Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович

ХОРОШИЕ КОЛЬЦА ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ, АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБР ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ И СИСТЕМЫ ФОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Крылов Петр Андреевич

Томск – 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Числовые матрицы используются во многих областях математики и в различных её приложениях. В алгебре часто встречаются и имеют большое значение так называемые формальные матрицы. Их называют также обобщенными матрицами. Элементы этих матриц могут принимать значение в нескольких кольцах и бимодулях. Формальные матрицы складываются и умножаются по стандартным правилам матричного сложения и умножения. В результате получается кольцо – кольцо формальных, или как еще говорят, обобщенных матриц. Это кольцо представляет собой важный алгебраический объект. Например, кольцо эндоморфизмов разложимого в прямую сумму модуля и любое кольцо с нетривиальным идемпотентом являются кольцами формальных матриц. Кольца формальных матриц играют важную роль в изучении ряда классов артиновых колец и алгебр. Исследование колец формальных матриц – это актуальное направление в современной теории колец и модулей. Оно имеет большое научное значение. В настоящее время эта тематика привлекает повышенное внимание зарубежных специалистов.

Кольца формальных матриц регулярно появляются в теории ассоциативных колец и алгебр во многих различных ситуациях. Они имеют большую убедительность и интуитивный иллюстрационный эффект, служат источником разнообразных примеров для общей теории колец и модулей. Информация о строении и свойствах колец формальных матриц интересна сама по себе и важна для понимания строения произвольных колец и алгебр. Изучение колец формальных матриц представляет большой интерес для алгебры и является актуальной задачей.

Элемент кольца называется хорошим, если его можно записать в виде суммы нескольких обратимых элементов. Хорошее кольцо это такое кольцо, каждый элемент которого является хорошим. Начало изучению колец, порождаемых аддитивно своими обратимыми элементами, положили Зелинский [86] и Вольфсон [82] в 1953–1954 годах, когда они независимо друг от друга показали, что всякое линейное отображение векторного пространства V над телом D есть сумма двух обратимых линейных отображений, кроме случая, когда $dim(V) = 1$ и $D = \mathbb{Z}_2$. Развивая данное направление исследований, Скорняков в 1958 году [71] поставил задачу описания такого рода колец. С иным подходом к этой проблеме независимо от предыдущих работ пришел Фукс. В [38] он сформулировал вопрос – «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно её кольцо эндоморфизмов?». В ответ за этим последовал ряд статей Стрингалла [76], Фридмана [37], Хилла [45] и Кастаньо [34] и других. В 1973 году Хенриксен [44] описал два широких класса колец порождаемых своими обратимыми элементами, такие кольца он называл (S, n)-кольцами. Один из них — кольца матриц над произвольным ассоциативным кольцом с единицей. Из недавних работ стоит отметить работы Вамоса [80] (он впервые использовал термин «*k-хорошее кольцо*»), Сриваставы [74], Ашрафи [27], Сяо и Тонг в [85] установили ряд взамиосвязей между k-хорошими и k-чистым кольцами. Напомним, кольцо называется k-чистым, если всякий его элемент представим в виде суммы идемпотента и k обратимых элементов.

В связи со всем этим изучение свойства хорошести кольца обобщенных матриц и отдельных матриц представляется актуальной задачей.

При изучении алгебраических систем важную роль играют отображения этих систем. Изоморфизмам и, в частности, автоморфизмам матричных колец и алгебр посвящено большое число работ как зарубежных, так и отечественных специалистов (см., например, [1], [15], [21], [24], [30], [50], [55]). Много исследовались и разного рода другие линейные отображения матричных колец: коммутирующие и централизующие отображения (например, [61], [83], [84]), различные эндоморфизмы Фробениуса (см. обзор [43]). На интуитивном уровне ясно, что свойства групп автоморфизмов должны быть связаны со свойствами исходных алгебраических систем. Актуальность изучения автоморфизмов алгебраических систем, в частности колец и алгебр, определяется их исключительным свойством выявлять внутреннюю структуру этих систем.

Решение систем линейных уравнений — одна из древнейших задач математики. Методы решений частных видов систем линейных уравнений появились задолго до нашей эры у шумер, вавилонян, древних египтян. Однако, эта тема по прежнему привлекает внимание специалистов и продолжает свое развитие в наши дни. Так, в области вычислительной математики разрабатываются новые эффективные алгоритмы решения систем линейных уравнений над различными областями целостности и кольцами, например, кольцами вычетов, алгебраисты же изучают условия разрешимости систем уравнений над разными классами колец. Попытка расширить само понятие системы линейных уравнений на случай, когда матрица системы — не обычная матрица, а формальная, кажется вполне закономерной и логичной.

Цели работы. Целями диссертационной работы являются описание хороших колец формальных матриц, отдельных формальных матриц, которые являются хорошими, автоморфизмов колец формальных матриц, и делителей нуля в кольцах формальных матриц, а также изучение систем формальных линейных уравнений. В процессе исследования были использованы известные методы и подходы теории колец и модулей, теории групп. Были развиты некоторые новые специфические подходы к рассмотрению свойства хорошести для формальных матриц. Получены аналоги некоторых результатов из теории колец матриц и систем линейных уравнений над коммутативным кольцом для колец формальных матриц над данным коммутативным кольцом и систем формальных уравнений.

Основные задачи работы. К основным задачам диссертационной работы можно отнести следующие.

- Найти условия при которых кольца формальных матриц и отдельные формальные матрицы будут хорошими.
- Представить группу автоморфизмов алгебр формальных матриц в виде полупрямого произведения подгрупп автоморфизмов с ясным строением.
- Найти связи между левосторонними и правосторонними делителями нуля в кольцах формальных матриц.
- Рассмотреть системы уравнений, матрицы которых являются формальными.

Методы исследований. В диссертации используются методы теорий колец, модулей, групп и линейной алгебры. Техника доказательств представляет тесное переплетение всех этих методов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. А именно, были получены некоторые условия, при которых кольца формальных матриц и отдельные формальные матрицы являются хорошими, группа автоморфизмов алгебры формальных матриц был представлена в виде полупрямого произведения подгрупп автоморфизмов с ясным строением, получены необходимы и достаточные условия разрешимости систем формальных уравнений, охарактеризованы делители нуля в кольцах формальных матриц.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования.

- Получено одно условие k-хорошести произвольного кольца формальных матриц.
- Показано, что всякая формальная матрица может быть записана в виде суммы диагональной и обратимой формальных матриц.
- При некоторых условиях найдено строение группы автоморфизмов алгебры формальных матриц.
- Найдены необходимые и достаточные условия существования решения как однородных, так и неоднородных систем формальных линейных уравнений (сокращенно — СФЛУ).
- Сформулирован и доказан аналог теоремы Крамера для СФЛУ.
- Установлено, что правые и левые делители нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном коммутативном кольце R совпадают и их определители как матриц являются делителями нуля в R.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты работы могут быть полезны специалистам, работающим в различных областях теории колец, колец матриц, колец формальных матриц и модулей. Материалы диссертации могут найти применение в учебном процессе при чтении специальных курсов студентам старших курсов математических направлений университетов и аспирантам.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Все результаты, сформулированные автором в диссертации, обоснованы строгими математическими доказательствами.

Апробация результатов. По основным результатам диссертации публиковались тезисы, делались доклады на конференциях: международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2015»

(Москва, 2015) [94], международная конференция «Алгебра и Логика: Теория и Приложения», посвященная 70-летию со дня рождения В.М. Левчука (Красноярск, 2016) [93], всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» (Томск, 2014, 2016, 2017) [91], [92], [95]. Также полученные результаты неоднократно докладывались и обсуждались на научном семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета. По теме диссертации опубликованы работы: [87]– [95], из них четыре в рецензируемых изданиях из списка изданий рекомендованных ВАК — [87], [88], [89], [90]. В совместных статьях с научным руководителем [87], [88] П. А. Крылову принадлежит постановка задач и выбор методов исследования, результаты и их доказательства получены в неразрывном сотрудничестве.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка условных обозначений и списка литературы. Первая глава содержит 3 раздела, вторая — 3, третья — 6, четвертая — 3. Работа изложена на 96 страницах. Список литературы содержит 95 наименований.

Содержание работы. Первая глава носит ознакомительный характер и необходима для общего знакомства с формальными матрицами и кольцами формальных матриц. В первом разделе приводятся некоторые определения и факты о матрицах над коммутативными кольцами — варианты их компактной записи, теорема о блочном умножении, определитель, миноры, алгебраические дополнения к элементам и теорема Лапласа. Второй посвящен формальным матрицам (или как еще говорят обобщенным матрицам) и кольцам формальных матриц. В самом его начале дан краткий исторический очерк развития этого направления исследований, далее следуют определения и некоторые результаты. В третьем разделе рассматривается один важный подкласс формальных матриц — формальные матрицы над данным кольцом, вводится понятие определителя формальной матрицы, перечисляются его важнейшие свойства, и формулируется важная теорема, полученная П.А. Крыловым и А.А. Туганбаевым [18], связывающая обратимость формальной матрицы с обратимостью ее определителя.

В центре внимания второй главы находятся хорошие формальные матрицы — формальные матрицы представимые в виде сумм обратимых матриц, а также кольца таких матриц. В первом разделе дается опреление k-хороших элементов колец, k-хороших колец, некоторые факты связанные с k-хорошестью, получено одно условие k-хорошести произвольного кольца формальных матриц. Во втором доказывается, что всякая формальная матрица может быть записана как сумма обратимой и диагональной формальных матриц. В третьем находятся условия, при которых диагональная формальная матрица второго порядка над кольцом целых чисел будет 2-хорошей.

В третьей главе изучаются автоморфизмы алгебр формальных матриц над данным коммутативным кольцом. В некоторых случаях группа автоморфизмов такой алгебры оказывается полупрямым произведением определенных подгрупп, строение которых известно. Первый раздел главы знакомит с автоморфизмами произведений алгебр матриц. В нем также приводятся некоторые классические результаты по этой теме, например, теорема Нётер-Сколема. Второй раздел посвящен одному классу колец формальных матриц, для которых в дальнейшем будет получено строение группы автоморфизмов. В следующем разделе речь идет об изоморфизмах бимодулей. Четвертый раздел посвящен вопросу о представимости автоморфизмов алгебр в виде матриц. В разделе 3.5

подробно описывается группа Ω, введенная в разделе 3.4. Последний раздел содержит основные результаты этой главы. Так, в теоремах 3.6.1 и 3.6.2 при некоторых дополнительных условиях находится группа автоморфизмов алгебры формальных матриц над данным коммутативным кольцом в виде полупрямого произведения подгрупп с известным строением.

Четвертая глава посвящена системам формальных уравнений и делителям нуля в кольце формальных матриц. В первом разделе вводится понятие l-ранга формальной матрицы — аналога ранга обычной матрицы из $M(n, R)$, перечисляются его основные свойства. Во втором речь идет о системах формальных линейных уравнений. Также там находятся необходимые и достаточные условия существования решения как однородных, так и неоднородных СФЛУ, формулируется аналог теоремы Крамера для СФЛУ. В последнем разделе данной работы удалось охарактеризовать односторонние делители нуля в кольцах формальных матриц над данным коммутативным кольцом. А именно, показано, что правые и левые делители нуля в них совпадают, а их определители как матриц являются делителями нуля в данном коммутативном кольце.

Автор искренне благодарит своего научного руководителя профессора Петра Андреевича Крылова за постановку задач, внимание к работе и помощь в оформлении научных статей и диссертации; выражает признательность профессорам Тимошенко Егору Александровичу и Чехлову Андрею Ростиславовичу, доценту Мисякову Виктору Михайловичу за полезные замечания, сделанные во время его выступлений на научном семинаре кафедры алгебры Томского государственного университета.

Глава 1. Кольца формальных матриц

Первая глава посвящена формальным матрицам и кольцам формальных матриц. Она носит вводный характер. В разделе 1.1 приводятся некоторые сведения из теории обычных матриц над коммутативным кольцом. В 1.2 вводятся формальные матрицы порядка 2 и произвольного порядка $n \geqslant 2$. В 1.3 рассматривается один подкласс формальных матриц — матрицы над данным кольцом. Вводится определитель таких матриц, а также приводятся некоторые результаты, связанные с ним, например, устанавливается связь между обратимостью формальной матрицы и обратимостью ее определителя.

1.1 Матрицы над коммутативными кольцами

В этом разделе мы рассмотрим некоторые основные понятия и факты линейной алгебры, теории числовых матриц, имеющие смысл и справедливые для матриц над произвольным коммутативным кольцом. Подробно с данной темой можно ознакомиться в работах [31], [4, Гл.6], [22, Гл.13].

Напомним, что через $M(m \times n, R)$ мы обозначаем группу всех $(m \times n)$-матриц с элементами из некоторого кольца R.

Далее, в этом разделе, все кольца предполагаются коммутативными с единицей, если не указано иное.

Определение 1.1.1. *Пусть* $A \in M(m \times n, R)$. *Транспонированием матрицы* A *назовем следующий* R*-модульный изоморфизм —* $(-)^T : M(m \times n, R) \to M(n \times m, R)$ *такой, что* $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$. A^T *в этом случае называем транспонированной матрицей для матрицы* A.

Мы договорились через $\mathrm{Col}_i(A)$ и $\mathrm{Row}_j(A)$ обозначать соответственно i-ый столбец и j-ую строку матрицы $A \in M(m \times n, R)$. То есть, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, R),$$

то $\mathrm{Row}_j(A) = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ и $\mathrm{Col}_i(A) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})^T$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Замечание 1.1.1. $\mathrm{Row}_j(A) \in M(1 \times n, R)$, $\mathrm{Col}_i(A) \in M(m \times 1, R)$.

Всякую матрицу $A \in M(m \times n, R)$ можем записать в строчном виде:

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{Row}_1(A) \\ \mathrm{Row}_2(A) \\ \dots \\ \mathrm{Row}_m(A) \end{pmatrix}.$$

Для удобства далее будем записывать построчное разбиение горизонтально и каждую строку обозначать греческой буквой. Например, если $\mathrm{Row}_j(A) = \lambda_j$, $\forall j = 1, \dots, m$, тогда $A = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$.

Таким же образом будем поступать со столбцами. То есть, пусть, например, $\mathrm{Col}_i(A) = \delta_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Тогда $A = (\delta_1 \mid \delta_2 \mid \dots \mid \delta_n)$.

Замечание 1.1.2. *Умножение матриц над коммутативным кольцом вводится так же, как и умножение числовых матриц, то есть, если* $A \in M(m \times n, R)$, $B \in M(n \times p, R)$, *то* $[AB]_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}$, $\forall i = 1, \dots, m$ *и* $\forall j = 1, \dots, p$.

Теорема 1.1.1. *Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $B \in M(n \times p, R)$. Положим:*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rk} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \dots & B_{kt} \end{pmatrix},$$

где каждое A_{ij} — это $(m_i \times n_j)$-подматрица матрицы A, а B_{jl} — $(n_j \times p_l)$-подматрица матрицы B и $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_t = p$. Положим $\forall j = 1, \ldots, t$, $\forall i = 1, \ldots, r$: $C_{ij} = \sum\limits_{q=1}^{k} A_{iq} B_{qj}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Такое же, как и в классическом случае. См. [32, Гл.1,Т.3.10]. □

Следствие 1.1.1. *Если $A \in M(m \times n, R)$ и $\xi = (x_1, \ldots, x_n) \in M(1 \times n, R)$, то $\xi A = x_1 \cdot \mathrm{Col}_1(A) + x_2 \cdot \mathrm{Col}_2(A) + \ldots + x_n \cdot \mathrm{Col}_n(A)$.*

Следствие 1.1.2. *Если $A \in M(m \times n, R)$ и $B \in M(n \times p, R)$, то $A \cdot B = (A \cdot \mathrm{Col}_1(B) \mid A \cdot \mathrm{Col}_2(B) \mid \ldots \mid A \cdot \mathrm{Col}_n(B))$.*

Напомним, что через $CS(A)$ мы условились обозначать подмодуль модуля R^m, порождаемый столбцами матрицы A.

Из 1.1.1 следует, что $CS(A) = \{A\xi \mid \xi \in R^n\}$.

Если $A \in M(m \times n, R)$ и $B \in M(n \times p, R)$, то $CS(AB) \subseteq CS(A)$. Это действительно так, потому что j-ый столбец AB есть линейная комбинация столбцов A и элементов j-го столбца B.

Результаты подобные вышеописанным можно привести и для строк.

Определение 1.1.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$. *Определителем матрицы* A, *обозначаемым через* $det(A)$ *или* $|A|$, *называется следующий элемент кольца* R — $det(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$.

S_n здесь — множество всех перестановок номеров $1, \ldots, n$. Если $\sigma \in S_n$, то $\operatorname{sgn}(\sigma)$ определяет знак σ. Если σ четная, то $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, а если нечетная, то $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. Сумма берется по всем $n!$ перестановкам в S_n.

Определение 1.1.3. *Пусть* $A \in M(m \times n, R)$ *и* $1 \leqslant t \leqslant min\{m, n\}$. *Под* $(t \times t)$*-минором* Δ *матрицы* A *понимаем определитель* $(t \times t)$*-подматрицы в* A. *Эта* $(t \times t)$*-подматрица составляется из* t *строк и* t *столбцов матрицы* A. *Пусть* $i_1, \ldots, i_t$ — *индексы этих строк, а* $j_1, \ldots, j_t$ — *индексы столбцов. Обычно будем полагать* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqslant m$ *и* $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leqslant n$.

При необходимости отметить, какие именно строки и столбцы формируют Δ будем писать $\Delta(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_t)$.

Для всяких $i, j = 1, \ldots, n$ через $M_{ij}(A)$ будем обозначать $(n-1) \times (n-1)$-минор матрицы $A \in M(n \times n, R)$, полученный исключением i-ой строки и j-го столбца.

Определение 1.1.4. *Пусть* $A \in M(n, R)$. *Элемент* $(-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ *кольца* R *будем называть* ij*-ым кофактором матрицы* A *или алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} *и обозначать как* $cof_{ij}(A)$.

Теорема 1.1.2 (Лапласа). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in M(n, R)$. *Справедливы равенства:*

(a) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot cof_{kj}(A) = \delta_{ij} \cdot det(A)$, $\forall i, k = 1, \ldots, n$;

(b) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot cof_{ik}(A) = \delta_{jk} \cdot det(A)$, $\forall j, k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. См. [32, Гл.3, Т.3.13], [4, Гл.6, §3, Т.6]. □

Определение 1.1.5. *Назовем присоединенной, союзной или взаимной матрицей к матрице* $A = (a_{ij}) \in M(n, R)$ *матрицу* A^**, состоящую из алгебраических дополнений к элементам* a_{ji} *матрицы* A*. То есть,* $[A^*]_{ij} = cof_{ji}(A)$*,* $\forall j, i = 1, \ldots, n$*.*

Замечание 1.1.3. *Используя предыдущее определение, теорему 1.1.2 можно переписать в виде:*

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = det(A) \cdot E. \tag{1}$$

1.2 Формальные матрицы

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц проистекают из работ японского математика Киити Мориты (1915–1995). В 1958 году он в статье «*Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*» [64] ввел объект, который позже был назван *контекстом Мориты*. Контекст Мориты — это набор $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$, состоящий из колец R и S, бимодулей ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$, и определенным образом связанных между собой бимодульных гомоморфизмов φ и ψ. Он пришел к нему при изучении контравариантных функторов D_1 и D_2 между категориями модулей *Mod-R* и *Mod-S* таких, что выполняются условия $D_1D_2 = Id_{Mod-R}$ и $D_2D_1 = Id_{Mod-S}$. (Позже им было доказано, что это функторы Hom.) Спустя 10 лет Хайман Басс в своей книге «*Algebraic K-Theory*» [28] упомянул контекст Мориты как *ситуацию предэквивалентности.*

Вскоре было обнаружено, что контексты Мориты очень удобны как инструмент обобщения в теории колец. Например, в 1962-ом году Басс, используя их, смог доказать теорему Веддербёрна о структуре простых колец [29], а Амицур [25], в 1971-ом, — теорему Голди [39], [40], теорему Веддербёрна о структуре полупростых артиновых колец и некоторые факты о кольцах эндоморфизмов модулей. В частности, он доказал, что кольцо эндоморфизмов примитивного кольца примитивно. Вообще, контексты Мориты прямо или косвенно использовались в огромном множестве работ о $\mathrm{Hom}_R(M, M)$. Смотри, например, [26], [36], [46], [53], [56].

Еще контексты Мориты хорошо подходят для переноса свойств с одного кольца R на другое кольцо S. Одним из примеров тут может служить изучение радикалов колец. Так в [25] Амицур показал, что $N\mathfrak{R}(S)M \subseteq \mathfrak{R}(R)$, где $\mathfrak{R}(-)$ — локально нильпотентный радикал, радикал Джекобсона или нильрадикал. Этот результат был позже расширен на больший класс радикалов Сендсом в его статье «*Radicals and Morita contexts*» [69]. Подобные работы, в которых контексты Мориты используются для изучения радикалов, — [66], [51], [52]. Другой пример — изучение колец частных колец R и S. Например, Мюллер [65], при помощи контекстов Мориты, смог установить связи между кольцами частных колец R и S, в тех случаях, когда модули ${}_RM$, M_S, ${}_SN$ и N_R точные. Больше результатов по этой теме — [47], [48], [49], [54], [60].

По данному контексту Мориты всегда можно построить кольцо матриц вида $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$, называемое кольцом контекста Мориты или кольцом формальных матриц. Эта тема также хорошо изучена и по ней было написано множество трудов. В упомянутой выше статье Сендса [69], было получено устройство различных радикалов таких колец (включая радикал Джекобсона и нильрадикал). Из недавних стоит отметить работы П.А. Крылова [15], [14], П.А. Крылова и А.А. Туганбаева [18], [17], [58], [59], [57], [20], Г.Танга и Я.Чжоу [77], [78], [79].

Именно этого подхода — рассмотрение контекстов Мориты как колец матриц

— будем придерживаться далее.

Пусть R и S — кольца, M — R-S-бимодуль и N — S-R-бимодуль. Рассмотрим множество матриц K вида:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| \, r \in R, s \in S, m \in M, n \in N \right\}. \tag{2}$$

Легко видеть, что относительно поэлементного сложения это множество образует абелеву группу.

Так же легко видеть, что обычное матричное произведение (см. замечание 1.1.2) не подходит для таких матриц. Чтобы определить умножение на этом множестве корректно, необходимо уметь вычислять «произведения» элементов бимодулей M и N так, чтобы они попадали в кольца R и S. Для этого предположим, что нам даны два бимодульных гомоморфизма $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$ и $\psi : N \otimes_R M \longrightarrow S$. Полагаем $\varphi(m \otimes n) = mn$ и $\psi(n \otimes m) = nm$ для всех $m \in M$ и $n \in N$. Теперь можем записать произведение матриц из K:

$$\begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & m_2 \\ n_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 + m_1 n_2 & r_1 m_2 + m_1 s_2 \\ n_1 r_2 + s_1 n_2 & n_1 m_2 + s_1 s_2 \end{pmatrix},$$
$$r_1, r_2 \in R, \quad s_1, s_2 \in S, \quad m_1, m_2 \in M, \quad n_1, n_2 \in N. \tag{3}$$

Отметим, что $r_1 m_2$, $m_1 s_2$, $n_1 r_2$, $s_1 n_2$ — соответствующие модульные произведения. Также для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ должны выполняться равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$. Тогда, как нетрудно проверить, множество K относительно указанных операций сложения и умножения образует кольцо.

Верно и обратное, если K — кольцо, то выполнены и равенства ассоциативности.

Определение 1.2.1. *Полученное кольцо K называется* ***кольцом формальных матриц*** *второго порядка или как еще говорят* ***кольцом обобщенных матриц****, или* ***кольцом контекста Мориты*** *и обозначается через*

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

или иногда через $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$.

В случае, когда $M = 0$ или $N = 0$ получаем кольца формальных нижних или верхних треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Под изучением кольца формальных матриц естественно понимать выяснение того как его свойства связаны со свойствами колец R и S, бимодулей M и N, гомоморфизмов φ и ψ.

Замечание 1.2.1 ([18]). *Вообще говоря, выбор разных пар гомоморфизмов φ и ψ приводит к разным кольцам формальных матриц.*

Отдельно можно отметить так называемую *проблему изоморфизма.* Пусть $K = (R, S, M, N, \varphi, \psi)$ и $K' = (R, S, M, N, \varphi', \psi')$ — два кольца формальных матриц с бимодульными гомоморфизмами φ, ψ и φ', ψ'. Как должны быть связаны эти гомоморфизмы, чтобы существовал изоморфизм $K \cong K'$? Подробно эта проблема разбирается в работах [15], [17], [58], [1], [24], [30], [55].

Определение 1.2.2. *Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ являются идеалами колец R и S соответственно. Они называются идеалами следа кольца K. В случае, когда $\varphi = 0 = \psi$ будем говорить, что K — кольцо с нулевыми идеалами следа или тривиальное кольцо.*

Через MN и NM договоримся обозначать множества всех конечных сумм элементов вида mn и nm. Верны равенства:

$$I = MN, \quad J = NM, \quad IM = MJ, \quad NI = JN.$$

Замечание 1.2.2. *Часто бывает удобно отождествлять формальные матрицы с соответствующими элементами. То есть, матрицу*

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

можно отождествлять с элементом $r \in R$. Такие же условия примем и для множеств матриц. Например, множество матриц

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

записываем в виде (X, Y).

Пусть T — произвольное кольцо, содержащее нетривиальный идемпотент e (то есть, $e^2 = e, \quad e \neq 1, 0$). Можем составить кольцо матриц

$$K = \begin{pmatrix} eTe & eT(1-e) \\ (1-e)Te & (1-e)T(1-e) \end{pmatrix},$$

где $eTe = \{exe \mid x \in T\}$ и $(1-e)T(1-e) = \{(1-e)x(1-e) \mid x \in T\}$ — кольца, обозначим их через R и S, а $eT(1-e) = \{ex(1-e) \mid x \in T\}$ и $(1-e)Te = \{(1-e)xe \mid x \in T\}$ — R-S и S-R-бимодули. Несложно проверить, что соответствие

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} exe & ex(1-e) \\ (1-e)xe & (1-e)x(1-e) \end{pmatrix},$$

задает изоморфизм между T и K.

К этому же можно было прийти, двигаясь с обратной стороны. Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — некоторое кольцо формальных матриц и $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$. Используя соглашения о записях матриц (см. замечание 1.2.2), можем записать равенство

$$K = \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно сказать, что класс колец формальных матриц совпадает с классом колец, содержащих нетривиальный идемпотент.

Он также совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму. Пусть G — правый модуль над некоторым кольцом T. Допустим, существует нетривиальное прямое разложение $G = A \oplus B$. Тогда имеет место изоморфизм колец

$$\mathrm{End}_T(G) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}_T(A) & \mathrm{Hom}_R(B,\ A) \\ \mathrm{Hom}_R(A,\ B) & \mathrm{End}_T(B) \end{pmatrix}.$$

Кольцо $\begin{pmatrix} \mathrm{End}_T(A) & \mathrm{Hom}_R(B,\ A) \\ \mathrm{Hom}_R(A,\ B) & \mathrm{End}_T(B) \end{pmatrix}$ берется с обычными операциями сложения и умножения матриц, а в качестве произведения гомоморфизмов — их композиция.

Обратно, для кольца $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ можем записать разложение $K_K = (R,\ M) \oplus (N,\ S)$ в прямую сумму правых идеалов и убедиться в том, что кольцо $\mathrm{End}_K(K)$ изоморфно кольцу K.

По аналогии с определением 1.2.1 можем ввести кольца формальных матриц любого порядка $n \geqslant 2$.

Пусть $n \geqslant 2$ и пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — кольца, M_{ij} — R_i-R_j-бимодули, причем

$M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что для любых $i, j, k = 1, \ldots, n$, таких, что $i \neq j$ и $j \neq k$, задан R_i-R_k-бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \longrightarrow M_{ik}.$$

Для индексов $i = j$ и $j = k$ считаем, что φ_{iik} и φ_{ikk} — это канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \longrightarrow M_{ik}, \quad M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \longrightarrow M_{ij}.$$

Далее $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ будем обозначать через $a \circ b$ или просто ab, для $a \in M_{ij}$ и $b \in M_{jk}$. Также как для колец формальных матриц порядка 2 требуем выполнения равенств ассоциативности $(ab)c = a(bc)$ для всех $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ и $c \in M_{kl}$.

Рассмотрим множество K всех матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}:

$$K = \left\{ \left. \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & r_2 & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & r_n \end{pmatrix} \right| m_{ij} \in M_{ij}, i, j = 1, \ldots, n \right\}. \qquad (4)$$

Нетрудно проверить, что K образует кольцо относительно привычного матричного сложения и умножения, вводимого с помощью бимодульных гомоморфизмов φ_{ijk}.

Определение 1.2.3. *Кольцо K называем* ***кольцом формальных матриц порядка n*** *и будем обозначать его через*

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Если $M_{ij} = 0$ для всех i, j с условием $i < j$ $(j < i)$, то говорим, что K — кольцо формальных верхних (нижних) треугольных матриц.

Предложение 1.2.1 ([18]). *Кольцо K является кольцом формальных матриц порядка $n \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда в K существует полная ортогональная система из n ненулевых идемпотентов.*

Действительно, матричные единицы $E_{11}, E_{22}, \dots, Enn$ в K образуют нужную систему идемпотентов.

Если T — некоторое кольцо и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — полная ортогональная система ненулевых идемпотентов в T, то T изоморфно кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} e_1Te_1 & e_1Te_2 & \dots & e_1Te_n \\ e_2Te_1 & e_2Te_2 & \dots & e_2Te_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_nTe_1 & e_nTe_2 & \dots & e_nTe_n \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.2.2 ([18]). *Класс колец формальных матриц порядка n совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму n ненулевых слагаемых.*

Вообще, изучение колец формальных матриц порядка $n \geqslant 2$, если нужно, можно иногда свести к изучению колец формальных матриц порядка 2.

Пусть K — кольцо формальных матриц порядка $n \geqslant 2$:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $R = R_1$, $M = (M_{12}, \dots, M_{1n})$, $N = (M_{21}, \dots, M_{n1})^T$ и

$$S = \begin{pmatrix} R_2 & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ M_{32} & R_3 & \dots & M_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n2} & M_{n3} & \dots & R_n \end{pmatrix},$$

где R — кольцо, S — кольцо формальных матриц порядка $n-1$, M — R-S-бимодуль и N — S-R-бимодуль, причем модульные умножения задаются как произведения строк и столбцов на матрицы. Бимодульные гомоморфизмы φ_{ijk} задают гомоморфизмы $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$ и $\psi : N \otimes_R M \longrightarrow S$. Между тем, нужные законы ассоциативности остаются в силе. И, таким образом, имеем кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ и изоморфизм $K \cong \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

Замечание 1.2.3. *В итоге можем заключить, что формальные матрицы, как и обычные, можно представлять в блочном виде. Действия над блочными матрицами проводим так же, как если бы вместо блоков были отдельные элементы. Умножение блочных матриц всегда выполнимо, когда сомножители имеют одинаковые разбиения.*

Есть несколько способов построения кольца формальных матриц большего порядка исходя из данного.

Пусть K — кольцо формальных матриц порядка n:

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем некоторую последовательность чисел $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{N}$. Через $\bar{M}_{ij}$

обозначим множество $(s_i \times s_j)$-матриц с элементами из M_{ij}. Пусть $\bar{K}$ — множество всех блочных матриц $(\bar{M}_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Сложение и умножение матриц из $\bar{K}$ введем обычным образом. Заметим, что $A_{ij} \cdot A_{jk} \in \bar{M}_{ik}$, для любых матриц $A_{ij} \in \bar{M}_{ij}$ и $A_{jk} \in \bar{M}_{jk}$. Итак, $\bar{K}$ превращается в кольцо формальных блочных матриц и, в то же время, $\bar{K}$ — кольцо формальных матриц порядка $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.

Еще один способ — пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц порядка 2. Доказывается, что существуют кольца матриц

$$K_4 = \begin{pmatrix} K & \begin{pmatrix} M \\ S \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} N & S \end{pmatrix} & S \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad K_2 = \begin{pmatrix} K & \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R & M \end{pmatrix} & S \end{pmatrix}.$$

1.3 Формальные матрицы над данным кольцом

Пусть R — произвольное кольцо. Кольцо матриц $M(2, R)$ конечно же является кольцом формальных матриц $\begin{pmatrix} R & {}_RR_R \\ {}_RR_R & R \end{pmatrix}$, где кольца на главной диагонали совпадают, а в качестве бимодулей берется R-R-бимодуль ${}_RR_R$ (который, конечно же, по сути есть кольцо R). Бимодульные гомоморфизмы ${}_RR_R \otimes_R {}_RR_R \longrightarrow R$ также совпадают и действуют по правилу $x \otimes y \longrightarrow xy$. Как уже отмечалось (см. замечание 1.2.1), выбор разных пар гомоморфизмов приводит к разным кольцам формальных матриц. Как они могут быть устроены в случаях отличных от $M(2, R)$?

Пусть $(R,\ R,\ {}_RR_R,\ {}_RR_R,\ \varphi,\ \psi)$ — кольцо формальных матриц. Возьмем отображение $\varphi : {}_RR_R \otimes_R {}_RR_R \longrightarrow R$. Полагаем $x \circ y = \varphi(x \otimes y)$ для элементов

$x, y \in {}_R R_R$. Обозначим $\varphi(1 \otimes 1) = s$. Тогда

$$x \circ y = \varphi(x \otimes y) = x\varphi(1 \otimes 1)y = xsy.$$

По свойствам тензорного произведения получаем

$$\varphi(1 \otimes 1)xy = \varphi(1 \otimes xy) = \varphi(x \otimes y) = \varphi(xy \otimes 1) = xy\,\varphi(1 \otimes 1).$$

То есть, $\varphi(1 \otimes 1) = s$ является центральным элементом кольца R. Следовательно, можем записать $x \circ y = s\,xy$.

Переходя ко второму гомоморфизму — $\psi : {}_R R_R \otimes_R {}_R R_R \longrightarrow R$, опять же полагаем $x \circ y = \psi(x \otimes y)$ для элементов $x, y \in {}_R R_R$ и обозначаем $\psi(1 \otimes 1) = t$. Также как и для φ получаем, $\psi(1 \otimes 1) \in C(R)$ и $x \circ y = \psi(x \otimes y) = txy$.

По свойству ассоциативности $\varphi(x \otimes y)z = x\psi(y \otimes z)$ для любых $x, y, z \in {}_R R_R$. Тогда при $x = y = z = 1$ находим, что $s = \varphi(1 \otimes 1)1 = 1\psi(1 \otimes 1) = t$.

Таким образом, в произвольном кольце формальных матриц вида $(R,\ R,\ {}_R R_R,\ {}_R R_R,\ \varphi,\ \psi)$ произведение устроено так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + sbg & af + bh \\ ce + dg & scf + dh \end{pmatrix}. \tag{6}$$

То есть, в результате слагегмые, являющиеся произведениями элементов из модулей, на главной диагонали умножаются на какой-то центральный элемент s кольца R.

Вообще говоря, верно и обратное. То есть, всякий центральный элемент s кольца R определяет кольцо формальных матриц второго порядка над R с умножением вида (6).

Определение 1.3.1. *Такое кольцо* $(R,\ R,\ {}_R R_R,\ {}_R R_R,\ \varphi,\ \psi)$ *называем* ***кольцом формальных матриц порядка 2 над данным кольцом*** *R, а* *центральный элемент s, связанный с гомоморфизмами φ и ψ, — множителем этого кольца. Обозначаем его через $M(2, R, s)$.*

Впервые такие кольца появились в работе П.А. Крылова «Об изоморфизме колец обобщенных матриц» [15]. Позже они изучались в [18], [17], [58], [14], [59], [57], [20], [77], [78], [41], [42], [88], [91].

Теперь рассмотрим аналогичное кольцо произвольного порядка $n \geqslant 2$.

Возьмем кольцо K формальных матриц порядка n, в котором $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$ и ${}_{R_i}{M_{ij}}_{R_j} = {}_RR_R$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. И пусть $\varphi_{ijk} : {}_RR_R \otimes_R {}_RR_R \to R$, $i, j, k = 1, \ldots, n$ — бимодульные гомоморфизмы кольца K. Обозначим $\varphi_{ijk}(1 \otimes 1) = s_{ijk}$ для любой тройки $i, j, k = 1, \ldots, n$. Как и для случая $n = 2$, получаем

$$x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = x\varphi_{ijk}(1 \otimes 1)y = xs_{ijk}y$$

и $xs_{ijk} = \varphi_{ijk}(x \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes x) = s_{ijk}x$, то есть s_{ijk} — центральный элемент в R, и, в итоге, $x \circ y = s_{ijk}xy$.

Так как φ_{iij} и φ_{ijj} совпадают с каноническим изоморфизмом ${}_RR_R \otimes_R {}_RR_R \to R$, $x \otimes y \longrightarrow xy$, то $s_{iij} = 1 = s_{ijj}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

Из свойства ассоциативности $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, положив $x = y = z = 1$, получаем, что $s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl}$, для всех $i, j, k, l = 1, \ldots, n$.

Полученные равенства

$$s_{iij} = 1 = s_{ijj} \quad \text{и} \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl} \tag{7}$$

называем *основными тождествами.*

Пусть теперь $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — некоторое множество центральных элементов кольца R, удовлетворяющих тождествам 7. Для любых трех индексов i, j, k можно определить бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk} : {}_R R_R \otimes_R {}_R R_R \to R, \quad x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk} xy, \ \ x, y \in R.$$

Эти гомоморфизмы определяют кольцо формальных матриц порядка n в смысле раздела 2. То есть, можно сделать вывод о наличии взаимно-однозначного соответствия между такими кольцами и множествами центральных элементов Σ.

Определение 1.3.2. *Кольцо определенное выше называем* ***кольцом формальных матриц порядка*** n ***над данным кольцом*** R *и обозначаем его* $M(n, R, \Sigma)$ *или* $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, *множество* Σ *—* ***системой множителей*** *кольца* $M(n, R, \Sigma)$, *а его элементы —* ***множителями****.*

Замечание 1.3.1. *Нетрудно убедиться, что* $M(n, R, \Sigma)$ *также образует алгебру относительно кольца* R.

Замечание 1.3.2. *Если* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n, R, \{s_{ijk}\})$, *то*

$$A \circ B = C = (c_{ij}) \ \ \text{и} \ \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}. \tag{8}$$

Из основных тождеств 7, полагая $i = k$, можно вывести равенство $s_{iji} = s_{ijl} \cdot s_{jil}$. Значит, $s_{jij} = s_{jil} \cdot s_{ijl}$ и поэтому $s_{iji} = s_{jij}$. Теперь, взяв $j = l$, имеем $s_{jkj} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}$. Следовательно $s_{iji} = s_{lij} \cdot s_{lji}$. Таким образом, можем записать

$$s_{iji} = s_{jij} = s_{ijl} \cdot s_{jil} = s_{lij} \cdot s_{lji}. \tag{9}$$

Из равенств 9 получаются следующие тождества, вытекающие друг из друга перестановкой индексов:

$$\begin{aligned} s_{iji} = s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}, \\ s_{jkj} = s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}, \\ s_{iki} = s_{kik} = s_{ikj} \cdot s_{kij} = s_{jik} \cdot s_{jki}. \end{aligned} \tag{10}$$

В свою очередь, из этих равенств можно вывести следующую лемму.

Лемма 1.3.1. *Пусть индексы i, j, k попарно различны. Тогда для элементов s_{iji}, s_{jkj} и s_{kik} имеет место только одна из следующих трех возможностей:*

(1) *все три элемента — неделители нуля;*

(2) *какие-то два из этих трех элементов — делители нуля, а третий элемент — неделитель нуля;*

(3) *все три элемента — делители нуля.*

Пусть дано кольцо $M(n, R, \Sigma)$. С ним всегда можно связать так называемые *матрицы множителей* S и S_k. Положим

$$S = (s_{iji}) = \begin{pmatrix} s_{111} & s_{121} & \dots & s_{1n1} \\ s_{212} & s_{222} & \dots & s_{2n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1n} & s_{n2n} & \dots & s_{nnn} \end{pmatrix}.$$

Теперь для каждого $k = 1, \dots, n$ составим матрицу

$$S_k = (s_{ikj}) = \begin{pmatrix} s_{1k1} & s_{1k2} & \dots & s_{1kn} \\ s_{2k1} & s_{2k2} & \dots & s_{2kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{nk1} & s_{nk2} & \dots & s_{nkn} \end{pmatrix}.$$

Матрица S является симметрической, а главная диагональ S_k совпадает с k-й строкой и k-м столбцом матрицы S, k-я строка и k-й столбец S_k состоят из единиц.

Как и в случае произвольных колец формальных матриц (см. замечание 1.2.1) для $M(n, R, \Sigma)$ можно сформулировать проблему изоморфизма и некоторые связанные с ней задачи:

(I) *Задача реализации и характеризации.* При выполнении каких условий $(n \times n)$-матрицы $T,\ T_1, \ldots, T_n$ с элементами из центра $C(R)$ являются матрицами множителей для какого-то кольца $M(n, R, \Sigma)$?

(II) *Задача классификации.* Описать кольца $M(n, R, \Sigma)$ в зависимости от систем множителей Σ и матриц множителей.

(III) *Проблема изоморфизма.* При каких условиях две системы множителей Σ и Σ' определяют два изоморфных кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \Sigma')$?

Их решению посвящено множество работ. Например, [18], [17], [15], [58], [59], [57], [20], [1], [24].

Предложение 1.3.1. *Пусть $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — система множителей кольца формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$. Множество $\Sigma^T = \{t_{ijk} \in C(R) \mid t_{ijk} = s_{kji} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ также будет системой множителей. То есть, можем говорить о существовании кольца $M(n, R, \Sigma^T)$, обозначаемого через K^T. Причем, если $S, S_1, \ldots, S_n$ — матрицы множителей K, то $S^T, S_1^T, \ldots, S_n^T$ — матрицы множителей K^T.*

Следствие 1.3.1. *Пусть R — коммутативное кольцо. Транспонирование $A \mapsto A^T$ является антиизоморфизмом колец $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \Sigma^T)$, и верно равенство $(A \circ B)^T = B^T * A^T$, где произведение в правой части вычисляется в K^T.*

Следствие 1.3.2. *Пусть R — коммутативное кольцо. Равенство $(A \circ B)^T = B^T * A^T$ выполняется для любых $A,\ B \in M(n, R, \Sigma)$ тогда и только тогда, когда $s_{ikj} = s_{jki}$, $\forall i, j, k = 1, \ldots, n$.*

Вообще, произвольные кольца формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$ со значениями в данном кольце могут очень сильно отличаться от обычных колец матриц

$M(n, R)$. Так, в [1] было показано, что эти кольца изоморфны в том и только в том случае, когда все множители s_{ijk} из Σ — обратимые элементы в R.

Однако, даже на фоне таких различий, оказывается возможным ввести понятие определителя формальной матрицы над коммутативным кольцом, и показать, что он обладает свойствами, аналогичными основным свойствам обычного определителя обычных матриц.

Далее всюду в этом разделе R — коммутативное кольцо.

Зафиксируем число $l \in \{1, ..., n\}$ и положим $t_{ij} = s_{ijl}$ для всех $i, j \in \{1, ..., n\}$. Рассмотрим отображение

$$\eta_l : M(n, R, \Sigma) \to M(n, R), \quad (a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij}). \tag{11}$$

Предложение 1.3.2. *Верны следующие утверждения:*

(1) η_l *— кольцевой гомоморфизм;*

(2) *если множитель s_{ikj} делится на t_{ik} или t_{kj} для любых i, j, k, то* Ker η_l *— нильпотентный идеал индекса 2;*

(3) η_l *инъективно только тогда, когда все множители s_{ijk} — неделители нуля;*

(4) η_l *— изоморфизм только тогда, когда все множители s_{ijk} обратимы.*

Доказательство. См. [18, §5, Пр.5.2]. □

Определение 1.3.3. *Пусть $A \in M(n, R, \Sigma)$, обозначим $d(A) = |\eta_l(A)|$. Элемент $d(A) \in R$ называем* ***определителем формальной матрицы*** *A, а отображение $d : M(n, R, \Sigma) \to R$, $A \mapsto d(A)$ —* ***определителем кольца*** *$M(n, R, \Sigma)$.*

Есть еще один эквивалентный способ определения $d(A)$ (смотри [18, §10]). Не будем приводить его здесь, но отметим, что из него вытекает следующий важный факт.

Следствие 1.3.3. *Значение* $d(A) = |\eta_l(A)|$ *не зависит от выбора номера* $l \in \{1, ..., n\}$. *Другими словами,* $|\eta_1(A)| = |\eta_2(A)| = \cdots = |\eta_n(A)| = d(A)$.

Перечислим теперь основные свойства определителя формальных матриц.

Предложение 1.3.3. (1) $d(E) = 1$*;*

(2) *определитель* d *является полилинейной функцией строк матрицы;*

(3) *если матрица* A' *получена из матрицы* A *перестановкой* i*-й и* j*-й строк, то* $d(A') = -s_{iji} \cdot d(A)$*;*

(4) *если в* A *есть пропорциональные строки, то* $d(A) = 0$*;*

(5) $d(A \circ B) = d(A) \cdot d(B)$ *для любых матриц* $A, B \in M(n, R, \Sigma)$*;*

(6) *если* $s_{ijk} = s_{kji}$ *для всех* i, j, k*, то* $d(A) = d(A^T)$ *для любой формальной матрицы* A*. Обратное верно только если все множители* s_{iji} *— неделители нуля в* R*;*

(7) *если матрицу* A *можно представить в блочном виде* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$*, то* $d(A) = d(B) \cdot d(C)$*.*

Доказательство. Можно найти в [18, §10]. □

Завершим первую главу результатом, полученным П.А. Крыловым и А.А. Туганбаевым [18]. Он имеет очень важное значение для этой работы, для дальнейшего исследования хороших матриц, так как устанавливает связь между обратимостью формальной матрицы из $M(n, R, \Sigma)$ и ее определителем.

Теорема 1.3.1 (Крылов-Туганбаев). *Пусть* $A \in M(n, R, \Sigma)$. *Матрица* A *обратима тогда и только тогда, когда её определитель* $d(A)$ *— обратимый элемент в кольце* R.

Глава 2. Хорошие кольца формальных матриц

Вторая глава посвящена хорошим формальным матрицам, то есть, формальным матрицам, которые могут быть записаны в виде суммы нескольких обратимых и кольцам таких матриц. В разделе 2.1 вводится понятие k-хорошего элемента кольца, k-хорошего кольца, некоторые общие факты о хорошести, получено одно условие k-хорошести произвольного кольца формальных матриц. В 2.2 показано, что всякая формальная матрица может быть записана в виде суммы диагональной и обратимой формальных матрицы. В третьем рассматриваются некоторые условия, при которых диагональные формальные матриц над кольцом целых чисел, являющихся 2-хорошими.

2.1 k-хорошие кольца

Определение 2.1.1. *Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 2$, R — произвольное кольцо. Элемент a кольца R называется k-хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R. Кольцо называется k-хорошим, если каждый его элемент является k-хорошим.*

Замечание 2.1.1. *Если R не является хорошим ни для какого $k \in \mathbb{N}$, но все его элементы k-хорошие для разных номеров k, то будем называть R — ω-хорошим.*

Напомним, что два элемента a и b кольца R *эквивалентными*, если $b = uav$ для некоторых обратимых элементов u, v кольца R. Если a и b эквивалентны, пишем $a \sim b$.

Имеет место следующая лемма, полученная в [80].

Лемма 2.1.1. *Пусть R — кольцо и $a, b \in R$. Тогда верны утверждения:*

1. *Если $a \sim b$, то для всякого $k \geqslant 1$ a — k–хороший в точности тогда, когда b — k–хороший.*

2. *Пусть 1_R — 2–хороший элемент, если a — k–хороший, то a — l–хороший для любого $l \geqslant k \geqslant 1$.*

3. *Если R — k–хорошее, то R будет и l–хорошим для любого $\omega > l \geqslant k$.*

Доказательство. Справедливость первых двух пунктов очевидна. Приведем доказательство только для третьего.

3. Пусть R — k–хорошее, $\omega > l \geqslant k$, $a \in R$.

Тогда $a' = a - (l-k)1_R \in R$ тоже будет k-хорошим. Следовательно можем записать $a = a' + (l-k)1_R = a' + 1_R + \cdots + 1_R$. То есть, получили, что R — l–хорошее. □

Замечание 2.1.2. *В силу пункта 3 предыдущей леммы, говоря о хорошести кольца R, имеет смысл подразумевать минимальное $k \in \mathbb{N}$, такое, что R — k–хорошее.*

Изучение колец, порождаемых аддитивно своими обратимыми элементами, началось в 1953–1954 годах, когда Вольфсон [82] и Зелинский [86] независимо друг от друга показали, что всякое линейное отображение векторного пространства V над телом D есть сумма двух обратимых линейных отображений, кроме случая, когда $dim(V) = 1$ и $D = \mathbb{Z}_2$. Это значит, что кольцо линейных преобразований $End(V)$ порождается аддитивно своими обратимыми элементами. В 1958 году Скорняков [71] поставил задачу описания такого рода колец. В [68] Рафаэль, отвечая на вопрос Скорнякова, дал начало систематическому изучению таких колец, которые он навал S-кольцами. Независимо от предыдущих работ к этой проблеме пришел Фукс. В [38] он сформулировал вопрос – «Когда автоморфизмы абелевой группы порождают аддитивно её кольцо эндоморфизмов?».

За этим последовал ряд статей Стрингалла [76], Фридмана [37], Хилла [45] и Кастаньо [34]. В 1973 году Хенриксен [44] описал два широких класса колец порождаемых своими обратимыми элементами, такие кольца он называл (S, n)-кольцами. Один из них — кольца матриц над произвольным ассоциативным кольцом с единицей. А именно, он показал, что всякая матрица всегда может быть записана как сумма трех обратимых. Тогда же он привел пример матриц не являющихся 2-хорошими. Позже с этими кольцами работали Вамос [80] (он впервые использовал термин «*k-хорошее кольцо*»), Сривастава [74]. Имеется несколько статей, посвященных различным k-хорошим кольцам. Так, например, в [80] и [74] получены результаты по k-хорошести регулярных колец фон Неймана, правых самоинъективных колец.

Следующая теорема устанавливает связь между хорошестью кольца формальных матриц и хорошестью колец с его главной диагонали.

Теорема 2.1.1. *Кольцо формальных матриц K будет k–хорошим, $k \geqslant 2$, если все R_i — k-хорошие кольца для некоторого $k > 1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть все R_i — k-хорошие кольца, $k \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$, и $X \in K$. Запишем матрицу в полном виде:

$$X = \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & r_2 & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & r_n \end{pmatrix}.$$

Зададим матрицы A, B и C следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $X = A + B + C$.

Так как все R_i — k-хорошие кольца, то каждый r_i можно записать в виде суммы k обратимых элементов в соответствующих кольцах:

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 + \ldots + u_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^1 + \ldots + u_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 + \ldots + u_n^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} u_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^k \end{pmatrix} = U_1 + \ldots + U_k.$$

где $U_1, \ldots, U_k$ — обратимые матрицы.

Определим теперь матрицы A' и C' следующим образом:

$$A' = A + U_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & u_2^1 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_n^1 \end{pmatrix}, C' = C + U_2 = \begin{pmatrix} u_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & u_2^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & u_n^1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что A' и C' — обратимые матрицы как треугольные матрицы с обратимыми элементами на главной диагонали.

Таким образом, имеем $X = A + B + C = A' + C' + U_3 + \ldots + U_k$ — сумма k обратимых матриц.

Итак, K является k-хорошим кольцом. Что и требовалось доказать. □

2.2 О суммах обратимых и диагональных формальных матриц

В этом разделе для удобства будем указывать порядок кольца формальных матриц, приписывая его снизу. То есть, через K_n обозначаем кольцо формальных матриц порядка n с элементами на главной диагонали из колец $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и из R_i-R_j-бимодулей M_{ij} на остальных местах. Через E_n — формальную единичную матрицу этого кольца.

В 1974-ом году Хенриксен [44], ссылаясь на Капланского, показал, что $M(n, R)$ — 3-хорошее кольцо. А именно, он доказал, что всякая матрица из этого кольца представима в виде суммы диагональной и обратимой матриц. В свою очередь диагональная матрица порядка $n > 1$ всегда может быть записана как сумма двух обратимых матриц. В этой же статье он отмечает, что до беседы с Капланским мог доказать лишь 4-хорошесть $M(n, R)$. Аналогичный результат о 4-хорошести кольца $M(n, R)$ независимо был получен П.А. Крыловым [16, Теорема 1.2.].

На кольцо $M(n, R)$, как уже отмечалось, можно смотреть как на кольцо формальных матриц. На главной диагонали матриц из $M(n, R)$ находятся элементы кольца R. На остальных местах — элементы R-R-бимодуля R. Умножение задается с помощью тождественных гомоморфизмов. Встает естественный вопрос — будет ли справедливым результат Хенриксена для произвольных колец формальных матриц?

Покажем далее, что любая формальная матрица также есть сумма диагональной и обратимой формальных матриц.

Доказательство следующей леммы элементарно.

Лемма 2.2.1. *Пусть R — кольцо, $x \in R$, $p, q \in U(R)$. Если $p \cdot x \cdot q = 1$, то $x \in U(R)$ и $x^{-1} = q \cdot p$.*

Лемма 2.2.2. *Пусть U' — формальная матрица порядка $n+1$, которую можно записать в виде блочной матрицы 2-го порядка:*

$$U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix},$$

где U — обратимая формальная матрица порядка n, B — вектор-столбец длины n, C — вектор-строка длины n. Тогда U' — обратимая матрица и

$$(U')^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} + (-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.2.1. *Умножение формальной матрицы на вектор-столбец или вектор-строку элементов из соответствующих бимодулей возможно. О блочных формальных матрицах, действиях над ними и над их блоками смотри замечание 1.2.3 и рассуждения перед ним.*

Доказательство.(**леммы 2.2.2**) Положим

$$P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } Q = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная формальная матрица порядка n. Утверждаем, что P и Q — обратимые матрицы.

Действительно, убедимся, что

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ и } Q^{-1} = \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получим:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_n \cdot E_n + 0(CU^{-1}) & E_n \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ (-CU^{-1})E_n + 1(CU^{-1}) & (-CU^{-1})0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_n \cdot E_n + 0(-CU^{-1}) & E_n \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ (CU^{-1})E_n + 1(-CU^{-1}) & (CU^{-1})0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$QQ^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U^{-1}U + (-U^{-1}B)0 & U^{-1}B + (-U^{-1}B)1 \\ 0 \cdot U + 1 \cdot 0 & 0B + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}Q = \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} UU^{-1} + B \cdot 0 & U(-U^{-1}B) + B \cdot 1 \\ 0 \cdot U^{-1} + 1 \cdot 0 & 0(-U^{-1}B) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем обратимость матрицы U'. Вычислим произведение

$$PU' = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1 + CU^{-1}B \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} E_nU + 0 \cdot C & E_nB + 0(1 + CU^{-1}B) \\ -CU^{-1}U + 1 \cdot C & -CU^{-1}B + 1(1 + CU^{-1}B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}.$$

Теперь имеем равенства:

$$(PU')Q = Q^{-1}Q = E_{n+1}. \tag{12}$$

Итак, получили, что $(PU')Q = E_{n+1}$, где P и Q — обратимые формальные матрицы порядка $n+1$ из K_{n+1}. Тогда по лемме 2.2.1 U' — обратимая формальная матрица и

$$(U')^{-1} = QP = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} U^{-1} + (-U)^{-1}B(-C)U^{-1} & (-U)^{-1}B \\ -CU^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$\square$

Теорема 2.2.1. *Любая матрица из K_n может быть записана как сумма диагональной и обратимой матриц.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Так как $a = (a-1)+1$ для любого элемента a из любого кольца R, то теорема верна для $n = 1$.

Пусть она верна для кольца K_n при некотором $n \geqslant 1$. Покажем, что она верна и для кольца K_{n+1}.

Пусть $X \in K_{n+1}$. Тогда можем записать $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix}$, где $A \in K_n$, B — вектор-столбец длины n, C — вектор-строка длины n и $d \in R_{n+1}$.

По предположению индукции A есть сумма диагональной и обратимой матриц, то есть $A = D + U$, где D — диагональная, U — обратимая формальные матрицы порядка n.

Тогда если положить

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & d-1-CU^{-1}B \end{pmatrix} \text{ и } U' = \begin{pmatrix} U & B \\ C & 1+CU^{-1}B \end{pmatrix}, \tag{14}$$

то будет верно равенство $X = D' + U'$, где D' — диагональная матрица, U' — обратимая матрица (по предыдущей лемме 2.2.2).

Что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, к задаче описания формальных матриц, представимых в виде суммы k обратимых, можно подойти как к задаче описания $(k-1)$-хороших диагональных формальных матриц.

В общем случае диагональная формальная матрица 2-хорошей, конечно же, не будет. То есть, встает задача описания условий, при которых обеспечивается 2-хорошесть или k-хорошесть (для какого-нибудь k) диагональных формальных матриц. Это сложный вопрос. В [91] и в следующем разделе для случая диагональных матриц второго порядка над кольцом целых чисел на него дается ответ.

2.3 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом $\mathbb{Z}$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, R, s)$ — формальная матрица порядка 2 над данным кольцом R. Чему равен ее определитель $d(A)$? Построим гомоморфизмы η_1 и η_2, определенные в 11, и найдем значения $\eta_1(A)$ и $\eta_2(A)$.

Эти отображения действуют по правилу $\eta_l : (a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$, где $t_{ij} = s_{ijl}$. Отсюда, и в силу основных тождеств 7, имеем

$$\eta_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & s \cdot b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \eta_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ s \cdot c & d \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определитель $d(A) = |\eta_1(A)| = |\eta_2(A)|$ может быть найден по формуле:

$$d(A) = a \cdot d - s \cdot c \cdot b,$$

где s — множитель кольца $M(2, R, s)$, некоторый центральный элемент в R.

В третьем разделе первой главы была приведена теорема 1.3.1, полученная П.А. Крыловым и А.А. Туганбаевым в [18]. Повторим для удобства здесь ее формулировку.

Теорема 1.3.1 (Крылов-Туганбаев). *Пусть дано кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, где R — коммутативное кольцо с единицей. Пусть A — матрица из этого кольца. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда её определитель — обратимый элемент кольца R.*

Зная правило вычисления определителя формальной матрицы порядка 2, из теоремы 1.3.1 можем получить общие условия 2-хорошести формальных матриц порядка 2.

Следствие 2.3.1. *Пусть $M(2, R, s)$ — кольцо формальных матриц порядка 2 над коммутативным кольцом R. Диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ будет 2-хорошей в $M(2, R, s)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $x, y, a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$, что $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ и $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x \cdot y \in U(R)$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x \cdot y \in U(R)$.*

Доказательство. Очевидным образом следует из теоремы 1.3.1. □

Заменяя произвольное кольцо R на кольцо целых чисел, получим условие:

Следствие 2.3.2. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ будет 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие целые числа x, a_1, a_2, b_1, b_2, что $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ и $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x \in \{-1, 1\}$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x \in \{-1, 1\}$.*

Доказательство. Очевидным образом следует из теоремы 1.3.1 и следствия 2.3.1. □

Далее изложим конкретные условия для 2-хорошести диагональных формальных матриц над $\mathbb{Z}$.

Предложение 2.3.1. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо формальных целочисленных матриц порядка 2 и пусть множитель s — четное число. Если диагональная матрица $= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ является 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$, то тогда её элементы a и b — четные числа.*

Доказательство. Пусть множитель s — четное число, и матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ — 2-хорошая. Тогда по следствию 2.3.2 найдутся такие целые числа x, a_1, a_2, b_1, b_2, что $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ и $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x \in \{-1, 1\}$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x \in \{-1, 1\}$.

Пусть a — нечетное. Тогда либо a_1 — четно и a_2 — нечетно, либо наоборот, a_2 — четно и a_1 — нечетно. Для определенности пусть a_1 — четно и a_2 — нечетно. Тогда $(a_1 \cdot b_1 - s \cdot x) \in \{-1, 1\}$, где $a_1 \cdot b_1$ и $s \cdot x$ — четные числа, в сумме дающие нечетное. Очевидное противоречие. Таким образом, a должно быть четным, если матрица — 2-хорошая, вне зависимости от четности b.

Аналогичным образом доказывается, что и b должно быть четным числом, если матрица — 2-хорошая. □

Теорема 2.3.1. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо целочисленных формальных матриц порядка 2. Диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ будет 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$ тогда и только тогда, когда $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$ при нечетном множителе s, и $a \in \{0; 2; -2\}$ при четном.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошая матрица из $M(2, \mathbb{Z}, s)$.

Тогда
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x \\ z & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -x \\ -z & -y \end{pmatrix} = U_1 + U_2,$$
где U_1 и U_2 — обратимые матрицы из $M(2, \mathbb{Z}, s)$. По теореме 1.3.1 U_1 и U_2 — обратимы тогда и только тогда, когда $|U_1|$ и $|U_2| \in U(\mathbb{Z})$. Напомним, что $U(\mathbb{Z}) = \{1; -1\}$. То есть

$$|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z \in \{-1, 1\},$$

$$|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z \in \{-1, 1\}.$$

Таким образом, возможны четыре случая:

1)$|U_1| = 1$ и $|U_2| = 1$,

2)$|U_1| = 1$ и $|U_2| = -1$,

3)$|U_1| = -1$ и $|U_2| = 1$,

4)$|U_1| = -1$ и $|U_2| = -1$.

Рассмотрим каждый из них по отдельности.

1) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = 1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = 1$. Выразим a_1 и a_2:
$$a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$
Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} = 0.$$

Получили, что в первом случае a может быть равно только нулю.

2) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = 1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = -1$. Выразим a_1 и a_2:
$$a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{1 + s \cdot x \cdot z + 1 - s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{2}{y}.$$

Итак, $a = \dfrac{2}{y}$, причем $a \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $y \in \{1; -1; 2; -2\}$ и $a \in \{1; -1; 2; -2\}$. Получили, что во втором случае a может быть равно только $1, -1, 2$ или -2.

3) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = -1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = 1$. Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z - 1 - s \cdot x \cdot z}{y} = \frac{-2}{y}.$$

Итак, $a = \dfrac{-2}{y}$, причем $a \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $y \in \{1; -1; 2; -2\}$ и $a \in \{1, -1, 2, -2\}$. Получили, что в третьем случае a может быть равно только $1, -1, 2$ или -2.

4) Пусть $|U_1| = a_1 \cdot y - s \cdot x \cdot z = -1$ и $|U_2| = a_2 \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = -1$. Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Известно, что $a = a_1 + a_2$. Тогда имеем

$$a = a_1 + a_2 = \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} - \frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{y} = 0.$$

Получили, что в четвертом случае a может быть равно только нулю.

Таким образом, если $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошая матрица, то $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$.

В случае, когда множитель s кольца $M(2, \mathbb{Z}, s)$ четен, элемент a 2-хорошей матрицы $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ может быть только четен (см. предложение 2.3.1), то есть $a \in \{0; 2; -2\}$.

Обратно. Пусть s четно и пусть $a \in \{0; 2; -2\}$. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошей? Запишем

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x \\ z & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -x \\ -z & -y \end{pmatrix} = U_1 + U_2.$$

Пусть $a = 0$. Возьмем тогда

$$a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}, a_2 = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y}.$$

Получим

$$|U_1| = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} \cdot y - s \cdot x \cdot z = 1,$$

$$|U_2| = -\frac{1 + s \cdot x \cdot z}{y} \cdot (-y) - s \cdot x \cdot z = 1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть $a = 2$. Возьмем тогда $y = 1$, $a_1 = 1 + s \cdot x \cdot z$, $a_2 = 1 - s \cdot x \cdot z$. Получим

$$|U_1| = (1 + s \cdot x \cdot z) \cdot 1 - s \cdot x \cdot z = 1,$$

$$|U_2| = (1 - s \cdot x \cdot z) \cdot (-1) - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть $a = -2$. Возьмем тогда $y = -1$, $a_1 = -1 - s \cdot x \cdot z$, $a_2 = -1 + s \cdot x \cdot z$. Получим

$$|U_1| = (-1 - s \cdot x \cdot z) \cdot (-1) - s \cdot x \cdot z = 1,$$

$$|U_2| = (-1 + s \cdot x \cdot z) \cdot 1 - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть теперь s нечетно и пусть $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$.

При $a \in \{0; 2; -2\}$ доказательство проводится аналогично случаю с четным множителем s.

Пусть $a = 1$. Возьмем тогда

$$y = 2, a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{2}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{2}.$$

Получим

$$|U_1| = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{2} \cdot 2 - s \cdot x \cdot z = 1,$$
$$|U_2| = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{2} \cdot (-2) - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

Пусть $a = -1$. Возьмем тогда

$$y = -2, a_1 = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{-2}, a_2 = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{-2}.$$

Получим

$$|U_1| = \frac{1 + s \cdot x \cdot z}{-2} \cdot (-2) - s \cdot x \cdot z = 1,$$
$$|U_2| = -\frac{-1 + s \cdot x \cdot z}{-2} \cdot 2 - s \cdot x \cdot z = -1.$$

То есть, U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

$\square$

Замечание 2.3.1. *Утверждение аналогичное теореме 2.3.1 можно доказать и для матриц вида* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Предложение 2.3.2. *Пусть* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *— кольцо формальных целочисленных матриц порядка 2. Матрица вида* $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *будет 2-хорошей тогда и только тогда, когда* a *равно 0.*

Доказательство. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошая. Тогда она может быть записана в виде суммы двух обратимых матриц U_1 и U_2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a_1 \\ z & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & a_2 \\ -z & -y \end{pmatrix} = U_1 + U_2.$$

Матрицы U_1 и U_2 обратимы тогда и только тогда, когда

$$|U_1| = x \cdot y - s \cdot z \cdot a_1 \in \{-1, 1\},$$

$$|U_2| = (-x) \cdot (-y) + s \cdot z \cdot a_2 \in \{-1, 1\}.$$

Выразим a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{\mp 1 + x \cdot y}{s \cdot z}, \; a_2 = \frac{\pm 1 - x \cdot y}{s \cdot z}.$$

Тогда

$$a = \frac{\mp 1 + x \cdot y}{s \cdot z} + \frac{\pm 1 - x \cdot y}{s \cdot z} = \frac{0}{s \cdot z} = 0.$$

Обратно. Пусть $a = 0$. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — 2-хорошей? Запишем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a_1 \\ z & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & a_2 \\ -z & -y \end{pmatrix} = U_1 + U_2.$$

Положим

$$a_1 = \frac{1 + x \cdot y}{s \cdot z}, \; a_2 = \frac{-1 - x \cdot y}{s \cdot z}.$$

Теперь вычислим определители матриц U_1 и U_2:

$$|U_1| = x \cdot y - s \cdot z \cdot \frac{1 + x \cdot y}{s \cdot z} = -1$$

$$|U_2| = x \cdot y + s \cdot z \cdot \frac{-1 - x \cdot y}{s \cdot z} = -1.$$

Получили, что U_1 и U_2 — обратимые матрицы. Следовательно, A — 2-хорошая.

□

Замечание 2.3.2. *Утверждение аналогичное предложению 2.3.2 можно доказать и для матриц вида* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 3. Автоморфизмы алгебр формальных матриц

В этой главе изучаются автоморфизмы алгебр формальных матриц над данным коммутативным кольцом. В некоторых случаях группа автоморфизмов такой алгебры оказывается полупрямым произведением определенных подгрупп, строение которых известно. Первый раздел главы знакомит с автоморфизмами произведений алгебр матриц. В нем также приводятся некоторые классические результаты по этой теме, например, теорема Нётер-Сколема. Второй раздел посвящен одному классу колец формальных матриц, для которых в дальнейшем будет получено строение группы автоморфизмов. В следующем разделе речь идет об изоморфизмах бимодулей. Четвертый раздел посвящен вопросу о представимости автоморфизмов алгебр в виде матриц. В разделе 3.5 подробно описывается группа Ω, введенная в разделе 3.4. Последний раздел содержит основные результаты этой главы. Так, в теоремах 3.6.1 и 3.6.2 при некоторых дополнительных условиях находится группа автоморфизмов алгебры формальных матриц в виде полупрямого произведения подгрупп с известным строением.

3.1 Автоморфизмы произведений алгебр матриц

Изоморфизмам и, в частности, автоморфизмам матричных колец и алгебр посвящено большое число статей (например, [88], [1], [15], [21], [24], [30], [50], [55]). Много исследовались и разного рода другие линейные отображения матричных колец: коммутирующие и централизующие отображения (например, [61], [83], [84]), различные эндоморфизмы Фробениуса (см. обзор [43]).

Приведём две известные теоремы об автоморфизмах алгебр матриц. В случае матриц над полем имеется следующий классический результат.

Теорема 3.1.1 (Нётер-Сколема). *Пусть F — поле. Каждый автомор-*

физм алгебры матриц $M(n, F)$ являются внутренним.

Пусть R — коммутативное кольцо. Обозначим через $NS(R)$ фактор-группу группы $\mathrm{Aut}_R(M(n, R))$ по подгруппе внутренних автоморфизмов. В [50] группа $NS(R)$ называется *группой Нётер-Сколема.*

Теорема 3.1.2 ([50]). *Группа $NS(R)$ является абелевой группой, порядки элементов которой делят n.*

Далее R обозначает неразложимое коммутативное кольцо, m — натуральное число большее или равное двум.

Возьмём кольцо $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$, где каждое K_i есть кольцо матриц $M(k_i, R)$ для какого-то $k_i \geqslant 1$. Получим некоторую информацию об автоморфизмах R-алгебры L.

Лемма 3.1.1. *Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}_R(L)$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, m$ найдется индекс j такой, что $\alpha K_i = K_j$.*

Доказательство. Запишем $1 = e_1 + \ldots + e_m$, где e_i — единица кольца K_i, $i = 1, \ldots, m$. Возьмём, например, $i = 1$. Нетрудно проверить, используя неразложимость R, что $\alpha(e_1) = e_{j_1} + \ldots + e_{j_t}$ для каких-то индексов $j_1, \ldots, j_t$. Для любого $x \in K_1$ имеем $\alpha(x) \in K_{j_1} \oplus \ldots \oplus K_{j_t}$. Если ограничение α на K_1 не является изоморфизмом, то найдется элемент $y \in L$, имеющий нулевую проекцию в K_1, т. е. $\alpha(y) \in K_{j_1} \oplus \ldots \oplus K_{j_t}$ и $\alpha(y) \neq 0$. В таком случае из $e_1 y = 0$ следует $\alpha(e_1)\alpha(y) = 0$. Последнее равенство противоречиво, так как $\alpha(e_1)$ — единичный элемент кольца $K_{j_1} \oplus \ldots \oplus K_{j_t}$. Следовательно, α есть изоморфизм кольца K_1 на $K_{j_1} \oplus \ldots \oplus K_{j_t}$. Это возможно, учитывая, что в K_1 нет центральных идемпотентов, кроме 0 и 1, только при $t = 1$. Лемма доказана. □

Можно сделать вывод, что любой автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_R(L)$ «переставляет» кольца $K_1, \ldots, K_m$. Выделим в группе $\mathrm{Aut}_R(L)$ некоторую группу подстановок на множестве колец $K_1, \ldots, K_m$. Для этого разобьём множество колец $K_1, \ldots, K_m$ на классы эквивалентности относительно отношения изоморфизма колец. Затем в каждом классе пронумеруем все кольца. Возьмем какой-то класс колец, и пусть для простоты $K_1, \ldots, K_l$ — нумерация колец из этого класса. Для каждого $s = 1, \ldots, l$ фиксируем некоторый изоморфизм $\varepsilon_{s1} : K_1 \to K_s$, причем ε_{11} — тождественный автоморфизм кольца K_1. Далее полагаем $\varepsilon_{1s} = \varepsilon_{s1}^{-1}$ и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{i1} \cdot \varepsilon_{1j} : K_j \to K_i$ для любых $i, j \in \{2, \ldots, l\}$.

Пусть σ — некоторая подстановка степени l. Определим автоморфизм α_σ R-алгебры $K_1 \oplus \ldots \oplus K_l$, считая, что α_σ действует на K_i как изоморфизм $\varepsilon_{\sigma(i)i}$. Тогда ясно, что $(\alpha_\sigma)^{-1} = \alpha_{\sigma^{-1}}$. Если τ — ещё подстановка, то верно равенство $\alpha_{\tau\sigma} = \alpha_\tau \alpha_\sigma$. Таким образом, сопоставление $\sigma \to \alpha_\sigma$ есть изоморфное вложение симметрической группы S_l степени l в $\mathrm{Aut}_R(K_1 \oplus \ldots \oplus K_l)$. Его образ обозначим через Σ_l. Далее полагаем $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_t$, где t — число классов определенной выше эквивалентности колец. Подгруппа автоморфизмов Σ изоморфна некоторой группе подстановок степени m. Можно отождествить Σ с этой группой подстановок, т. е. считать, что $\alpha_\sigma = \sigma$.

Введем еще одну подгруппу группы $\mathrm{Aut}_R(L)$, где напомним, $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$. Положим $\Gamma = \{\mu \in \mathrm{Aut}_R(L) \mid \mu K_i = K_j, \forall i = 1, \ldots m\}$. Тогда Γ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}_R(L)$ и $\Gamma \cap \Sigma = \langle e \rangle$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(L)$. На основании леммы 3.1.1 автоморфизм φ индуцирует подстановку τ степени m. При этом, $\varphi\alpha_\tau^{-1} \in \Gamma$. Обозначив $\mu = \varphi\alpha_\tau^{-1}$, получаем $\varphi = \mu\alpha_\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\alpha_\tau \in \Sigma$. Можно сказать, что группа $\mathrm{Aut}_R(L)$ есть полупрямое произведение $\Gamma \leftthreetimes \Sigma$ подгрупп Γ и Σ.

3.2 Один класс колец формальных матриц

В первой главе, в предложении 1.3.1 был рассмотрен один из простых способов получения систем множителей из уже имеющихся для колец формальных матриц со значениями в данном кольце. Приведем еще один такой способ.

Убедимся, что можно задать действие симметрической группы степени n на системах множителей и, следовательно, на кольцах формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$ (соответствующие орбиты будут состоять из изоморфных колец).

Пусть τ — подстановка степени n. Действие τ на матрицах известно — для матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n полагаем $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$. Здесь имеется в виду, что в матрице τA в позиции (i, j) стоит элемент $a_{\tau(i)\tau(j)}$.

Теперь, если $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — некоторая система множителей, то положим $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$. Тогда $\{t_{ijk} \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$ — тоже система множителей, поскольку она удовлетворяет основным тождествам 7. Обозначим её через $\tau\Sigma$. Следовательно, существует кольцо формальных матриц $M(n, R, \tau\Sigma)$. Кольца $M(n, R, \Sigma)$ и $M(n, R, \tau\Sigma)$ изоморфны при соответствии $A \to \tau A$.

Далее введем на множестве чисел $\{1, \ldots, n\}$ бинарное отношение «$\sim$», полагая $i \sim j \Leftrightarrow s_{iji}$ — неделитель нуля.

Лемма 3.2.1. *Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Прямо следует из основных тождеств 7 и леммы 1.3.1. □

Составим подстановку τ следующим образом. В верхней строке поставим числа от 1 до n в естественном порядке. Нижняя строка состоит из классов эквивалентности относительно отношения «$\sim$», расположенных в произвольном порядке. Внутри классов числа располагаются также в произвольном порядке. Тогда в матрице τS на главной диагонали стоят блоки, состоящие из неделителей нуля. Блоки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности относительно отношения «$\sim$». Порядок данного блока равен числу элементов соответствующего класса эквивалентности. Все позиции в матрице τS вне рассматриваемых блоков заняты делителями нуля.

Как было замечено выше, кольца K и τK изоморфны при соответствии $A \to \tau A$, $A \in K$. Для упрощения записей условимся, что матрица множителей S кольца K уже имеет указанный выше блочный вид.

Далее будем рассматривать более узкий класс колец формальных матриц. Считаем в дальнейшем, что любой множитель s_{iji} равен либо единице, либо нулю. В таком случае в матрице S в блоках расположенных на главной диагонали стоят единицы, а вне их — нули. Пусть число блоков на главной диагонали матрицы S равно m и они имеют порядки $k_1, \dots, k_m$, $k_1 + \dots + k_m = n$

На главной диагонали всякой матрицы A из K выделим блоки $A_1, \dots, A_m$ того же порядка и в той же последовательности, что и на главной диагонали матрицы S. Тогда блоки A_l для фиксированного l всех матриц из K образуют кольцо обычных матриц $K_l = M(k_l, R)$.

До конца раздела буква L будет обозначать прямую сумму колец $K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$.

Через I обозначим множество всех матриц $A \in K$, для которых выделенные выше блоки $A_1, \dots, A_m$ матрицы A состоят из нулей.

Предложение 3.2.1. *I — идеал кольца K.*

Доказательство. Возьмем произвольные матрицы $A = (a_{ij})$ из I и $X = (x_{ij})$ из K. Пусть позиция (i, k) находится в одном из блоков $A_1, \dots, A_m$. Утверждаем, что $s_{ijk}x_{ij}a_{jk} = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим только неочевидный случай, когда $i \neq j$ и $j \neq k$. Если $a_{jk} \neq 0$, то обязательно $s_{jkj} = 0$. Так как $s_{iki} = 1$, то из равенств (1.10) вытекает $s_{ijk} = 0$. Откуда $s_{ijk}x_{ij}a_{jk} = 0$.

Получили, что все блоки на главной диагонали матрицы XA состоят из нулей. Следовательно, $XA \in I$. Аналогично, $AX \in I$. $\square$

Итак, I — идеал кольца K и верно равенство $K = L \oplus I$, другими словами, K *есть расщепляющееся расширение идеала* I *с помощью кольца* L. То есть, всякая матрица A из K единственным образом представима в виде суммы $A = C + D$, где $C \in L$, $D \in I$.

Можно показать, что идеал I нильпотентен, то есть $I^q = 0$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$. Например, если главная диагональ матрицы S содержит только два блока, то $I^2 = 0$.

3.3 О бимодулях и их изоморфизмах

Пусть S, T — некоторые кольца, A — S-T-бимодуль. Далее пусть α и β — автоморфизмы колец S и T соответственно. Можно задать новую структуру $\circ$ S-T-бимодуля на A, положив $x \circ a = \alpha(x)a$ и $a \circ y = a\beta(y)$ для всех $x \in S$, $y \in T$, $a \in A$. Этот бимодуль обычно обозначают ${}_{\alpha}A_{\beta}$, а исходный бимодуль A можно обозначить ${}_{1}A_{1}$.

Пусть R — комутативное кольцо, S — некоторая R-алгебра и α, γ — ее автоморфизмы. Имеем регулярный S-S-бимодуль ${}_{1}S_{1}$ и S-S-бимодуль ${}_{\alpha}S_{\gamma}$. Как устроены изоморфизмы между этими бимодулями и когда они существуют? Ответы, конечно, известны [28, глава 2, предложение 5.2]. Кратко изложим соответствующие факты.

Пусть $f : {}_{1}S_{1} \to {}_{\alpha}S_{\gamma}$ — изоморфизм S-S-бимодулей. Справедливы равенства $f(a) = \alpha(a)u$ и $f(a) = u\gamma(a)$, $a \in S$, где $u = f(1)$ — обратимый элемент. Далее находим $\alpha^{-1}\gamma(a) = (\alpha^{-1}(u))^{-1}a\alpha^{-1}(u)$, $a \in A$, т. е. $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм R-алгебры S.

И обратно, пусть $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм R-алгебры S, $\alpha^{-1}\gamma(a) = w^{-1}aw$, $a \in S$, где w — некоторый обратимый элемент. Тогда $\alpha(w)\gamma(a) = \alpha(a)\alpha(w)$ и сопоставление $a \to \alpha(a)\alpha(w)$, $a \in A$, будет изоморфизмом S-S-бимодулей ${}_1S_1 \to {}_\alpha S_\gamma$.

Пусть далее R — неразложимое коммутативное кольцо, $n \geqslant 2$. Вернемся к алгебре формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$. Считаем, также как предыдущем разделе, что каждый множитель s_{ijk} равен 1, либо 0. Таким образом, матрица множителей S кольца K является (01)-матрицей. Учитывая материал раздела 3.2 считаем, что матрица S имеет указанное там блочное строение. Тогда можно записать $K = L \oplus I$, где $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$, а каждое K_i есть (обычное) кольцо матриц $M(k_i, R)$ для некоторого $k_i \geqslant 1$. Далее, I — идеал, определенный в том же разделе. На множители s_{ijk} накладываем дополнительное условие: для любых попарно различных индексов i, j, k из $s_{iji} = s_{jkj} = s_{kik} = 0$ следует $s_{ijk} = 0$. Как было замечено в разделе 3.2, в таком случае $I^2 = 0$.

Содержательную информацию об автоморфизмах R-алгебры K можно получить если $\varphi I = I$ для всех $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K)$. Это будет так, когда, например, R — полупервичное кольцо.

До конца этой главы R-алгебра K такова, что $I^2 = 0$ и $\varphi I = I$ для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K)$.

Уточним как действует кольцо L на I. Разложение $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ позволяет рассматривать каждую матрицу из K как блочную матрицу порядка m (об этом говорилось в разделе 3.2). Запишем $E = e_1 + \ldots + e_m$, где e_i — единичный элемент кольца K_i. Положим $I_{ij} = e_i I e_j$, I_{ij} есть подбимодуль L-L-бимодуля I. Действие кольца L на подбимодуле I_{ij} сводится к действию колец K_i и K_j слева и справа соответственно. Справедливо бимодульное прямое разложение

$I = \bigoplus_{i,j=1}^{m} I_{ij}$, где $i \neq j$.

Пусть α — такой автоморфизм R-алгебры L, что $\alpha K_i = K_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$, т. е. $\alpha \in \Gamma$ в обозначениях первого раздела этой главы. Запишем $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, где $\alpha_i = a|_{K_i}$, т. е. α_i — автоморфизм R-алгебры K_i. Таким образом, получаем K_i-K_j-бимодули ${}_1(I_{ij})_1$ и ${}_{\alpha_i}(I_{ij})_{\alpha_j}$.

3.4 Матричное представление автоморфизмов

Перейдем непосредственно к автоморфизмам R-алгебры $K = L \oplus I$. Кольцо L и идеал I определены в разделе 3.2. Предполагаем, что для них выполняются условия, сформулированные в предыдущем разделе.

Каждый автоморфизм φ алгебры K, как и любой аддитивный эндоморфизм, можно представить матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ относительно разложения $K = L \oplus I$ (в правом верхнем углу стоит 0, так как $\varphi I = I$ согласно договоренности в разделе 3.3). Здесь $\alpha : L \to L$, $\beta : I \to I$, $\delta : L \to I$ — R-модульные гомоморфизмы. Верны равенства $\alpha(xx') = \alpha(x)\alpha(x')$, $\beta(xy) = \alpha(x)\beta(y)$ и $\beta(yx) = \beta(y)\alpha(x)$, x, $x' \in L$, $y \in I$. А также равенство $\delta(xz) = \delta(x)\alpha(z) + \alpha(x)\delta(z)$, x, $z \in L$. При проверке равенств нужно принять во внимание, что $I^2 = 0$, как было условлено в разделе 3.3. Гомоморфизмы α и β являются биекциями.

Резюмируя, можно утверждать следующее: α — автоморфизм R-алгебры L, β — изоморфизм бимодуля ${}_1I_1$ на бимодуль ${}_\alpha I_\alpha$, δ — дифференцирование R-алгебры L со значениями в бимодуле ${}_\alpha I_\alpha$.

Верно и обратное. Если $\alpha : L \to L$, $\beta : I \to I$, $\delta : L \to I$ — отображения со свойствами, перечисленными выше, то преобразование алгебры K, задаваемое матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$, является её автоморфизмом. В будущем не будем различать автоморфизм φ и соответствующую ему матрицу. Пусть φ — произвольный автоморфизм R-алгебры K и $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — его матрица. Приведем некоторые дополнительные сведения об изоморфизме β и дифференцировании δ. Алгебра $M(k,R)$ сепарабельна при любом k и сепарабельна алгебра $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$. Значит, всякое дифференцирование алгебры L со значениями в L-L-бимодуле ${}_{\alpha}I_{\alpha}$ является внутренним [67, §11.5]. Это означает, что найдется матрица $D \in I$ такая, что $\delta(X) = X \circ D - D \circ X = (\alpha X)D - D(\alpha X)$ для всякой матрицы $X \in L$. Так что, ситуация с дифференцированиями δ совершенно прозрачная.

Для изоморфизма β можно записать $\beta I_{ij} = \alpha(e_i) I \alpha(e_j)$, где $\alpha(e_i)$ и $\alpha(e_j)$ — какие-то из $e_1, \ldots, e_m$. Следовательно, β «переставляет» бимодули I_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$.

К группе автоморфизмов R-алгебры $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ применимы результаты первого раздела этой главы. Именно, имеем $\mathrm{Aut}_R(L) = \Gamma \leftthreetimes \Sigma$, где Σ — некоторая группа подстановок степени m, Γ — подгруппа всех автоморфизмов, переводящих каждое кольцо K_i в себя. Каждый автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}_R(L)$ можно записать единственным образом в виде: $\alpha = \mu\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\tau \in \Sigma$. Это дает гомоморфизм $h : \mathrm{Aut}_R(L) \to \Sigma$, $\alpha \to \tau$, с ядром Γ.

Определим еще такой гомоморфизм $f : \mathrm{Aut}_R(K) \to \mathrm{Aut}_R(L)$, что $f(\varphi) = \alpha$ для каждого $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}_R(K)$. Далее положим $g = hf$. Тогда $\mathrm{Ker} f = \{\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha K_i = K_i, i = 1, \ldots, m\}$.

Покажем, что $\mathrm{Im} g$ совпадает с подгруппой Σ, где напомним, $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_t$. Но прежде вернемся в раздел 3.1. Во-первых, в конце того раздела мы условились отождествлять Σ с соответствующей группой подстановок степени

m, считая, что $\alpha_\sigma = \sigma$. Еще уточним, что подстановки из Σ естественным образом можно считать подстановками степени n.

Пусть, как в разделе 3.1, $K_1, \ldots, K_l$ — кольца из некоторого класса эквивалентности. Для каждого $s = 1, \ldots, l$ отождествим кольца K_1 и K_s, и в качестве изоморфизма ε_{s1} возьмем тождественный автоморфизм (так можно было сразу поступить в первом разделе). Тогда и все ε_{ij} будут тождественными автоморфизмами.

Для произвольного автоморфизма $\alpha_\tau \in \Sigma$ установим, что $s_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$ при всех $i, j, k = 1, \ldots, n$. Если пара (i, j) или (j, k) занимает позицию в одном из блоков на главной диагонали матрицы S, то с учетом тождеств 1.10 из третьего раздела первой главы находим, что $s_{ijk} = 1$. Из тех же соображений получаем $s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} = 1$. В противном случае из тождеств 1.10 и соглашения о множителях s_{ijk} в конце раздела 3.2 вытекает, что $s_{ijk} = 0 = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$.

Теперь несложно проверить, что сопоставление $(a_{ij}) \to (a_{\tau(i)\tau(j)})$ будет автоморфизмом R-алгебры K (см. рассуждения о способах получения новых систем множителей из имеющихся перед леммой 3.2.1). Обозначим этот автоморфизм через ξ_τ. Тогда $\xi_\tau = \begin{pmatrix} \alpha_\tau & 0 \\ 0 & \gamma_\tau \end{pmatrix}$, где изоморфизм γ_τ переставляет в I те же строки и столбцы, что и α_τ в L. Откуда $g(\xi_\tau) = \alpha_\tau$, т. е. g — сюръекция, как и утверждалось. Автоморфизмы вида ξ_τ для всех $\tau \in \Sigma$ образуют подгруппу в $\mathrm{Aut}_R(K)$. Она изоморфна Σ при соответствии $\xi_\tau \to \alpha_\tau$. Отождествляем ξ_τ с α_τ, а α_τ, как и раньше, с τ.

Пусть дан автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}_R(K)$. Запишем $\alpha = \mu\alpha_\tau$, где $\mu \in \Gamma$, $\alpha_\tau \in \Sigma$ (как в разделе 3.1). Положим $\psi = \varphi\xi_\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \delta\alpha_\tau^{-1} & \beta\gamma_\tau^{-1} \end{pmatrix}$, где ξ_τ

— введенный выше гомоморфизм. Теперь получаем $\varphi = \psi\xi_\tau$, где $\psi \in \mathrm{Ker} g$, $\xi_\tau \in \Sigma$. Таким образом, существует полупрямое произведение $\mathrm{Aut}_R(K) = \mathrm{Ker} g \leftthreetimes \Sigma$.

Есть еще одно полупрямое разложение группы $\mathrm{Aut}_R(K)$. Любой автоморфизм $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ R-алгебры K равен произведению $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Автоморфизмы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}$ образуют нормальную группу в $\mathrm{Aut}_R(K)$. Обозначим ее Δ. Недавно было замечено, что дифференцирование δ является внутренним, т. е. $\delta X = XD - DX$, $X \in L$, для вполне определенной матрицы $D \in I$. И соответствие $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \to E + D$ есть изоморфизм между Δ и мультипликативной группой $E + I$.

Обозначим подгруппу автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ через Λ. Мы можем записать полупрямое произведение $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \leftthreetimes \Lambda$.

Можно еще записать разложение

$$\mathrm{Ker} g = \Delta \leftthreetimes \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha K_i = K_i, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

В результате получаем разложение

$$\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \leftthreetimes \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha K_i = K_i, i = 1, \ldots, m \right\} \leftthreetimes \Sigma.$$

Строение подгрупп Δ и Σ понятно. В принципе можно было бы ограничиться рассмотрением автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha K_i = K_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$, т. е. $\alpha \in \Gamma$.

Подгруппа $\mathrm{Ker} f$ имеет достаточно ясное строение (информация о ней есть в последнем разделе этой главы). Проблема описания группы $\mathrm{Aut}_R(K)$ в определенном смысле сводится к вычислению группы $\mathrm{Im}f$, а точнее говоря, к вычислению группы $\mathrm{Im}(f|_{\mathrm{Ker}g})$. Последнюю обозначим через Ω. Таким образом, $\Omega = \{\alpha \in \Gamma \mid$ найдется $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K)$ такой, что $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ для некоторого $\beta\}$. Справедливо равенство $\mathrm{Im}f = \Omega \leftthreetimes \Sigma$. В ряде случаев группа Ω будет найдена в следующем разделе.

3.5 О группе Ω

Раздел посвящен группе Ω, введенной в конце предыдущего раздела. Сохраняются все обозначения предыдущих разделов. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — соответствующий автоморфизм R-алгебры K, т. е. $f(\varphi) = \alpha$. Для любых $i, j = 1, \ldots, m$ верны равенства $\beta(I_{ij}) = \alpha(e_i)I\alpha(e_j) = e_iIe_j = I_{ij}$ (L-L-бимодули I_{ij} появились в разделе 3.3). Обозначим $\beta_{ij} = \beta|_{I_{ij}}$. Запишем еще $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, где $\alpha_i = \alpha|_{K_i} \in \mathrm{Aut}_R(K_i)$. Тогда $\beta = \sum_{i,j=1;i\neq j}^{m} \beta_{ij}$, где $\beta_{ij} : {}_1(I_{ij})_1 \to {}_{\alpha_i}(I_{ij})_{\alpha_j}$ — изоморфизм K_i-K_j-бимодулей (бимодули вида ${}_\alpha A_\beta$ определены в начале раздела 3.3). Вопросу о том, какие элементы из Γ входят в Ω, можно придать следующую форму. Для каких автоморфизмов $\alpha_i \in \mathrm{Aut}_R(K_i)$ и $\alpha_j \in \mathrm{Aut}_R(K_j)$ существуют изоморфизмы между K_i-K_j-бимодулями и как они устроены?

Примем на время более удобные обозначения. Зафиксируем индексы $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Положим $S = K_i$, $T = K_j$ и $V = I_{ij}$. Затем пусть α — автоморфизм R-алгебры S, γ — автоморфизм R-алгебры T. Предположим, что существует изоморфизм S-T-бимодулей $\beta : {}_1V_1 \to {}_\alpha V_\gamma$. Пусть k и m — порядки колец матриц S и T соответственно. Значит, матрицы из V имеют размер $k \times m$. Пусть $c = \text{НОК}(k, m)$, $m' = c/k$, $k' = c/m$. Будем писать m вместо m' и k

вместо k'.

Рассмотрим кольцо матриц $\overline{K} = M(c, R)$. Его можно представить в виде кольца блочных матриц двумя способами: как кольцо блочных матриц над S порядка m и как кольцо блочных матриц над T порядка k. А также можно представить как S-T-бимодуль блочных матриц над V размера $m \times k$.

Автоморфизмы α и γ индуцируют автоморфизмы R-алгебры $\overline{K}$ (они называются кольцевыми). Оставим за ними обозначения α и γ. Изоморфизм β также индуцирует аналогичный изоморфизм $\overline{K}$-$\overline{K}$-бимодулей $\overline{\beta} : \overline{K} \to \overline{K}$, $\overline{\beta}(C) = (\beta(C_{ij}))$ для любой матрицы $C = (C_{ij})$, где $C_{ij} \in V$. Следовательно, $\alpha^{-1}\gamma$ — внутренний автоморфизм R-алгебры $\overline{K}$. Это вытекает из раздела 3.3.

Вернемся к ситуации из начала раздела. Именно, пусть $\alpha \in \Omega$ и $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $\alpha_i = \alpha|_{K_i} \in \mathrm{Aut}_R(K_i)$, $i = 1, \ldots, m$, где напомним, $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$. Через $l_1, \ldots, l_m$ обозначим порядки колец матриц $K_1, \ldots, K_m$ соответственно. Положим $c = \text{НОК}(l_1, \ldots, l_m)$ и $\overline{K} = M(c, R)$. Аналогично случаю двух колец выше, считаем $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ автоморфизмами алгебры $\overline{K}$. Теперь можно сформулировать необходимое условие существования изоморфизма L-L-бимодулей ${}_1I_1 \to {}_\alpha I_\alpha$.

Следствие 3.5.1. *Пусть существует изоморфизм между L-L-бимодулями ${}_1I_1$ и ${}_\alpha I_\alpha$. В таком случае для любых $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ автоморфизм $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ R-алгебры $\overline{K}$ является внутренним.*

Не ясно, будет ли достаточным условие из следствия 3.5.1. Иногда это так. Сейчас запишем один факт общего характера. Группу внутренних автоморфизмов R-алгебры T будем обозначать $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(T))$.

Лемма 3.5.1. *Справедливо включение* $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L)) \subseteq \Omega$.

Доказательство. Во-первых, внутренние автоморфизмы алгебры L лежат в Г. Возьмем произвольный $\alpha \in \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$. Выберем обратимую матрицу $C \in L$, для которой $\alpha(X) = C^{-1}XC$, $X \in L$. Матрица C задает также внутренний автоморфизм φ алгебры K. Пусть $\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — соответствующая матрица. Понятно, что $\alpha = \alpha'$ и, значит, $\alpha \in \Omega$. Отметим еще, что $\delta = 0$, и $\beta Y = C^{-1}YC$, $Y \in C$. Лемма доказана. □

Следствие 3.5.2. *Если все автоморфизмы каждой из R-алгебр $K_1, \ldots, K_m$ являются внутренними (например, R — кольцо главных идеалов или локальное кольцо), то имеет место равенство $\Omega = \mathrm{Aut}_R(K_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}_R(K_m)$.*

Строение группы Ω можно найти еще в той ситуации, когда все кольца матриц $K_1, \ldots, K_m$ имеют одинаковый порядок. Тогда отождествим эти кольца и обозначим их буквой T.

Следствие 3.5.3. *Пусть все кольца матриц $K_1, \ldots, K_m$ имеют одинаковый порядок. Тогда группа Ω порождается внутренними автоморфизмами R-алгебры L и автоморфизмами вида $(\gamma, \gamma, \ldots, \gamma)$. Или иначе, Ω состоит из всех автоморфизмов вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ лежат в одном смежном классе по подгруппе $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(T))$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.5.1 внутренние автоморфизмы алгебры L принадлежат Ω. Возьмем автоморфизм $\gamma = (\gamma, \gamma, \ldots, \gamma)$, где γ — какой-то автоморфизм R-алгебры T. Всегда существует изоморфизм T-T-бимодулей ${}_1V_1 \to {}_\gamma V_\gamma$, где V — некоторый подбимодуль, лежащий в идеале I. Поэтому имеется такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K)$, что $\varphi = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ для некоторого β, т. е. $\gamma \in \Omega$.

Предположим теперь, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Omega$, где все $\alpha_i \in T$. На основании следствия 3.5.1 можно утверждать, что $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ — внутренний автоморфизм R-алгебры T для любых i, j. Обозначим автоморфизм $\alpha_1^{-1}\alpha_j$ через γ_j. Тогда $\alpha_j = \alpha_1\gamma_j$, и далее имеем равенство $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_1)(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Следствие доказано. $\square$

3.6 Внутренние и другие близкие автоморфизмы

Рассмотрим внутренние автоморфизмы R-алгебры K, а также автоморфизмы более общего вида. Затем установим существование нескольких изоморфизмов, проясняющих строение группы. $\mathrm{Aut}_R(K)$.

Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — внутренний автоморфизм R-алгебры K, задаваемый обратимой матрицей A. Запишем $A = C + D$, где $C \in L$, $D \in I$, и C — обратимая матрица. Возьмем произвольную матрицу $X = Z + Y$ $(Z \in L, Y \in I)$. Вычисляя, находим, что $\varphi X = A^{-1}XA = C^{-1}ZC + C^{-1}YC + (C^{-1}ZD - C^{-1}DC^{-1}ZC)$. Делаем вывод, что α — внутренний автоморфизм, $\alpha Z = C^{-1}ZC$, $Z \in L$. Похожим образом действует изоморфизм $\beta : \beta Y = C^{-1}YC$, $Y \in I$. А внутреннее дифференцирование δ определяется матрицей $C^{-1}D$.

Введенная в разделе 3.4 подгруппа Δ лежит в $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(K))$ (если $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \in \Delta$ и дифференцирование δ определяется матрицей $D \in I$, то автоморфизм φ определяется обратимой матрицей $E + D$). Разложение $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \leftthreetimes \Lambda$ дает разложение $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(K)) = \Delta \leftthreetimes \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))$, где $\mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))$ — подгруппа внутренних автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Очевидно, что здесь α — внутренний автоморфизм алгебры L.

Рассмотрим теперь автоморфизмы алгебры K более общего вида. Пусть автоморфизм $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ таков, что α — внутренний автоморфизм алгебры L. Что можно сказать о β и о множестве всех таких φ?

Сначала предположим, что $\alpha = 1$, т. е. $\varphi \in \mathrm{Ker}f$. Тогда для любых различных $i, j = 1, \ldots, m$ ограничение β на I_{ij} есть автоморфизм K_i-K_j-бимодуля I_{ij} (бимодули I_{ij} определены в разделе 3.3). Зафиксируем индексы i, j и обозначим $S = K_i$, $T = K_j$ и $V = I_{ij}$. Существуют канонические изоморфизмы колец $\mathrm{End}_S V \cong T$ и $\mathrm{End}_T V \cong S$. Это означает, что найдутся матрицы $A \in S$ и $B \in T$, для которых $\beta Y = AY = YB$ при всех $Y \in V$. Нетрудно убедиться, что A и B — скалярные матрицы с одинаковым элементом, скажем v_{ij}, на главной диагонали. Элемент v_{ij} обратим и $\beta Y = v_{ij} Y$, $Y \in V$.

Пусть опять $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ — такой автоморфизм алгебры K, что α — внутренний автоморфизм алгебры L. Выберем обратимую матрицу $C \in L$, для которой $\alpha Z = C^{-1} Z C$, $Z \in L$. Обозначим далее через ψ такой внутренний автоморфизм алгебры K, что $\psi X = C^{-1} X C$, $X \in K$. Его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, где $\gamma Y = C^{-1} Y C$, $Y \in I$. Произведение $\varphi\psi^{-1}$ равно $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta\alpha^{-1} & \beta\gamma^{-1} \end{pmatrix}$. Обозначим еще $\mu = \beta\gamma^{-1}$. Тогда $\beta Y = \mu\gamma(Y) = \mu(C^{-1} Y C)$. А как действует μ мы только что установили. Полагая $\xi = \varphi\psi^{-1}$, находим $\varphi = \xi\psi$, где $\xi \in \mathrm{Ker}f$, $\psi \in \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))$.

Через Φ обозначим нормальную подгруппу $\{\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K) \mid \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}, \alpha$ — внутренний автоморфизм$\}$ группы $\mathrm{Aut}_R(K)$. Ясно, что $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}g$, а из предыдущего абзаца вытекает равенство $\Phi = \mathrm{Ker}f \cdot \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))$.

Введем еще одну подгруппу группы $\mathrm{Aut}_R(K)$. Обозначим через Ψ подгруппу, состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Мы уже знаем, что действие β на каждом бимодуле I_{ij} $(i \neq j)$ сводится к умножению на некоторый обратимый элемент кольца R. Отсюда вытекает изоморфизм $\Psi \cong U(R) \times \ldots \times U(R)$ (число копий мультипликативной группы $U(R)$ кольца R равно $m^2 - m$).

Пусть в каждом кольце K_i $(i = 1, \ldots, m)$ взята некоторая обратимая скалярная матрица C_i. Тогда обратимая матрица $C_1 \oplus \ldots \oplus C_m$ определяет внутренний автоморфизм алгебры K, принадлежащий подгруппе Ψ. Обозначим через $\Psi_\circ$ подгруппу всех таких автоморфизмов. Верно равенство $\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(K)) \cap \Psi = \Psi_\circ$.

Вернемся к подгруппе $\mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))$. Ядро гомоморфизма $\mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K)) \to \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$, $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \to \alpha$, совпадает с подгруппой $\Psi_\circ$. Следовательно, имеем изоморфизм $\mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))/\Psi_\circ \cong \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$.

Учитывая разложение $\mathrm{Ker} f = \Delta \leftthreetimes \Psi$, можно записать равенства $\Phi = \mathrm{Ker} f \cdot \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K)) = (\Delta \leftthreetimes \Psi) \cdot \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K)) = (\Delta \leftthreetimes \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))) \cdot \Psi = \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(K)) \cdot \Psi$, а также $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K)) = \Psi_\circ = \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(K)) \cap \Psi$.

Можно утверждать, что строение подгруппы Φ полностью известно.

Из полученных равенств и предыдущего материала вытекают различные изоморфизмы.

Следствие 3.6.1. *Имеют место изоморфизмы* $\Phi/\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(K)) \cong \Psi/\Psi_\circ$ *и* $\Phi/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$.

Запишем теперь несколько результатов о строении подгруппы $\mathrm{Ker} g$ и всей группы $\mathrm{Aut}_R(K)$. В первом из них используем теорему о группе Нётер-Сколема.

Следствие 3.6.2. *Фактор-группа* $\mathrm{Ker} g/\Phi$ *изоморфно вкладывается в фактор-группу* $\Gamma/\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$ *и, таким образом, является ограниченной абе-*

левой группой.

Доказательство. Пусть p обозначает канонический эпиморфизм $\Gamma \to \Gamma/\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$. Понятно, что Φ совпадает с ядром гомоморфизма $pf : \mathrm{Ker}g \to \Gamma/\mathrm{Inn}(\mathrm{Aut}_R(L))$. Следствие доказано. □

Буква S снова обозначает матрицу множителей кольца K. После леммы 3.2.1 в разделе 3.2 есть информация о блоках матрицы S.

В оставшихся двух теоремах при некоторых дополнительных условиях находится группа автоморфизмов алгебры K в виде полупрямого произведения подгрупп с известным строением.

Теорема 3.6.1. 1) *Если порядки всех блоков на главной диагонали матрицы S попарно различны, то справедливо равенство* $\mathrm{Aut}_R(K) = \mathrm{Ker}g$.

2) *Если все автоморфизмы каждой R-алгебры $K_1, \ldots, K_m$ являются внутренними, то* $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \leftthreetimes (\Psi \cdot \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))) \leftthreetimes \Sigma$ *(см. также следствие 3.5.2).*

3) *При выполнении условий п.п.* 1) *и* 2) *имеем равенство* $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \leftthreetimes (\Psi \cdot \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K)))$.

Доказательство. 1) В равенстве $\mathrm{Aut}_R(K) = \mathrm{Ker}g \leftthreetimes \Sigma$ подгруппа Σ в данном случае является единичной.

2) Из определения подгруппы Φ имеем $\mathrm{Ker}g = \Phi$. Теперь из записанных выше разложений получаем $\mathrm{Aut}_R(K) = \mathrm{Ker}g \leftthreetimes \Sigma = \Phi \leftthreetimes \Sigma = \Delta \leftthreetimes (\Psi \cdot \mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K))) \leftthreetimes \Sigma$. Строение всех встречающихся здесь групп известно.

3) Прямо следует из 1) и 2). Теорема доказана. □

Пусть K — такое кольцо, что множители $s_{ijk} = 0$ для всех i, j, k $(i \neq j, j \neq k)$. Тогда $S = E$ и все блоки $K_i = R$. Так что, $\mathrm{Inn}_\circ(\mathrm{Aut}_R(K)) = \Psi_\circ$, и из теоремы 3.6.1 получаем такой результат.

Теорема 3.6.2. *Для введенного выше кольца K имеет место разложение* $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \leftthreetimes \Psi \leftthreetimes \Sigma$, *где* $\Delta \cong E + I$, $\Psi \cong \prod\limits_{n^2-n} U(R)$, $\Sigma \cong S_n$.

Приведем примеры рассматриваемых колец $K = M(n, R, \Sigma)$ для $n = 3, 4$. Прежде сформулируем, не доказывая, такой факт.

Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая (01)-матрица, в которой главная диагональ состоит из единиц и для любых элементов t_{ij}, t_{jk}, t_{ki} верно одно их утверждений 1) – 3) леммы 1.3.1. Тогда существует кольцо K с матрицей множителей S равной T.

Таким образом, есть кольца K с матрицами множителей S равными

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Два последних кольца не изоморфны!) Первые два кольца попадают под действие первого пункта теоремы 3.6.1. Ввиду следствия 3.5.3 известно строение группы Ω для третьего кольца.

Глава 4. Системы формальных уравнений

Четвертая глава посвящена системам формальных линейных уравнений. В разделе 4.1 дается определение ранга формальной матрицы, и доказываются некоторые вспомогательные факты, связанные с этим понятием. В 4.2 вводятся системы формальных линейных уравнений, кратко — СФЛУ, находятся необходимые и достаточные условия существования решения как однородных, так и неоднородных СФЛУ, формулируется аналог теоремы Крамера. В 4.3 рассматриваются односторонние делителя нуля в кольцах формальных матриц над данным коммутативным кольцом, с помощью СФЛУ устанавливается связь с их определителем.

Все кольца в этой главе предполагаются коммутативными с единицей, если не оговаривается иное.

4.1 Ранг формальной матрицы

Ранг числовой матрицы — одно из ключевых понятий линейной алгебры, возникающее в связи с решением систем линейных алгебраических уравнений. Есть несколько подходов к обобщению ранга на случай матриц над произвольным кольцом — смотри, например, [62], [31], [33], [5], [4]. В этой главе мы определим чуть позже *системы формальных линейных уравнений* и для них, точнее для формальных матриц таких систем, оказывается возможным ввести аналог ранга, обладающий свойствами, подобными основным свойствам обычного ранга матриц над кольцом.

Напомним определение ранга матрицы над произвольным кольцом (см. также [62], [31]).

Пусть $A \in M(n \times m, R)$.

Определение 4.1.1. *Для всякого* $t = 1\ldots, r = min\{m, n\}$, *через* $I_t(A)$ *будем обозначать идеал в* R, *порождаемый всеми* $(t \times t)$*-минорами матрицы* A.

Таким образом, для нахождения $I_t(A)$ необходимо вычислить определители всех $(t \times t)$-подматриц в матрице и затем взять идеал порожденный ими. По теореме Лапласа (Т. 1.1.2) всякий $(t+1) \times (t+1)$-минор матрицы лежит в $I_t(A)$. Поэтому имеет место следующая цепочка вложений идеалов в R:

$$I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \ldots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq R. \qquad (15)$$

Кажется логичным продолжить определение идеала $I_t(A)$ на все целые числа следующим образом:

$$I_t(A) = \begin{cases} (0), & \text{если } t > min\{m, n\}; \\ R, & \text{если } t \leq 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Тогда справедливы соотношения

$$0 = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \ldots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R. \qquad (17)$$

Определение 4.1.2. *Аннулятором непустого множества* S *в кольце* R *называется множество* $Ann_R(S) = \{r \in R \mid s \cdot r = 0, \forall s \in S\}$.

Найдя аннуляторы идеалов $I_t(A)$, получим вложения:

$$0 = Ann_R(R) = Ann_R(I_0(A)) \subseteq Ann_R(I_1(A)) \subseteq Ann_R(I_2(A)) \subseteq \ldots$$
$$\ldots \subseteq Ann_R(I_r(A)) \subseteq Ann_R(I_{r+1}(A)) = Ann_R((0)) = R. \qquad (18)$$

Заметим, что если $Ann_R(I_t(A)) \neq 0$, то $Ann_R(I_k(A)) \neq 0$ для всех $k \geq t$.

Определение 4.1.3. *Рангом матрицы* $A \in M(n \times m, R)$, *обозначаемым через* $rk(A)$, *назовем следующее число:* $rk(A) = max\{t \in \mathbb{Z} | Ann_R(I_t(A)) = 0\}$.

Теперь определим ранг формальной матрицы в кольце $K = M(n, R, \Sigma)$. Далее увидим, что на самом деле можно определить n рангов.

Пусть $A \in K$. Зафиксируем число $l \in \{1, \ldots, n\}$. Существует гомоморфизм колец $\eta_l : K \to M(n, R)$, $(a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$, где $t_{ij} = s_{ijl} \in \Sigma$ (см. раздел 1.3, равенство 11 или [18]). Другими словами, $\eta_l(a_{ij}) = (s_{ijl} \cdot a_{ij})$.

Определение 4.1.4. *Назовем Σ-рангом, l-рангом или просто рангом $r_l(A)$ матрицы $A \in K$ ранг матрицы $\eta_l(A) \in M(n, R)$. То есть $r_l(A) = rk(\eta_l(A))$. Подробнее — $r_l(A) = max\{t \in \mathbb{Z} | Ann_R(I_t(\eta_l(A))) = 0\}$.*

Итак, имеем n рангов — $r_1(A)$, $r_2(A)$, $r_3(A), \ldots, r_n(A)$ матрицы $A \in K$.

Замечание 4.1.1. *Эти ранги у одной и той же матрицы могут не совпадать для разных $l \in \{1, \ldots, n\}$.*

Пусть теперь $A \in M(m \times n, R)$, то есть A — прямоугольная матрица размера $m \times n$. Определим ранг матрицы относительно кольца формальных матриц $K = M(n, R, \Sigma)$.

Пусть $m < n$. Тогда можно «дополнить» матрицу A до квадратной матрицы порядка n, дописав к ней снизу $(n - m)$ нулевых строк. Полученную матрицу будем обозначать через $\left(\frac{A}{0}\right)$,

$$\left(\frac{A}{0}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем $r_l(A) = r_l\left(\frac{A}{0}\right)$.

Теперь пусть $m > n$. Также «дополним» матрицу A до матрицы порядка n, дописав к A справа $(m-n)$ нулевых столбцов. Полученную матрицу будем обозначать через $(A \mid 0)$,

$$(A \mid 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем $r_l(A) = r_l(A \mid 0)$.

Приведем далее несколько простых фактов, непосредственно вытекающих из определения ранга формальной матрицы.

Лемма 4.1.1. *Пусть* $A \in M(m \times n, R)$, $K = M(max\{m,n\}, R, \Sigma)$ *— кольцо формальных матриц. Имеют место следующие соотношения и импликации для любого фиксированного* $l \in \{1, \dots, n\}$*:*

1) $0 \leqslant r_l(A) \leqslant min\{m,n\}$*;*

2) $r_l(A) = r_l(PAQ), \forall P, Q \in U(M(max\{m,n\}, r, \Sigma))$*;*

3) $r_l(A) = 0 \Leftrightarrow Ann_R(I_1(\eta_l(A))) \neq 0$*;*

4) *Если* $m = n$*, то* $r_l(A) < n \Leftrightarrow d(A) \in Z(R)$*, где* $d(A)$ *— определитель формальной матрицы* A*,* $Z(R)$ *— множество делителей нуля кольца* R*.*

Доказательство. Пункты 1), 3) и 4) прямо следуют из определения l-ранга формальной матрицы и леммы 4.11 в [31].

2) Для всяких матриц $B \in M(m \times p, R)$ и $C \in M(p \times n, R)$ справедлив следующий факт [31]: $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Теперь можем заключить: $I_t(\eta_l(PA)) \subseteq I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(P^{-1}PA)) = I_t(\eta_l(PA))$, то есть $I_t(\eta_l(PA)) = I_t(\eta_l(A))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \{1, \dots, n\}$. Аналогично можем проверить

равенство: $I_t(\eta_l(PAQ)) = I_t(\eta_l(PA))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall l \in \{1, \ldots, n\}$. Откуда прямо следует: $r_l(A) = r_l(PAQ)$, $\forall P, Q \in U(M(max\{m, n\}, r, \Sigma))$. □

Следствие 4.1.1. *Так как определитель формальной матрицы не зависит от выбора номера $l \in \{1, \ldots, n\}$ (смотри предложение 1.3.3), то из пункта 4) леммы 4.1.1 вытекает, что если $r_l(A) < n$ хотя бы для одного l, то он не равен n ни для какого другого номера $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

4.2 Системы формальных линейных уравнений

Решение систем линейных алгебраических уравнений — одна из классических задач алгебры во многом определившая её объекты и методы. Близкие к современным подходы к ее решению обнаруживаются еще у вавилонян, древних египтян и китайцев. За прошедшие столетия эта тема — решение числовых систем линейных уравнений — была хорошо изучена. Результаты по ней естественным образом обобщаются и переносятся на случай систем над полями. Для случая систем над произвольным кольцом R многие из фактов, справедливых для систем над полями, однако, не имеют силы. Так, можно сказать, необходимые условия для разрешимости систем, как над полями, так и над кольцами совпадают — это было показано Смитом [72], [73] еще в XIX-ом веке (тогда он рассматривал целочисленные системы). Достаточные условия для совместности систем над кольцом целых алгебраических чисел были получены Стейницем [75] в 1912-ом году, а над произвольным кольцом лишь через век, Камионом, Леви и Манном в их совместной статье [33]. Еще одна проблема заключается в следующем — при решении систем уравнений над полем в некоторых методах используется деление на ненулевой определитель. В случае произвольных колец в них могут найтись подходящие делители нуля, которые делают этот подход некорректным. Занимаясь этой проблемой, Маккой [62], [63] вернул интерес к рассматриваемой теме во второй половине прошлого века. Он показал, что матрица является делителем нуля в кольце $M(n, R)$ тогда и только тогда, когда ее определитель — делитель нуля в R. Еще он привел необходимые и достаточные условия совместности однородных систем над кольцом [62]. Тогда же он ввел понятие ранга через аннуляторы идеалов, порождаемых минорами матрицы, его иногда называют обобщенным рангом по Маккою. Упоминавшаяся уже статья [33] была вдохновлена его книгой [62]. Развивая это направление исследований, Вей-Синь Чинг [35] ослабил условия совместности для систем над нётеровыми полными локальными кольцами (нётеровыми кольцами все элементы которых либо обратимые, либо делители нуля) и над кольцами нулевой размерности (нетривиальными кольцами с нулевой размерностью Крулля), Г. Б. Клейнер [13] — для систем над произвольными целостными кольцами и кольцами Крулля, Г. И. Малашонок [23] разработал метод решения одного класса систем над кольцом понижением порядка, т.е., переходом к системе или нескольким системам с меньшим количеством неизвестных. Браун провел полезную работу, собрав и упорядочив все результаты по данной теме на тот момент в своей книге [31], и упростив некоторые из доказательств. Отметим отдельно работы В.П. Елизарова [5]– [12]. В них он рассматривал системы над цепными локальными, квазифробениусовыми кольцами, сделал важные уточнения и замечания к некоторым уже вышедшим статьям. В [9] и [12] он приводит эффективный алгоритм решения систем над кольцами вычетов.

При изучении делителей нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном кольце, оказалось возможным описать их путем схожим с подходом Маккоя [62]. То есть с помощью формального определителя (см. определение

1.3.3), l-ранга формальных матриц (см. предыдущий раздел) и *систем формальных линейных уравнений.*

Пусть $A \in M(n, R, \Sigma)$. Зафиксируем номер $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Под ***системой формальных линейных уравнений*** (сокращенно — ***СФЛУ***) понимаем матричное уравнение:

$$A \circ X_l = B_l, \tag{19}$$

где X_l — формальная матрица порядка n с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в l-ом столбце и нулями на всех остальных местах, B_l — аналогичная матрица, но с элементами $b_1, b_2, \dots, b_n$. То есть, в полном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Замечание 4.2.1. *В зависимости от выбора номера $l \in \{1, \dots, n\}$ можем получить n различных СФЛУ не обязательно эквивалентных между собой.*

Пусть теперь $A \in M(m \times n, R)$ и $m < n$. Дописав в матрице A снизу $n - m$ нулевых строк, придем к квадратной матрице $\begin{pmatrix} A \\ \hline 0 \end{pmatrix}$, которую можем считать формальной. Тогда можем говорить о СФЛУ вида

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline 0 \end{pmatrix} \circ X_l = B_l, \tag{21}$$

или в полном виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Замечание 4.2.2. *В данном случае в l-ом столбце матрицы B_l последние $n-m$ элементов всегда равны нулю.*

Если $A \in M(m \times n, R)$ и $m > n$, то, аналогично, системой формальных линейных уравнений назовем матричное уравнение:

$$(A \mid 0) \circ X_l = B_l, \tag{23}$$

где $(A \mid 0)$ — матрица A с приписанными справа $m-n$ нулевыми столбцами, X_l — формальная матрица порядка m с элементами $x_1, x_2, \dots, x_m$ в l-ом столбце и нулями на всех остальных местах, B_l — формальная матрица порядка m с элементами $b_1, b_2, \dots, b_m$ в l-ом столбце и нулями на всех остальных местах.

Далее везде будем писать $A \circ X_l = B_l$. Если матрица A прямоугольная, то, дописывая в систему формальных линейных уравнений нулевые строки или столбцы, всегда можем получить систему с квадратной матрицей.

Предложение 4.2.1. *Система формальных линейных уравнений $A \circ X_l = B_l$ эквивалентна обычной системе линейных уравнений $\eta_l(A) \cdot X = B$ над кольцом R, где $X = \mathrm{Col}_l(X_l)$ и $B = \mathrm{Col}_l(B_l)$ — вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец $(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ длины n*

соответственно, а η_l *— кольцевой гомоморфизм, определенный в разделе* 1.3, *—* $\eta_l : M(n,R,\Sigma) \to M(n,R), \quad (a_{ij}) \mapsto (t_{ij} \cdot a_{ij})$.

Доказательство. Действительно, перемножая в кольце $M(n,R,\Sigma)$ формальные матрицы A и X_l, имеем равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} s_{1jk}a_{1k}x_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} s_{2jk}a_{2k}x_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} s_{njk}a_{nk}x_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Отбросив в равенстве 24 нулевые столбцы, получим n линейных уравнений над R, которые можно объединить в систему:

$$\begin{cases} s_{11l}a_{11}x_1 + s_{12l}a_{12}x_2 + \ldots + s_{1nl}a_{1n}x_n = b_1 \\ s_{21l}a_{21}x_1 + s_{22l}a_{22}x_2 + \ldots + s_{2nl}a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ s_{n1l}a_{n1}x_1 + s_{n2l}a_{n2}x_2 + \ldots + s_{nnl}a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{25}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & s_{12l}a_{12} & \dots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & s_{22l}a_{22} & \dots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & s_{n2l}a_{n2} & \dots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

является образом матрицы A относительно гомоморфизма η_l.

Очевидно, что решение этой системы $\xi \in R^n$ будет решением и для СФЛУ $A \circ X_l = B_l$, если записать его в виде матрицы с нулями везде кроме l-ого столбца, в который нужно вписать вектор $\xi \in R^n$. $\square$

Если $B_l = 0$, то будем называть систему $A \circ X_l = 0$ однородной. У такой системы всегда имеется, по крайней мере, одно решение, а именно $X_l = 0$, называемое тривиальным или нулевым.

Следующий результат, являющийся аналогом теоремы Маккоя [62], дает необходимые и достаточные условия для существования нетривиального решения однородной системы формальных линейных уравнений.

Теорема 4.2.1. *Пусть* $A \in M(m \times n, R)$. *Однородная СФЛУ* $A \circ X_l = 0$ *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $r_l(A) < min\{m, n\}$.

Доказательство. Согласно предложению 4.2.1 однородная система $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда имеет нетривиальное решение однородная система $\eta_l(A) \cdot X = 0$. Тогда по теореме Маккоя (см. [31], теорема 5.3) последнее эквивалентно неравенству $rk(\eta_l(A)) < min\{m, n\}$. Осталось заметить, что $r_l(A) = rk(\eta_l(A))$ по определению ранга $r_l(A)$. □

Предложение 4.2.2. *Однородная СФЛУ имеет нетривиальное решение, если количество уравнений в ней меньше числа неизвестных.*

Доказательство. Действительно, пусть $A \circ X_l = 0$ — система, в которой количество уравнений меньше числа неизвестных, то есть $m < n$. По пункту 1) леммы 4.1.1 $r_l(A) \leqslant min\{m, n\} = m < n$. Тогда по теореме 4.2.1 система $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение. □

Далее будем говорить о неоднородных системах, то есть, B_l — не обязательно нулевая матрица.

Комбинируя предложение 4.2.1 и теорему 5.17 из [31], можно убедиться в том, что правило Крамера остается справедливым для СФЛУ.

Теорема 4.2.2 (Правило Крамера). *Пусть* $A \in K = M(n, R, \Sigma)$ *и* $d(A) \in U(R)$, *другими словами, пусть* A *— обратимая формальная матрица. Тогда* *для любой матрицы* $B_l \in K$ *с* l*-ым столбом* $\mathrm{Col}_l(B_l) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in R^n$ *и нулями на всех остальных местах уравнение* $A \circ X_l = B_l$ *имеет единственное решение — матрицу* $C_l \in K$ *с* l*-ым столбом* $\mathrm{Col}_l(C_l) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$*, где*

$$c_j = (d(A))^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & \ldots & s_{1,j-1,l}a_{1,j-1} & b_1 & s_{1,j+1,l}a_{1,j+1} & \ldots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & \ldots & s_{2,j-1,l}a_{2,j-1} & b_2 & s_{2,j+1,l}a_{2,j+1} & \ldots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & \ldots & s_{n,j-1,l}a_{n,j-1} & b_n & s_{n,j+1,l}a_{n,j+1} & \ldots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\forall j = 1, \ldots, n$, *и нулями на всех остальных местах.*

Доказательство. Пусть $C_l \in K$ определена как в формулировке теоремы. Поскольку $d(A) = det(\eta_l(A))$, то по теореме Лапласа 1.1.2 имеем:

$$det(\eta_l(A)) \cdot c_j = det \begin{pmatrix} s_{11l}a_{11} & \ldots & s_{1,j-1,l}a_{1,j-1} & b_1 & s_{1,j+1,l}a_{1,j+1} & \ldots & s_{1nl}a_{1n} \\ s_{21l}a_{21} & \ldots & s_{2,j-1,l}a_{2,j-1} & b_2 & s_{2,j+1,l}a_{2,j+1} & \ldots & s_{2nl}a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1l}a_{n1} & \ldots & s_{n,j-1,l}a_{n,j-1} & b_n & s_{n,j+1,l}a_{n,j+1} & \ldots & s_{nnl}a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_j \cdot cof_{ij}(\eta_l(A)).$$

Тогда

$$det(\eta_l(A)) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \cdot cof_{i1}(\eta_l(A)) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \cdot cof_{in}(\eta_l(A)) \end{pmatrix} = (\eta_l(A))^* \cdot \mathrm{Col}_l(B_l).$$

Так как $det(\eta_l(A)) \cdot E_n = (\eta_l(A))^* \cdot \eta_l(A)$, где E_n — единичная $(n \times n)$-матрица, то $(\eta_l(A))^* \cdot (\eta_l(A) \cdot \mathrm{Col}_l(C_l)) = (\eta_l(A))^* \cdot \mathrm{Col}_l(B_l)$. Поскольку $\eta_l(A)^*$ — обратимая матрица, то, умножив предыдущее равенство слева на $((\eta_l(A))^*)^{-1} = (det(\eta_l(A)))^{-1} \cdot \eta_l(A)$, получим, что $\eta_l(A) \cdot \mathrm{Col}_l(C_l)) = \mathrm{Col}_l(B_l)$, то есть $\mathrm{Col}_l(C_l)) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ является решением системы линейных уравнений $\eta_l(A) \cdot X = B$

над кольцом R, где $B = \mathrm{Col}_l(B_l)$. Тогда по предложению 4.2.1 C_l будет решением для СФЛУ $A \circ X_l = B_l$.

Допустим, что $\overline{C_l} \in K$ — еще одно решение уравнения $A \circ X_l = B_l$. Тогда $A \circ \overline{C_l} = B_l = A \circ C_l$ влечет $A \circ (\overline{C_l} - C_l) = 0$, откуда $A^{-1} \circ (A \circ (\overline{C_l} - C_l)) = A^{-1} \circ 0$, то есть, $\overline{C_l} - C_l = 0$. И, таким образом, $C_l \in K$ — единственное решение. □

Итак, если A — обратимая матрица, то СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет единственное решение для любой $B_l \in K$.

Следующая теорема дает необходимые условия, при которых уравнение $A \circ X_l = B_l$ имеет решение для любой $A \in M(m \times n, R)$ и любой $B_l \in K$.

Теорема 4.2.3. *Пусть* $A \in M(m \times n, R)$. *Допустим, что СФЛУ* $A \circ X_l = B_l$ *имеет решение. Тогда* $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$ *при любом* $t = 1, \ldots, n$, *где* $(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$ *— матрица* $\eta_l(A)$ *с приписанным справа* l*-ым столбцом матрицы* B_l.

Доказательство. Можно получить комбинируя предложение 4.2.1 и доказательство аналогичного утверждения для систем над коммутативным кольцом (см, например, [31]). □

В общем случае выполнение равенства $I_t(\eta_l(A)) = I_t(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$ не гарантирует существование решения для системы $A \circ X_l = B_l$. Следующий результат, аналогичный теореме Камиона-Леви-Манна [33] для систем линейных уравнений над кольцом R, дает достаточные условия для разрешимости СФЛУ $A \circ X_l = B_l$.

Можем полагать $B_l \neq 0$. Пусть $A \in M(m \times n, R)$ и $m > n$. Легко видеть, что $I_t(A) = I_t(A \mid 0)$, где $(A \mid 0)$ — матрица A с дописанными справа $(m - n)$ нулевыми столбцами. $(A \mid 0)$ имеет размерность $n \times n$. Смысл вышесказанного в том, что, переходя от A к $(A \mid 0)$, можем, без потери общности, считать, что

$m \leqslant n$.

Через $I_m(\eta_l(A) \mid B)^*$ будем обозначать идеал в R, порождаемый всеми $(m \times m)$-минорами матрицы $(\eta_l(A) \mid \mathrm{Col}_l(B_l))$, которые включают элементы последнего столбца. Другими словами, $I_m(\eta_l(A) \mid B)^*$ порождается множеством $\{\Delta(i_1, \ldots, i_m; j_1, \ldots, j_{m-1}, n+1) \mid 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} \leqslant n\}$.

Теорема 4.2.4. *Пусть $A \in M(m \times n, R)$, $m \leqslant n$ и $r_l(A) = m$. Допустим, что в R существуют идеал W и неделитель нуля $z \in R$ такие, что $WI_m(\eta_l(A) \mid B)^* \subseteq Rz \subseteq WI_m(\eta_l(A))$. Тогда СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.*

Доказательство. Можно получить комбинируя предложение 4.2.1 и доказательство аналогичного утверждения для систем над коммутативным кольцом (см, например, [31]). □

Следствие 4.2.1. *Пусть матрица $A \in M(m \times n, R)$ такая, что $I_m(\eta_l(A)) = R$ для некоторого фиксированного $l \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда для любой $B_l \in K$ СФЛУ $A \circ X_l = B_l$ имеет решение.*

4.3 Делители нуля в кольце формальных матриц

Матрица A из кольца $K = M(n, R, \Sigma)$ формальных матриц порядка n над кольцом R, с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) | i, j, k = 1, ..., n\}$ называется левым делителем нуля, если $A \circ B = 0$ для некоторой ненулевой формальной матрицы B из K. Аналогично, $A \in K$ — правый делитель нуля, если $B \circ A = 0$ для какой-то ненулевой $B \in K$.

Следующая теорема характеризует односторонние делители нуля в K. Аналогичный результат для колец обычных матриц $M(n, R)$ над кольцом R был получен Маккоем [63].

Теорема 4.3.1. *Пусть $A \in K$. Эквивалентны следующие утверждения:*

1) A *– левый делитель нуля в* K;

2) A *– правый делитель нуля в* K;

3) $d(A) \in Z(R)$;

4) $r_l(A) < n$ *для любого* $l \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Схема доказательства: 4) $\Leftrightarrow$ 3), 4) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow$ 3), 1) $\Rightarrow$ 2).

4) $\Leftrightarrow$ 3). Очевидно следует из леммы 4.1.1.

4) $\Rightarrow$ 1). Так как $r_l(A) < n$ для любого $l \in \{1, \dots, n\}$, то по теореме 4.2.1 СФЛУ $A \circ X_l = 0$ имеет нетривиальное решение. Таким образом, A — левый делитель нуля в K.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\hat{R}$ — кольцо частных кольца R. Ясно, что существует кольцо формальных матриц $\hat{K} = M(n, \hat{R}, \Sigma)$. Считаем, что $R \subseteq \hat{R}$ и $K \subseteq \hat{K}$. Допустим, что $d(A)$ — неделитель нуля. Значит, $d(A)$ — обратимый элемент в $\hat{R}$. Тогда по теореме 11.1 в [18] матрица A обратима в $\hat{K}$.

Из равенства $B \circ A = 0$ получаем $B = 0$. По условию $B \neq 0$. Противоречие. Итак, $d(A) \in Z(R)$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $A, B \in K$ — ненулевые формальные матрицы и $A \circ B = 0$. Тогда в кольце K^T (смотри предложение 1.3.1) будет справедливо равенство: $B^T * A^T = 0$, то есть A^T — правый делитель нуля в K^T. Тогда по 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) A^T — также левый делитель нуля в K^T. Значит, найдется ненулевая матрица $C \in K$, для которой $A^T * C = 0$. Возвращаясь в кольцо K, получаем равенство $C^T \circ A = 0$. То есть A — правый делитель нуля в K. $\square$

Таким образом, правые и левые делители нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном кольце R совпадают и их определители как матриц являются делителями нуля в R.

Заключение

В диссертационной работе исследовались хорошие кольца формальных матриц и отдельные формальные матрицы, являющиеся хорошими, автоморфизмы алгебр формальных матриц и системы формальных уравнений. Были получены следующие основные результаты.

- Найдено одно условие k-хорошести произвольного кольца формальных матриц — теорема 2.1.1.
- Показано, что всякая формальная матрица может быть записана в виде суммы диагональной формальной матрицы и обратимой — лемма 2.2.1. Этот факт обобщает лемму Капланского [44] для обычных матриц над коммутативным кольцом.
- Получены условия, при которых диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел, являются 2-хорошими — следствие 2.3.1, следствие 2.3.2, теорема 2.3.1, предложение 2.3.2, предложение 2.3.1.
- При некоторых условиях найдено строение группы автоморфизмов алгебры формальных матриц — теоремы 3.6.1 и 3.6.2.
- Введено понятие ранга формальной матрицы, системы формальных линейных уравнений (сокращенно — СФЛУ).
- Найдены необходимые и достаточные условия существования решения как однородных, так и неоднородных СФЛУ — теоремы 4.2.1, 4.2.3 и 4.2.4.
- Сформулирован и доказан аналог теоремы Крамера для СФЛУ —- теорема 4.2.2.
- Установлено, что правые и левые делители нуля в кольцах формальных матриц со значениями в данном коммутативном кольце R совпадают и их определители как матриц являются делителями нуля в R — теорема 4.3.1.

В дальнейшем представляет интерес проблема нахождения условий, при которых обеспечивается 2-хорошесть или k-хорошесть (для какого-нибудь k) диагональных формальных матриц. Напомним, что в разделе 2.3 были получены условия, при которых диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел, являются 2-хорошими. Это один из простых случаев. В кольцах обычных матриц диагональная матрица порядка $n > 1$ всегда может быть записана как сумма двух обратимых матриц, что вместе с леммой Капланского [44] дает 3-хорошесть таких колец. В общем случае диагональная формальная матрица 2-хорошей, конечно же, не будет.

Далее, на класс колец формальных матриц, рассмотренный в разделе 3.2, можно наложить дополнительные ограничения, при которых кольца этого класса будут 3-хорошими. Напомним, что в разделе 3.2 кольца формальных матриц представлялись в виде расщепляющегося расширения своего некоторого нильпотентного идеала I с помощью прямой суммы обычных колец матриц $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$. В прямой сумме $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ каждое K_i — обычное кольцо матриц, $K_i = M(k_i, R)$. В таком случае из теоремы Хенриксена [44] следует утверждение.

Предложение. *Если порядки $k_i > 1$ для всех колец-блоков K_i, $i = 1, \ldots, m$, то $K = L \oplus I$ — 3-хорошее кольцо.*

Этому вопросу посвящена статья «Один класс хороших колец формальных матриц», готовящаяся к печати в журнале «Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика».

Список условных обозначений

R^m	— R-модуль всех вектор-столбцов длины m
$M(n \times m, R)$	— группа всех матриц порядка $(n \times m)$ над кольцом R
$CS(A)$	— R-подмодуль в R^m, порождаемый столбцами матрицы A
$RS(A)$	— R-подмодуль в $M(1 \times n, R)$, порождаемый строками A
$C(R)$	— центр кольца R
$Z(R)$	— множество делителей нуля кольца R
$M(n, R)$	— кольцо всех матриц порядка n над кольцом R
$M(n, R, \Sigma)$	— кольцо всех формальных матриц порядка n над кольцом R с системой множителей $\Sigma = \{s_{ijk} \in C(R) \mid i, j, k = 1, \ldots, n\}$
E_{ij}	— матричная единица
$[A]_{ij}$	— элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы A
$det(A)$, $\lvert A\rvert$	— определитель матрицы A
$d(A)$	— определитель формальной матрицы A
$\mathrm{Col}_i(A)$	— i-й столбец матрицы A
$\mathrm{Row}_j(A)$	— j-ая строка матрицы A
$M_{ij}(A)$	— минор матрицы A, полученный исключением i-ой строки и j-го столбца
$cof_{ij}(A)$	— ij-й кофактор матрицы A
$R \times S$	— прямое произведение колец R и S
$A_1 \oplus ... \oplus A_n$	— прямая сумма модулей $A_1, \ldots, A_n$
$\mathrm{Hom}(G, H)$	— группа гомоморфизмов из группы G в группу H
$\mathrm{Hom}_R(A, B)$	— группа гомоморфизмов из R-модуля A в R-модуль B
$\mathrm{End}(G)$	— кольцо эндоморфизмов абелевой группы G

$\mathrm{End}_R(A)$	— кольцо эндоморфизмов R-модуля A
$\mathrm{Aut}_R(T)$	— группа автоморфизмов R-алгебры T над коммутативным кольцом R
$\mathrm{Ker}\,\varphi$	— ядро гомоморфизма φ
$\mathrm{Im}\,\varphi$	— образ гомоморфизма φ
$M \otimes_R N$	— тензорное произведение правого R-модуля M на левый R-модуль N
$U(R)$	— подгруппа обратимых элементов кольца R
δ_{ij}	— дельта Кронекера

Список литературы

[1] Абызов А. Н. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы / А.Н. Абызов, Д.Т. Тапкин // Сиб. мат. журнал. – 2015. – Т. 56. – С. 1199–1214.

[2] Абызов А.Н. О некоторых классах колец формальных матриц / А. Н. Абызов, Д. Т. Тапкин // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 3. – С. 3–14.

[3] Абызов А.Н. Формальные матрицы и кольца, близкие к регулярным / А. Н. Абызов, А. А. Туганбаев // Фундамент. и прикл. матем. – 2016. – Т. 21, № 1. – С. 5–21.

[4] Глухов М. М. Алгебра: учебник в 2 т., / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. – М.: Гелиос АРВ, 2003, Т. 1. – 336 с.

[5] Елизаров В. П. Системы линейных уравнений над коммутативным кольцом / В. П. Елизаров // УМН. – 1993. – Т. 48, № 2. – С. 181–182.

[6] Елизаров В. П. Общее решение системы однородных линейных уравнений над коммутативным кольцом / В. П. Елизаров // УМН. – 1994. – Т. 49, № 2. – С. 141–142.

[7] Елизаров В. П. Определенные системы линейных уравнений над кольцами / В. П. Елизаров // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1307–1313.

[8] Елизаров В. П. Условия совместности систем линейных уравнений над кольцами / В. П. Елизаров // Фундамент. и прикл. матем. – 2000. – Т. 6, № 3. – С. 777–788.

[9] Елизаров В. П. Системы линейных уравнений над конечными кольцами / В. П. Елизаров // Тр. по дискр. матем. – 2002. – Т. 6. – С. 31–47.

[10] Елизаров В. П. Условия, необходимые для разрешимости системы линейных уравнений над кольцом / В. П. Елизаров // Дискрет. матем. – 2004. – Т. 16,

№ 2. – С. 44–53.

[11] Елизаров В. П. Следствия системы линейных уравнений над модулем / В. П. Елизаров // Дискрет. матем. – 2007. – Т. 19, № 1. – С. 133–140.

[12] Елизаров В. П. Об алгоритме последовательного решения системы линейных уравнений над кольцом вычетов / В. П. Елизаров // Тр. по дискр. матем. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 31–42.

[13] Клейнер Г. Б. О системах линейных уравнений над коммутативными кольцами / Г. Б. Клейнер // УМН. – 1974. – Т. 28, № 6. – С. 211–212.

[14] Крылов П. А. Вычисление группы K_1 кольца обобщенных матриц / П.А. Крылов // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 4. – С. 783–789.

[15] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц / П.А. Крылов // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, № 4. – С.456–463.

[16] Крылов П. А. Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов / П. А. Крылов // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 4. – С. 56–66.

[17] Крылов П. А. Модули над кольцами формальных матриц / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // Фундамент. и прикл. матем. – 2009. – Т. 15, № 8. – С. 145–211.

[18] Крылов П. А. Формальные матрицы и их определители / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // Фундамент. и прикл. матем. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 65–119.

[19] Крылов П. А. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев // Фундамент. и прикл. матем. – 2015. – Т. 20, № 1. – С. 173–203.

[20] Крылов П. А. Кольца формальных матриц и модули над ними / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2017. – 190 с.

[21] Левчук В. М. Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец / В. М. Левчук // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 16, № 3. – С.756–760.

[22] Ленг С. Алгебра / С. Ленг. – М.: Мир, 1968. – 564 с.

[23] Малашонок Г. И. О решении системы линейных уравнений над коммутативным кольцом / Г. И. Малашонок // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42, №4. – С. 543–548.

[24] Тапкин Д. Т. Изоморфизмы колец инцидентности формальных матриц / Д. Т. Тапкин // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 12. – С. 84–91.

[25] Amitsur S. A. Rings of quotients and Morita contexts / S. A. Amitsur // J. Algebra. – 1971. – V. 17. – P. 273-–298.

[26] Anderson F. W. Endomorphism rings of projective modules / F. W. Anderson F. W. // Math. Z. – 1969. – V. 111, N. 4. – P. 322-–332.

[27] Ashrafi N. On the unit sum number of some rings / N. Ashrafi, P. Vamos // Quart. J. Math. – 2005. – V. 56. – P. 1—12.

[28] Bass H. Algebraic K-theory / H. Bass. – New York: W.A. Benjamin, 1968. – 762 p.

[29] Bass H. The Morita theorems / H. Bass. – Mimeographed notes, University of Oregon, 1962.

[30] Boboc C. Isomorphisms between Morita context rings / C. Boboc, S. Dăscălescu, L. van Wyk // Linear and Multilinear Algebra. – 2012. – V. 60, N. 5. – P. 545–563.

[31] Brown W. C. Matrices over commutative rings / W. C. Brown. – New York: Marcel Dekker Inc., 1993. – 294 p.

[32] Brown W. C. Matrices and vector spaces / W. C. Brown. – New York: Marcel Dekker Inc., 1991. – 305 p.

[33] Camion P. Linear equations over commutative ring / P. Camion, L. S. Levy, H.

B. Mann // J. Algebra. – 1971. – V. 18. – P. 432–436.

[34] Castagna F. Sums of automorphisms of a primary Abelian group / F. Castagna // Pacific J. Math. – 1968. – V. 27. – P. 463–473.

[35] Ching W. S. Linear equations over commutative rings / W. S. Ching // Linear Algebra Appl. – 1977. – V. 18. – P. 257–266.

[36] Cunningham R. S. Rings of quotients of endomorphism rings of projective modules / R. S. Cunningham, E. A. Rutter, D. R. Turnidge // Pacific J. Math. – 1972. – V. 41. – P. 647—668.

[37] Freedman H. On endomorphisms of primary Abelian groups / H. Freedman // J. London Math. Soc. – 1968. – V. 43. – P. 305—307.

[38] Fuchs L. Recent results and problems on Abelian groups / L. Fuchs // Topics in Abelian groups: Proc. Sympos., New Mexico State University. – Chicago: Scott, Foresman. – 1962. – P. 9—40.

[39] Goldie A. W. The structure of prime rings under ascending chain conditions / A. W. Goldie // Proc. London Math. Soc. – 1958. – V. 8. – P. 589—608.

[40] Goldie A. W. Semi-prime rings with maximum condition / A. W. Goldie // Proc. London Math. Soc. – 1960. – V. 10. – P. 201—220.

[41] Gurgun O. Quasipolarity of generalized matrix rings / O. Gurgun, S. Halicioglu, A. Harmanci // arXiv Math:1303.3173.

[42] Gurgun O. Strong J-cleanness of generalized matrix rings / O. Gurgun, S. Halicioglu, A. Harmanci // arXiv Math:1308.4105.

[43] Gutterman A. Frobenius type theorems in the noncommutative case / A. Gutterman // Linear and Multilinear Algebra. – 2001. – V.48. – P. 293–311.

[44] Henriksen M. Two classes of rings generated by their units / M. Henriksen // J. Algebra. – 1974. – V. 31. – P. 182–193.

[45] Hill P. Endomorphism ring generated by units / P. Hill // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 141. – P. 99–105.

[46] Hutchinson J. J. Quotient rings of endomorphism rings of modules with zero singular submodules / J. J. Hutchinson, J. Zelmanowitz // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 35. – P. 16–20.

[47] Hutchinson J. J. The completion of a Morita context / J. J. Hutchinson // Comm. Algebra. – 1980. – V. 8, N. 8. – P. 717–742.

[48] Hutchinson J. J. Primary decomposition and Morita contexts / J. J. Hutchinson, M. H. Fenrick // Comm. Algebra. – 1978. – V. 13, N. 6. – P. 1359–1368.

[49] Hutchinson J. J. Rings of quotients of R and eRe / J. J. Hutchinson, H. M. Leu // Chinese J. Math. – 1976. – V. 1. N. 4. – P. 25–35.

[50] Isaacs I. M. Automorphisms of matrix algebras over commutative rings / I. M. Isaacs // Linear Algebra Appl. – 1980. – V. 31. – P. 215–231.

[51] Jagermann M. Morita contexts and radicals / M. Jagermann // Bull. Acad. Polon. Sci. 1972. – V. 20. – P. 619–625.

[52] Jagermann M. Normal radicals of endomorphism rings of free and projective modules / M. Jagermann // Fund. Math. 1975. – V. 86. – P. 237–250.

[53] Jategoankar A. V. Endomorphism rings of torsionless modules / A. V. Jategoankar // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 161. – P. 457–466.

[54] Kashu A. I. On localizations in Morita contexts / A. I. Kashu // Mat. Sb. (N.S.). – V. 133. – 1987. – P. 127–133.

[55] Khazal R. Isomorphisms of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles / R. Khazal, S. Dăscălescu, L. van Wyk // Internat. J. Math. – 2003. – V. 2003, N. 9. – P. 533–538.

[56] Khuri S. M. Endomorphism rings and Gabriel topologies / S. M. Khuri // Can.

J. Math 1984. – V. XXVI, No. 2. – P. 193–205.

[57] Krylov P. Formal Matrices. / P. Krylov, A. Tuganbaev. – Algebra and Applications, V.23. Springer, 2017.

[58] Krylov P. A. Modules over formal matrix rings / P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev // J.Math.Sci. – 2010. – V. 171, N. 2. – P. 248–295.

[59] Krylov P. A. Formal Matrices and their determinants / P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev // J.Math.Sci. – 2015. – V. 211, N. 3. – P. 341–380.

[60] Leu H. M. Kernel functors and quotient rings / H. M. Leu, J. J. Hutchinson // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – V. 5, N. 1. – 1977. – P. 145–155.

[61] Li Y.-B. Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras / Y.-B. Li, F. Wei // Linear Algebra Appl. – 2012. – V. 436. – P.1122–1153.

[62] McCoy N. Rings and Ideals / N. McCoy. – Carus Math. Monogr. 8, Mathematical Association of America, 1948. – 216 p.

[63] McCoy N. Divisors of zero in matric rings / N. McCoy. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – V. 47, N. 2. – P. 166–172.

[64] Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition / K. Morita // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Diagaku Sect. – 1958. – V. 6. – P. 83–142.

[65] Müller B. J. The quotient category of a Morita context / B. J. Müller // J. Algebra. – 1974. – V. 28. – P. 389–407.

[66] Nicholson W. K. Normal radicals and normal classes of rings / W .K. Nicholson, J. F. Watters // J. Algebra 1979. – V. 59. – P. 5–15.

[67] Pierce R. Associative algebras / R. Pierce. – New York: Springer-Verlag, 1982. – 436 p.

[68] Raphael R. M. Rings which are generated by their units/ R. M. Raphael // J.

Algebra. – 1974. – V. 28. – P. 199–204.

[69] Sands A. D. Radicals and Morita contexts / A. D. Sands // J. Algebra 1973. – V. 24. – P. 335–345.

[70] Shapiro J. Morita contexts / J. Shapiro, P. Loustaunau // Non-Commutative Ring Theory. Lecture Notes in Mathematics. – 1990. – V. 1448. – P. 80–92.

[71] Skornyakov L. Complemented modular lattices and regular rings / L. Skornyakov. — London: Oliver&Boyd, 1958. – 182 p.

[72] Smith H. J. S. On Systems of Linear Indeterminate Equations and Congruences / H. J. S. Smith // Phil. Trans. Royal Soc. London. – 1861. – A. 151. – P. 293–326.

[73] Smith H. J. S. On the arithmetical invariants of a rectangular matrix of which the constituents are integral numbers / H. J. S. Smith // Proc. London Math. Soc. – 1873. – V. 4. – P. 236–249.

[74] Srivastava A. K. A survey of rings generated by units / A. K. Srivastava // Annales de la faculte des sciences de Toulouse Mathatiques. – 2010. – V. 19. – P. 203–213.

[75] Steinitz E. Rechteckige Systeme und Moduln in algebraisclien Zahlkorpern. I / E. Steinitz // Math. Ann. – 1912. – B. 71, N. 3. – S. 328–354.

[76] Stringall R. W. Endomorphism rings of Abelian groups generated by automorphism groups / R. W. Stringall // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1967. – V. 18. – P. 401–404.

[77] Tang G. Study of Morita context / G. Tang, Ch. Li, Y. Zhou // Commun. Algebra. – 2014. – V. 42. – P. 1668–1681.

[78] Tang G. Strong cleanness of generalized matrix ring over a local ring / G. Tang, Y. Zhou // Linear Algebra Appl. – 2012. – V. 437. – P. 2546–2559.

[79] Tang G. A class of formal matrix rings / G. Tang, Y. Zhou // Linear Algebra

Appl. – 2013. – V. 438. – P. 4672–4688.

[80] Vamos P. 2-good rings / P. Vamos // Quart. J. Math. – 2005. – V. 56. – P. 417–430.

[81] Wang Z. 2-clean rings / Z. Wang, J. L. Chen // Canad. Math. Bull. – 2009. – V. 52. – P. 145–153

[82] Wolfson K. G. An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations / K. G. Wolfson // Amer. J. Math. – 1953. – V. 75. – P. 358–386.

[83] Xiao Z. Commuting mappings of generalized matrix algebras / Z. Xiao, F. Wei // Linear Algebra Appl. – 2010. – V. 433. – P.2178–2197.

[84] Xiao Z. Commuting traces and Lie isomorphisms on generalized matrix algebras / Z. Xiao, F. Wei // Operators and Matrices. – 2014. – V. 8. – P.821–847.

[85] Xiao G. n-Clean rings and weakly unit stable range rings / G. Xiao, W. Tong // Communications in Algebra. – 2005. – V.33, N. 5. – P. 1501–1517.

[86] Zelinsky D. Every linear transformation is a sum of non-singular ones / D. Zelinsky // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – V. 5. – P. 627—630.

Список работ автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах, включенных в перечень ВАК:

[87] Крылов П. А. Автоморфизмы алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, **Ц. Д. Норбосамбуев** // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 885–893.

[88] Крылов П. А. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц / П. А. Крылов, **Ц. Д. Норбосамбуев** // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. – 2018. – Т. 53, № 3. – С. 16–21.

[89] **Норбосамбуев Ц. Д.** О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. – 2015. – Т. 36, № 4. – С. 34–40.

[90] **Норбосамбуев Ц. Д.** Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля / Ц. Д. Норбосамбуев // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. – 2018. – Т. 52, № 2. – С. 5–12.

Другие публикации:

[91] **Норбосамбуев Ц. Д.** 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел / Ц. Д. Норбосамбуев // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: Сборник статей. Томск, 25–29 апреля 2016 г. – Томск, Изд-во ТГУ. – 2016. – С. 6–12.

[92] **Норбосамбуев Ц. Д.** О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев // "Научная конференция студентов механико-математического факультета ТГУ": Сборник конференции. Томск, 24–30 апреля 2014 г. – Томск, РИО Том. ун-та: Издательство "Томский ЦНТИ". – 2014. – С. 12–13.

[93] **Норбосамбуев Ц. Д.** 2-хорошие формальные матрицы над кольцом целых

чисел / Ц. Д. Норбосамбуев //Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В.М. Левчука: Сборник конференции. Красноярск, 24–29 июля 2016 г. – Красноярск: СФУ. – 2016. – С. 50–51.

[94] **Норбосамбуев Ц. Д.** 3-хорошие формальные матрицы над кольцом целых чисел / Ц. Д. Норбосамбуев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2015. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.

[95] **Норбосамбуев Ц. Д.** Ранг формальных матриц / Ц. Д. Норбосамбуев //Всероссийская молодежная научная конференция "Все грани математики и механики": Сборник тезисов докладов. Томск, 25–28 апреля 2017. – Томск. – 2017. – С. 10.