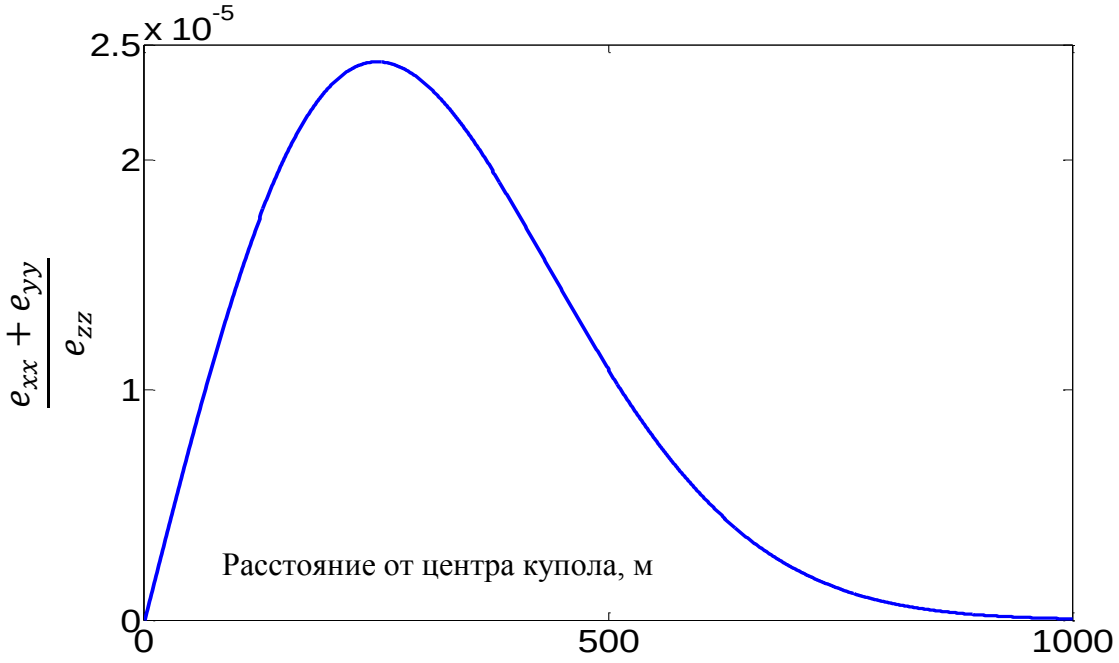

Рисунок 4.32 − Вклад углов наклона в дополнительное сжатие в зависимости от расстояния от центра купола и точки наблюдения. По горизонтальной оси − расстояние в метрах, по вертикальной оси − отношение дополнительной дилатации сжатия, обусловленной углами наклона, к вертикальной дилатации при H = 3000м, *a* = 500м.

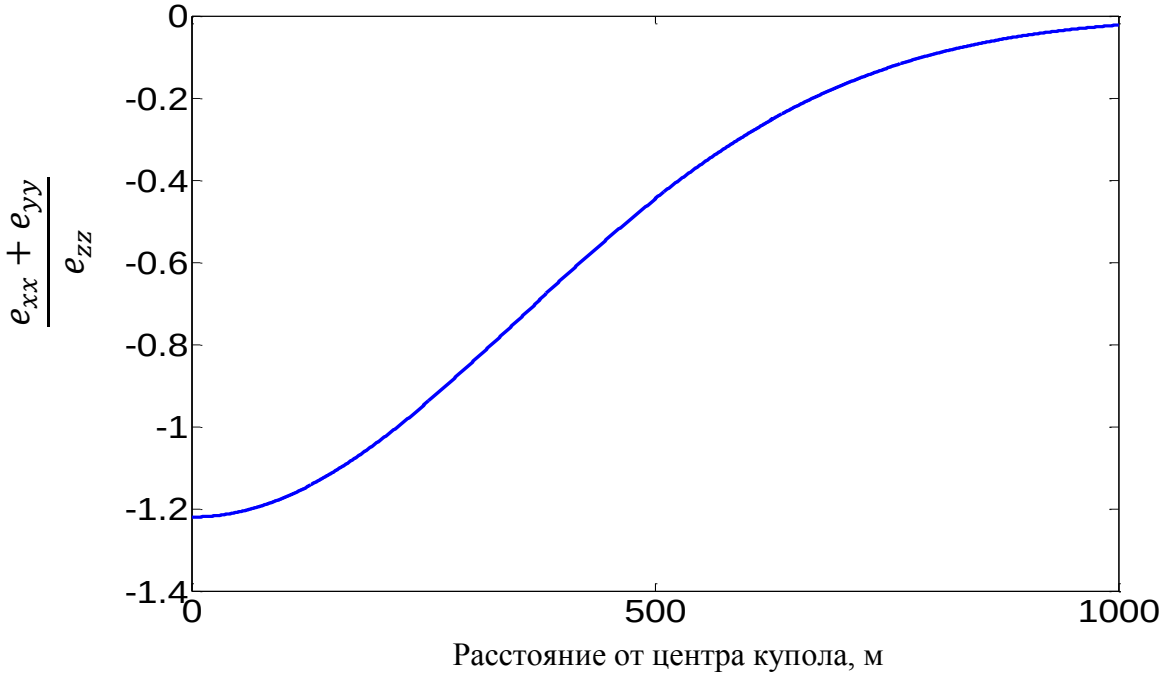

Рисунок 4.33 − Вклад кривизны структуры в горизонтальное растяжение в зависимости от расстояния между центром купола и точкой наблюдения. По горизонтальной оси − расстояние в метрах, по вертикальной оси − отношение дополнительной дилатации растяжения, обусловленной углами наклона, к вертикальной дилатации при H = 3000м, a = 500м.

Влияние углов наклона незначительное, в то время как отрицательная кривизна структуры вносит в поле деформаций вклад, превышающий единицу, т.е. превышающий вертикальную деформацию. На рисунках 4.34, 4.35 те же зависимости представлены при H = 1500м, a = 1000м. Видно, что роль кривизны падает с уменьшением глубины.

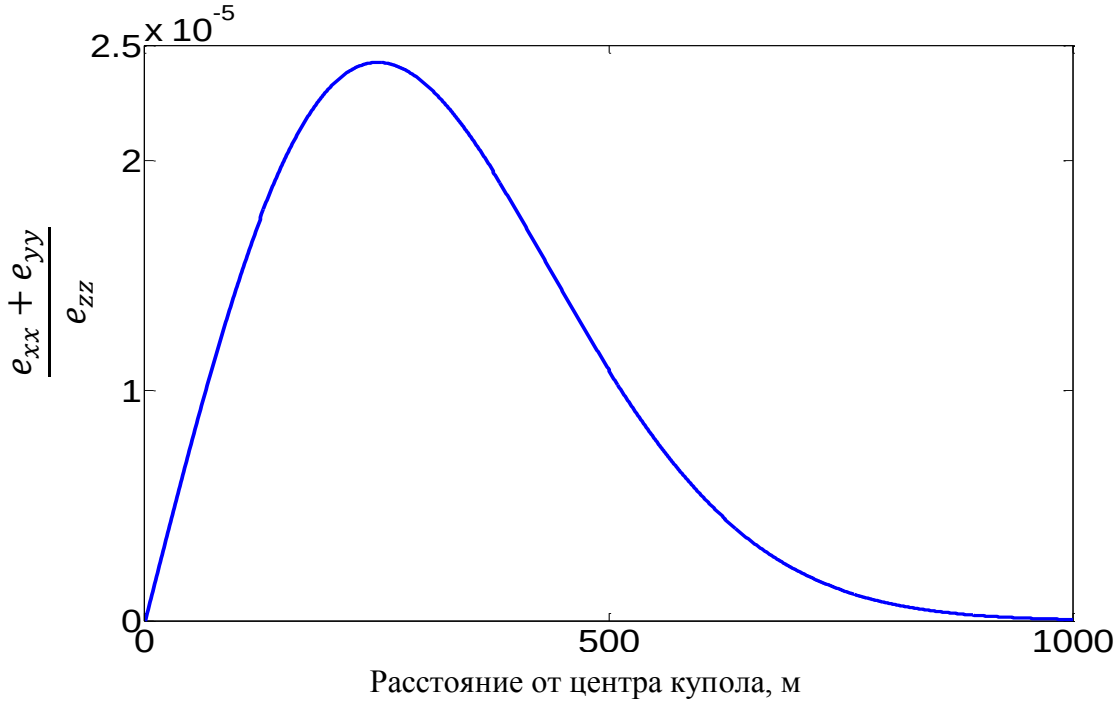

Рисунок 4.34 − Вклад углов наклона в дополнительное сжатие в зависимости от расстояния от центра купола и точки наблюдения. По горизонтальной оси − расстояние в метрах, по вертикальной оси − отношение дополнительной дилатации сжатия, обусловленной углами наклона, к вертикальной дилатации при H = 1500м, *a* = 1000м.

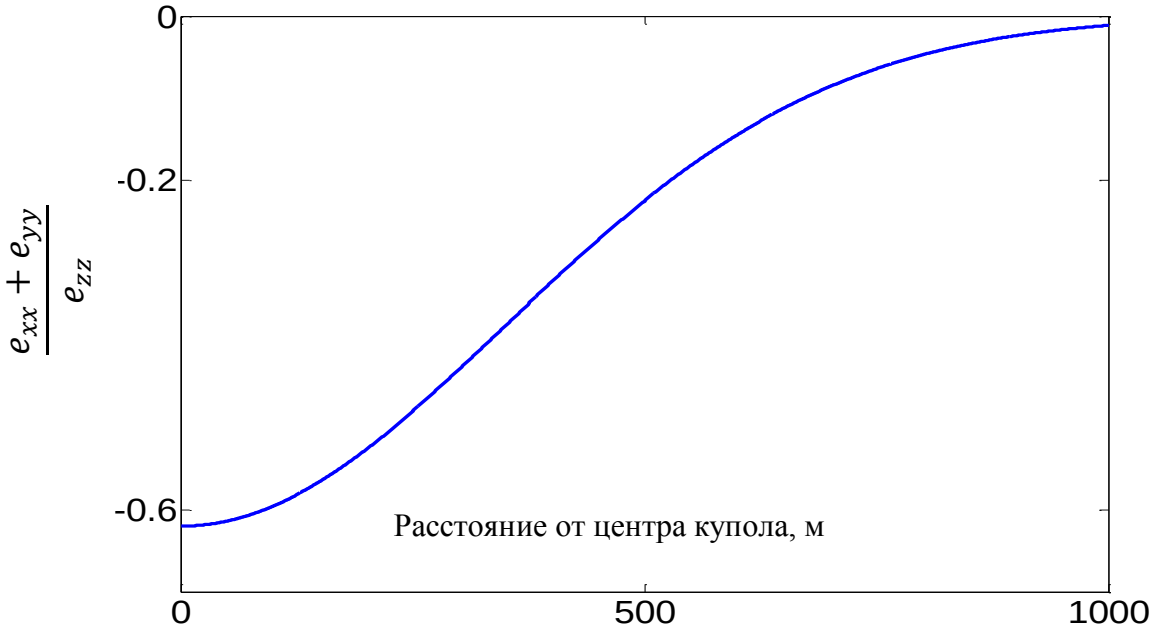

Рисунок 4.35 − Вклад кривизны структуры в горизонтальное растяжение в зависимости от расстояния между центром купола и точкой наблюдения. По горизонтальной оси − расстояние в метрах, по вертикальной оси − отношение дополнительной дилатации растяжения, обусловленной углами наклона, к вертикальной дилатации при H = 1500м, *a* = 1000м.

Произвольные структуры. Несмотря на то, что указанные задачи представляют серьёзный интерес, до последнего времени были только отдельные работы, посвящённые геологическому смыслу точных и приближённых методов решения задач геодинамики нефтегазоносных структур. Здесь математические методы граничных интегральных уравнений представляются особенно интересными, так как они приспособлены для решения задач, при которых горизонтальные координаты не имеют ограничений по протяжённости. Изложим кратко некоторые из полученных результатов численного моделирования.

Формулировка задачи. При наличии структур произвольной формы все ранее приведённые в данной главе рассуждения становятся неприменимыми. В этом случае необходимо интегрировать систему уравнений упругого равновесия с учётом гравитационных сил. Иными словами, необходимо найти решение неоднородного уравнения упругого равновесия

$$\mu\Delta\boldsymbol{U}_i + (\lambda+\mu)grad_i div\boldsymbol{U} = -\rho g e_z, \qquad (4.23)$$

(λ и μ – упругие модули, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, e_z – направление силы тяжести, $\boldsymbol{U}$ – вектор перемещений), которое бы на границе раздела, задаваемой уравнением (4.24) (рисунок 4.36), удовлетворяло бы условиям жёсткого контакта (непрерывность вектора перемещений, нулевая векторная сумма нагрузок сверху и снизу).

$$\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \\ z = -0.5 + 0.25 \times \exp(-10r^2) \end{cases} \qquad (4.24)$$

При этом параметр r изменялся от 0 до 1 с шагом 1/200, φ от 0 до 2π с шагом π/100, верхняя (свободная) граница была плоской (z =0). Параметры среды выше границы раздела $\lambda^+ = \mu^+ = \rho^+ = g^+ = 1$. Ниже границы раздела параметры те же, кроме $\lambda^- = 0.8$. Задача решалась аналогично изложенному в [92, 93]

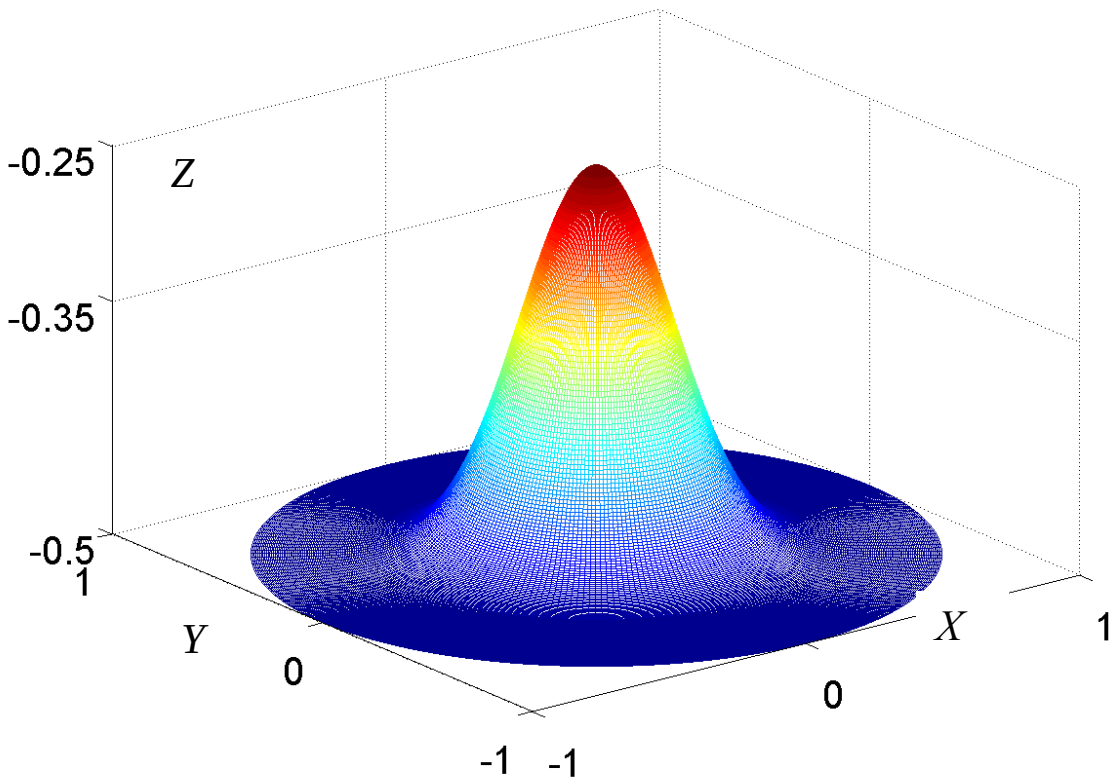

Рисунок 4.36 − Вид границы раздела сред в случае больших углов наклона.

1 этап. Сначала находим частное решение уравнения (4.23) – вектор перемещений сверху и снизу границы раздела:

$$\boldsymbol{U}^{+} = \left(0, \quad 0, \quad -\frac{\rho^{+} g z^{2}}{2(\lambda^{+} + 2\mu^{+})} \right), \text{при } z \in (-z^{*}, 0), \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{U}^{-} = \left(0, \quad 0, -\frac{\rho^{-} g (z - z^{*})^{2}}{2(\lambda^{-} + 2\mu^{-})} - \frac{\rho^{+} g z z^{*}}{(\lambda^{-} + 2\mu^{-})} + \frac{\rho^{+} g z^{*2}}{(\lambda^{-} + 2\mu^{-})} - \frac{\rho^{+} g z^{*2}}{2(\lambda^{+} + 2\mu^{+})} \right),$$

$$\text{при } z \in (-\infty, -z^{*}) \tag{4.26}$$

(z^{*} в данном случае есть 0.5). Это решение в случае произвольной структуры удовлетворяет уравнениям упругого равновесия, но не удовлетворяет условиям на границе раздела слоёв.

2 этап. Находим решение однородного уравнения (3.1), которое в сумме с частным решением, упомянутым выше, удовлетворит и уравнению (4.23) и всем граничным условиям (условиям жёсткого контакта на границе раздела и условию нулевого вектора нагрузок на свободной поверхности).

Искать решение краевой задачи (а это задача смешанного типа) будем с помощью модернизированного метода граничных интегральных уравнений, описанного в главе 3 с ядрами (3.7).

В итоге, для вычисления вектора потенциала **F** необходимо решить систему, где часть уравнений являются уравнениями второго рода, часть – первого. Несмотря на то, что часть уравнений являются уравнениями первого рода, обусловленность итоговой линейной системы оказалась достаточно хорошей, что позволило обойтись без использования регуляризационных процедур.

Результаты вычисления давлений на этой достаточно крутой структуре нетривиальны и представлены на рисунке 4.37. Обращает на себя внимание тот факт, что минимум (по модулю) давления приходится не только на область, примыкающую к вершине купола (что естественно), но и на область (если точнее, то линию), где глубина почти в два раза больше, и где структура, как кажется, уже закончилась! Приближённые формулы типа (4.21) дают качественно неправильный результат расчёта давлений при столь крутых границах раздела.

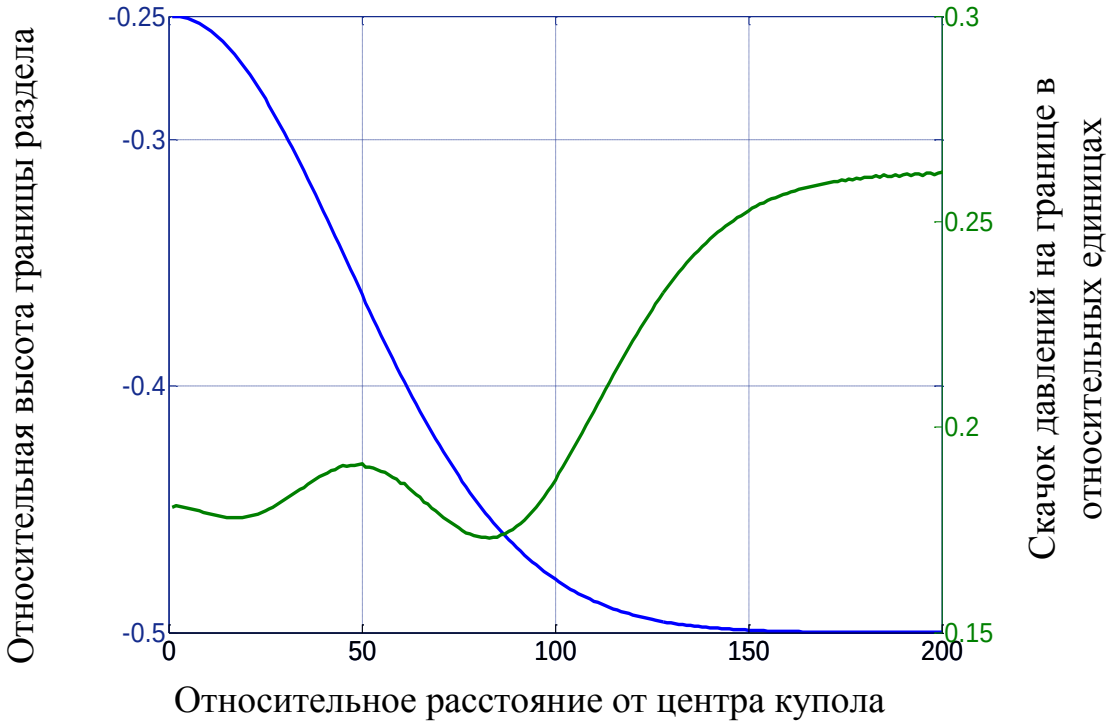

Рисунок 4.37 − Справа – давление (по модулю) ниже границы раздела сред в зависимости от номера шага по параметру *r* – безразмерное расстояние до центра купола (h=1/200, максимальное значение *r* есть единица). Слева – зависимость z – координаты границы раздела от того же параметра.

Оптимальные места заложения скважин. В качестве примера зоны пониженного давления можно привести Аригольское месторождение в Западной Сибири. Здесь разница в коэффициентах Пуассона приводит к отрицательному скачку давлений 50 атмосфер при переходе в продуктивный пласт Ю−1-1. В [80] было показано, что ортогональные траектории изолиний давления (для пластов малой мощности в сравнении с горизонтальными размерами структуры) совпадают с вероятными линиями тока флюидов. Области сгущения линий тока являются местами естественных стоков флюидов. Если таких областей достаточно много, то продуктивный пласт разделяется на отдельные гидродинамические анклавы. На Аригольском месторождении таких анклавов девять. Это обстоятельство, предсказанное теорией, соответствует реальности.

Таким образом, можно сделать вывод, что зоны пониженных давлений возникают не только в антиклинальных структурах, но и в горизонтальных слоях, если отношение скоростей продольных и поперечных волн в нижнем слое выше, чем в верхнем слое. Поиск зон пониженных давлений требует знания интервальных скоростей продольных и поперечных (либо обменных) волн, которые могут быть получены методами сейсморазведки, вертикального сейсмического профилирования или с помощью лабораторных измерений. Вычислить геодинамические параметры, даже такие простые, как давление в продуктивных слоях, невозможно, без знания скоростей как продольных, так и поперечных волн. Для поиска флюидов важно не столько существование антиклинальной структуры, сколько существование зон пониженного давления, даже если эта зона структурно не выражена.

Антиклинальная структура вызывает дополнительное растяжение и дополнительное падение давления в окрестности свода, однако, эффект самой структуры может быть значительно меньше физического эффекта различия коэффициентов Пуассона на границе раздела сред. Это особенно заметно для крупных объектов, кривизна которых мала по сравнению с обратной мощностью слоя.

Оптимальные координаты заложения скважин определяются местами концентрации вероятных линий тока флюида. Для нахождения этих линий необходимо знать давление во всём объёме пласта. Для оценки давления в достаточно пологих структурах можно использовать приближённые формулы (4.21). Если углы наклона структуры превышают 15^0, следует находить решение задачи упругого равновесия с выполнением всех условий на границах раздела. Распределение давлений в случае, если углы наклона превышают 45^0, будет совсем не таким, как это можно ожидать, используя приведённые простые формулы. В этом случае недостаточно знать только два геометрических фактора в каждой точке поверхности структуры, т.е. углы наклона и кривизны. Простые приближённые формулы в этом случае неприменимы, поэтому необходимо находить решение сложной краевой задачи упругого равновесия.

4.5. Вычисление преимущественной ориентации трещин, обусловленной рельефом

Знание напряжённого состояния позволяет определять оптимальные места заложения скважин. Если среда является горизонтально-слоистой (плоскопараллельной, то есть нормаль к границе раздела есть постоянный вектор), то по формулам, аналогичным (4.25)−(4.26) можно вычислить точно все перемещения, напряжения и деформации для любого число слоёв. Если нормаль к границе изменяется от точки к точке, то необходимо решать краевую упругостатическую задачу. С увеличением скорости изменения нормали оптимальным способом решения краевой задачи станет МГЭ, поскольку он является интегральным. Однако, давление – не единственный параметр напряжённого состояния, который можно использовать на практике. В зависимости от критерия пластичности (или выхода за пределы упругости), можно, на основании вычислений, определять зоны трещиноватости, ориентацию трещин (что важно для проектирования наклонных скважин), параметры анизотропии, наведённой естественным напряжённым состоянием, а также зоны вероятных разрушений (аварий). Попробуем провести вычисления и определить некоторые

закономерности трещинообразования на достаточно сложной поверхности (моделируя анизотропию верхней части разреза (ВЧР), вызванной рельефом), но с самыми простыми граничными условиями – среда однородная, верхняя граница – свободная поверхность.

Экспериментальные наблюдения расщепления волн различной поляризации являются признаком анизотропии верхней части разреза. Однако причины этого явления могут быть и иными. Обоснованием того, что анизотропия обусловлена рельефом, может служить расчёт напряжённо-деформированного состояния под вертикальными поднятиями, в частности, интенсивности касательных деформаций.

Сейсмические наблюдения быстрых и медленных поперечных волн различной поляризации являются достаточно надёжным признаком анизотропии [81] горных пород. Она обычно связывается с некоторой преимущественной ориентацией трещин продуктивных горизонтов [82]. Таким образом, анизотропные свойства пород нередко служат индикатором того, что у трещин есть некоторая преимущественная ориентация. Примеры такой зависимости можно наблюдать в продуктивных отложениях рифея в Восточной Сибири. Однако, аналогичные эффекты расщепления поперечных волн были обнаружены также в верхних частях разреза. Эти эффекты осложняют изучение анизотропии целевых объектов, но имеют самостоятельное геодинамическое значение. Критерии разрушения упругих сред являются достаточно эвристическими и связаны с определёнными экспериментальными традициями. Известный критерий максимальной интенсивности касательных напряжений (критерий Мизеса) основан на опытах, проводимых на прессах, а также на растяжении образцов и их скручивании. При этом по умолчанию считается, что вес самого образца во много раз меньше приложенной нагрузки. Это значит, что неявно используется однородное уравнение равновесия без участия массовых сил, т.е. силы тяжести. В геофизических исследованиях напряжённого состояния земных недр этот фактор (сила тяжести) имеет первостепенное значение, поэтому, очевидно, необходима некоторая модернизация упомянутого критерия. Критерий Мизеса верно

описывает расположение сколов у образцов под углами в 45º. Это связано с тем, что боковые напряжения соизмеримы с вертикальными. Однако, разрушение горных пород во многих случаях противоречит упомянутому критерию. В частности, образцы, насыщенные водой, разрушаются хаотично (рассыпаются). Использование деформационных критериев трещинообразования (т.е. таких, в которых трещина является объектом с достаточно большой интенсивностью касательных деформаций, а ориентация её в пространстве определяется отношением главных деформаций) даёт совершенно иной результат. В этом случае при условии достаточно простого и однородного напряжённого состояния (вертикальное проседание, боковые деформации гораздо меньше вертикальных) должны наблюдаться субвертикальные трещины, что нередко подтверждается геологическими данными. Представляется интересным вычислить все компоненты тензора деформаций, порождённые сложным рельефом, на небольшой глубине в однородной среде. После этого определить преимущественную ориентацию трещин, обусловленных этими деформациями.

Постановка задачи. Рассмотрим однородную упругую среду с параметрами $\lambda = \mu = \rho = g = 1$, где λ и μ–упругие модули, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения. Уравнение свободной поверхности имеет вид:

$$F = 0.1\exp(-25y^2)\left[\exp(-100(x-0.2)^2) + \exp(-100(x+0.2)^2)\right] \qquad (4.27)$$

Вид свободной поверхности, описанный формулой (4.27), показан на рисунке 4.38. Переменные x и y в (4.27) изменяются в пределах от −1 до 1. Задача состоит в том, чтобы на поверхности $z_0 = -0.05$ (моделирующей погружение на малую глубину) вычислить все компоненты тензора деформаций и с их помощью попытаться определить преимущественную ориентацию трещин, т. е. найти решение неоднородного уравнения равновесия, удовлетворяющего на границе условию равенства нулю всех компонентов вектора нагрузок.

Цилиндрические координаты использовались, чтобы в областях большего градиента деформаций находилось больше точек.

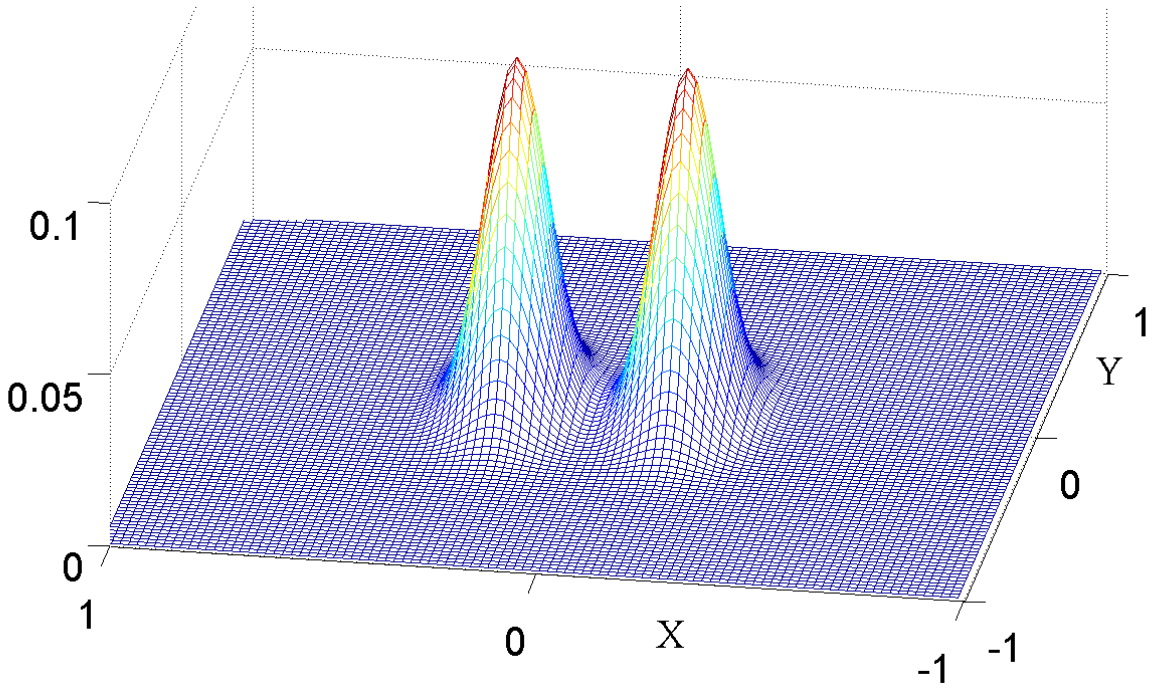

Рисунок 4.38 − Вид свободной поверхности, описываемой формулой (4.27).

Способ решения. Задача решалась с помощью МГЭ с использованием в качестве ядер конечного аналога тензора фундаментальных решений для задач эластостатики (3.84)−(3.88) и уравнениями для нахождения вектора потенциала (3.83), аналогично изложенному в [95]. Деформации находились аналитически путём дифференцирования конечной суммы (3.82). Задача отличается от предыдущей более сложной геометрией границы (скоростью изменения нормали), зато проще среда – однородная. Задача решается аналогично. Сначала нужно найти нулевое приближение, удовлетворяющее неоднородному уравнению упругости, которое есть:

$$\mathbf{u} = \left(0,0,-\frac{\rho g z^2}{2(\lambda + 2\mu)}\right) \tag{4.28}$$

Формула (4.28) не удовлетворяет условиям на свободной границе F. Для того, чтобы найти решение, удовлетворяющее и уравнению, и граничным условиям, необходимо найти решение однородного уравнения с вектором нагрузок, противоположным нагрузкам на поверхности F, порождённым нулевым приближением. И сложить это решение с нулевым приближением (4.28).

Также представляется целесообразным использовать цилиндрические координаты при исследовании любых возмущений, находящихся на свободной поверхности, поскольку шаг сетки увеличивается при увеличении расстояния от источника возмущения.

Можно также аналитически вычислить производные от перемещений (3.82), и просуммировать для вычисления деформаций. На рисунке 4.39 представлена компонента деформации ε_{zz}.

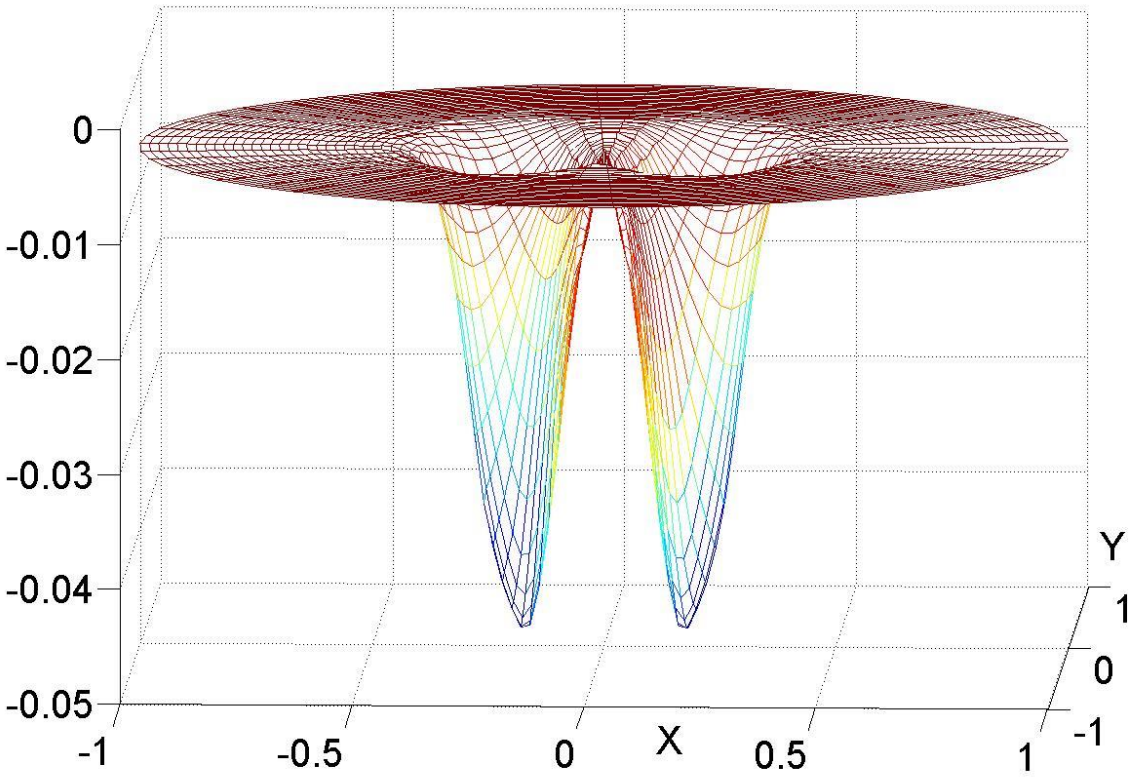

Рисунок 4.39 − Компонента деформации ε_{zz} в цилиндрических координатах. Максимум сжатия совпадает с вершинами структур.

Видно, что эта компонента по модулю примерно на порядок больше остальных компонент, только сжимающая. Она имеет максимум под вершинами структур. На рисунке 4.40 представлена компонента деформации ε_{xx}. Поведение этой компоненты нетривиально. Преобладает сжатие, но имеются и зоны растяжения. Максимумы сжатий не совпадают с максимумами свободной поверхности (вершинами структур).

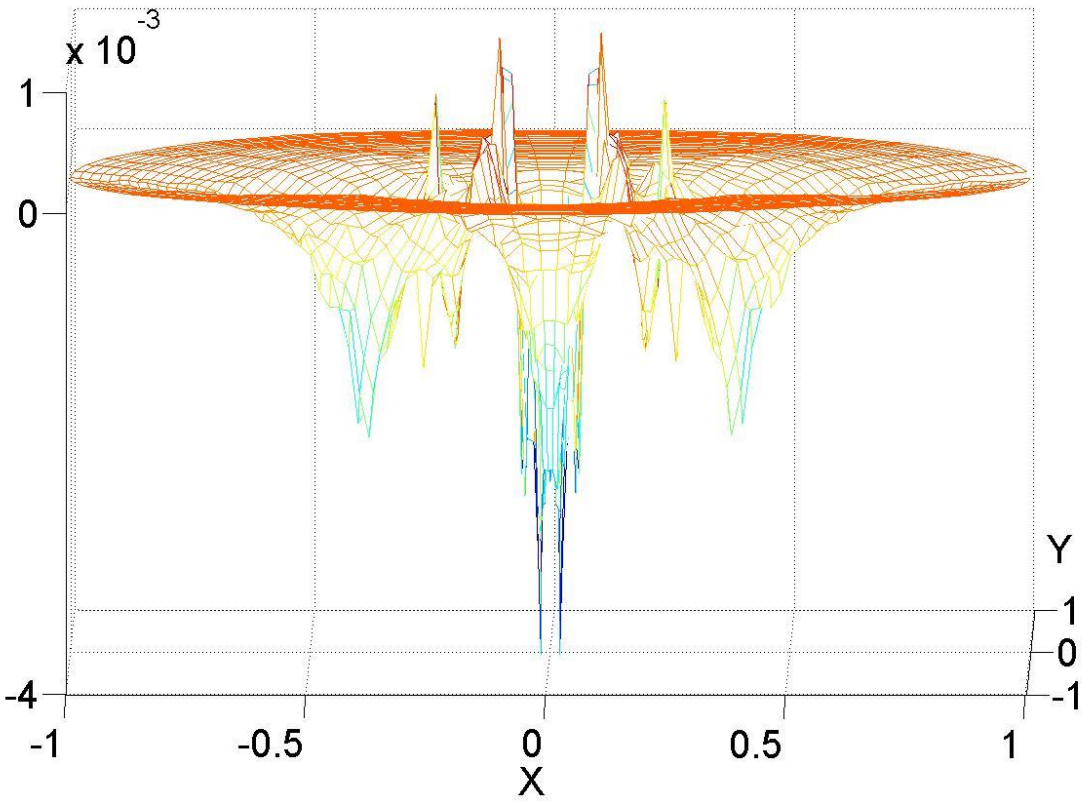

Рисунок 4.40 − Компонента деформации ε_{xx} в цилиндрических координатах. Максимум сжатия не совпадает с вершинами структур. Преобладает сжатие, но есть и области растяжения.

Причиной этого сложного поведения является быстрое изменение вектора нормали для рассматриваемой структуры. Поле горизонтальных перемещений, изображённое на рисунке 4.41 есть гладкая функция. Однако её градиенты очень велики, так что горизонтальные деформации, как сжимающие, так и растягивающие, должны иметь весьма сложный характер.

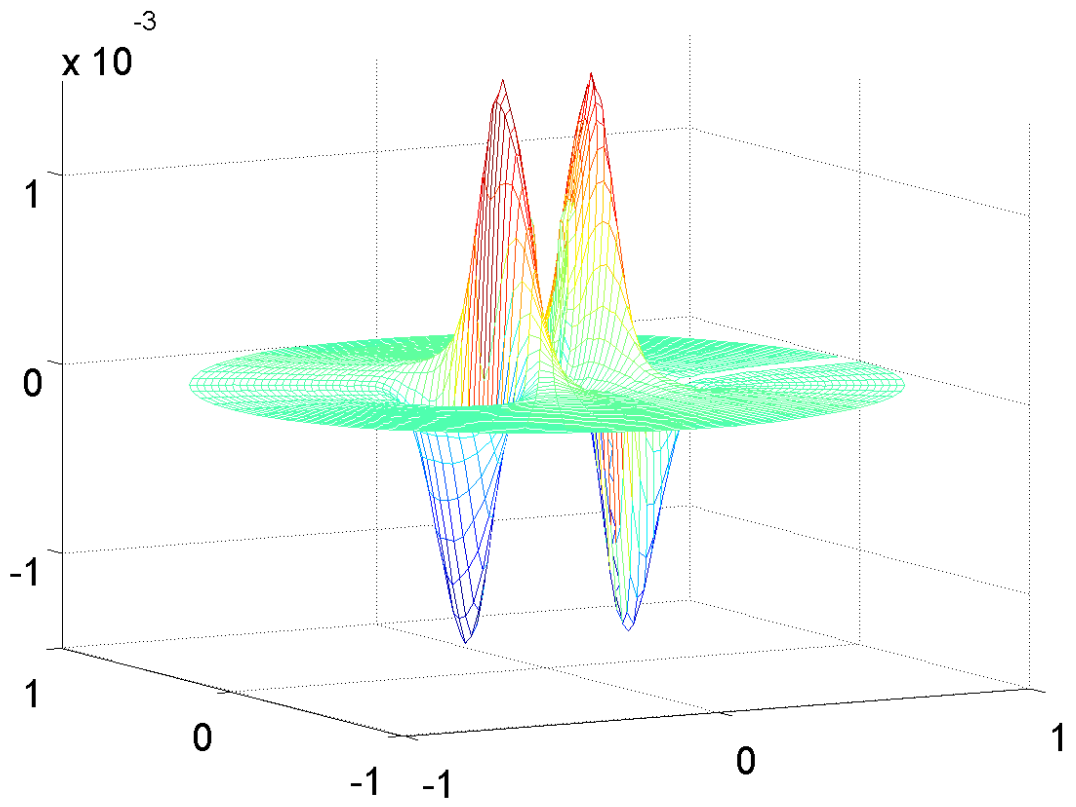

Рисунок 4.41 − Поле горизонтальных перемещений (u_x) на поверхности сложного рельефа. Очень большие горизонтальные градиенты данной компоненты вызывают сложное поле горизонтальных деформаций.

Критерий трещинообразования и результаты вычислений. Современные критерии трещинообразования заимствованы из теории пластичности. В разных задачах используются различные критерии. Поскольку трещины (а также области перехода в пластичность) в случае однородного напряжённого состояния близки к плоскостям, то А.Э. Треска предложил использовать в качестве критерия перехода в пластичность (потери упругости) разность между главными напряжениями. Это означает, что эффективный сдвиг в определённой плоскости не влияет на трещинообразование в двух остальных плоскостях. Критерий Мизеса использует второй инвариант девиатора тензора напряжений. Более сложные критерии (Друкера–Прагера, Шлейхера–Надаи [83]) учитывают, что сжимающие и растягивающие напряжения могут как усиливать, так и ослаблять трещинообразование (выход за пределы упругости [100]). В основном все упомянутые критерии используются для лабораторных исследований (силой тяжести в которых можно пренебречь) [84]. В том случае, если глубина залегания

достаточно велика, то одна из компонент тензора деформаций существенно превосходит остальные, и поле деформаций существенно неоднородно по глубине. По этой причине желательно изменить критерий трещинообразования, чтобы адекватно описывать упомянутые выше особенности. В частности, объяснение наличия субвертикальных трещин. Представляется правильным использовать простоту подхода А.Э. Треска, заменив эффективные касательные напряжения на деформации (в сплошной среде они пропорциональны). Кроме того, предлагается учесть тот факт, что деформации сжатия препятствует трещинообразованию, а растяжения – наоборот, способствуют, аналогично тому, как это используется в критерии Шлейхера–Надаи. Рассмотрим формулы:

$$I_x = \sqrt{\left(e_{yy} - e_{zz}\right)^2 + 6e_{yz}^2} + \alpha e_{xx}, \tag{4.29}$$

$$I_y = \sqrt{(e_{xx} - e_{zz})^2 + 6e_{xz}^2} + \alpha e_{yy}, \tag{4.30}$$

$$I_z = \sqrt{\left(e_{xx} - e_{yy}\right)^2 + 6e_{xy}^2} + \alpha e_{zz}, \tag{4.31}$$

Построим псевдовектор, аналогично изложенному в [95]:

$$\boldsymbol{N} = \left(I_x\theta(I_x), I_y\theta\left(I_y\right), I_z\theta(I_z)\right), \tag{4.32}$$

где θ – функция Хэвисайда. При этом параметр α можно положить равным 0.5 для достаточно широкого класса сред.

Вообще говоря, в критерии Шлейхера–Надаи используются компоненты тензора напряжений. Критерий выхода за пределы упругости есть превышение некоторого критического значения функции:

$$\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{xz}^2 + 6\sigma_{yz}^2} + \alpha I_1, \tag{4.33}$$

где $I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ – первый инвариант тензора напряжений. Чтобы критерий выхода за пределы упругости был инвариантен, перейдём к главным осям тензора напряжений. В этой системе координат внедиагональные компоненты тензора исчезают и формула (4.33) имеет вид, аналогично [100]:

$$\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2} + \alpha I_1, \tag{4.34}$$

соответственно, можно построить вектор, аналогичный (4.32). В главных осях ненулевыми являются только диагональные компоненты тензора деформаций. Поэтому компоненты вектора, аналогичного (4.32), имеют вид:

$$I_x = \left|e_{yy} - e_{zz}\right| + \alpha e_{xx}, \tag{4.35}$$

$$I_y = \left|e_{xx} - e_{zz}\right| + \alpha e_{yy}, \tag{4.36}$$

$$I_z = \left|e_{xx} - e_{yy}\right| + \alpha e_{zz} \tag{4.37}$$

Теперь построим вектор, аналогично (4.32):

$$\boldsymbol{N} = \left(I_x\theta(I_x), I_y\theta\left(I_y\right), I_z\theta(I_z)\right) \tag{4.38}$$

Будем считать направление этого вектора совпадающим с наиболее вероятной ориентацией нормали к плоскости трещины. Этот критерий даёт возможность количественно описать преимущественно субвертикальную ориентацию трещин [85] по причине преобладания одной из диагональных компонент тензора деформаций, обусловленной действием силы тяжести. Как правило, напряжённое состояние, порождённое силой тяжести в геологических структурах на достаточной глубине таково, что диагональные компоненты тензора деформаций намного превосходят сдвиговые. По этой причине в подобных задачах с достаточной степенью точности можно использовать вектор (4.32), не производя поворота к главным осям.

Если в (4.38) есть только одна ненулевая компонента, то это значит, что нормаль к трещине имеет точно такое же направление, как упомянутая компонента. В том случае, если ненулевых компонент две, то относительная разность между ними и будет являться отклонением наиболее вероятной ориентации от случайной в сторону одной из осей. Если все три компоненты одинаковы, то это будет означать хаотичную ориентацию трещин в трёхмерном пространстве.

Результаты обработки решения упругой задачи показывают, что почти всюду на виртуальной поверхности $z_0 = -0.05$ компонента I_z (4.31) равна нулю. Это означает, что трещины субвертикальны, что подтверждается многочисленными наблюдениями на образцах в скважинах [85].

Из рисунка 4.42 следует, что в вдали от структуры ориентация нормали к плоскости трещины в плоскости XY случайна ($I_x = I_y$). Вблизи структуры нормаль к трещине отклоняются в сторону оси x примерно на 5 градусов, что может приводить к слабой анизотропии. Следует отметить, что на границе раздела двух сред влияние формы границы на ориентацию трещин будет более существенным.

Иными словами, доля ориентированных вдоль хребтов трещин составляет около 5 % по сравнению с хаотично ориентированными трещинами при данной геометрии свободной поверхности. Под случайной ориентацией на плоскости следует понимать одинаковую вероятность появления трещины в обоих горизонтальных направлениях.

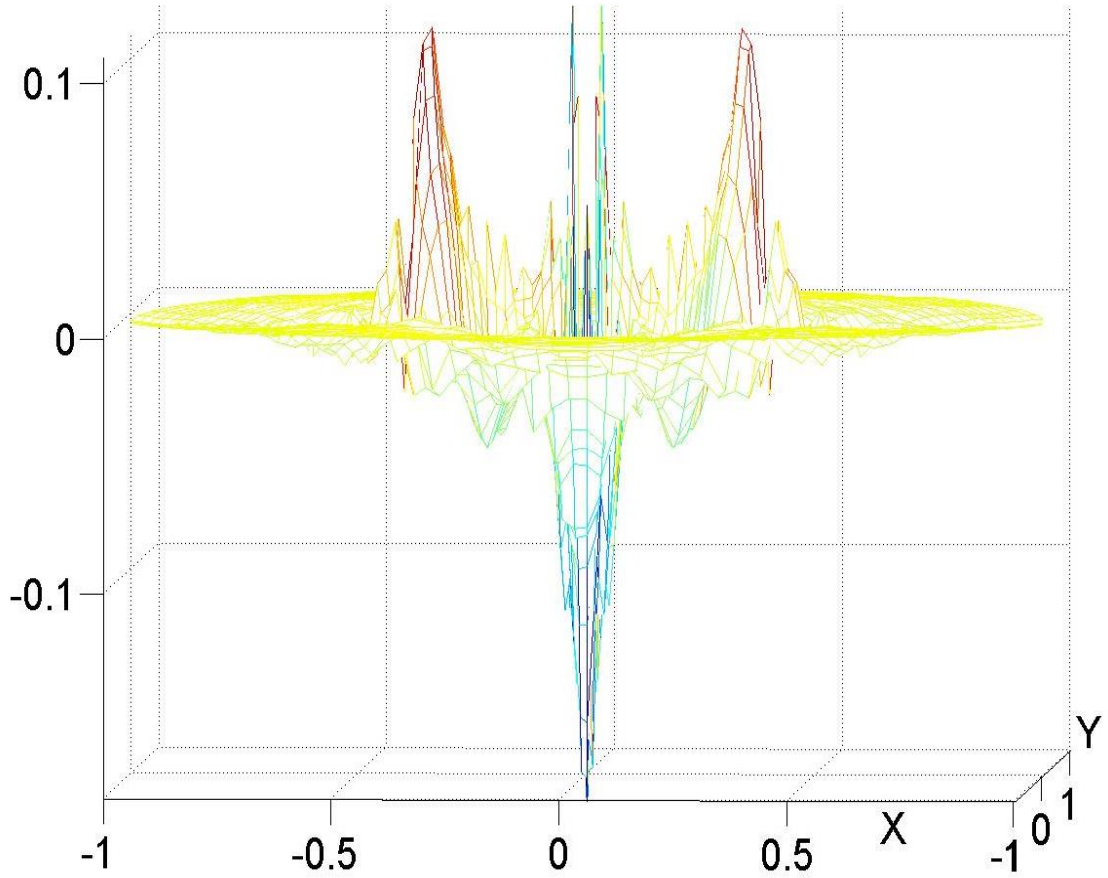

Рисунок 4.42 − Отклонение нормали к плоскости трещин от хаотичной ориентации (в сторону от оси *X*) в радианах. Максимальное отклонение не совпадает с элементами структуры.

4.6. Выводы по четвёртой главе

1. При действии давления жидкости на зернистую среду, у которой площадки контактов образуют жёсткий каркас, возникают два механизма разрушения. Один из них − появление растяжений на контактах при увеличении давления на границе скелет−флюид. Эти растяжения (расклинивающие давления) сравнимы с давлением жидкости и зависят от геометрии контактов. Второй связан с тем, что в окрестности кромки контакта появляются большие касательные нагрузки того же порядка, способствующие деструкции его периферической части. Оба этих механизма определяют опасность аномально высоких пластовых давлений при вскрытии нефтегазоносных пластов.

2. Модифицированный МГЭ приводит в конечном счёте к линейной системе с хорошей обусловленностью. Это позволяет не применять каких-либо регуляризационных процедур и получать надёжные численные результаты даже в окрестности кромки контактов, где вектор нормали изменяется очень быстро.

3. Обычно зоны аномально высокого пластового давления прогнозируют исходя из уменьшения скоростей продольных волн. Однако, это предположение оправдывается не всегда. Как показывают расчёты, аномально высокие пластовые давления не всегда сопровождаются уменьшением нагрузок на контактах, а, соответственно, и уменьшением скоростей волн. Поэтому для прогноза зон аномально высоких пластовых давлений необходимо учитывать структуру порового пространства, а не только пористость.

4. Предложен критерий трещинообразования, учитывающий роль силы тяжести в процессе трещинообразования, а также то, что сжимающие нормальные деформации препятствуют образованию трещин.

5. Под действием силы тяжести и рельефа трещины почти всюду субвертикальны. Что касается ориентации в горизонтальной плоскости, то под влиянием рельефа отклонение от хаотичной ориентации в этой плоскости сравнительно невелико ($\pm 5^0$).

6. Сильное превышение вертикальных деформаций над горизонтальными и сдвиговыми деформациями обеспечивает наличие почти вертикальных трещин под

структурой с отклонениями всего лишь 5−7 градусов. Этот результат является прямым следствием критерия трещинообразования, использованного в данной работе.

Заключение

Данная диссертация является научно-квалификационной работой, совокупность разработанных в которой теоретических положений, направленных на описание деформирования контрастных микронеоднородных сред, а также сред, содержащих границы с быстро изменяющимся вектором нормали, можно квалифицировать как научное достижение в области механики деформируемого твёрдого тела.

Итоги и рекомендации, согласно с выполненными исследованиями. В целом, в работе имеет место развитие физических основ геофизических методов исследований и связано оно, главным образом, с прогнозом состояния среды и её возможной неустойчивости. Тем самым возникает возможность использовать геофизические методы для решения задач подземной геодинамики, а также выявления зон локализации флюидов. В свою очередь, зоны пониженных давлений могут быть информативным поисковым признаком.

В работе установлено, что в зернистых коллекторах давление флюида вызывает расклинивающий эффект, т.е. растяжение на контактах зёрен. Этот эффект зависит, прежде всего, от площади контакта зерна. При небольшой площади контакта относительно небольшое поровое давление может привести к его разрушению. Если контакты разорваны под действием порового давления и скелет стал сыпучим телом, то возникает гидростатическое напряжённое состояние и сдвиговая энергия скелета исчезает. По закону сохранения энергии она превращается в дополнительную энергию сжатия, так что давление во флюиде резко возрастает (до 50%) и становится равным весу вышележащих пород, что вызывает катастрофы. Тем самым, возникает новый взгляд на проблему аномально высоких пластовых давлений как одного из важнейших параметров состояния среды. Этот вывод доказывает первое защищаемое положение.

Нетривиальным является также вопрос о соотношении аналитических и численных методов для описания деформирования контрастных микронеоднородных сред. В работе также использовалась модель структурированного континуума для описания контрастных микронеоднородных

сред. Показано, что в рамках этой модели, благодаря большому числу степеней свободы микроструктур, среда описывается дифференциальными уравнениями бесконечного порядка. Однако, даже в длинноволновом приближении, когда длина волны много больше размера микроструктур, уравнения движения оказываются уравнениями не второго, а четвёртого порядка. Дисперсионные слагаемые, которые отсутствуют в сплошной среде, резко усиливают нелинейные явления в микронеоднородных средах, по сравнению с классической сплошной средой. Таким образом, комбинационные частоты, обусловленные этими нелинейными явлениями, могут дать важную информацию о структуре микронеоднородных сред. Этот вывод доказывает второе защищаемое положение.

Важнейшую роль в решении, в частности, контактных задач сыграл модифицированный МГЭ. Показано, что он имеет преимущество при решении смешанных краевых задачи теории упругости в широком диапазоне частот в случае быстрого изменения вектора нормали к границе раздела. Преимущество проявляется в том, что решение краевой задачи сводится к системе линейных уравнений, решение которой находится без использования регуляризационных процедур, по причине хорошей обусловленности матрицы системы. Это доказывает третье защищаемое положение.

Перспективы дальнейшей разработки темы:

1. Используя предложенный критерий трещинообразования, возможно определять не только вероятную ориентацию трещин, но и зоны локализации больших деформаций. Это, в свою очередь, может быть использовано для модификации упруго-пластической модели среды, предполагающую наличие как упругих, так и пластических зон в среде. Также предполагается перспективным установить критерии трещинообразования на границе упругих изотропных слоёв, а также в анизотропной среде.

2. По данным скважинных исследований нахождение слоёв с повышенными нелинейными свойствами по отклику на монохромные сигналы может дать дополнительную информацию о структуре порового пространства, главным образом, удельной поверхности порового пространства.

3. Также представляется перспективным разработка алгоритма решения задач на подвижной границе, учитывающего предложенный критерий ориентации трещин для задачи об изменении поверхности трещины под действием давления флюида.

Список использованной литературы

1. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т. Д. Шермергор. – М. : Наука, 1977. – 400 с.

2. Ляхов Г. М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / Г. М. Ляхов. – М. : Наука, 1982. – 288 с.

3. Sibiryakov B. P. The nature of instability of Blocked Media and Distribution Law of Unstable States / B. P. Sibiryakov, B. I. Prilous, A. V. Kopeykin // Physical Mesomechanics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 141–151.

4. Немирович-Данченко М. М. Численное моделирование распространения волн в среде, содержащей одиночную пору или пористый слой / М. М. Немирович-Данченко, А. А. Шатская // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 101–104.

5. Зайцев В. Ю. «Неклассическая» структурно-обусловленная акустическая нелинейность: эксперименты и модели : учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы к проблемам генерации, обработки, передачи, хранения, защиты информации и их применение» / В. Ю. Зайцев, Н. В. Прончатов-Рубцов, С. Н. Гурбатов. – Нижний Новгород : Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2007. – 223 с.

6. Зайцев В. Ю. Амплитудно-зависимая диссипация в микронеоднородных средах с линейным поглощением и упругой нелинейностью / В. Ю. Зайцев, Л. А. Матвеев // Геология и геофизика. – 2006. – Т. 47, № 5. – С. 695–710.

7. Пономарева И. Н. Подземная гидромеханика: учебное пособие / И. Н. Пономарева, В. А. Мордвинов. – Пермь : Пермский государственный технический университет, 2009. – 103 с.

8. Kennett B. L. N. Seismic Wave Scattering by Obstacles on Interfaces / B. L. N. Kennett // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. – 1972. – № 28. – P. 249–266.

9. Pettit J. R. Improved Detection of Rough Defects for Ultrasonic Nondestructive Evaluation Inspections Based on Finite Element Modeling of Elastic Wave Scattering /

J. R. Pettit, A. E. Walker, M. J. S. Lowe // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 2015. – Vol. 62, № 10. – P. 1797–1808.

10. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости / И. А. Кунин. – М. : Наука, 1975. – 416 с.

11. Нестеренко В. Ф. Импульсное нагружение гетерогенных материалов / В. Ф. Нестеренко. – Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1992. – 200 с.

12. Duffy J. Stress-strain relations and vibrations of a granular medium / J. Duffy, R. D. Mindlin // Journal of Applied Mechanics. – 1957. – Vol. 24, № 3. – P. 585–593.

13. Digby P. J. The effective elastic moduli of porous granular rocks / P. J. Digby // Journal of Applied Mechanics. – 1981. – Vol. 48. – P. 803−808.

14. Winkler K. W. Contact stiffness in granular porous materials: comparison between theory and experiment / K. W. Winkler // Geophysical Research Letters. – 1983. – № 11. – P. 1073–1076.

15. Johnson K. I. Contact Mechanics / K. I. Johnson. – Cambridge – New York : Cambridge University Press, 1985. – 250 p.

16. Сибиряков Е. Б. Распространение волн в песчаных отложениях / Е. Б. Сибиряков, В. А. Куликов, Г. В. Егоров // Физическая мезомеханика. – 2003. – Т. 6, № 1. – С. 13–22.

17. Нерпин С. В. Физика почвы / С. В. Нерпин, А. Ф. Чудновский. – М. : Наука, 1967. – 583 с.

18. Сибиряков Б. П. Параметрические резонансы и неустойчивость геологических структур / Б. П. Сибиряков // Физическая мезомеханика. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 5–10.

19. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 873 с.

20. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости / В. Д. Купрадзе. – М. : Физматгиз, 1963. – 472 с.

21. Иванов К. М. Численное моделирование разделительных процессов обработки давлением / К. М. Иванов, П. М. Винник, В. Н. Иванов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2012. – № 2 (33). – С. 192–199.

22. Партон П. З. Методы математической теории упругости / П. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

23. Manolis D. Elastic waves in continuous and discontinuous geological media by boundary integral equation methods: A review / D. Manolis, P. S. Dineva // George Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2015. – Vol. 70. – P. 11–29.

24. Ватульян А. О. Новый метод ГИУ в краевых задачах для эллиптических операторов и его численная реализация / А. О. Ватульян, О. В. Ковалёв // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7, № 1. – С. 54–65.

25. Угодчиков А. Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твёрдого тела / А. Г. Угодчиков, Н. М. Хуторянский. – Казань : Издательство Казанского университета, 1986. – 295 с.

26. Игумнов Л. А. Методы граничных интегральных уравнений и граничного элемента в трёхмерных задачах математической физики : учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике» / Л. А. Игумнов. – Нижний Новгород : Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2007. – 103 с.

27. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы / М. А. Садовский // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 247, № 4. – С. 829–832.

28. Слепян Л. И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л. И. Слепян, Ю. С. Яковлев. – Л. : Судостроение, 1980. – 344 с.

29. Опарин В. Н. О дискретных свойствах объектов геосреды и их каноническом представлении / В. Н. Опарин, А. С. Танайно, В. Ф. Юшкин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2007. – № 3. – С. 7–24.

30. Александрова Н. И. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах / Н. И. Александрова, Е. Н. Шер // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1999. – № 4. – С. 75–83.

31. Suvorov V. D. Structure of the crust in the Baikal rift zone and adjacent areas from Deep Seismic Sounding data / V. D. Suvorov, Z. M. Mishenkina, G. V. Petrick, I. F. Sheludko, V. S. Seleznev, V. M. Solovyov // Tectonophysics. – 2002. – Vol. 351. – P. 61–74.

32. Puzirev N. N. New data from explosion seismology in the Baikalian rift zone / N. N. Puzirev, M. M. Mandelbaum, S. V. Krylov, B. P. Mishenkin, Z. R. Mishenkina, G. V. Petrick, V. Seleznev // Tectonophysics. – 1979. – Vol. 56, is. 1–2. – P. 128.

33. Dehandschutter B. Structural evolution of the Teletsk graben (Russian Altai) / B. Dehandschutter, E. Vysotskyc, D. Delvaux, J. Klerkx, M. M. Buslov, V. S. Seleznev, M. De Batiste // Tectonophysics. – 2002. – Vol. 351, is. 1–2. – P. 139–167.

34. Горельчик В. И. Глубокие длиннопериодные землетрясения под Ключевским вулканом / В. И. Горельчик, А. В. Сторчеус // Геодинамика и вулканизм Курило-Камчатской островодужной системы. – Петропавловск-Камчатский : Институт вулканической геологии и геохимии ДВО РАН, 2001. – 428 с.

35. Канаи К. Соотношения между периодами и амплитудами сейсмических волн / К. Канаи, К. Осида, К. Иосизава // Слабые землетрясения. – М. : Изд-во Ин. лит., 1961. – С. 231–242.

36. Крылов С. В. Детальные сейсмические исследования литосферы на P и S волнах / С. В. Крылов, Б. П. Мишенькин, З. Р. Мишенькина, Г. В. Петрик, В. Н. Сергеев, И. Ф. Шелудько, Е. Н. Тен, Ю. В. Кульчинский, М. М. Мандельбаум, В. С. Селезнев, В. М. Соловьев, В. Д. Суворов. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1993. – 199 с.

37. Nikolaev A. V. Problems of nonlinear seismology / A. V. Nikolaev // Physics of the Earth and Planetary Interiors. – 1988. – Vol. 50, № 1. – P. 1–7.

38. Nikolaev A. V. Scattering and attenuation of seismic waves in the presence of nonlinearity / A. V. Nikolaev // Pure and Applied Geophysics. – 1989. – Vol. 131, № 4. – P. 687–702.

39. Алешин А. С. Экспериментальное исследование нелинейных взаимодействий сейсмических поверхностных волн / А. С. Алешин, В. В. Гущин, М. М. Креков, А. В. Николаев, А. В. Соколов, Г. М. Шалашов // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 3. – С. 574–575.

40. Хаврошкин О. Б. Сейсмическая нелинейность / О. Б. Хаврошкин. – М. : Объединённый институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта РАН, 2000. – 110 с.

41. Хаврошкин О. Б. Аппаратурно-методические основы экспериментальной нелинейной сейсмологии / О. Б. Хаврошкин, В. В. Цыплаков // Сейсмические приборы. – 2003. – Вып. 39. – С. 43–71.

42. Sibiryakov B. P. Generation of nonlinear oscillations at weak perturbations and generalization of cracks at fracture / B. P. Sibiryakov // Physical Mesomechanics. – 2007. – № 3. – P. 203–206.

43. Sibiriakov B. P. Supersonic and intersonic cracking in rock-like material under remote stresses / B. P. Sibiriakov // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2002. – № 4. – P. 255–265.

44. Sibiryakov B. P. The unusual small wave velocities in structural bodies and instability of pore or cracked media by small vibration / B. P. Sibiryakov, B. I. Prilous // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. – 2007. – № 7. – P. 139–144.

45. Градштейн И. С. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Москва : Физ-мат. гиз., 1963. – 1184 с.

46. Маслов В. П. Операторные методы / В. П. Маслов. – М. : Наука, 1973. – 544 с.

47. Sibiryakov B. P. Model of the structured continuum, and the relation between specific surface area, porosity and permeability / B. P. Sibiryakov, L. W. B. Leite, W. W. S. Vieira // Revista Brasileira de Geofisica. – 2013. – Vol. 31 (4). – P. 559–568.

48. Ризниченко Ю. В. Проблемы сейсмологии / Ю. В. Ризниченко. – М. : Наука, 1985. – 405 с.

49. Егоров Г. В. Бигармонические продольные и поперечные волны в искусственной пористой среде под аксиальной нагрузкой / Г. В. Егоров, Э. И. Машинский // Технологии сейсморазведки. – 2011. – № 1. – С. 72–77.

50. Зиатдинов С. Р. Примесные компоненты волны Рэлея / С. Р. Зиатдинов, Б. М. Каштан // Вопросы геофизики. – 2005. – Вып. 38. – С. 46–55.

51. Попова Е. В. Остаточные деформации грунтов при землетрясениях / Е. В. Попова // Вопросы инженерной сейсмологии. – Ч. I : 1974. – Вып. 16. – С. 209–251; Ч. II : 1975. – Вып. 17. – С. 150–205; Ч. III. – 1976. – Вып. 18. – С. 155–193; Ч. IV : 1978. – Вып. 19. – С. 171–190; Ч. V : 1980. – Вып. 20. – С. 190–203.

52. Seilacher A. Fault-graded bends interpreted as seismites / A. Seilacher // Sedimentology. – 1969. – Vol. 13. – P. 155–159.

53. Hempton M. R. Earthquake-induced deformational structures in young lacustrine sediments, East Anatolian Fault, southeast Turkey / M. R. Hempton, J. F. Dewey // Tectonophysics. – 1983. – Vol. 98, is. 3–4. – T7–T14.

54. Plaziat J.-C. Seismic deformation structures (seismites) in the syn-rift sediments of the NW Red Sea (Egypt) / J.-C. Plaziat, B. H. Purser, E. Philobbos // Bulletin de la Société géologique de France. – 1990. – Vol. VI, № 3. – P. 419–434.

55. Obermeier S. F. Liquefaction evidence for strong earthquakes of Holocene and latest Pleistocene ages in the states of Indiana and Illinois, USA / S. F. Obermeier // Engineering Geology. – 1998. – Vol. 50. – P. 227–254.

56. Jones A. P. Towards establishing criteria for identifying trigger mechanisms for soft-sediment deformation: a case study of Late Pleistocene lacustrine sands and clays, Onikobe and Nakayamadaira Basins, northeastern Japan / A. P. Jones, K. Omoto // Sedimentology. – 2000. – Vol. 47, № 6. – P. 1211–1226.

57. Moretti M. Soft-sediment deformation structures interpreted as seismites in middle-late Pleistocene Aeolian deposits (Apulian foreland, southern Italy) / M. Moretti // Sedimentary Geology. – 2000. – Vol. 135. – P. 167–179.

58. Becker A. Multiarchive paleoseismic record of late Pleistocene and Holocene strong earthquakes in Switzerland / A. Becker, M. Ferry, K. Monecke, M. Schnellmann, D. Giardini // Tectonophysics. – 2005. – Vol. 400. – P. 153–177.

59. González de Vallejo L. I. Paleoliquefaction features on Tenerife (Canary Islands) in Holocene sand deposits / L. I. González de Vallejo, M. Tsige, L. Cabrera // Engineering Geology. – 2005. – Vol. 76, is. 3–4. – P. 179–190.

60. Деев Е. В. Микросейсмодислокации (сейсмиты) в плейстоценовых осадках Горного Алтая / Е. В. Деев, А. С. Гибшер, Л. А. Чигвинцева, Т. В. Фролова, А. Б. Рябинин // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 403, № 1. – С. 71–74.

61. Guiraud M. Seismites in the fluviatile Bima sandstones: identification of paleoseisms and discussion of their magnitudes in a Cretaceous synsedimentary strike-

slip basin (Upper Benue, Nigeria) / M. Guiraud, J.-C. Plaziat // Tectonophysics. – 1993. – Vol. 225. – P. 493–522.

62. Rossetti D. F. Soft-sediment deformation structures in late Albian to Cenomanian deposits, Sao Luis Basin, northern Brazil: evidence for paleoseismicity / D. F. Rossetti // Sedimentology. – 1999. – Vol. 46. – P. 1065–1081.

63. Netoff D. Seismogenically induced fluidization of Jurassic erg sands, south-central Utah / D. Netoff // Sedimentology. – 2002. – Vol. 49. – P. 65–80.

64. Jewell H. E. An ancient seismites response to Taconian far-field forces: The Cane Run Bed, Upper Ordovician (Trenton) Lexington Limestone, central Kentucky (USA) / H. E. Jewell, F. R. Ettensohn // Journal of Geodynamics. – 2004. – Vol. 37. – P. 487–511.

65. Mazumder R. Soft-sediment deformation structures in the Earth's oldest seismites / R. Mazumder, A. J. van Loon, M. Arima // Sedimentary geology. – 2006. – Vol. 186. – P. 19–26.

66. Owen G. Experimental soft-sediment deformation: structures formed by the liquefaction of unconsolidated sands and some ancient examples / G. Owen // Sedimentology. – 1996. – Vol. 43. – P. 279–293.

67. Moretti M. Modelling seismites with a digital shaking table / M. Moretti, P. Alfaro, O. Caselles, J. A. Canas // Tectonophysics. – 1999. – Vol. 304. – P. 369–383.

68. Lowe D. R. Water escape structures in coarse-grained sediments / D. R. Lowe // Sedimentology. – 1975. – Vol. 22. – P. 157–204.

69. Allen J. R. L. Sedimentary structures: their character and physical basis / J. R. L. Allen. – New York: Elsevier, 1982. – Vol. II. – 663 p.

70. Owen G. Deformation processes in unconsolidated sands / G. Owen // Geological Society, London, Special Publications. – 1987. – Vol. 29 : Deformation of sediments and sedimentary rocks. – P. 11–24.

71. Alfaro P. Liquefaction and fluidization structures in Messinian storm deposits (Bajo Segura Basin, Betic Cordillera, southern Spain) / P. Alfaro, J. Delgado, A. Estévez, J. Molina, M. Moretti, J. Soria // International Journal of Earth Sciences. – 2002. – Vol. 91, is. 3. – P. 505–513.

72. Денисов Н. Я. Инженерная геология / Н. Я. Денисов. – М. : Госстройиздат, 1960. – 404 с.

73. Carcione J. M. Poisson ratio at high pore pressure / J. M. Carcione, F. Cavallini // Geophysical Prospecting. – 2002. – Vol. 50. – P. 97–106.

74. Carnavas P. C. Elastic properties of compacted metal powders / P. C. Carnavas, N. W. Page // Journal of material sciences. – 1998. – Vol. 33. – P. 4647–4655.

75. Сибиряков Е. Б. Зависимость между коэффициентом Пуассона и микроструктурой в микронеоднородной среде / Е. Б. Сибиряков // Физическая мезомеханика. – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 63–68.

76. Сибиряков Е. Б. Использование метода граничных интегральных уравнений для определения упругих модулей гранулированных геологических сред / Е. Б. Сибиряков, Е. В. Деев // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 85–93.

77. Shapiro S. A. Stress and pore pressure depending anisotropy of elastic waves / S. A. Shapiro, A. Kaselow // Poromechanics III – Biot Centennial (1905–2005) : Proceedings of the 3rd Biot Conference on Poromechanics. Norman, Oklahoma, USA, May 24–27, 2005. – London, 2005. – P. 167–172.

78. Yu G. Effect of pore pressure on compressional wave velocity in coals / G. Yu, K. Vozoff, D. W. Durney // Exploration Geophysics. – 1991. – Vol. 22, is. 2. – P. 475–480.

79. Мышкис А. Д. Математика для втузов / А. Д. Мышкис // Специальные курсы. – М. : Наука, 1971. – 632 с.

80. Сибиряков Б. П. Прогноз напряженного состояния и элементов гидродинамики флюида по данным многоволновой сейсморазведки / Б. П. Сибиряков, Е. Б. Сибиряков, А. Ф. Глебов, В. Н. Нестеров, Е. П. Соколов // Геология и геофизика. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 752–759.

81. Bakulin A. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data – Part I: HTI model due to a single fracture set, Part II: Fractured models with orthorhombic symmetry / A. Bakulin, V. Grechka, I. Tsvankin // Geophysics. – 2000. – Vol. 65. – P. 1788–1817.

82. Gorshkalev S. B. Evidence for Rapid Variation of Azimuthal Anisotropy in the Near Surface: An Example from Eastern Siberia, Russia / S. B. Gorshkalev, W. V. Karsten, K. A. Lebedev, I. V. Korsunov // Journal of Seismic Exploration. – 2007. – Vol. 16. – P. 319–330.

83. Каркашадзе Г. Г. Механическое разрушение горных пород / Г. Г. Каркашадзе. – М. : Изд-во МГГУ, 2004. – 222 с.

84. Sibiryakov B. P. Elastic properties of the empty skeleton in agranular collector / B. P. Sibiryakov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1983. – Vol. 24, № 4. – P. 578–581.

85. Конторович А. А. Юрубчено-Тахомская зона газонефтенакопления – важный объект концентрации региональных и поисково-разведочных работ в верхнем протерозое лено-тунгусской нефтегазоносной провинции / А. А. Конторович, А. Э. Конторович, В. А. Крипин, Л. Л. Кузнецов, В. Д. Накоряков, В. Г. Сибгатуллин, В. С. Сурков, А. А Трофимук // Геология и геофизика. – 1988. – № 11. – С. 45–56.

86. Сибиряков Е. Б. Об использовании метода граничных интегральных уравнений для определения параметров микронеоднородных сред / Е. Б. Сибиряков // Физическая мезомеханика. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 97–101.

87. Сибиряков Е. Б. Зависимость упругих модулей микронеоднородной среды от структуры порового пространства / Е. Б. Сибиряков // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 115–120.

88. Деев Е. В. Свидетельства сейсмичности Юго-Восточного Алтая в четвертичное время / Е. В. Деев, И. Д. Зольников, Е. Б. Сибиряков, С. А. Гуськов // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 426, № 6. – С. 777–781.

89. Сибиряков Е. Б. Структура порового пространства и расклинивающее давление в зернистой среде / Е. Б. Сибиряков, Б. П. Сибиряков // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т. 13, Спец. выпуск. – С. 40–43.

90. Лавриков С. В. Численное моделирование процессов деформирования целиков / С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко, Е. Б. Сибиряков // Известия Алтайского

государственного университета. Серия: Математика и механика. Управление, вычислительная техника и информатика. Физика. – 2012. – № 1/1 (73). – С. 72–74.

91. Сибиряков Е. Б. Зависимость эффективных упругих модулей кавернозных тел от частоты / Е. Б. Сибиряков // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, № 5 (327). – С. 126–134.

92. Сибиряков Б. П. Области локального понижения давлений как вероятные аккумуляторы флюидов в геологических структурах / Б. П. Сибиряков, Е. Б. Сибиряков // Геология и геофизика. – 2015. – Т. 56, № 7. – С. 1391–1397.

93. Sibiryakov B. P. Local low pressure areas in anticline structures / B. P. Sibiryakov, L. W. B. Leite, E. B. Sibiryakov, W. W. S. Vieira // Revista Brasileira de Geofisica. – 2015. – Vol. 33, is. 2. – P. 225–236.

94. Sibiryakov B. P. Intensification of Nonlinearity by Dispersed Events in Media with Structure and Generation of Various Dominant Frequencies in P- and S-Waves / B. P. Sibiryakov, E. B. Sibiryakov // Journal of Mining Science. – 2016. – Vol. 52, № 6. – P. 1090–1099.

95. Сибиряков Б. П. Зависимость преимущественной ориентации трещин от рельефа в верхней части разреза / Б. П. Сибиряков, Е. Б. Сибиряков // Технологии сейсморазведки. – 2016. − № 4. – С. 61–66.

96. Сибиряков Е. Б. Разрушение зернистых сред под действием порового давления / Е. Б. Сибиряков, Б. П. Сибиряков // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2017. – Т. 4, № 3. – С. 92–96.

97. Sibiryakov E. B. Destruction of granular media under pore pressure / E. B. Sibiryakov, B. P. Sibiryakov [Electronic resource] // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2018. – Vol. 134 : Geodynamics and Stress State of the Earth’s Interior (GSSEI 2017). – Article number 012061. – 4 p. – URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/134/1/012061/pdf (access date: 28.03.2018).

98. Сибиряков Е. Б. О детектировании шероховатых границ / Е. Б. Сибиряков // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т. 20, № 6. – С. 98–104.

99. Сибиряков Б. П. Динамика микронеоднородных сред, содержащих флюиды: учебное пособие / Б. П. Сибиряков, Е. Б. Сибиряков. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. – 286 с.

100. Алексеев А. С. Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли / А. С. Алексеев, В. С. Белоносов, Б. М. Глинский, В. В. Ковалевский, С. И. Смагин, А. Г. Фатьянов. – Новосибирск : Издательство СО РАН, 2010. – 310 с. – (Интеграционные проекты СО РАН; вып. 27).