Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Aut

Белов Сергей Викторович

МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВАНТОВО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПОИСКОМ НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ ВАНТОВОЙ СЕТИ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Пономарев Сергей Васильевич

Оглавление

| Введение |
|------------------------------------------------------------------------------------|
| ГЛАВА 1 Постановка задачи математического моделирования вантово- |
| оболочечных конструкций с поиском начальной формы вантовой сети 16 |
| 1.1 Предварительные замечания по Главе 1 16 |
| 1.2 Обзор методов поиска форм вантовых сетей 17 |
| 1.2.1 Геометрическая нелинейность17 |
| 1.2.2 Классификация методов поиска форм вантовых сетей 20 |
| 1.2.3 Метод матрицы жесткости 20 |
| 1.2.4 Метод плотности сил |
| 1.2.5 Метод динамической релаксации 27 |
| 1.3 Постановка задачи определения НДС вантово-оболочечных конструкций с |
| учетом геометрической нелинейности и начальной формы вантовой сети 32 |
| 1.4 Выводы по главе 1 35 |
| ГЛАВА 2 Метод расчета НДС вантово-оболочечных конструкций с поиском |
| начальной формы вантовой сети 37 |
| 2.1 Предварительные замечания по Главе 2 |
| 2.2 Этап 1. Нелинейный матричный метод плотности сил для поиска начальной |
| формы вантовой сети |
| 2.2.1 Определение топологии сети на основе матрицы инцидентности |
| 2.2.2 Матричные уравнения равновесия 39 |
| 2.2.3 SVD-разложение матрицы. Нормальное псевдорешение СЛАУ. |
| Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза 44 |
| 2.2.4 Виды функций g(x,y,z,q) с соответствующими матрицами Якоби G ^T 50 |
| 2.2.5 Блок-схема нелинейного матричного метода плотности сил 54 |
| 2.3 Этап 2. Процедура определения перемещений узлов вантово-оболочечных |
| конструкций нелинейным МКЭ. Схема программной реализации метода |
| расчета |
| |

| ГЛАВА 3 Приложение метода расчета к исследованию НДС сетчатых |
|---------------------------------------------------------------------|
| рефлекторов космических аппаратов 61 |
| 3.1 Конструкции сетчатых рефлекторов 61 |
| 3.2 Характерная проблематика 64 |
| 3.3 Исследование НДС сетчатых рефлекторов |
| 3.3.1 Геометрическая модель отражающей поверхности 66 |
| 3.3.2 Основные допущения и описание типов конечных элементов |
| 3.3.3 Некоторые примеры расчета параметров НДС сетчатых рефлекторов |
| с диаметром апертуры от 48 м71 |
| 3.3.4 Исследование параметров НДС сетчатых рефлекторов с диаметром |
| апертуры 12 м 80 |
| 3.4 Оценка эффективности метода расчета. Сеточная сходимость |
| 3.5. Выводы по главе 3 |
| ГЛАВА 4 Анализ устойчивости, собственных частот и форм колебаний |
| конструкций рефлекторов |
| 4.1 Предварительные замечания по Главе 4 |
| 4.2 Линейный и нелинейный анализ устойчивости в МКЭ 100 |
| 4.3 Анализ устойчивости элементов силовых каркасов рефлекторов 103 |
| 4.3.1 Натяжения шнуров, действующих на элементы силового каркаса |
| зонтичного рефлектора 103 |
| 4.3.2 Анализ устойчивости спицы зонтичного рефлектора 108 |
| 4.3.3 Натяжения шнуров, действующих на элементы силового каркаса |
| ободного СР 111 |
| 4.3.4 Анализ устойчивости стойки и элемента обода силового каркаса |
| ободного рефлектора112 |
| 4.4 Анализ собственных частот и форм колебаний рефлекторов 114 |
| 4.4.1 Уравнение движения, собственные формы и собственные_частоты в |
| МКЭ114 |
| 4.4.2 Собственные частоты и формы колебаний рефлекторов 117 |
| 4.5 Выводы по главе 4 119 |

| Заключение | . 121 |
|-----------------------------------------------------------------------|-------|
| Список сокращений | . 124 |
| Список литературы | . 125 |
| Приложение А Координаты узлов фронтальной сети зонтичного рефлектора, | |
| рассчитанные нелинейным методом плотности сил | . 136 |
| Приложение Б Координаты узлов фронтальной сети ободного рефлектора, | |
| рассчитанные нелинейным методом плотности сил | . 139 |

Введение

Актуальность исследования. В настоящее время вантово-оболочечные конструкции (ВОК) широко применяются как в космической инженерии, так и в области строительства. Под ВОК будем понимать конструкцию, в которой пролетная часть состоит из сети несущих гибких нитей (вант), работающих на растяжение и прикрепленных к жесткому опорному контуру. Опорный контур может работать на растяжение, сжатие, и изгиб. На вантовых элементах расположена оболочка – тело, где одно из измерений (толщина) существенно меньше остальных [1].

Применение ВОК в архитектуре, градостроительстве, проектировании космических конструкций можно проследить в работах [2–5]. Например, рефлекторные антенны космических аппаратов [6], крыши стадионов [7] и спортивных центров, здания выставочных комплексов и др. (Рисунки В.1-В.3).



Рисунок В.1 – Сетчатый космический рефлектор AstroMesh компании Notrhrop Grumman [6]



Рисунок В.3 – Крыша ледового катка спортивного центра Вольфганга Майера в г. Гамбург [4]



Рисунок В.3 – Крыша стадиона «Волгоград Арена» в г. Волгоград [7]

В работах [2, 8] можно найти подробное описание предварительно напряженных комбинированных и вантовых конструкций, а также классификацию висячих покрытий.

Представленные конструкции имеют очевидные преимущества: относительно небольшая масса, возможность покрытия больших площадей при относительно небольшом расходе материала, а также способность складываться с возможностью дальнейшей транспортировки.

Из-за высокой стоимости проведения экспериментов с реальными конструкциями задача создания адекватной математической модели расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) ВОК является всегда актуальной. На основе анализа НДС можно сделать вывод об эффективности работы конструкции, как в целом, так и по частям. Кроме того, для ВОК свойственно геометрически нелинейное поведение, такое, что даже в зоне упругих деформаций возникают существенные перемещения её узлов [3].

Задача определения НДС ВОК, решается методами нелинейной теории упругости, где главным является уравнение равновесия относительно перемещений или напряжений [9, 10]. Аналитические решения этого уравнения можно получить только в самых простых случаях. По этой причине, развитие численных методов решения данной задачи также актуально. Одним из наиболее востребованных методов является метод конечных элементов (МКЭ) [11–13].

Степень разработанности темы исследования. Из опыта расчетов [14] формы отражающей поверхности (ОП) зонтичного сетчатого рефлектора (СР) космического аппарата на основе МКЭ, установлено, что задача определения поля

перемещений имеет небольшую область сходимости, так как трудно определить оптимальное начальное приближение. Для решения проблемы сходимости привлекалась процедура последовательного освобождения узлов конструкции рефлектора, в которой каждое последующее решение использует предыдущее в качестве начального приближения. Процедура разработана научно-В исследовательском институте прикладной математики и механики Томского государственного университета (НИИ ПММ ТГУ) [14]. Она оказалась довольно эффективной в определении НДС ободных, зонтичных и надувных конструкций рефлекторов [15, 16]. Тем не менее, в ней существует проблема формализации способа освобождения узлов, а также определения начальной формы отражающей поверхности, приближенной к равновесной. Кроме того, в процедуре не описан способ получения начальной равновесной формы элементов вантовой сети ОП с равномерным распределением натяжений.

В настоящее время для определения равновесной формы вантовой сети широко применятся методы поиска форм (Form-finding methods), основанные на решении уравнений равновесия относительно координат узлов вантовых элементов.

На текущий момент выделяется три основных подхода в поиске (расчете) форм вантовых сетей: [3, 4, 17, 18]: метод матрицы жесткости или метод переходной жесткости (ММЖ) (Stiffness matrix methods, Transient stiffness method); метод плотности сил (МПС) (Force density method), метод динамической релаксации (МДР) (Dynamic relaxation method). Они, начиная с 60-х годов XX века и по настоящее время, по-прежнему актуальны и применяются в проектировании крыш стадионов, тентов, вантовых мостов [19, 20]. Все эти методы объединяет тот факт, что они итерационным способом определяют координаты узлов вантовой сети при воздействии внешних сил [3]. Однако стоит отметить, что у МПС наиболее формализовано определение ограничений на вантовые элементы в виде нелинейной системы уравнений от параметра плотности силы (отношение натяжения к длине элемента). Данное обстоятельство

7

повлияло на выбор МПС как основного метода поиска начальной формы вантовой сети в данной работе.

В МПС нелинейные уравнения ограничений на элементы решаются итерационным методом Ньютона. Шаг итерации рассчитывается из решения системы линейных уравнений, полученной с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности начального значения плотности силы.

В методе Ньютона, применительно к МПС, существует проблема подбора начального значения плотности силы. Так в [20] отмечается, что для произвольно взятого значения плотности силы итерационный процесс может сходиться медленно или расходиться вовсе. Для контроля сходимости в [20] используется некоторый коэффициент релаксации, который умножается на шаг итерации плотности силы. Помимо отмеченной проблемы сходимости, в некоторых задачах [21] определения равновесных координат узлов вантовой формообразующей структуры (ФОС) зонтичного антенного рефлектора возникла проблема обращения произведений матриц Якоби, полученных при линеаризации функции, описывающей ограничения на вантовую сеть. Это произведение матриц оказалось обусловленной плохо матрицей, что потребовало использование соответствующего аппарата решения линейных алгебраических уравнений с помощью псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [22, 23].

Отметим, что использование решений МПС в расчете равновесной формы вантовых элементов ОП СР [24–28] весьма востребовано, т.к. для данного типа конструкций одним из ключевых параметров является точность ОП, выраженная значением среднеквадратического отклонения (СКО) узлов ОП от поверхности параболоида. Однако, решаемые в отмеченных работах задачи нацелены только на определение формы и точности отражающей поверхности без учета деформаций силового каркаса конструкции либо с учетом деформаций, но без моделирования ОП. Таким образом, методы определения равновесной формы комплексной рефлекторов в конструкции настоящее время являются актуальными. Кроме того, как будет отмечено в главе 3, равномерное распределение натяжений в вантовых элементах ОП рефлектора также очень

важно как с точки зрения точности, так и радиотехнических характеристик антенны.

Отметим, что в моделировании работоспособности конструкции рефлектора необходимо также проводить анализ его жесткости и устойчивости элементов силового каркаса [29, 30].

Цели и задачи исследования. Целью работы является разработка метода расчета геометрически нелинейных краевых задач определения НДС ВОК на основе комбинации методов конечных элементов и плотности сил.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Описание математической модели ВОК на основе нелинейной системы уравнений механики деформируемого твердого тела и уравнений равновесия узлов вантовой сети МПС;

2. Оптимизация шага итерации плотности силы на основе псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза;

3. Постановка граничных условий, с учетом найденной начальной формы вантовой сети, позволяющих учитывать преднапряженное состояние вантовых и оболочечных элементов;

4. Усовершенствование процедуры расчета определения НДС ВОК, разработанной в НИИ ПММ ТГУ, основанной на последовательном изменении граничных условий по перемещениям в МКЭ, введением начального приближения, рассчитанного с помощью МПС;

5. Приложение метода в расчете НДС сетчатых космических рефлекторов;

6. Оценка собственных частот и построение соответствующих форм колебаний, анализ устойчивости элементов конструкций рефлекторов.

Научная новизна:

1. Предложен метод расчета НДС ВОК на основе последовательного изменения граничных условий по перемещениям узлов конечно-элементной модели (КЭМ) ВОК и определением начального приближения, рассчитанного по МПС для вантовых элементов;

2. Показана работоспособность метода с оценкой его эффективности на примерах конструкций СР с анализом собственных частот, форм колебаний, а также устойчивости элементов их силовых каркасов;

3. Предложено использовать псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза для расчетов шагов итераций плотности силы при поиске форм вантовых сетей;

4. Предложены численные модели вантовых ФОС перспективных СР космических аппаратов;

5. На основе рассчитанных ФОС, предложены численные модели конструкций зонтичного и ободного рефлекторов.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Теоретическая значимость состоит в развитии метода численного моделирования ВОК, учитывающего поиск начальной равновесной формы вантовой сети с ограничениями на её элементы.

Практическая значимость состоит в возможности использовании метода при определении НДС различных ВОК с учетом геометрической нелинейности. Существенное практическое значение метод нашел при определении НДС СР космических аппаратов, т.к. для них важно поддерживать равновесную форму ОП с высокой точностью, а также учитывать равномерное распределение натяжений в вантовых элементах ФОС.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы механики деформируемого твердого тела, метод плотности сил, метод конечных элементов.

Область исследования. Математические модели и численные методы анализа применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического решения.

Предмет исследования. Метод расчета НДС ВОК с поиском начальной равновесной формы вантовой сети.

10

Положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель ВОК на основе нелинейной системы уравнений равновесия механики деформируемого твердого тела и уравнений равновесия МПС с ограничениями на натяжения вантовых элементов;

2. Метод расчета НДС ВОК с последовательным изменением граничных условий по перемещениям узлов, где в качестве начального приближения используются координаты узлов равновесной вантовой сети с соответствующими значениями натяжений ее элементов;

3. Результаты численного исследования НДС перспективных СР космических аппаратов;

4. Оценка эффективности метода на основе сравнений результатов решений определения НДС, полученных без использования решений МПС;

5. Анализ устойчивости, собственных частот и форм колебаний конструкций рефлекторов.

Степень достоверности исследования. Достоверность результатов результатов метода расчета основана на использовании адекватной математической модели ВОК с учетом геометрической нелинейности, проверкой результатов решения уравнений равновесия МПС с помощью решений МКЭ. Сходимость итерационного процесса в МПС подтверждена уменьшением нормы векторов рассчитанных координат узлов и нормы вектор-функции, описывающей ограничения на вантовые элементы с увеличением количества итераций. Сходимость итерационного процесса в МКЭ подтверждена результатами расчетов для различных пространственных сеток КЭМ рефлекторов.

Апробация результатов исследования. Основные материалы диссертации были рассмотрены на следующих конференциях:

1. Международная научная конференция молодых ученых «Перспективные материалы в строительстве и технике (ПМСТ-2014)», 15-17 октября 2014 г., Томск;

2. V Международная молодежная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики», 25-27 ноября 2015 г., Томск;

3. VI Всероссийский молодежный Форум с международным участием «Инженерия для освоения космоса», 12-14 апреля 2016 г., Томск;

4. XIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук», 26-29 апреля 2016 г., Томск;

5. IX Всероссийская научная конференция, посвященная 55-летию полета Ю.А. Гагарина «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», 21-25 сентября 2016 г., Томск;

6. Х Юбилейная международная научно-практическая конференция, посвященная памяти генерального конструктора ракетно-космических систем М.Ф. Решетнева «Решетневские чтения», 09-12 ноября 2016 г., Красноярск;

7. XI Международная научно-практическая конференция, посвященная памяти генерального конструктора ракетно-космических систем М.Ф. Решетнева «Решетневские чтения», 08-11 ноября 2017 г., Красноярск;

8. Х Всероссийская научная конференция, посвященная 140-летию ТГУ и 50-летию НИИ ПММ ТГУ, 03-05 сентября 2018 г., Томск.

По теме исследования опубликовано 14 работ, в том числе 3 статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, 5 статей в сборниках материалов конференций, представленных в зарубежных научных изданиях, входящих в Web of Science и Scopus, 6 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских научных конференций.

Внедрение результатов работы. Результаты метода расчета ВОК, численные модели сетчатых космических рефлекторов, реализованные как пакеты программ на языке APDL (Ansys Parametric Design Language), применялись в совместных работах с АО «Информационные спутниковые системы» им. ак. М. Ф. Решетнева», а также в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научнотехнологического комплекса России на 2014–2020 годы» по соглашениям № 14.578.21.0257, № 14.575.21.0144, № 14.578.21.0060, № 14.578.21.0073.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. При выполнении работ по теме диссертации автор лично разработал вычислительные программы на языке APDL (ANSYS Parametric Design Language) программного комплекса ANSYS для таких BOK как сетчатые космические рефлекторы, принимал непосредственное участие в постановке задач, выборе MПС для расчета равновесной формы вантовых элементов рефлектора, обработке и анализе результатов, подготовке статей и докладов на конференциях.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 141 странице, состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, включающего 87 наименований, списка сокращений, 2 приложений, 82 рисунков, 8 таблиц (из них 2 в приложениях).

Во введении показана актуальность и степень разработанности рассматриваемой темы, сформулированы цели и задачи работы; указаны область, методы и предмет исследования; отмечена новизна и практическая значимость полученных результатов и их достоверность; отмечены результаты, выносимые на защиту; приведены данные об апробации, внедрении результатов работы и личном участии автора в их получении.

В первой главе представлен литературный обзор основных современных методов поиска форм вантовых сетей, основанных на итерационных методах решений уравнений равновесия и уравнений движения для узлов вантовой сети; обсуждены характерные особенности каждого метода; сделан выбор МПС как основного метода, позволяющего получить начальную равновесную форму вантовой сети в численной модели ВОК; поставлена геометрически нелинейная задача определения НДС ВОК с учетом начальной формы вантовой сети.

13

Во второй главе описан двухэтапный метод расчета НДС ВОК с поиском начальной формы вантовой сети.

На первом этапе производится поиск начальной формы вантовой сети нелинейным МПС по схеме расчета автора Н. -J. Schek [18]. Показано, что в некоторых задачах поиска формы вантовой структуры зонтичного антенного рефлектора космического аппарата может возникнуть проблема расчета шага итерации плотности силы из-за трудности обращения (плохой обусловленности) матрицы произведений матриц Якоби, возникающих при линеаризации функции, описывающий ограничения на вантовые элементы. Поэтому, в случае проблемы обращения указанной матрицы, предлагается использовать псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза для расчета шага итерации плотности силы.

На втором метода этапе описывается процедура расчета НДС ВОК итерационным методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности. Процедура основана на последовательном изменении граничных условий по перемещениям узлов конечно-элементной модели рассматриваемой конструкции. В качестве начального приближения используются решения, полученные методом плотности сил на первом этапе.

В третьей главе приводится приложения метода расчета к конструкциям СР космических аппаратов. Рассмотрены примеры расчета перспективных рефлекторов зонтичного и ободного типов с диаметрами от 12 до 50 метров. Показана сходимость и достоверность решений МПС при расчете вантовой формообразующей структуры 12 метровых рефлекторов.

В рассмотренных примерах также установлено, что решения МПС дают эффективные (по времени расчета и сходимости) начальные приближения (по координатам и напряжениям), позволяющие получить требуемое НДС рефлекторов в МКЭ.

В четвертой главе производится анализ устойчивости и собственных частот конструкций рефлекторов ободного и зонтичного типов. Показано, что при использовании решений метода плотности сил можно получить устойчивые конструкции рефлекторов, у которых среднеквадратическое отклонение натяжений

вантовых элементов от номинального значения 10 H не превысило 1,03 H (при действии сил натяжений оболочки отражающей поверхности и учета влияний деформаций силового каркаса). Кроме того, у зонтичной конструкции значения её собственных частот были незначительно выше по сравнению со случаем, где решения метода плотности сил не использовались.

В заключении даны краткое описание и анализ основных результатов решения поставленных в диссертационной работе задач. Отмечены перспективы дальнейшей разработки темы.

В приложении приведены координаты узлов вантовых формообразующих структур ободного и зонтичного рефлекторов (диаметром 12 м), рассчитанных методом плотности сил.

ГЛАВА 1 Постановка задачи математического моделирования вантовооболочечных конструкций с поиском начальной формы вантовой сети

1.1 Предварительные замечания по Главе 1

Рассматриваемые в настоящей работе ВОК принадлежат к классу конструкций, значительной работа которых В степени зависит ОТ ИХ геометрической формы и распределения напряжений в ее элементах [31]. Кроме того, их точная форма не определяется простыми математическими функциями. Таким образом, при проектировании конструкции необходимо определять её равновесную форму при действии сил предварительного натяжения в вантовых и оболочечных элементах. Этот процесс, как было отмечено выше, носит название поиск формы. Он может начинаться до более детального анализа, включающего действие внешних нагрузок, таких как снеговая или ветровая [32].

До эпохи компьютерных технологий широко использовались экспериментальные методы поиска формы оболочек. Так, например, немецкий архитектор Отто Фрай и его коллеги последовали экспериментальному подходу 1873 года бельгийского физика Плато [32]. Они использовали природное свойство оболочки типа мыльной пленки принимать форму минимальной площади. В результате была построена конструкция павильона Федеративной Республики Германии (ФРГ) в Монреале на всемирной международной выставке Ехро'67 [33] (Рисунок 1.1):



Рисунок 1.1 – Павильон ФРГ на выставке Ехро'67 в г. Монреаль [33]

Средняя кривизна мыльной пленки определяется из теоремы Пуассона-Лапласа [34], которая утверждает, что гладкая двумерная поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , являющаяся границей раздела двух сред и находящаяся в состоянии равновесия, имеет постоянную среднюю кривизну, которая вычисляется по формуле:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = h(P_1 - P_2), \qquad (1.1)$$

где k_1 , k_2 – главные кривизны поверхности в рассматриваемой точке, P_1 , P_2 – давление в однородных средах ($P_1 > P_2$). В системе воздух-воздух для мыльной пленки $P_1 = P_2$, следовательно, H = 0 во всех точках поверхности [34].

В поиске формы вантовой сети, помимо условий равновесия, необходимо поддерживать одинаковое распределение натяжений в ее элементах. Важность этого вопроса подробно освещена в книге Л.Г Дмитриева и А.В. Касилова «Вантовые покрытия (расчет и конструирование)» [2]. Авторы отмечают, что недостатком вантовых систем является неравномерное распределение усилий в их элементах при действии произвольной вертикальной нагрузки, что в конечном итоге плохо сказывается на технико-экономических показателях системы, так как приходится использовать В ЭТОМ случае ванты разного сечения или унифицировать, перерасходуя материал.

Вопрос равномерного распределения натяжений в вантовых ФОС рефлекторов космических аппаратов рассмотрен в главе 3. Предварительно отметим, что равномерное распределение натяжений в вантовых элементах ОП космических рефлекторов положительно сказывается на их радиотехнических характеристиках и расходе материала вант [24].

1.2 Обзор методов поиска форм вантовых сетей

1.2.1 Геометрическая нелинейность

При воздействии на ВОК сосредоточенными силами и силами натяжений возникают достаточно большие перемещения ее элементов. Такое поведение называется *геометрически нелинейным*. С математической точки зрения это означает, что необходимо учитывать нелинейные члены перемещений в уравнениях равновесия и деформаций, даже находясь в зоне предела упругости материала. Рассмотрим простейший пример из работы [3], иллюстрирующий нелинейную зависимость между перемещением и прилагаемым усилием для стержневой системы, показанный на рисунке 1.2.



Рисунок 1.2 – Двухэлементная стержневая структура под воздействием вертикальной нагрузки [3]

Стержневая структура состоит из двух прямолинейных, эластичных стержней жесткостью К, шарнирно соединенные в центре (узле). Слева и справа стержни присоединены К неподвижным стенкам. Расстояние между составляет величину 2b. стержня неподвижными стенками длина В недеформированном состоянии – L_m , углы между стержнями и горизонтальным направлением – θ', θ для деформированного и не деформированного состояний соответственно, удлинение стержня вдоль его оси – e_m , начальное положение шарнирного соединения стержней по вертикали – h, усилие по вертикали в шарнирном соединении стержней – Р, перемещение шарнирного соединения стержней – δ .

Уравнение равновесия в вертикальном направлении можно записать как [3]:

$$P = 2Ke_{m}\sin\theta' = 2Ke_{m}\frac{\sqrt{(L_{m} + e_{m})^{2} - b^{2}}}{L_{m} + e_{m}} = 2K\left(\delta + h - \frac{L_{m}(\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^{2} + b^{2}}}\right).$$
 (1.2)

Как видно из уравнения (1.2), соотношение между прилагаемым усилием *Р* в шарнирном соединении и перемещением *б*, является нелинейным. Выражение в скобках можно линеаризовать, используя биномиальное разложение [3]:

$$\delta + h - \frac{L_m(\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} = \delta + h - \frac{L_m(\delta + h)}{\sqrt{h^2 + b^2}} \left(1 + \frac{2\delta h + \delta^2}{h^2 + b^2}\right)^{-1/2} \approx (1.3)$$
$$\approx \delta + h - \left(\delta + h\right) \left(1 - \frac{1}{2L_m^2} \left(2\delta h + \delta^2\right) + \dots\right).$$

Оставляя величины только первого порядка малости относительно δ в выражении (1.3), имеем [3]:

$$P = 2K \frac{h^2}{L_m^2} \delta \tag{1.4}$$

Таким образом, выражение (1.4) между P и δ стало линейным, так как $2K \frac{h^2}{L_m^2}$ –

постоянная величина. Из соотношений (1.2) – (1.4) можно сделать вывод, что задачу для стержневой системы можно линеаризовать только при малых перемещениях δ , квадраты которых можно не учитывать в разложении (1.3). Кроме того, при малых перемещениях δ полагают $\theta' \approx \theta$. В остальных же случаях задача считается геометрически нелинейной.

В работе [35] можно найти классификацию геометрически нелинейных задач, основанную на труде В.В. Новожилова [36], где вводится четыре «этажа» геометрической нелинейности, суть которых показана в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Классификация геометрически нелинейных задач работы [35]

| 0. | Геометрически линейные задачи |
|-----|------------------------------------------------------------------|
| | Уравнения равновесия записываются для деформированной системы. |
| I. | Уравнения, связывающие перемещения и деформаций являются |
| | линейными. |
| п | Различение порядков малости деформаций и поворотов в уравнениях, |
| 11. | связывающих перемещения и деформации |

Продолжение таблицы 1.1

| TTT | Повороты, в отличие от деформаций, не являются малыми по сравнения единицей в уравнениях, связывающих перемещения и деформации. | | |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| 111. | | | |
| | Повороты и относительные деформации не являются малыми по | | |
| IV. | сравнению с единицей в уравнениях, связывающих перемещения и | | |
| | деформации. | | |

Геометрически нелинейные задачи, относящиеся к стержневым конструкциям, автор [35] относит к классу I, а задачи для гибких нитей – к классу III.

1.2.2 Классификация методов поиска форм вантовых сетей

В настоящей работе будем использовать классификацию методов поиска форм сетей, принятую в [3], [4], а именно: 1) метод матрицы жесткости; 2) метод плотности сил; 3) метод динамической релаксации (Рисунок 1.3).



Рисунок 1.3 – Методы поиска форм вантовых сетей по классификации [3, 4]

Несмотря на различие методов, их объединяет тот факт, что во всех случаях ищется форма сети в состоянии равновесия итерационным способом.

1.2.3 Метод матрицы жесткости

В зарубежной литературе, метод, основанный на матрице геометрической и эластичной жесткости в уравнениях равновесия имеет название Transient stiffness method или Stiffness matrix method. Для более подробного его изучения можно обратиться к работам [37–39].

В [4] указано, что ММЖ адаптирован из методов структурного анализа, такого как МКЭ, который получил широкое распространение в шестидесятые годы двадцатого столетия. Существует большое количество отечественной и зарубежной литературы по МКЭ, в частности, книги, которые были отмечены во введении. В настоящее время, МКЭ реализован в пакетах компьютерных программ отечественных и зарубежных разработчиков, в таких как ЛИРА, ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и др. [40–43].

Рассмотрим ММЖ при следующих допущениях [3, 44]:

- вантовая сеть рассматривается в трехмерной декартовой прямоугольной системе координат *Oxyz*;

- вантовая сеть состоит из прямолинейных отрезков (элементов) постоянного сечения, соединенных в узлах;

- внешние усилия сосредоточены в узлах;

предположение о малости перемещений, т.е. линейная связь между
 приложенными нагрузками на элементы и узлы и возникающими
 перемещениями;

- соотношения между напряжениями и деформациями являются линейными

При данных допущениях уравнение равновесия для сети, состоящей из *m* элементов и *n* узлов, запишется в виде:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}^{\text{ext}} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{K}[3n \times 3n] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K}_{i}$ – глобальная матрица жесткости, \mathbf{K}_{i} – матрица жесткости *i* – го элемента, $\mathbf{u}[3n \times 1]$ – вектор - столбец перемещений узлов, , $\mathbf{P}^{\text{ext}}[3n \times 1]$ – вектор - столбец внешних нагрузок, приложенных к узлам системы. В квадратных

скобках будем обозначать размерности векторов и матриц. Коэффициент 3 в размерностях матриц означает учет перемещений и внешних сил в трех направлениях осей Ox, Oy, Oz соответственно. Левая часть уравнения (1.5) характеризует внутренние усилия в элементах системы, правая – внешние. Неизвестными величинами в (1.4) являются компоненты вектора перемещений **u**. Решение (1.5) запишется в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}^{\text{ext}} \,. \tag{1.6}$$

В [45] можно найти иллюстративные примеры формирования матрицы жесткости и составления уравнений типа (1.4) для стержневых систем, которые справедливы и для вантовых с учетом выше изложенных предположений.

Недостатком данного подхода является предположение о линейной зависимости между перемещениями и приложенными нагрузками. ММЖ определяет форму сети под воздействием заданных нагрузок по начально заданной геометрии. Ввиду предположения о малости перемещений, новая найденная форма по сути мало чем отличается от изначальной (не учитывается эффект геометрической нелинейности).

Матрица **К** в формуле (1.6) используется для вычисления малых перемещений. Следовательно, при больших перемещениях **u**, в (1.6) необходимо найти новую матрицу жесткости $\tilde{\mathbf{K}} \neq \mathbf{K}$, подставляя которую в (1.5) получили бы тождество , т.е. необходимо составление уравнений равновесия для новой (деформированной) сети. Для этой цели используется итерационный подход, суть которого описана ниже.

Пусть на k – м шаге форма сети определяется вектором координат его узлов $\mathbf{X}_{k}[3n \times 1]$ с соответствующей матрицей жесткости \mathbf{K}_{k} . Тогда на k+1 – м шаге форма сети будет определяться выражением [3]:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \mathbf{K}_{k+1}^{-1} \mathbf{P}^{\text{ext}}$$
(1.7)

Если норма вектора перемещения \mathbf{u}_{k+1} окажется большой, тогда произведение матрицы жесткости на вектор перемещений $\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{u}_{k+1}$ будет вызывать внутренние усилия в элементах [3]:

$$\mathbf{P}_{k+1}^{\text{int}} = \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} \neq \mathbf{P}^{\text{ext}}$$
(1.8)

которые не сбалансированы с внешними нагрузками **P**^{ext}.

Обозначив $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^{\text{int}} - \mathbf{P}^{\text{ext}}$, получим корректирующее выражение для перемещений узлов [3]:

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1}^{-1} \mathbf{R}_{k+1} \tag{1.9}$$

Вектор перемещений (1.9) используется как слагаемое в (1.7) для коррекции формы сети до тех пор, пока не достигнет нулевого значения с заданной точностью.

Итерационный способ расчета сети с помощью ММЖ является аналогом метода Ньютона-Рафсона для решения системы нелинейных уравнений равновесия [3].

ММЖ имеет особенности, влияющие на точность вычислений. Например, при больших размерах матрицы жесткости, использование формулы (1.9) может быть некорректным или приводящем к расходящемуся решению вследствие ошибок округления из-за большого количества арифметических операций [3]. Так, при размере матрицы $\mathbf{K}_{k+1}[100 \times 100]$ использование алгоритма нахождение обратной матрицы \mathbf{K}_{k+1}^{-1} с помощью присоединенной матрицы равнозначно методу Крамера, в котором необходимо произвести 100! арифметических операций умножения при вычислении определителя матрицы жесткости разложением по строке или столбцу [22]. Поэтому для решения уравнения вида (1.9), можно использовать прямые или итерационные методы (метод Гаусса с выбором главного элемента, метод сопряженных градиентов и др.), уменьшающие количество выполняемых операций. Другая проблема ММЖ заключается в том, что при формировании матрицы жесткости **К**_{k+1} в итерационной формуле (1.7) направляющие косинусы вантовых элементов соответствуют предыдущему шагу итерации k, а не текущему k+1, что также сказывается на точности вычислений [3].

1.2.4 Метод плотности сил

Метод плотности сил был разработан при проектировании крыши олимпийского стадиона в г. Мюнхен (Германия) в 1971 году [17, 18, 46].

Изначально форма крыши (координаты узлов сети) и распределение величин натяжений в вантовых элементах определялась на физической модели (макете) методом фотограмметрии, с дальнейшей экстраполяцией на реальную конструкцию. Но неудовлетворительные результаты привели к созданию нового численного метода [24].

Макет и реальная конструкция крыши стадиона показаны на рисунках 1.4 и 1.5 соответственно [46], [47].



Рисунок 1.4 – Макет крыши олимпийского стадиона в г. Мюнхен [46]



Рисунок 1.5 – Крыша олимпийского стадиона в г. Мюнхен [47]

МПС основан на следующих допущениях [19]:

- сеть рассматривается в трехмерной декартовой прямоугольной системе координат *Oxyz*;

- сеть состоит из прямолинейных отрезков (элементов) постоянного сечения, соединенных в узлах. Часть узлов считается свободными (с искомыми координатами), часть – фиксированными (с заданными координатами);

- отношение q силы натяжения T элемента к его длине L – постоянно, т.е.

$$q = \frac{T}{L} = const;$$

- элементы не имеют веса;

- внешние усилия сосредоточены в узлах.

Допущение о существовании параметра плотности силы *q* позволяет свести нелинейную систему уравнений равновесия (относительно координат узлов) вантовых элементов к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Решение СЛАУ определяет координаты узлов, а следовательно, длины и величины натяжений элементов.

Существует две формулировки МПС: *линейная* и *нелинейная*. Линейная позволяет найти координаты узлов вантовых элементов в состоянии равновесия при произвольно заданных значениях плотностей сил. Нелинейная позволяет найти не только координаты узлов в состоянии равновесия, но и удовлетворить определенным ограничениям на рассматриваемые элементы, например, сохранение определенных значений натяжений и длин в напряженном (ненапряженном) состоянии.

В нелинейной постановке значения плотностей сил элементов определяются не произвольно, а с помощью решения систем нелинейных уравнений [18], описывающих указанные выше ограничения.

Рассмотрим сначала простейший пример линейной постановки МПС.

Пусть на свободный узел *i* вантовой сети действует внешнее усилие $\mathbf{P}^{i}(P_{x}^{i}, P_{y}^{i}, P_{z}^{i})$, остальные узлы, считаем фиксированными (Рисунок 1.6).



Рисунок 1.6 – Схема вантовых элементов в МПС

$$\sum_{j=1}^{c_i} \frac{T_j}{l_j} \left(x_j - x_i \right) = P_x^i; \sum_{j=1}^{c_i} \frac{T_j}{l_j} \left(y_j - y_i \right) = P_y^i; \sum_{j=1}^{c_i} \frac{T_j}{l_j} \left(z_j - z_i \right) = P_z^i, \quad (1.10)$$

где x_i, y_i, z_i — координаты искомого узла i, x_j, y_j, z_j — координаты фиксированного

узла *j*-го элемента, соединенного с узлом *i*, T_j , l_j – натяжение и длина *j*-го элемента соответственно, c_i – количество элементов, соединенных с узлом *i*.

Вводя параметр плотности силы

$$q_j = \frac{T_j}{l_j} = const \tag{1.11}$$

в уравнения (1.10), получим:

$$\sum_{j=1}^{c_i} q_j \left(x_j - x_i \right) = P_x^i; \sum_{j=1}^{c_i} q_j \left(y_j - y_i \right) = P_y^i; \sum_{j=1}^{c_i} q_j \left(z_j - z_i \right) = P_z^i. \quad (1.12)$$

То есть, нелинейная система уравнений (1.10) преобразовалась в линейную (1.12) относительно координат x_i, y_i, z_i . Придавая различные значения параметрам q_j , и решая соответствующую СЛАУ, получаем различные формы равновесия элементов сети. Далее определяются значения длин и натяжений элементов по формулам (1.13), (1.14):

$$l_{j} = \sqrt{\left(x_{j} - x_{i}\right)^{2} + \left(y_{j} - y_{i}\right)^{2} + \left(z_{j} - z_{i}\right)^{2}}, \qquad (1.13)$$

$$T_j = l_j q_j. \tag{1.14}$$

Уравнения (1.12) определяют простейшую равновесную форму вантовых элементов, показанных на рисунке 1.6. Для описания более общих систем, состоящих из *m* элементов и *n* узлов, вводится матричная формулировка МПС с соответствующей СЛАУ равновесия, определяющей координаты искомых узлов в

виде вектор-столбцов $\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q})$ размерностью [$n \times 1$], зависящих от векторстолбца плотности силы **q** размерностью [$m \times 1$] [18, 19].

Для определения формы сети с ограничениями на рассматриваемые элементы (равномерное распределение натяжений, определённое значение длины в напряженном и ненапряженном состояниях и др.) вводится система нелинейных уравнений относительно **q**:

$$\mathbf{g}^{*}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q}), \mathbf{q}) = \mathbf{0}.$$
 (1.15)

Размерность левой части (1.15) – [*r*×1], где *r* – количество элементов, на которые наложены ограничения (*r*<*m*).

Таким образом, в матричной нелинейной постановке МПС необходимо найти такое значение вектора плотности силы **q**, которое удовлетворяет СЛАУ (1.12) равновесия и нелинейным уравнениям (1.15). Матричная постановка будет рассмотрена в главе 2.

В настоящий момент, можно проследить развитие МПС и его приложений на следующих примерах. Работы [19], [20] посвящены поиску формы сети, учитывающей определенные значения сил реакций в фиксированных узлах, а [48, 49] предлагают решения в поиске начальной равновесной формы мембраны и слабо натянутой (провисшей) цепной линии соответственно. Другие аспекты развития МПС, а также его приложений представлены в [50 - 58].

1.2.5 Метод динамической релаксации

В [3], [4] упоминается, что МДР на ранних стадиях разработки рассматривался как конечноразностный метод решения нелинейных уравнений движения, и впервые использовался для анализа оболочек [59], пластин [60, 61], а также каркасных и вантовых структур [62 – 64].

Идея метода заключается в дискретизации континуальной области на конечные прямолинейные элементы, которые соединены в узлах с точечной массой *M_i* (Рисунок 1.7) [3].



Рисунок 1.7 – Дискретизированная континуальная область в МДР [3]

Под воздействием несбалансированных внешних и внутренних усилий система узлов начинает колебаться около положения равновесия. Процесс продолжается в течение некоторого времени – до тех пор, пока система не достигнет состояния равновесия под воздействием сил демпфирования.

Существуют два подхода МДР, основанных на *вязком и кинетическом* демпфировании.

В случае вязкого демпфирования записывается система уравнений движения (описывающая колебательный процесс) в виде [3]:

$$P_{ji} = \left[\sum_{m=1}^{c_j} K_m u\right]_{ji} + M_{ji} \ddot{u}_{ji} + C_j \dot{u}_{ji}, \qquad (1.16)$$

где индексы *ji* означают *j*-й узел в *i*-м направлении координатной оси дискретизированной системы, P_{ij} – компонент вектора внешней силы, M_{ij} – масса

j-го узла,
$$\left[\sum_{m=1}^{c_j} K_m u\right]_{ji}$$
 – компонент вектора внутренних усилий, K_m – жесткость

m – го элемента, соединенного с узлом j, c_j – количество элементов, соединенных с узлом j, u_{ji} – компонент вектора перемещений узлов, \ddot{u}_{ji} , \dot{u}_{ji} – компоненты вектора скорости и ускорений узлов соответственно, C_j – коэффициент вязкого демпфирования.

Вводя разницу (невязку) компонент внешних и внутренних усилий R_{ji} , получим [3]:

$$R_{ji} = P_{ji} - \left[\sum_{m=1}^{c_j} K_m u\right]_{ji},$$
 (1.17)

Из системы (1.16) следует, что

$$R_{ji} = M_{j} \ddot{u}_{ji} + C_{j} \dot{u}_{ji} \,. \tag{1.18}$$

Уравнения (1.28) указывают на то, что система узлов приходит в движение за счет невязки сил, а (1.17) описывает условия равновесия дискретизированной системы, в случае равенства этой невязки нулю.

Уравнения (1.18) (далее индекс *i* будем опускать) решаются методом конечных разностей с помощью формулы центральной разности для *n*-го временного шага Δt [3]:

$$R_{j}^{n} = M_{j} \frac{\dot{u}_{j}^{n+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + C_{j} \frac{\dot{u}_{j}^{n+\frac{1}{2}} + \dot{u}_{j}^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$
 (1.19)

откуда выражения для скорости и перемещений *j*-го узла соответственно имеют вид [3]:

$$\dot{u}_{j}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{j}^{n-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{M_{j}/\Delta t - C_{j}/2}{M_{j}/\Delta t + C_{j}/2} \right\} + \frac{R_{j}^{n}}{M_{j}/\Delta t + C_{j}/2};$$
(1.20)

$$u_{j}^{n+1} = u_{j}^{n} + \dot{u}_{j}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \,. \tag{1.21}$$

Итерационный процесс (1.26), (1.27) продолжается до тех пор, пока значение невязки [3]

$$R_{j}^{n} = P_{j} - \left[\sum_{m=1}^{c_{j}} K_{m}u\right]_{j}^{n-1}$$
(1.22)

не достигнет значения близкого к нулю.

Устойчивость (1.20), (1.21) обеспечивается выбором шага Δt , точечной массы узла $M_j M_j$ и коэффициентом демпфирования C_j .

В [3] указано, что выбор шага интегрирования Δt ограничен величиной $\frac{2}{\sqrt{\mu}}$

, где μ – наибольшее из собственных чисел матрицы **M**⁻¹**K** (**M** – диагональная матрица масс узлов, **K** – матрица жесткости вантовой системы).

Связь временного шага Δt , массы M_i и так называемой узловой жесткости

$$K_{j} = \sum_{m=1}^{c_{j}} K_{m}$$
 представлена в [3] и [44] по формуле:

$$\Delta t = \sqrt{2 \frac{M_j}{K_j}} \,. \tag{1.23}$$

Положим в (1.23) $\Delta t = 1$, тогда масса узла M_j имеет вид [3]:

$$M_{j} = \frac{K_{j}\Delta t^{2}}{2} = \frac{K_{j}}{2}.$$
 (1.24)

Расчетная формула вязкого демпфирования С_j имеет вид [3]:

$$C_i = 4\pi M_i f \,, \tag{1.25}$$

где $f=1/N\Delta t$ – первая собственная частота колебаний, N – число итераций, необходимых для полного колебания системы. Для получения числа итераций N, необходимо произвести дополнительный расчет при $C_j = 0$.

Численное решение уравнений (1.16) с использованием вязкого демпфирования (1.25) дает наиболее быструю сходимость (1.20)-(1.21), но требует дополнительного расчета при $C_i = 0$ [3], [44].

Альтернативный подход в решении уравнений (1.16) основан на принципе максимума кинетической энергии системы (КЭ), суть которого в следующем. Пусть система узлов с точечной массой M_j совершает колебательное движение, описываемое соотношениями (1.20) - (1.22) при $C_j = 0$, тогда [3]:

$$\dot{u}_{j}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{j}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{R_{j}^{n}}{M_{j}/\Delta t}.$$
(1.26)

Положив в (1.21) $\Delta t = 1$, получим [3]:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \dot{u}_j^{n+\frac{1}{2}}.$$
 (1.27)

По аналогии с колебаниями математического маятника, система, достигнув максимума кинетической энергии, имеет минимум потенциальной. Согласно [3], максимум КЭ для (1.26), (1.27) достигается тогда, когда ее значение на текущем временном шаге меньше чем на следующем. Полагая скорость узлов (при максимуме КЭ) равной нулю, получаем их некоторое положение, которое является начальным для последующего расчета. Этот расчет продолжается до тех пор, пока максимум КЭ и значения невязки (1.22) не достигнет практически нулевого значения (соответствующего положению равновесия узлов).

Расчет максимума КЭ происходит для шага $\Delta t=1$, поэтому истинное значение времени t_{max} , при котором он будет достигнут, – неизвестно. Величина t_{max} может быть оценена с помощью интерполяции трех последовательных значений КЭ: KE_1 , KE_2 , KE_3 квадратичной зависимостью. Тогда выражение для t_{max} и соответствующее корректированное значение перемещения, определяющие положение узлов, запишутся в виде [3], [44]:

$$t_{\max} = \frac{4KE_2 - 3KE_1 - KE_3}{KE_3 - 2KE_2 + KE_1} \Delta t, \qquad (1.28)$$

$$u_{j}^{t_{\max}} = u_{j}^{n+1} - (1+\beta)\dot{u}_{j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{2R_{j}^{n}}{K_{j}}, \qquad (1.29)$$

где $\beta = \frac{KE_3 - KE_2}{KE_3 - 2KE_2 + KE_1}$.

Таким образом, при достижении максимума КЭ положение узлов определяется соотношением (1.29), в противном случае – (1.27).

В настоящий момент, можно проследить развитие МДР и его приложений на примерах следующих работ. В [65] предлагается новый подход в расчете коэффициента вязкого демпфирования; в [66] предлагается альтернативная формулировка с нулевым вязким демпфированием; в [67] предлагается метод поиска формы конструкций из деревянных элементов, где в математической формулировке МДР используется коэффициент вязкого демпфирования, полученного с помощью матриц масс и жесткости рассматриваемой системы; в [68] МДР используется для поиска формы плоских дискретизированных текстильных оболочечных элементов, полученных с помощью раскроя соответствующей трехмерной модели.

1.3 Постановка задачи определения НДС вантово-оболочечных конструкций с учетом геометрической нелинейности и начальной формы вантовой сети

В общем случае моделирование поля перемещений узлов ВОК основано на нелинейных уравнениях теории упругости (уравнения равновесия, уравнения связи перемещений и деформаций, закон Гука) [14]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kj} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) = 0, \qquad (1.30)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right), \tag{1.31}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E_m}{1 + \nu_m} \cdot (\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_m}{1 - 2\nu_m} \cdot \delta_{ij}\varepsilon_{ll}) - \frac{E_m}{1 - 2\nu_m} \cdot \varepsilon_{ij}^T + \sigma_{ij}^0$$
(1.32)

где δ_{ij} – символ Кронекера; u_i , σ_{ij} , σ_{ij}^0 , ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^T = \alpha \cdot \Delta T \delta_{ij}$, – компоненты вектора перемещения узлов, второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, тензора предварительных напряжений, тензора деформаций и тензора температурных соответственно; E_m , v_m , – модуль упругости, коэффициент Пуассона m –го материала; α , ΔT –, коэффициент температурного расширения материала, величина изменения температуры соответственно. Значения индексов *i*, *j*, k = 1...3.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.33}$$

$$n_k \sigma_{kj} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = p_i^n(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \partial \Omega$$
(1.34)

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ - вектор, определяющий положение точки в континууме Ω , $p_i^n(\mathbf{x})$ – напряжение на границе $\partial \Omega$, характеризуемое вектором нормали **n**. Также задаются поля напряжений σ_{ij}^0 и температуры

$$T^{0} = T^{0}(\mathbf{x}) \\ \sigma_{ij}^{0} = \sigma_{ij}^{0}(\mathbf{x})$$
, $\mathbf{x} \in \Omega$ (1.35)

Поле напряжений σ_{ij}^{0} моделирует напряжения, которые должны установиться в элементах конструкции ВОК. С помощью поля температур T^{0} моделируется натяжение шнуров сети (за счет теплового расширения или сжатия).

Уравнения (1.30) - (1.32) с граничными условиями (1.33) и (1.35) решались с помощью МКЭ, где область Ω функции приближенно представлялась в виде набора $\Omega_{\text{КЭМ}}$ непересекающихся *N* областей (элементов), построенных на узлах. То есть, Ω аппроксимировалась сеткой элементов, которые связаны между собой в узлах и на границах. На элементе сетки значение точного решения (1.30) представляется в виде:

$$u^*(\mathbf{x}) = \sum_j a_{[j]} N_{[j]}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$
(1.36)

где $N_{[j]}$ – базисная функция формы, соответствующая узлу с номером *j*; $a_{[j]}$ – значение приближенного решения в узле *j*. В квадратных скобках обозначены индексы номеров узлов конечно-элементной сетки.

Функции формы $N_j(\mathbf{x})$ удовлетворяют соотношениям:

$$N_{[j]}(x_{[i]}) = \begin{cases} 1, \ i = j; \\ 0, \ i \neq j; \end{cases}$$
(1.37)

где x_i – компонента вектора **х**. Кроме того, функция $N_{[j]}(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \notin \Omega_{[i]}^{\Sigma}$, где $\Omega_{[i]}^{\Sigma}$ – окрестность в пространстве, занимаемая элементами смежными узлом *i*.

В [14] показано, что применяя метод Галекрина к (1.30) получается система уравнений для *i*-ой компоненты перемещений в виде

$$\int_{\Omega} N_{[I]} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kj} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) d\Omega = 0.$$
(1.38)

Интегрирование (1.38) по частям приводит к системе нелинейных матричных нелинейных уравнений:

$$\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{u}})^{}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{b}^{}.$$
 (1.38)

Элемент матрицы жесткости $\mathbf{K}^{<i>}$ и правой части $\mathbf{b}^{<i>}$ находятся по формулам [14]:

$$k_{[l](m)}^{}(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega_{[l]}^{\Sigma}} \frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_k} \cdot \psi_{(m)}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot d\Omega_{[l]}^{\Sigma}, \qquad (1.39)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ – полный вектор перемещений узлов, $\psi_{(m)}(\tilde{\mathbf{u}})$ – компоненты вектора, состоящих из сумм, слагаемые которых это произведения $\left(\frac{\partial N_{[l]}}{\partial x_j}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial N_{[m]}}{\partial x_j}\right)^{\beta} \tilde{u}_{\xi}^{\gamma} \tilde{u}_{\eta}^{\chi}$

(α , β , γ , χ – неотрицательные целые числа, m=1..3I, где I – общее количество узлов), $\int_{S_{[I]}^{\Sigma}} N_{[I]} \cdot p_i^n \cdot dS_{[I]}^{\Sigma} = b_{[I]}^{<i>}$ – компоненты вектора $\mathbf{b}^{<i>}$, определяющих вклад

граничных условий.

Размерность матриц $\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{u}})^{<i>}$ и $\mathbf{b}^{<i>} - [I \times 3I]$ и $[I \times 1]$ соответственно. Объединяя матрицы жесткости $\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{u}})^{<i>}$ и правой части $\mathbf{b}^{<i>}$ по всем трем направлениям, получим:

$$\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{b}\,,\tag{1.40}$$

где
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{<1>} \\ \mathbf{K}^{<2>} \\ \mathbf{K}^{<3>} \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{<1>} \\ \mathbf{b}^{<2>} \\ \mathbf{b}^{<3>} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (1.40) решались итерационным методом Ньютона-Рафсона. Решение (1.40) позволяет однозначно определить распределение перемещений узлов в элементах ВОК. Кроме того, уравнения (1.40) дополняется системой уравнений (1.12) и (1.15):

$$\sum_{j=1}^{c_i} q_j (x_j - x_i) = P_x^i; \sum_{j=1}^{c_i} q_j (y_j - y_i) = P_y^i; \sum_{j=1}^{c_i} q_j (z_j - z_i) = P_z^i$$
$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}$$

которая позволяет находить начальные координаты узлов вантовых элементов в состоянии равновесия с определенными ограничениями на элементы сети.

1.4 Выводы по главе 1

В настоящей главе описана постановка задачи математического моделирования ВОК с поиском начальной формы вантовой сети. Она основана на уравнениях (1.12), (1.15), (1.30)–(1.32) с граничными условиями (1.33)–(1.35)

Выделено три основных метода поиска формы сети по классификации [3, 4]: ММЖ (метод матрицы жесткости), МПС (метод плотности) и МДР (метод динамической релаксации).

В поиске формы сетей с помощью ММЖ наиболее важным было то, что он определяет форму сети под воздействием заданных нагрузок с начально заданной геометрией. Ввиду предположения о малости перемещений, найденная форма по сути мало чем отличается от изначальной (не учитывается эффект геометрической нелинейности). Поэтому приходится вычислять новую матрицу жесткости, соответствующую новому (деформированному) состоянию. Такой подход приводит к итерационной формуле (1.7), которая реализуется до тех пор, пока норма вектора невязки внутренних и внешних усилий не будет принимать значений близких к нулю. Стоит отметить, что форма сети, рассчитанная по ММЖ, не учитывает дополнительных ограничений, налагаемых на рассматриваемые элементы.

При поиске формы сети с помощью МДР использовались уравнения движения (1.16) дискретизированной области с точечными массами в узлах, которые решаются методом конечных разностей. Основными преимуществами МДР являются:

- небольшое количество арифметических операций, так как вычисления применяются для отдельного узла, а не всей системы сразу;

- использование формулы (1.23) для шага итерации по времени дает устойчивую сходимость в (1.20) и (1.21);

- МДР менее затратный по времени по сравнению с ММЖ.

Однако, также как ММЖ, МДР (в рассмотренной формулировке) не учитывает определенных ограничений, налагаемых на элементы вантовой сети. Поэтому из всех рассмотренных методов поиска форм, наиболее предпочтительным оказался МПС, так как, с одной стороны, он линеаризует уравнения равновесия 1.10, а с другой – позволяет учесть определенные ограничения на вантовые элементы (натяжение, длины в напряженном и ненапряженном состояниях и др.) с помощью нелинейных уравнений 1.15.

Решение задачи (1.30) - (1.35) реализуется нелинейным МКЭ, где координаты вантовой сети получены из решения уравнений (1.12), (1.15). Для получения сходящегося решения МКЭ использовалась процедура последовательного изменения граничных условий по перемещениям, которая описывается в следующей главе.
ГЛАВА 2 Метод расчета НДС вантово-оболочечных конструкций с поиском начальной формы вантовой сети

2.1 Предварительные замечания по Главе 2

В данной главе описывается метод расчета НДС ВОК с поиском начальной формы вантовой сети. Метод можно условно разделить на два этапа [21].

Этап 1. Производится поиск начальной равновесной формы вантовой сети нелинейным МПС по схеме расчета [18]. Она позволяет определять координаты узлов сети, а также учитывать некоторые требования, налагаемые на её элементы. Соответствующие уравнения равновесия получены введением транспонированной матрицы инцидентности, описанной ниже. Также описан способ получения и расчета нелинейных уравнений (1.15).

Решение (1.15)реализовано итерационным методом Ньютона С последующим решением неопределенной СЛАУ методом множителей Лагранжа. Решение СЛАУ определяет шаг итерации плотности силы в методе Ньютона. Однако при расчете шага для вантовой ФОС зонтичного СР [69], выявилась проблема плохой обусловленности произведения матриц Якоби, возникающих линеаризации (2.15). Для решения этой проблемы при использовалась псевдообратная матрица Мура-Пенроуза [22, 23].

Этап 2. Найденные координаты узлов используются при построении комплексной КЭМ ВОК, учитывающей оболочечные и балочные элементы. Таким образом, полученная начальная форма КЭМ уже имеет некоторое начальное приближение к искомой равновесной форме. Однако, окончательное распределение перемещений узлов ВОК определяется из итерационного решения нелинейных уравнений равновесия методом Ньютона-Рафсона, так как в конструкцию добавляется воздействие натяжений оболочки и учитываются упругие характеристики элементов силового каркаса конструкции.

При расчете поля перемещений узлов КЭМ ВОК использовалась процедура последовательного изменения граничных условий по перемещениям, разработанная в НИИ ПММ ТГУ [14], которая помогает достичь сходящегося

решения. Она получила практическое применение при расчете СР космических аппаратов. различной конфигурации [69 – 73].

2.2 Этап 1. Нелинейный матричный метод плотности сил для поиска начальной формы вантовой сети

2.2.1 Определение топологии сети на основе матрицы инцидентности

Рассмотрим простейший пример топологии прямолинейных вантовых элементов, соответствующей транспонированной матрице инцидентности [18] (Рисунок 2;1):



Рисунок 2.1 – Топология простейшей вантовой системы и соответствующая матрица инцидентности

В представленной системе, цифрами синего цвета обозначены номера прямолинейных элементов (шнуров), а черными цифрами обозначены номера узлов, соединяющие указанные элементы. В данной конфигурации, полагается, что координаты узлов 1-3 подлежат определению, а координаты узлов 4-13 являются заданными. Далее, для заданной нумерации узлов и элементов, формируется матрица инцидентности вида [18]:

$$\mathbf{C}_{s}(e,i,j) = [\mathbf{C},\mathbf{C}_{f}] = \begin{cases} +1, \text{для узла } i \text{ элемента } e=1..m; \\ -1, \text{для узла } j \text{ элемента } e=1...m(i < j); \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$
(2.1)

Для рисунка 2.1, матрица $C_s = [C; C_f]$, где матрица C соответствует искомым узлам 1-3, а матрица C_f соответствует фиксированным узлам 4-13.

По аналогии с рассмотренным примером, по формуле (2.1) можно сформировать матрицу произвольного размера $[m \times n]$.

2.2.2 Матричные уравнения равновесия

Для матричной формулировки МПС введем следующие обозначения:

 \mathbf{x}_{s} , \mathbf{y}_{s} , \mathbf{z}_{s} – вектора-столбцы, размерностью [$n_{s} \times 1$], координат всех (фиксированных и искомых) узлов сети;

х, **у**, **z** – вектора-столбцы, размерностью $[n \times 1]$, координат искомых узлов сети;

 \mathbf{x}_{f} , \mathbf{y}_{f} , \mathbf{z}_{f} – вектора-столбцы, размерностью [$n_{f} \times 1$], координат фиксированных узлов ФОС рефлектора;

 \mathbf{f}_{x} , \mathbf{f}_{y} , \mathbf{f}_{z} – вектора-столбцы, размерностью [$n \times 1$], компонент сил, приложенных к искомым узлам сети;

1 – вектор-столбец, размерностью [$m \times 1$], длин элементов сети;

t – вектор-столбец, размерностью [$m \times 1$], натяжений элементов сети.

Для принятых обозначений, можно записать выражения координат элементов сети в виде [18]:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{C}_{s} \mathbf{x}_{s} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{C}_{f} \mathbf{x}_{f}; \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_{s} \mathbf{y}_{s} = \mathbf{C} \mathbf{y} + \mathbf{C}_{f} \mathbf{y}_{f}; \\ \mathbf{w} = \mathbf{C}_{s} \mathbf{z}_{s} = \mathbf{C} \mathbf{z} + \mathbf{C}_{f} \mathbf{z}_{f}. \end{cases}$$
(2.2)

Вводя в рассмотрение диагональные матрицы:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \text{diag}(\mathbf{u}); \\ \mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{v}); \\ \mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w}), \end{cases}$$
(2.3)

можно записать систему уравнений равновесия для узлов сети в виде [18]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}^{T} \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t} = \mathbf{f}_{x}; \\ \boldsymbol{C}^{T} \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t} = \mathbf{f}_{y}; \\ \boldsymbol{C}^{T} \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t} = \mathbf{f}_{z}. \end{cases}$$
(2.4)

По аналогии с выражением (1.11), введя параметр плотности силы (векторстолбец размерности [*m*×1]):

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{t},\tag{2.5}$$

уравнения (2.4) можно записать в виде:

$$\begin{cases} C^{T} \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{f}_{x}; \\ C^{T} \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{f}_{y}; \\ C^{T} \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{f}_{z}. \end{cases}$$
(2.6)

Обозначив

$$\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\mathbf{q}) \tag{2.7}$$

и учитывая, что имеют места равенства [18]

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{Q}\mathbf{u}; \\ \mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{Q}\mathbf{v}; \\ \mathbf{W}\mathbf{q} = \mathbf{Q}\mathbf{w}, \end{cases}$$
(2.8)

уравнения (2.6) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} C^{T}\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{x}; \\ C^{T}\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{f}_{y}; \\ C^{T}\mathbf{Q}\mathbf{w} = \mathbf{f}_{z}. \end{cases}$$
(2.9)

Используя выражения (2.2) в уравнениях (2.9), окончательно получим систему уравнений относительно векторов **x**, **y**, **z** [18]:

$$\begin{cases} \left(C^{T}\mathbf{Q}C\right)\mathbf{x} + \left(C^{T}\mathbf{Q}C_{f}\right)\mathbf{x}_{f} = \mathbf{f}_{x}; \\ \left(C^{T}\mathbf{Q}C\right)\mathbf{y} + \left(C^{T}\mathbf{Q}C_{f}\right)\mathbf{y}_{f} = \mathbf{f}_{y}; \\ \left(C^{T}\mathbf{Q}C\right)\mathbf{z} + \left(C^{T}\mathbf{Q}C_{f}\right)\mathbf{z}_{f} = \mathbf{f}_{z}. \end{cases}$$
(2.10)

Обозначив

$$\begin{cases} \mathbf{D} = C^T \mathbf{Q} C; \\ \mathbf{D}_f = C^T \mathbf{Q} C_f. \end{cases}$$
(2.11)

решение (2.10) можно записать следующим образом [18]:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{f}_{x} - \mathbf{D}_{f} \mathbf{x}_{f} \right); \\ \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{f}_{y} - \mathbf{D}_{f} \mathbf{y}_{f} \right); \\ \mathbf{z} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{f}_{z} - \mathbf{D}_{f} \mathbf{y}_{f} \right). \end{cases}$$
(2.12)

В [18] отмечается:

- матрица **D** – положительно определенна (если для всех элементов сети $q_j > 0$ без изолированных узлов), и является обобщенным гауссовским преобразованием матрицы *C*;

- если заданы матрица C_s , векторы узловых нагрузок \mathbf{f}_x , \mathbf{f}_y , \mathbf{f}_z и вектор \mathbf{q} , то решение (2.12) — единственно. Это означает, что каждому значению \mathbf{q} соответствует единственная равновесная форма сети и наоборот — каждой равновесной форме сети соответствует единственное значение параметра плотности силы. Таким образом, \mathbf{q} — это подходящий параметр для определения равновесной формы сети.

На основании уравнений (2.10) и (1.15) можно записать постановку задачи определения формы сети с заданными ограничениями в виде системы (2.13)

$$\begin{cases} \left(C^{T}\mathbf{Q}C\right)\mathbf{x} + \left(C^{T}\mathbf{Q}C_{f}\right)\mathbf{x}_{f} = \mathbf{f}_{x}; \\ \left(C^{T}\mathbf{Q}C\right)\mathbf{y} + \left(C^{T}\mathbf{Q}C_{f}\right)\mathbf{y}_{f} = \mathbf{f}_{y}; \\ \left(C^{T}\mathbf{Q}C\right)\mathbf{z} + \left(C^{T}\mathbf{Q}C_{f}\right)\mathbf{z}_{f} = \mathbf{f}_{z}; \\ \mathbf{g}^{*}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \mathbf{y}(\mathbf{q}), \mathbf{z}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(2.13)$$

То есть, как отмечалось в пункте 1.2.4, задача поиска формы сети с заданными ограничениями сводится к отысканию такого вектора плотности **q**, который бы удовлетворял уравнениям (2.13).

Для нахождения **q** организуется итерационный процесс по формуле:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}_{\cdot}, \qquad (2.14)$$

Начальное приближение \mathbf{q}_0 к искомому вектору \mathbf{q} задается произвольно или из геометрических соображений [20], а шаг итерации (приращение) $\Delta \mathbf{q}$ определяется из СЛАУ, полученной в результате разложения левой части уравнения (1.15) в ряд Тейлора в окрестности начального приближения \mathbf{q}_0 :

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}^*(\mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}.$$
 (2.15)

Преобразуя выражение (2.15), получаем СЛАУ относительно неизвестного шага итерации **Дq**:

$$\mathbf{G}^{T} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{r} \,, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{G}^{T} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q}_{0})}{\partial \mathbf{q}}$ – матрица Якоби размерностью $[r \times m]$, $\mathbf{r} = -\mathbf{g}^{*}(\mathbf{q}_{0})$ – вектор - столбец

правой части.

Система (2.16) является неопределённой, так как в общем случае количество ограничений r меньше количества неизвестных m. Поэтому из всех возможных решений Δq выбирается минимальное по норме L_2 из задачи вида:

$$\begin{cases} f(\Delta \mathbf{q}) = \Delta \mathbf{q}^T \Delta \mathbf{q} \to \min \\ \mathbf{h}(\Delta \mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{cases}, \qquad (2.17)$$

где $\mathbf{h}(\Delta \mathbf{q}) = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{q} - \mathbf{r} - \phi$ ункция связи.

Задача (2.17) решалась методом множителей Лагранжа, где минимизируется функционал:

$$L(\Delta \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \Delta \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{q} - 2\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{h}(\Delta \mathbf{q}), \qquad (2.18)$$

где λ – вектор множителей Лагранжа.

Стационарные точки (2.18) определяются из соотношений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{q}} = 2\Delta \mathbf{q} - 2\mathbf{G}\lambda = \mathbf{0}; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q} - \mathbf{r} = \mathbf{0} \end{cases}, \qquad (2.19)$$

Решение (2.19) представляется выражениями вида [18]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = \left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{r}; \\ \Delta \mathbf{q} = \mathbf{G}\left(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{r}, \end{cases}$$
(2.20)

Единственность решения $\Delta \mathbf{q}$ можно доказать от противного. Действительно, пусть существует какое-то другое решение $\Delta \mathbf{q}^*$, такое, что:

$$\begin{cases} \mathbf{G}^{T} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{G}^{T} \Delta \mathbf{q}^{*} = \mathbf{r}; \\ \left\| \Delta \mathbf{q}^{*} \right\| < \left\| \Delta \mathbf{q} \right\| \end{cases}, \tag{2.21}$$

На основании (2.20) и (2.21), можно записать:

$$\left(\Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}^*\right)^T \Delta \mathbf{q} = \left(\Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}^*\right)^T \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G}\right)^{-1} \mathbf{r} =$$
$$= \underbrace{\left(\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q}^* - \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{q}\right)}_0 \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G}\right)^{-1} \mathbf{r} = 0.$$
(2.22)

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \Delta \mathbf{q}^* \right\|^2 &= \left\| \Delta \mathbf{q}^* + \Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q} \right\|^2 = \left\| \Delta \mathbf{q}^* + \Delta \mathbf{q} \right\|^2 + \underbrace{2 \left(\Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}^* \right)^T \Delta \mathbf{q}}_{0} + \left\| \Delta \mathbf{q} \right\|^2 \\ &= \left\| \Delta \mathbf{q}^* + \Delta \mathbf{q} \right\|^2 + \left\| \Delta \mathbf{q} \right\|^2 > \left\| \Delta \mathbf{q} \right\|^2. \end{aligned}$$
(2.23)

Таким образом, неравенство (2.23) противоречит неравенству в (2.21). Это доказывает, что решение ∆**q** является единственным минимальным решением задачи (2.17).

Если функция $\mathbf{g}^*(\mathbf{q})$ регулярная, а значение начального приближения \mathbf{q}_0 находится в окрестности искомого решения, тогда итерационный процесс (2.14) будет сходиться с вторым порядком точности [20]. Для контроля сходимости, в [20] предлагается (2.14) записывать в виде:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{q}, \qquad (2.24)$$

где $0 \le \alpha_k \le 1$ – параметр релаксации, который можно взять в виде:

$$\alpha_k = \frac{1}{2^{i(i-1)}}, \qquad (2.25)$$

где *i* – первое целое число для которого выполняется неравенство:

$$\left\|\mathbf{g}^{*}(\mathbf{q}_{k})\right\| \geq \left\|\mathbf{g}^{*}(\mathbf{q}_{k+1})\right\|.$$
(2.26)

В случае, когда \mathbf{q}_{k+1} сходится к искомому решению, коэффициент α_k стремиться к единице, в противном случае – α_k стремиться к нулю.

При расчете некоторых вантовых ФОС СР космических аппаратов [21, 69] установлено, что матрица $(\mathbf{G}^{T}\mathbf{G})^{-1}$ была плохо обусловленной, что приводило к расхождению итерационного процесса (2.14). Поэтому для устранения проблемы расходимости использовалась нормальное псевдорешение (2.20), основанное на матрице Мура-Пенроуза [22, 23] представленной в следующем пункте настоящей главы.

2.2.3 SVD-разложение матрицы. Нормальное псевдорешение СЛАУ. Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза

При определении *SVD*-разложения произвольной вещественной матрицы размерности $[m \times n]$ и нормального псевдорешения СЛАУ на основе матрицы Мура-Пенороуза будем опираться на соответствующую терминологию и выводы работы [22].

Сингулярными числами вещественной матрицы $\mathbf{A}[m \times n]$ называется набор арифметических квадратных корней $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, ..., \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ из собственных чисел матриц $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$, где k=min(*m*,*n*). Полагается, что $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge ... \ge \sigma_{k-1} \ge \sigma_k$.

Отметим, что

$$\begin{cases} \det(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}) = \lambda_{1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k}, \ m < n \\ \det(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}) = \lambda_{1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k}, \ m > n \end{cases}$$
(2.27)

Следовательно, при отсутствии нулевых сингулярных чисел матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ – невырожденные.

Матрица **A** называется *ортогональной*, если $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичная матрица.

Представление матрицы А в виде [22]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{SVD} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}_{SVD}, \qquad (2.28)$$

где $\Sigma[m \times n] = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{r_A}, 0, ..., 0)$ – диагональная матрица из сингулярных чисел $\sigma_i > 0$, $r_A = \text{rank}(\mathbf{A})$, $\mathbf{U}_{SVD}[m \times m]$, $\mathbf{V}_{SVD}[n \times n]$ – ортогональные матрицы, называется *сингулярным* разложением или SVD – разложением (англ. Singular Value Decomposition).

С практической точки зрения, зная сингулярное разложение, (2.28) можно получить решение произвольной СЛАУ:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (2.29)$$

где $\mathbf{x}[n \times 1]$ – вектор столбец неизвестных, $\mathbf{b}[m \times 1]$ – вектор-столбец правых частей. Действительно, при условии (2.28), систему (2.29) можно представить в виде [22]:

$$\mathbf{U}_{SVD} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}_{SVD} \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = \mathbf{z}, \qquad (2.30)$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{U}_{SVD}^{T} \mathbf{b} = (z_1, \dots, z_m)^{T}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{V}_{SVD} \mathbf{x} \end{cases}$$
(2.31)

В развернутом виде система (2.30) записывается как [22]:

$$\begin{cases} \sigma_{1} y_{1} = z_{1}, \\ \cdots \\ \sigma_{r_{A}} y_{r_{A}} = z_{r_{A}}, \\ 0 y_{r_{A}+1} = z_{r_{A}+1}, \\ \cdots \\ 0 y_{n} = z_{n}. \end{cases}$$
(2.32)

Запись (2.32) соответствует случаю *m=n*. Если *m>n*, то в (2.32) добавляется *m-n* равенств:

$$0 = z_{n+1}, \cdots, 0 = z_m, \tag{2.33}$$

если m < n, то последнее равенство в (2.32) заменяется на $0y_m = z_m$, а остальные неизвестные y_{m+1}, \ldots, y_n оказываются свободными [22].

Рассмотрим следующие случаи [22]:

Пусть rank(**A**)=n≤m. Тогда в выражении (2.32) нет нулевых сомножителей, и неизвестные компоненты вектора **у** определяются по формуле:

$$y_i = \frac{z_i}{\sigma_i},\tag{2.34}$$

Тогда вектор $\mathbf{x} = \mathbf{V}_{SVD}^T \mathbf{y}$ – единственное решение системы (2.29).

Пусть rank(**A**)<n. Тогда первые r_A компонент вектора **у** определятся по формуле (2.34), а остальные n- r_A неизвестных определятся из следующих соображений.

Пусть $z_{r_A+1} = 0 = \dots = z_m = 0$. Тогда y_{r_A+1}, \dots, y_n могут быть любыми, т.е. решение у имеет вид [22]:

$$\mathbf{y} = \left(\frac{z_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{z_{r_A}}{\sigma_{r_A}}, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-r}\right)^T.$$
(2.35)

Используя второе выражение (2.31), получим [22]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}_{SVD}^{T} \mathbf{y} = \frac{z_{1}}{\sigma_{1}} \begin{pmatrix} v_{11}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{1n}^{SVD} \end{pmatrix} + \dots + \frac{z_{r_{A}}}{\sigma_{r_{A}}} \begin{pmatrix} v_{r_{A}+1,1}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{r_{A}+1,n}^{SVD} \end{pmatrix} + c_{1} \begin{pmatrix} v_{r_{A}+1,1}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{r_{A}+1,n}^{SVD} \end{pmatrix} + \dots + c_{n-r} \begin{pmatrix} v_{n,1}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{n,n}^{SVD} \end{pmatrix}.$$
(2.36)

Выражения (2.36) согласуются с теорией СЛАУ, в которой утверждается, что общее решение неоднородной системы складывается из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной. В качестве частного решения неоднородной принимается решение, где $c_1 = \cdots = c_{n-r} = 0$.

Пусть какое-то из чисел z_{r_A+1}, \dots, z_m является ненулевым, тогда система (2.32) не выполняется, а значит, неоднородная система (2.29) не имеет решения [22]. В этой ситуации необходимо воспользоваться *псевдорешением*, полученным путем решения СЛАУ [22]:

$$\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{z}, \qquad (2.37)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} \sigma_{1}^{2} y_{1} = \sigma_{1} z_{1}, \\ \dots \\ \sigma_{r_{A}}^{2} y_{r_{A}} = \sigma_{r_{A}} z_{r_{A}}, \\ 0 y_{r_{A}+1} = 0, \\ \dots \\ 0 y_{n} = 0. \end{cases}$$
(2.38)

Видно, что решением (2.37) будет вектор (2.35) где $c_1 = \cdots = c_{n-r} = 0$. Оно носит название *нормального псевдорешения* системы (2.31) и имеет вид [22]:

$$\mathbf{x}_{0} = \mathbf{V}_{SVD}^{T} \mathbf{y} = \frac{z_{1}}{\sigma_{1}} \begin{pmatrix} v_{11}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{1n}^{SVD} \end{pmatrix} + \dots + \frac{z_{r_{A}}}{\sigma_{r_{A}}} \begin{pmatrix} v_{r_{A},1}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{r_{A},n}^{SVD} \end{pmatrix}.$$
 (2.39)

Нормальное псевдорешение является частным решением (2.29), а также минимальным по норме.

Введем матрицу A^+ , определяемую соотношением:

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}_{SVD}^{T} \boldsymbol{\Sigma}^{+} \mathbf{U}_{SVD}^{T}, \qquad (2.40)$$

где матрица $\Sigma^+[n \times m]$ определяется через сингулярные числа матрицы **A** ранга r_A соотношением [22]:

$$\Sigma^{+} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_{1}}, \dots, \frac{1}{\sigma_{r_{A}}}, 0, \dots, 0\right), \qquad (2.41)$$

Умножим матрицу \mathbf{A}^+ на вектор $\mathbf{b}[m \times 1]$ правой части уравнения (2.29):

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \mathbf{V}_{SVD}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{+}\mathbf{U}_{SVD}^{T}\mathbf{b} = \mathbf{V}^{T}\boldsymbol{\Sigma}^{+}\mathbf{z}, \qquad (2.42)$$

где **z** – вектор из второго соотношения (2.31). Далее имеем [22]:

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{z_{1}}{\sigma_{1}} \begin{pmatrix} v_{11}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{1n}^{SVD} \end{pmatrix} + \dots + \frac{z_{r_{A}}}{\sigma_{r_{A}}} \begin{pmatrix} v_{r_{A}1}^{SVD} \\ \vdots \\ v_{r_{A}n}^{SVD} \end{pmatrix}, \qquad (2.43)$$

Откуда находим, что:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^+ \mathbf{b} \,. \tag{2.44}$$

Матрица **A**⁺ является аналогом **A**⁻¹ для случая СЛАУ произвольной размерности и имеет название *псевдообратной*.

Псевдообратная матрица **A**⁺ совпадает с матрицей Мура-Пенроуза, которая удовлетворяет соотношениям [22]:

1.
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A};$$

2. $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+};$
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+})^{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+};$
4. $(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})^{T} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}.$
(2.45)

Также A^+ можно вычислить через скелетное разложение матрицы A [22]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC}.\tag{2.46}$$

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{T} \left(\mathbf{C} \mathbf{C}^{T} \right)^{-1} \left(\mathbf{B}^{T} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^{T}.$$
 (2.47)

где **B**[$m \times r_{ABC}$], C [$r_{ABC} \times n$], r_{ABC} =rank(**A**)=rank(**B**)=rank(**C**). Тогда

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{T} \left(\mathbf{C} \mathbf{C}^{T} \right)^{-1} \left(\mathbf{B}^{T} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^{T}.$$
 (2.48)

Матрица \mathbf{A}^+ является единственной. Действительно, пусть существуют какие-то две неравные матрицы \mathbf{A}_1^+ , \mathbf{A}_2^+ удовлетворяющие (2.45). Тогда по свойствам (2.45) имеем:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_{1}^{+} \stackrel{1}{=} \left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{2}^{+}\mathbf{A}\right)\mathbf{A}_{1}^{+} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{2}^{+}\right)\left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{1}^{+}\right)^{3} \stackrel{3}{=} \left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{2}^{+}\right)^{T}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{1}^{+}\right)^{T} =$$

$$= \mathbf{A}_{2}^{+T}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{1}^{+}\mathbf{A}\right)^{T} \stackrel{1}{=} \mathbf{A}_{2}^{+T}\mathbf{A}^{T} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}_{2}^{+}\right)^{T} \stackrel{3}{=} \mathbf{A}\mathbf{A}_{2}^{+}$$
(2.49)

Аналогично доказывается равенство:

$$\mathbf{A}_{1}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}_{2}^{+}\mathbf{A}. \tag{2.50}$$

Окончательно имеем:

$$\mathbf{A}_{1}^{+} \stackrel{2}{=} \mathbf{A}_{1}^{+} \mathbf{A} \mathbf{A}_{1}^{+} \stackrel{(N.49)}{=} \mathbf{A}_{1}^{+} \mathbf{A} \mathbf{A}_{2}^{+} \stackrel{(N.50)}{=} \mathbf{A}_{2}^{+} \mathbf{A} \mathbf{A}_{2}^{+} \stackrel{2}{=} \mathbf{A}_{2}^{+}.$$
(2.51).

Таким образом, равенство (2.51) противоречит изначальному предположению о неравенстве матриц A_1^+ , A_2^+ .

В случае существования обратной матрицы A^{-1} имеет место равенство [22, 23]:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^+. \tag{2.52}$$

Это значит, что решения (2.20), определяющие шаг итерации плотности силы, могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \lambda = (\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G})^{+}\mathbf{r}; \\ \Delta \mathbf{q} = \mathbf{G}(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}})^{+}\mathbf{r} \end{cases}, \qquad (2.53)$$

Идея использования аппарата обратной матрицы была связана с плохой обусловленностью матрицы $G^{T}G$ [858×858] при расчете вантовой ФОС зонтичного рефлектора в [69] (Рисунок 2.2).



Рисунок 2.2 – Форма фронтальной сети СР [69],

рассчитанной нелинейным матричным МПС

На рисунке 2.2 показаны графики спектров собственных значений матрицы $\mathbf{G}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}$ в зависимости от их номера.



Рисунок 2.3 – Распределение собственных значений матрицы **G**^T **G** для зонтичного рефлектора

При расчете данной сети на ее элементы налагались требования равномерного распределения натяжений и сохранения длин в напряженном состоянии.

Из курса линейной алгебры известно, что определитель матрицы $\mathbf{G}^{\mathsf{T}} \mathbf{G}$ можно определить по формуле:

$$\det\left(\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}\right) = \lambda_{1}\cdots\lambda_{r}, \qquad (2.54)$$

где $\lambda_1 \dots \lambda_r$ – собственные значения матрицы **G**^T **G**. Из графика рисунка 2.3 видно, что det(**G**^T **G**) \approx 0, так как большая часть собственных значений меньше единицы.

Число обусловленности матрицы **G**^T **G** составило величину:

$$\operatorname{cond}(\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}) = \frac{\sigma_{1}}{\sigma_{k}} = \frac{1.14}{253.3 \cdot 10^{-12}} = 4.53 \cdot 10^{9}.$$
 (2.55)

где σ_1 , σ_k - максимальные и минимальные значения сингулярных чисел соответственно.

Значение (2.55) свидетельствует о некорректно поставленной задаче определения вектора множителей Лагранжа в (2.20) по терминологии [74], т.к. $cond(\mathbf{G}^{T} \mathbf{G}) \notin [1, 10^{3}].$

2.2.4 Виды функций g(x,y,z,q) с соответствующими матрицами Якоби G^T

В 1.2.4 отмечено, что функция $g^*(q) = g(x(q), y(q), z(q), q)$ описывает различные ограничения на элементы вантовой сети, такие, как равномерное распределение натяжений, определённое значение длины в напряженном и ненапряженном состояниях и др.

Матрица Якоби **G**^{*T*} может быть записана по формуле дифференцирования композиции сложной функции [18]:

$$\mathbf{G}^{T} = \frac{\partial \mathbf{g}^{*}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}.$$
 (2.56)

Выражения для производных $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}},$ получаются дифференцированием

уравнений равновесия (2.6) [18]:

$$\begin{cases} d\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{U}\mathbf{q}\right) = d\mathbf{f}_{x}; \\ d\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{V}\mathbf{q}\right) = d\mathbf{f}_{y}; \\ d\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{W}\mathbf{q}\right) = d\mathbf{f}_{z}. \end{cases}$$
(2.57)

Так как в правые части (2.57) являются постоянными величинами, то можно записать [18]:

$$\begin{cases} d\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{U}\mathbf{q}\right) = \frac{\partial\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{U}\mathbf{q}\right)}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} + \frac{\partial\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{U}\mathbf{q}\right)}{\partial\mathbf{x}}d\mathbf{x} = \mathbf{0}; \\ d\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{V}\mathbf{q}\right) = \frac{\partial\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{V}\mathbf{q}\right)}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} + \frac{\partial\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{V}\mathbf{q}\right)}{\partial\mathbf{y}}d\mathbf{y} = \mathbf{0}; \\ d\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{W}\mathbf{q}\right) = \frac{\partial\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{W}\mathbf{q}\right)}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} + \frac{\partial\left(\mathbf{C}^{T}\mathbf{W}\mathbf{q}\right)}{\partial\mathbf{z}}d\mathbf{z} = \mathbf{0}, \end{cases}$$
(2.58)

откуда

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{U} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{U}; \\ \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{V} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{V}; \dots \qquad (2.59) \\ \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{W} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{W} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{U} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{u} \right)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{D}; \\ \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{V} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{v} \right)}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{D}; \\ \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{W} \mathbf{q} \right)}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \left(\mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{w} \right)}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{C}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{D}. \end{cases}$$
(2.60)

Из соотношений (2.58) – (2.60) имеем [18]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = -(\mathbf{C}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{U} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{U};\\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} = -(\mathbf{C}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{V} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{V};\\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} = -(\mathbf{C}^{T}\mathbf{Q}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{W} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{W}. \end{cases}$$
(2.61)

Рассмотрим следующие виды ограничений для функции **g**(**x**,**y**,**z**,**q**), предложенные в [18–20]:

1) Ограничение по натяжениям [18]:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{q}} - \mathbf{T}_0 = \mathbf{0}.$$
(2.62)

где $\overline{\mathbf{L}}[r \times r] = \text{diag}(\mathbf{l}), \overline{\mathbf{q}}[r \times 1], \mathbf{T}_0[r \times 1] - \text{матрицы длины, плотностей сил, требуемых натяжений элементов соответственно. Знак черты над матрицами указывает на то, что рассматриваются первые$ *r*элементов, на которые наложены ограничения.

Из (2.62) имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{\bar{Q}} \frac{\partial \mathbf{\bar{I}}}{\partial \mathbf{x}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{\bar{Q}} \frac{\partial \mathbf{\bar{I}}}{\partial \mathbf{y}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{\bar{Q}} \frac{\partial \mathbf{\bar{I}}}{\partial \mathbf{z}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{\bar{L}}.$$
(2.63)

На основании (2.56), (2.61), (2.63) получим выражение матрицы Якоби [18]:

$$\mathbf{G}_{ten}^{T} = \overline{\mathbf{L}}_{rm} - \overline{\mathbf{Q}}\overline{\mathbf{L}} \Big(\overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{U} + \overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{V} + \overline{\mathbf{W}}\overline{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{W} \Big), \qquad (2.64)$$

где $\bar{\mathbf{L}}_{m}$ – матрица размерности $[r \times m]$ (*m* – общее количество элементов). Как справедливо замечено в [75], матрицу $\bar{\mathbf{L}}$ необходимо расширить на *m*-*r* нулевых столбцов, чтобы вычитание в (2.64) было определено.

2) Ограничение по длинам [18]:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{q}) = \mathbf{I} - \mathbf{I}_0 = \mathbf{0}, \qquad (2.65)$$

где $\overline{\mathbf{I}}[r \times 1], \mathbf{I}_0[r \times 1]$ – вектора-столбцы текущей и требуемой длины элемента соответственно.

По аналогии с выводом примера 1), матрица Якоби запишется в виде [18]:

$$\mathbf{G}_{length}^{T} = -\bar{\mathbf{L}}^{-1} \Big(\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{W} \Big).$$
(2.66)

Матрица (2.66) также имеет размерность $[r \times m]$.

3) Ограничение по длинам в ненапряженном состоянии [18]:

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{q}) = \frac{h_i}{h_i + t_i} l_{iu} - l_{iu0} = 0,$$
 (2.67)

где $h_i=S_iE_i$, t_i , l_{iu} , l_{iu0} , – жесткость на растяжение, натяжение и длины i – го элемента в напряженном и ненапряженном состояниях соответственно. Тогда соответствующая матрица Якоби имеет вид [18]:

$$\mathbf{G}_{u}^{T} = -\left(\bar{\mathbf{L}}_{u}^{2}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\right)_{rm} - \bar{\mathbf{L}}_{u}^{2}\bar{\mathbf{L}}^{-3}\left(\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{W}\right), \quad (2.68)$$

где $\bar{\mathbf{L}}_{u}[r \times r] = diag(\mathbf{l}_{u})$, $\mathbf{H}[r \times r] = diag(\mathbf{h})$ – диагональные матрицы длин и жесткости элементов в ненапряженном состоянии соответственно. Первое слагаемое в (2.68) также имеет размерность $[r \times m]$ за счет добавления *m*-*r* нулевых столбцов.

При $h_i \rightarrow \infty$, получим $\mathbf{G}_u^T = \mathbf{G}_{length}^T$. Т.е. матрица \mathbf{G}_{length}^T рассматривается для случая элементов с бесконечной жесткостью.

4) Ограничения по реакциям в *г* фиксированных узлах [19, 20]:

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{x}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{R}}_{x} - \overline{\mathbf{R}}_{0x} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{g}_{y}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{R}}_{y} - \overline{\mathbf{R}}_{0y} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{g}_{z}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{q}) = \overline{\mathbf{R}}_{z} - \overline{\mathbf{R}}_{0z} = \mathbf{0}. \end{cases}$$
(2.69)

где

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{R}}_{x} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t}; \\ \overline{\mathbf{R}}_{y} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t}; \\ \overline{\mathbf{R}}_{z} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t}. \end{cases}$$
(2.70)

 $\bar{\mathbf{R}}_{0x}, \bar{\mathbf{R}}_{0y}, \bar{\mathbf{R}}_{0z}$ – требуемые значения компонент векторов реакций фиксированных узлов.

Из (2.69) и (2.70) следует [19, 20]:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{y}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{z}}{\partial \mathbf{z}} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{x}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{x}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{y}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}_{z}}{\partial \mathbf{y}} \equiv \mathbf{0};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{x}}{\partial \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{U};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{y}}{\partial \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{V};$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{z}}{\partial \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{W}.$$
(2.71)

Тогда, согласно (2.56), (2.61), (2.63), матрицы Якоби примут вид [19, 20]:

$$\mathbf{G}_{R}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{Rx}^{T} \\ \mathbf{G}_{Ry}^{T} \\ \mathbf{G}_{Rz}^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{U} - \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{T} \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{V} - \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{T} \mathbf{V} \\ \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{W} - \overline{\mathbf{C}}_{f}^{T} \mathbf{Q} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{T} \mathbf{W} \end{bmatrix}, \qquad (2.72)$$

Для расчета сетей со смешанными ограничениями можно определять следующую матрицу Якоби [18, 19]:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_{ten}; \mathbf{G}_{length}; \mathbf{G}_{u}; \mathbf{G}_{R}], \qquad (2.73)$$

При использовании матрицы (2.73) виде $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_{ten}; \mathbf{G}_{length}]$ существует проблема медленной сходимости итерационного процесса (2.14), если значения натяжений элементов существенно выше значений их длин [75]. Но сходимость может быть существенно улучшена, если значения усилий разделить на некоторый масштабный коэффициент таким образом, что усилия и натяжения элементов имели бы один порядок [75].

2.2.5 Блок-схема нелинейного матричного метода плотности сил

На рисунке 2.4 представлена блок-схема нелинейного матричного МПС, которая использовалась в численной реализации метода расчета ВОК.



Рисунок 2.4 – Блок-схема поиска формы сети нелинейным МПС

Получив численное решение задачи (2.13), производим второй этап решения задачи (2.30) – (2.35).

2.3 Этап 2. Процедура определения перемещений узлов вантово-оболочечных конструкций нелинейным МКЭ. Схема программной реализации метода расчета

Как отмечалось в 2.1, найденные координаты узлов вантовых элементов из МПС использовались при построении комплексной КЭМ ВОК, включающей балочные и оболочечные элементы, тем самым определяя ее форму, приближенную к равновесной.

В вантовых элементах (рассчитанных по МПС) задаются граничные условия по начальным напряжениям:

$$\boldsymbol{\sigma}_{0}^{M\Pi C} = \frac{1}{S_{i}} \mathbf{t}^{M\Pi C}, \qquad (2.74)$$

где S_j – площадь *j*-го вантового элемента $\mathbf{t}^{M\Pi C}$ –вектор натяжений с компонентами, рассчитанными из формулы (1.14):

$$t_j^{M\Pi C} = q_j l_j.$$

Далее в вантовых (не рассчитанных по МПС) и оболочечных элементах задаются некоторые начальные значения напряжений σ_0 , $\sigma_{o\delta}^0$ в зависимости от требований задачи, а в узлах КЭМ задаются нулевые граничные условия по перемещениям:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \, \mathbf{x} \in \Omega_{\text{KDM}} \setminus \boldsymbol{\omega}_{\text{I}}^{\text{MIIC}}, \qquad (2.75)$$

где $\omega_1^{M\Pi C}$ – область пространства, занимаемая элементами из МПС, Условие (2.75) означает, что часть узлов КЭМ ВОК фиксирована.

После постановки граничных условий по напряжениям и перемещениям производится численный расчет поля перемещений узлов КЭМ итерационным методом Ньютона-Рафсона, учитывающим геометрическую нелинейность.

Для итерации *i* метода Ньютона-Рафсона, уравнения равновесия имеют вид [76]:

$$\mathbf{K}_{i-1}\Delta\mathbf{u}_i = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{i-1}^{\mathcal{Y}},\tag{2.76}$$

где \mathbf{K}_{i-1} – матрица жесткости на предыдущей итерации, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$ – искомый вектор перемещений, \mathbf{F} – вектор приложенных сил; \mathbf{F}_{i-1}^y – вектор упругих сил на предыдущей итерации.

В геометрически нелинейных задачах уменьшение $\Delta \mathbf{u}_i$ свидетельствует о сходимости итерационного процесса. Однако, как будет показано в главе 4, в случае потери устойчивости опорных элементов ВОК, шаг $\Delta \mathbf{u}_i$ будет увеличиваться, приводя к расходимости итерационного процесса.

После первого расчета полученное решение \mathbf{u}_{i}^{1} и соответствующие значения напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{i}^{16a\mu m.}$, $\boldsymbol{\sigma}_{i}^{1060 n.}$ вантовых и оболочечных элементов используется как начальное приближение для последующего расчета, но уже с измененными граничными условиями по перемещениям:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \, \mathbf{x} \in \left(\Omega_{\mathrm{K} \supset \mathrm{M}} \setminus \omega_1 \cup \omega_2\right), \tag{2.77}$$

где ω_2 – область пространства, принадлежащая области сходимости поставленной задачи. Как отмечается в [77, 78] выбор этой области не формализован и зависит от вида конструкции и граничных условий.

Граничные условия изменяются до тех пор, пока не будет получено поле перемещений узлов с изначально требуемыми граничными условиями по перемещениям:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \, \mathbf{x} \in \Omega_{\mathrm{K} \ni \mathrm{M}} \setminus \bigcup_{i=1}^{N-l} \omega_i, \,, \qquad (2.78)$$

Схематически, данная процедура показана на рисунке 2.4 [14]:



Рисунок 2.5 – Схема процедуры расчета перемещений узлов в МКЭ [14]

Процедура поиска решения с помощью последовательного изменения граничных условий была разработана в НИИ ПММ ТГУ при расчете конструкций СР космических аппаратов. В настоящей работе эта процедура усовершенствована добавлением начального приближения, рассчитанного с помощью нелинейного МПС.

Описанный метод расчета также применялся в определении НДС СР ободного и зонтичного типов.

Программная реализация метода осуществлялась в комплексе конечноэлементного моделирования ANSYS на языке программирования APDL (ANSYS Parametric Design Language).

В комплекс расчетных программ ВОК входили следующие блоки:

- блок построения геометрической модели силового каркаса (опорного контура), вантовых (рассчитанных из МПС) и оболочечных элементов;

- блок построения конечно-элементной модели, включающей определение механических характеристик и типы элементов;

- блок определения НДС, основанный на определении поля перемещений с учетом геометрической нелинейности;

- блок расчета собственных частот и соответствующих форм колебаний;

- блок расчета устойчивости элементов конструкции линейным и нелинейными методами.

Основным является блок определения НДС. Описание блоков нахождения собственных частот и устойчивости элементов силового каркаса представлено в главе 4 на примере расчета СР ободного и зонтичного типа

На рисунке 2.6 показана схема взаимодействия описанных блоков:



Рисунок 2.6 – Схема работы комплекса программ расчета НДС ВОК в ПК ANSYS

2.4 Выводы по главе 2

В настоящей главе описан двухэтапный метод расчета геометрическинелинейных задач ВОК для определения напряженно-деформированного состояния. На первом этапе, производился поиск начальной формы вантовой сети на основе матричного нелинейного МПС. Установлено, что в случае расчета вантовой ФОС зонтичного СР космического аппарата с 858 элементами и ограничениями (2.62) и (2.65), число обусловленности матрицы $\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}$ составило величину cond($\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}$)=4,53·10⁹. Это свидетельствует о некорректно поставленной задаче (по формулировке [74]) решения СЛАУ в соотношениях (2.20). Некорректная постановка может вызвать трудности определения шага итерации плотности силы $\Delta \mathbf{q}$ из-за невозможности обращения матрицы $\mathbf{G}^{T}\mathbf{G}$.

Для устранения возможной проблемы обращения $G^{T}G$ предлагается использовать псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза ($G^{T}G$)⁺, позволяющую находить минимальное решение первой СЛАУ (2.20) независимо от её вырожденности либо невырожденности и от числа обусловленности матрицы этой системы. Таким образом, применение псевдообратной матрицы позволило находить решение задачи (2.20) даже в случае её некорректной постановки. В случае же существования обратной матрицы ($G^{T}G$)⁻¹, справедливо равенство ($G^{T}G$)⁺=($G^{T}G$)⁻¹. Т.е. обратная матрица является частным случаем псевдообратной.

На втором этапе строится КЭМ ВОК с вантовой сетью, рассчитанной из МПС. Это позволяет получить конструкцию С некоторым начальным приближением к равновесной форме. Кроме того, решения МПС в МКЭ однозначно определяет начальные напряжения (2.74). Постановка граничных условий, соответствующих равновесному состоянию, является важным моментом всего расчета, так как они изначально соответствуют области сходимости задачи (1.30) - (1.35). Далее строится набор решений с последовательно изменяющимися нулевыми граничными условиями по перемещениям узлов, где каждое последующее решение использует предыдущее В качестве начального приближения. Как отмечено в [14], процедура последовательного изменения граничных условий не формализована и зависит от конкретного вида конструкции. Однако решения МПС позволили ее формализовать с точки зрения задания граничных условий по перемещениям в узлах и напряжениям в вантовых элементах при получении первого решения.

ГЛАВА 3 Приложение метода расчета к исследованию НДС сетчатых рефлекторов космических аппаратов

3.1 Конструкции сетчатых рефлекторов

Для развития средств мобильной связи и других коммуникационных устройств, необходимо создание космических развертываемых рефлекторных коэффициентом антенн С высоким усиления, способных обрабатывать высокочастотный широкополосный сигнал. В диссертационных работах сотрудников НИИ ПММ ТГУ Жукова А.П., Ящука А.А. [14, 79] приводится подробная классификация таких рефлекторов.

В [14] указывается два класса развертываемых рефлекторов: саморазвертывающиеся и собираемые на орбите. К первому относятся механические, надувные и гибридные. К второму – собираемые вручную, роботизировано, вручную и роботизировано. Наибольшее распространение получили саморазвертывающиеся механические рефлекторы, так как они требуют меньше операций по сборке и разборке.

Одним из видов саморазвертывающихся механических рефлекторов являются СР. Они строятся на основе жесткого балочного силового каркаса (например, углепластика); вантовых элементов (арамидных шнуров), регулирующих форму и натяжение ОП из металлической радиоотражающей сетки (сетеполотна), изготовленной из проволоки диаметром порядка 0.03мм [24]

В [24] СР разделяют на 2 основных типа: ободные и зонтичные. На рисунках 3.1-3.3 показаны примеры ободного рефлектора AstroMesh компании Northrop Grumman и зонтичного рефлектора для спутника Garuda 1 компании Harris в сложенном, рабочем состояниях, а также в составе спутников [80, 81]:



Рисунок 3.1 – Ободный рефлектор AstroMesh диаметром 12,25 м [5]: а) развернутый вид; б) сложенный вид



Рисунок 3.2 – Зонтичный рефлектор диаметром 12 м спутника Garuda 1 [14]: а) развернутый вид; б) сложенный вид



Рисунок 3.3 – Ободный и зонтичный рефлекторы в составе спутников [80, 81]

К ободной ферме силового каркаса рефлектора AstroMesh крепится вантовая ФОС, состоящая из тыльной и фронтальных сетей (ФС, ТС), соединенных оттяжками. Оттяжки регулируют профиль отражающей поверхности (Рисунок 3.4).



Рисунок 3.4 – Конструктивная схема рефлектора AstroMesh [24]

Отражающее сетеполотно изготовлено из молибденовой проволоки, покрытой золотом [24]. Оно прикреплено к шнурам ФС.

Структура и образец сетеполотна показана на рисунке 3.5:



Рисунок 3.5 – Сетеполотно: а) образец; б) структура [14]

Апертура СР AstroMesh составила 12,25 м; среднеквадратическое отклонение (СКО) зеркала рефлектора от теоретического параболического профиля – 1,4мм; масса – 57 кг [14]. Складывание силового каркаса происходит с за счет шарнирных соединений, расположенных на концах балок силового каркаса.

Зонтичный СР спутника Garuda 1 состоит из восьми углепластиковых спиц с закрепленным на них вантовой ФОС, определяющей форму и натяжение отражающей поверхности сетеполотна. Складывание рефлектора происходит по принципу зонтика. Диаметр антенны 12 м; СКО – 2,5 мм; общая масса системы – 127 кг, где около половины – это масса рефлектора [14, 79].

3.2 Характерная проблематика

Проблематика моделирования конструкций СР довольно подробно изучена в работах [5, 14, 79, 82, 83], где в [5] решалась задача построения квазигеодезических линий ФС рефлектора; в [14] рассмотрен вопрос динамики ОП рефлектора космического аппарата при воздействии возбуждающих импульсов на космический аппарат; в [79, 82] исследуется влияние температуры на НДС рефлекторов; в [83] рассмотрены вопросы моделирования НДС рефлектора под воздействием внешних и внутренних нагрузок. Однако во всех этих работах не ставилась задача поиска начальных равновесных форм вантовых ФОС рефлекторов, с равномерным распределением натяжений их элементов и последующей их интеграцией в комплексную конечно-элементную модель. Решение подобной задачи можно проследить в работе [84], где авторы дают методику оценки начальных усилий в шнурах ФОС, позволяющая получить сходящееся решения задачи определения НДС рефлектора.

Отметим некоторые наиболее характерные проблемы в исследовании НДС:

А). <u>«Точность, жесткость и габариты».</u> Космические СР – это крупногабаритные (диаметрами до нескольких десятков метров) конструкции для которых вопрос точности ОП, т.е. ее приближенность к форме теоретического параболоида, один из наиболее важных. Мерой точности является величина среднеквадратического отклонения (СКО) от параболического профиля, выраженная (в общем случае) формулой [5, 14]:

$$\delta_{CKO} = \sqrt{\frac{1}{S_{pe\phi}} \iint_{S_{pe\phi}} (\Delta z)^2 ds} .$$
(3.1)

где $S_{pe\phi}$ – площадь ОП рефлектора, Δz – величина отклонений точек ОП от поверхности теоретического параболоида.

Значение δ_{CKO} должно приближенно составлять 2-3 % от рабочей длины волны рефлектора [14].

Параметром, характеризующим способность СР передавать (получать) большее количество данных с лучшим соотношением сигнала к шуму, является коэффициент усиления. Его теоретический максимум составляет величину [5]:

$$G = k \left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2,\tag{3.2}$$

где, k – коэффициент эффективности; λ – длина волны; D – диаметр рефлектора. То есть с увеличением D – возрастает G. При этом величина k может быть представлена в виде [5]:

$$k = \exp\left[-\left(\frac{4\pi\delta_{CKO}}{\lambda}\right)^2\right].$$
(3.3)

Из формулы (3.3) видно, что коэффициент эффективности уменьшается с увеличением величины $\delta_{\rm CKO}$.

С другой стороны, увеличение *D* приводит к увеличению размеров элементов рефлектора, которые под воздействием силы натяжений шнуров ФОС имеют большее перемещения, что, в свою очередь, увеличивает δ_{CKO} . Кроме того, увеличение *D* приводит к увеличению массы конструкции, что также может быть критичным т.к. ракета-носитель может выводить на орбиту строго определенную массу груза. Поэтому, для выполнений требований по массе, приходится снижать материалоемкость СР, что может повлечь за собой снижение его жесткости. Жесткость СР также является ключевой характеристикой, так как, с одной стороны, обеспечивает способность она конструктивных элементов сопротивляться деформации при воздействии рабочих нагрузок, а с другой – необходимую точность ориентации конструкции на орбите. Мерой оценки жесткости выступает значение собственной частоты рефлектора [29]. Таким

образом, при проектировании конструкции СР необходимо увеличивать его диаметр, но в то же время поддерживать требуемое значение СКО и жесткости.

Б). <u>«Точность-распределение натяжений (напряжений) в шнурах ФОС</u> <u>рефлектора».</u>

ФОС рефлектора относятся к классу преднапряженных вантовых структур со свойством геометрической нелинейности. То есть задание граничных условий по натяжениям (напряжениям) в шнурах, существенно влияет на форму ОП, а значит и на величину СКО. Вопрос равномерного распределения натяжений вантовых элементов ФОС для СР космических аппаратов имеет большое значение, поскольку в данных конструкциях необходимо практическое поддерживать высокую точность ОП. Неравномерное распределение натяжений в элементах ОП может приводить к повышенной деформации опорного контура (силового каркаса) СР, что, в свою очередь, негативно сказывается на точности ОП. Кроме того, вантовые элементы с одинаковым натяжением, расположенные на искривленной поверхности, лежат на геодезических линиях, т.е. имеют минимальную длину, которая исключает перерасход материала [24]. С точки зрения механики, равновесные и равномерно натянутые сети соответствуют наиболее устойчивой форме, так как подчиняются принципу минимума потенциальной энергии. Последнее означает, что при небольших внешних воздействиях на вантовую ОΠ рефлектора сеть она вернется В свое первоначальное положение. Также равномерное распределение натяжений в шнурах способствует более равномерному натяжению сетеполотна, тем самым улучшая его электропроводимость, следовательно, требуемую a И радиоотражающую способность [24].

3.3 Исследование НДС сетчатых рефлекторов

3.3.1 Геометрическая модель отражающей поверхности

Геометрическая форма ОП рефлектора получена вырезкой части осесимметричного параболоида цилиндром радиуса *D*_П (Рисунок 3.6):



Рисунок 3.6 - Схема построения офсетного параболоида

Осесимметричный параболоид носит название «родительского», а вырезка – офсетный параболоид.

В случае использования ОП на основе осесимметричного параболоида, может возникнуть проблема затенения части отраженных лучей системой облучения, расположенной в точке фокуса, что может негативно сказаться на радиотехнических характеристиках рефлектора (Рисунок 3.7). В конструкции офсетного параболоида такого недостатка нет.



Рисунок 3.7 – Схема отраженных лучей от осесимметричного параболоида [24]

Выводы уравнения офсетного параболоида приведены в работах [5, 14, 24, 79]. Поэтому ограничимся его конечной записью.

Пусть проекция начала координат X₀ офсетного параболоида на ось X_{род} лежит в средине отрезка [X_A, X_B] (Рисунок 3.6), ось *ОХ* лежит в плоскости

 $O_{pod} X_{pod} Z_{pod}$ родительского параболоида и является касательной в точке O под углом φ к оси $O_{pod} X_{pod}$. Тогда выражение координаты Z офсетного параболоида определяется из решения квадратного уравнения [5, 14]:

$$A \cdot Z_{nap}^2 + B \cdot Z_{nap} + C = 0.$$
 (3.4)

где

$$\begin{cases}
A = \sin^2 \varphi; \\
B = -(4F \cdot \cos \varphi + 2 \cdot \sin \varphi \cdot (X_{\rho} + X \cdot \cos \varphi)); \\
C = Y^2 + X \cdot (2X_{\rho} \cdot \cos \varphi + X \cdot \cos^2 \varphi - 4F \cdot \sin \varphi)
\end{cases}$$
(3.5)

По геометрическим соображениям [14] выбирается меньшее из решений (3.4):

$$Z_{\rm nap} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \,. \tag{3.6}$$

Пересечение родительского параболоида и кругового цилиндра происходит по эллипсу с точками, лежащими в плоскости, параллельной *OXY*. Однако центр этого эллипса не проходит через точку *O*. Такая конфигурация офсетного параболоида называется стандартной [5]. Она является не совсем удачной, поскольку допускает неравномерное распределение напряжений в материале отражающей поверхности [5]. Поэтому используется конфигурация, где ось *OZ* проходит через центр эллипса за счет смещения начала координат *O* по оси *OX* на величину ΔX . В этом случае точка *O* уже не будет находиться в точке касания к родительскому параболоиду. Выражение для ΔX имеет вид [14]:

$$\Delta X = \frac{X_A^2 - 2X_0^2 + X_B^2}{8F} \sin \varphi.$$
 (3.7)

С учетом (3.7) выражения (3.5) примут вид:

$$\begin{cases}
A = \sin^2 \varphi; \\
B = -(4F \cdot \cos \varphi + 2 \cdot \sin \varphi \cdot (X_{\rho} + (X + \Delta X) \cdot \cos \varphi)); \\
C = Y^2 + (X + \Delta X) \cdot (2X_{\rho} \cdot \cos \varphi + (X + \Delta X) \cdot \cos^2 \varphi - 4F \cdot \sin \varphi)
\end{cases}$$
(3.8)

Из первых двух выражений (2.12) и уравнения офсетного параболоида (3.6), (3.8), координаты узлов вантовых элементов ОП будут рассчитываться по формулам:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{f}_{x} - \mathbf{D}_{f} \mathbf{x}_{f} \right); \\ \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \left(\mathbf{f}_{y} - \mathbf{D}_{f} \mathbf{y}_{f} \right); \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_{\text{nap}} \left(\mathbf{x}, \mathbf{y} \right), \end{cases}$$
(3.9)

где $\mathbf{z}_{nap}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – вектор-столбец координат узлов на офсетном параболоиде по оси *OZ*.

3.3.2 Основные допущения и описание типов конечных элементов

При построении КЭМ рефлекторов использовались допущения и конечные элементы ПК ANSYS, аналогичные работам [14, 79] (Таблица 3.1). Ниже приведена соответствующая таблица.

Таблица 3.1 – Описание КЭМ рефлекторов

| Составная часть СР | Допущение | Тип конечного |
|--------------------|------------------------|------------------|
| | | элемента в ANSYS |
| Сетеполотно | Использование | |
| | двумерной оболочки | |
| | без изгибной | |
| | жесткости, так как как | Shell181 |
| | параметры НДС | Silentor |
| | изменяются | |
| | незначительно по | |
| | толщине сетеполотна | |

Продолжение таблицы 3.1

| Элементы силового каркаса | Использование | |
|------------------------------|----------------------|----------|
| | одномерных балочных | |
| | или двумерных | |
| | мембранных конечных | |
| | элементов (в | Beam188 |
| | зависимости от типа | и/ или |
| | конструкции силового | Shell181 |
| | каркаса) с физико- | |
| | механическими | |
| | свойствами реального | |
| | материала. | |
| | Использование | |
| | одномерных конечных | Link 10 |
| | элементов, не | |
| фос и силового каркаса | оказывающих | H/HJH |
| | сопротивления на | LIIIKTOU |
| | сжатие и изгиб | |

КЭМ рефлекторов строилась в декартовой прямоугольной трехмерной системе координат *Oxyz*. Ось *Oz* направлена перпендикулярно плоскости апертуры рефлектора. Ось *Ox* принадлежит плоскости симметрии рефлектора *Oxz*. Ось *Oy* соответствует правосторонним декартовым системам координат.

В КЭМ материалов использовалась изотропная линейно-упругая модель. Такой выбор для сетеполотна основан на исследованиях [14], где установлено, что учет нелинейности и ортотропности вносил незначительный вклад в величину СКО (не более 3%) узлов ОП от теоретического параболоида. Кроме того, в работе [79] указано, что учет ортотропности вносил вклад всего 5-6% деформации сетеполотна без учета армирования фронтальной сетью, а с учетом армирования ортотропные свойства практически не влияли на поведение КЭМ. Узлы сетеполотна совпадали с узлами ФС, т.е. ФС интегрирована в сетеполотно [79].

Билинейная упругая модель не сопротивления сжатию между напряжениями и деформациями вантовых и оболочечных элементов имеет вид [79]:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, \varepsilon > 0\\ 0, \varepsilon \le 0 \end{cases} , \tag{3.10}$$

где σ - напряжения, ε - деформация, E - модуль упругости

3.3.3 Некоторые примеры расчета параметров НДС сетчатых рефлекторов с диаметром апертуры от 48 м

<u>Пример 3.1.</u> На рисунке 3.8 представлена схема зонтичного пятидесятиметрового СР с фокусным расстоянием 27,3м, рассмотренная в работах [15, 16, 70].



Рисунок 3.8 – КЭМ зонтичного рефлектора диаметром 50м:

а) общий вид рефлектора б) фронтальная сеть

1-элемент (шнур) ФС; 2 – главный радиальный шнур; 3 – жесткий балочный

элемент; 4 – внутренний периферийный шнур (силовой шпангоут);

5 – периферийный шнур

Для зонтичных антенн больших диаметров, как правило, применяются прямые спицы, имеющие на конце откидную часть. Такие спицы не являются подходящими для рефлекторов с увеличенной апертурой, имеющих жесткие

элементы в периферийной части фронтальной сети. Пример фронтальных сетей с жесткими периферийными элементами представлен на рисунке 3.8.

Для таких рефлекторов целесообразно применение Y - образных спиц, обеспечивающих сравнительно небольшую строительную высоту антенны в ее центральной части и увеличенную строительную высоту на периферии.

В данном примере показан результат конечно-элементного анализа конструкции зонтичной антенны, имеющей следующие отличительные особенности: отражающая поверхность антенны имеет апертуру, близкую к полной. Фронтальная сеть в центральной части состоит из тангенциальных гибких элементов, в периферийной части фронтальной сети расположены жесткие радиальные элементы; тыльная сеть в центральной части состоит из вантовых арок, на периферии поддерживающую функцию выполняют Х-образные вантовые конструкции; спицы антенны имеют Ү - образную форму. Схемы фронтальных сетей показаны на рисунке 3.8. Вантовые элементы конструкции рефлектора моделируются одномерными элементами, не имеющими жесткости на сжатие, спицы и жесткие элементы фронтальной сети моделируются балочными элементами.

Процесс получения решения реализуется следующим образом. Всем вантовым элементам конструкции, кроме оттяжек, задается преднатяжение, которое создается за счет приложения к элементам соответствующей температуры.

Полученная в результате форма отражающей поверхности корректируется путем изменения натяжений оттяжек также за счет температуры, рассчитанной по формуле:

$$T^{0} = T_{\rm orr} + \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l}, \qquad (3.11)$$

где T_{on} – начальная опорная температура, l – начальная длина оттяжки, α – коэффициент температурного расширения материала оттяжки. Корректировка формы отражающей поверхности конструкции прекращается, когда величина СКО достигает наименьшей величины. В данном примере СКО составило
величину порядка 3 мм. Такая относительно небольшая величина объясняется тем, что КЭМ рефлектора рассчитывалась без сетеполотна. Численная реализация осуществлена с использованием программного комплекса ANSYS.

Отметим, что в данном примере определения параметров НДС СР применялся этап 2 метода расчета главы 2, где перемещениям всех узлов значения, a элементам шнуров ΦΟС задавались нулевые задавались преднатяжения. Далее производился первый расчет методом Ньютона-Рафсона (начальное решение). После получения начального решения, для некоторых узлов шнуров ФОС (тангенциальных или радиальных) уже не ставились граничные условия нулевых перемещений, а значения натяжений в вантах задавались из начального решения. После этого производился следующий расчет. Такая последовательность применялась до тех пор, пока не было получено НДС, соответствующее требуемым граничным условиям нулевых перемещений узлов в центре СР (исходное состояние).

На рисунке 3.9 представлено распределение напряжений в элементах настроенного рефлектора.



Рисунок 3.9 – Распределения напряжений в элементах рефлектра, Па

<u>Пример 3.2.</u> На рисунках 3.10 – 3.11 представлена схема ободного рефлектора работы [71].

Офсетный рефлектор с диаметром апертуры 48 м структурно состоит из отражающей поверхности, фронтальной и тыльной сетей с фасетами треугольной формы, соединенными вантовыми оттяжками, и силового каркаса, который включает: обод трубчатого сечения, стойки трубчатого сечения из трех звеньев и шнуры, соединяющие стойки и обод.



Рисунок 3.10 – КЭМ ободного СР диаметром 48м

Особенностью данной конструкции является возможность настройки отражающей поверхности с помощью шнуров, соединяющих стойки и обод рефлектора, показанных на рисунке 3.11.



Рисунок 3.11 – Схема крепления сотек

Также возможна настройка вантами, соединяющими тыльную и фронтальную сети рефлектора (Рисунок 3.10). Численная реализация напряженнодеформируемого состояния элементов конструкций также осуществлялась в программном комплексе ANSYS с помощью метода конечных элементов. В данном примере приведены результаты численного расчета распределения отклонений от параболоида отражающей поверхности (Рисунок 3.12).

Как показали расчеты, при описанном способе настройки отражающей поверхности возможно достичь величины СКО = $4,05 \cdot 10^{-3}$ м. Кроме того, получены значения продольных усилий, возникающих в ободе и стойках при, которые приближенно составляют – 2005, 8 Н и –302,8 Н соответственно. Также найдены значения натяжений шнуров фронтальной, тыльной сети, вант тыльной и фронтальной сети, шнуров, соединяющих стойки и обод, которые приближенно составляют 61,7 H, 62,1 H, 3,4 H и 113,1 H соответственно.



Рисунок 3.12 – Перемещения узлов ОП, м

Таким образом, можно сделать следующие выводы: основными достоинствами данной конструкции является относительная простота ее численной реализации, возможность настройки отражающей поверхности с помощью шнуров, соединяющих обод и стойки рефлектора, до величины СКО = $4,05 \cdot 10^{-3}$ м, а также возможность уменьшения СКО с увеличением числа вант, соединяющих тыльную и фронтальную сети.

Метод расчета был аналогичный предыдущему примеру. Вначале определялось поле перемещений узлов ОП при заданных начальных напряжениях в элементах ФОС и ОП и нулевых значениях перемещений остальных узлов рефлектора. Далее производилось последовательное открепление узлов стоек и обода до получения решения с требуемыми граничными условиями.

<u>Пример 3.3.</u> Данный пример расчета конструкции зонтичного рефлектора относится к работе [77, 78]. На рисунках 3.13 и 3.14 показана принципиальная схема КЭМ рефлектора диаметром 48м в сборе и по частям.



Рисунок 3.13 – КЭМ зонтичного рефлектора диаметром 48 м в сборе и по частям

Телескопические спицы силового каркаса имеют вид (Рисунок 3.14):



Рисунок 3.14 – Схема спиц рефлектора

Главное отличие от предыдущих примеров состоит в том, что начальное решение рассчитывалось с использованием результатов нелинейного МПС, определивших следующую форму ФС (ТС) рефлектора с соответствующими значениями натяжений в шнурах (Рисунки 3.15-3.16):



Рисунок 3.15 – Форма фронтальной сети, рассчитання нелинейным МПС:



Рисунок 3.16 – Значения натяжений в шнурах ФС, рассчитанные нелинейнм МПС, Н: а) внутренние шнуры; б) периферийные шнуры; в) радиальные шнуры; г) шнуры оттяжек

На втором этапе расчета, изменение граничных условий по перемещениям узлов реализовывалось до тех пор, пока не было получено решение, соответствующее условиям закрепления узлов центральной части (ступицы).

Промежуточное решение, с фиксированными узлами центральной ступицы и звеньев А, Б, и искомые решения показаны на рисунке 3.17.

Отметим, что использование в начальном решении результатов расчета МПС позволило значительно сократить количество этапов изменения граничных условий по перемещениям, а именно: не отпускать узлы каждой группы элементов (сетеполотна, звеньев спиц: корневых, промужуточных , А и Б), а всего лишь снять условия нулевых перемещений с узлов звеньев А и Б.



Рисунок 3.17 – Перемещения узлов ОП, м: а) промежуточное решение; б) искомое решение

Схожие варианты рефлекторов исследовались в работе [72]. Рассматриваемые конструкции отличались, в основном, конфигурациями фронтальной и тыльной сетей. Проанализированы следующие варианты рефлектора:

1. ФС и ТС симметричные. Фасеты имеют форму равнобедренных треугольников (Рисунок 3.18, а).

2. ФС и ТС симметричные, образованы радиальными элементами, расположенными вдоль спиц, и несколькими поясами тангенциальных шнуров (Рисунок 3.18, б).

3. ФС и ТС несимметричны. Фасеты – равнобедренные треугольники, при этом размер треугольников в ТС больше, а их количество меньше, чем в ФС. Схема ФС соответствует рисунку 3.18, *a*, схема ТС – рисунок 3.18, в.

4. ФС аналогична варианту 1 (Рисунок 3.18, а). ТС аналогична варианту 2 (Рисунок 3.18, б).

5. ФС имеет фасеты прямоугольной формы (Рисунок 3.18, г). ТС аналогична варианту 2 (Рисунок 3.18, б).

6. ФС и ТС симметричные. Фасеты имеют вид прямоугольных треугольников (Рисунок 3.18, д)



Рисунок 3.18 – Схемы ФС зонтичного СР [72]

Рассматриваемые варианты также имеют отличия в части моделирования спиц. Для вариантов 1-4 проанализированы рефлекторы с 6, 8 и 12 спицами. Кроме того, для вариантов 1-3 рассмотрены два способа устройства системы регулировочных оттяжек. В первом случае оттяжки, расположенные вдоль границ секторов, проходят сквозь спицы без взаимодействия c НИМИ. Спицы смоделированы балочными элементами, с поперечным сечением в виде тонкостенной круглой трубы. Во втором случае пересечения спиц с оттяжками нет. Спицы – балочные элементы с поперечным сечением в виде тонкостенной квадратной трубы. Вариант 4 рассмотрен аналогично последнему случаю. В вариантах 5 и 6 вантовая структура пересекает спицы, имеющие ферменную конструкцию. Сравнивались следующие параметры: 1) СКО 2) осевые силы и изгибающие моменты в спицах; 3) собственная частота из числа первых 100, которой соответствует максимальная эффективная масса. Установлено, что по значению СКО и изгибающим моментам на спицу оптимальными оказались варианты с симметричными треугольными ФС и TC, а по сжимающим усилиям – симметричные ФС и TC в форме прямоугольников.

Во всех перечисленных случаях геометрическая форма сетей не рассчитывалась по МПС. Поэтому, количество промежуточных решенией было большим по сравнению с сетью, рассчитанной по МПС.

Модификации рассмотренного рефлетора, представлены в работах [73, 85, 86], где апертура ОП расширена с помощью жестких балочных формообразующих элементов.

3.3.4 Исследование параметров НДС сетчатых рефлекторов с диаметром апертуры 12 м

В данном пункте исследуются два вида рефлекторов: ободный и зонтичный (Рисунки 3.19, 3.20).

Спицы силового каркаса зонтичной конструкции аналогичны рисунку 3.14. Схема силового каркаса ободной конструкции показана на рисунке 3.21.



Рисунок 3.19 – Конструкция ободного рефлектора в целом и по частям



Рисунок 3.20 – Конструкция зонтичного рефлектора в целом и по частям

Геометрические размеры ОП для зонтичной и ободной конструкции: диаметр вырезающего цилиндра $D_3=12$ м, $D_0=12$ м; фокусное расстояние $F_3=0,45 \cdot D_3$, $F_0=8$ м; клиренс: $X_3=2,3$ м, $X_0=1,125$ м.



Рисунок 3.21 – Схема обода силового (рабочий и сложенный вид)

Геометрические размеры силового каркаса для зонтичной конструкции: длина и диаметр корневого звена $L_{\kappa}=2,89$ м, $D_{\kappa}=0,1425$ м; длина и диаметр промежуточного звена $L_{\pi}=2,91$ м, $D_{\pi}=0,128$ м; длина и диаметры звеньев А и Б $L_{A}=L_{b}=2,91$ м, $D_{A\min}=D_{B\min}=0,0475$ м, $D_{A\max}=D_{B\max}=0,0866$ м; толщина стенки звеньев: $H_{\kappa}=H_{\pi}=0,9$ мм – корневое и промежуточное, $H_{A}=H_{b}=0,45$ мм – A(Б).

Геометрические параметры силового каркаса ободного рефлектора: диаметр, высота и ширина обода: $D_0=12$ м, $H_0=0,05$ м, $W_0=0,009$ м; диаметр и длина стоек: $D_c=0,01$ м, $H_c=1,96$ м.

Механические свойства материалов зонтичного рефлектора: коэффициент Пуассона 0,3; модули упругости: элементы силового краса $E_{\rm k}=1,51\cdot10^{11}$ Па, шнуров ФОС определялись через жесткости на растяжения по формуле $E_{\rm m}=K_{\rm m}/S_{\rm m}$,

81

где $K_{\rm m}$ – жесткость на растяжение шнура (считается известной), $S_{\rm m}$ – площадь поперечного сечения с диаметрами 0,7мм, 2 мм и 5 мм; сетеполотно $E_{\rm m}=130/H_{\rm c}$, где $H_{\rm c}=0,0001$ м – толщина сетеполотна

Механические свойства материалов ободного рефлектора: коэффициент Пуассона 0,3; модули упругости: обод и стойки $E_0 = E_c = 2 \cdot 10^{11}$ Па, шнуры $E_{\rm m} = K_{\rm m}/S_{\rm m}$ ($K_{\rm m} = 30890$, диаметр шнура – 2 мм); сетеполотно $E_{\rm m} = 130/H_c$ с толщиной $H_c = 0,0001$ м.

В таблице 3.2 приведены типы используемых конечных элементов.

Таблица 3.2 – Типы конечных элементов рефлекторов в ANSYS

| Элемент конструкции | Зонтичный рефлектор | Ободный рефлектор |
|------------------------|---------------------|-------------------|
| Сетеполотно | Shel181 | Shel181 |
| Шнуры силового | Link10/ Link180 | Link180 |
| каркаса/ФОС | | |
| Силовой каркас | Shell181 | Beam188 |

Согласно методу главы 2, определение НДС конструкций рефлекторов реализовано в два этапа.

Этап 1. Поиск начальной формообразующей структуры рефлекторов матричным нелинейным методом плотности сил.

В случае ободного рефлектора, фиксированными узлами ФОС считались узлы, лежащие на ободе. В случае зонтичной конструкции, фиксировались узлы, лежащие на концах звеньев A(Б) спиц силового каркаса.

В результате расчета нелинейным МПС получены следующие формы ФС (TC) с соответствующими значениями перемещений узлов (Рисунок 3.22)



Рисунок 3.22 – Найденные формы ФС(ТС) рефлекторов с соответствующими значениями перемещений узлов, м

Из рисунка видно, что значения перемещений узлов практически равны нулю. Это свидетельствует о корректности решений уравнений равновесия (2.10). Соответствующие значения координат узлов ФС(ТС) приведены в приложениях А и Б. На рисунках 3.23 – 3.26 показаны графики нормы векторов (3.9) в зависимости от номера итерации МПС для зонтичного и ободного рефлекторов.

Для приведенных графиков, начиная с определенной итерации, должно выполнятся условие постоянства значений нормы вектор-столбцов искомых координат, так как система должна быть в состоянии равновесия. Норма векторстолбца невязки по натяжениям элементов ФОС также должна стремиться к нулю с увеличением количества итераций.



Рисунок 3.23 – Зависимость нормы векторов рассчитанных координат **x**, **y** узлов ФС (ТС) ободного СР от номера итерации МПС



Рисунок 3.24 – Зависимость нормы вектора рассчитанных координат z узлов ФС ободного CP от номера итерации МПС



Рисунок 3.25 – Зависимость нормы векторов рассчитанных координат **x**, **y** узлов ФС (TC) зонтичного СР от номера итерации МПС



Рисунок 3.26 – Зависимость нормы вектора рассчитанных координат **z** узлов ФС зонтичного СР от номера итерации МПС

Из графиков видно, что начиная с седьмой итерации для ободного СР и шестой итерации для зонтичного, положения узлов соответствуют равновесному

состоянию, так как их координаты практически постоянны, а значит, норма их векторов-столбцов также постоянна.

На рисунках 3.27, 3.28 показаны графики нормы вектора невязки (2.62) между текущими значениями натяжений в элементах и требуемыми.



Рисунок 3.27 – Зависимость нормы вектора невязки по натяжениям в элементах ФС (TC) ободного рефлектора от номера итерации МПС, Н



Рисунок 3.28 – Зависимость нормы вектора невязки по натяжениям в элементах ФС (TC) зонтичного рефлектора от номера итерации МПС, Н

Из графиков видно, что начиная с седьмой итерации для ободного СР и шестой итерации для зонтичного, норма вектора невязки требуемых и текущих натяжений стремиться к нулю. Это означает, что условие (2.62) выполняется с заданной точностью.

В дополнение к построенным графикам, на рисунках 3.29 – 3.31 показаны значения натяжений элементов ФОС:



Рисунок 3.29 – Значения натяжений в элементах фронтальной и тыльной сетей рефлекторов, Н



Рисунок 3.30 – Значения натяжений в элементах регулировочных оттяжек, Н

Из рисун ка 3.29 следует, что значения натяжений в элементах сетей практически равны целевому 10 H с точностью выше 10⁻³ H. Таким образом, решения нелинейных уравнений в (2.13), описывающих ограничения на натяжения элементов, являются корректными.



Рисунок 3.31 – Значения натяжений в периферийных шнурах зонтичного СР, Н

Полученные координаты и значения натяжений в элементах ФОС рефлектора используются как начальное приближение при определении НДС всей конструкции СР.

Этап 2. Определение параметров НДС конструкций рефлекторов.

Основным параметром, определяющим НДС конструкции СР, является вектор перемещений узлов КЭМ СР при заданных граничных условиях.

На рисунке 3.32 показаны перемещения узлов СР при условии нулевых перемещений узлов стойки силового каркаса ободной конструкции и нулевых перемещений узлов центральной части (ступицы) зонтичной.



Рисунок 3.32 – Перемещения узлов СР, м

Граничные условия по начальным натяжениям (напряжениям) в элементах ФОС взяты из решения МПС. Начальные натяжения в вантовых элементах, соединяющих элементы силового каркаса СР, варьировались от 20 H до 100 H. Начальное напряжение в элементах сетеполотна составило 2 H/м.

Отметим, что начальное решение было получено сразу с требуемыми граничными условиями по перемещениям, без промежуточных решений. На рисунке 3.32 решение соответствуют настроенному состоянию рефлекторов. Настройка производилась оттяжками по формуле 3.11. Также полагалось, что сторона треугольной ячейки ФС разбита на 4 элемента. Разбиение на 6 и 8 элементов будет рассмотрено ниже при анализе сеточной сходимости.

На рисунке 3.33 показаны распределения отклонений:

$$\Delta z_j^{\text{nap}} = z_j^{K \mathcal{B} \mathcal{M}} + u_j^z - z_j^{\text{nap}}, \qquad (3.12)$$

где $x_j^{K \ni M}$, $y_j^{K \ni M}$, $z_j^{K \ni M}$ – координаты узлов КЭМ ОП, u_j^x , u_j^y , u_j^z – координаты вектора перемещений узлов КЭМ ОП, $z_j^{\text{пар}} = z_{\text{пар}} \left(x_j^{K \ni M} + u_j^x, y_j^{K \ni M} + u_j^y \right)$ – значения, вычисленные по формуле офсетного параболоида (3.6).



Рисунок 3.33 – Распределения отклонений $\Delta z_j^{\text{пар}}$ в ОП, м: а) ОП зонтичного СР в круге 6,1м, б) ОП ободного СР в круге 5м

Значения отклонений $\Delta z_j^{\text{пар}}$ рассматривались в круге. В случае ободной конструкции это объясняется тем, что узлы обода не лежат на офсетном параболоиде и не подлежат настройке. Следовательно, как можно видеть из рисунка 3.32, в соответствующих ячейках ОП наблюдаются наибольшие отклонения. По этой причине эти элементы ОП не рассматриваются для дальнейшего анализа. В случае зонтичной конструкции, также исключены элементы периферийной части ОП из-за относительно больших перемещений по

сравнению с остальной частью.

СКО узлов ОП от параболоида (3.6) рассчитывалось по формуле:

$$\delta_{CKO} = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\Delta z_{j}^{CKO}\right)^{2}\right]^{1/2}, \qquad (3.13)$$

где $\Delta z_j^{CKO} = z_j^{K \ni M} + u_j^z - (z_j^{\text{nap}} + M), \quad M = \sum_{j=1}^N (z_j^{K \ni M} + u_j^z - z_{\text{nap.}}) / N, \quad N -$ число

рассматриваемых узлов ОП.

Формула (3.13) учитывает смещение офсетного параболоида на величину среднего отклонения M узлов ОП по оси Oz. Т.е. в этом случае узлы деформированной ОП имеют меньшее отклонение от офсетного параболоида 3.6 за счет его смещения на величину M.

Ниже приведены графики распределения δ_{CKO} (Рисунки 3.33 и 3.34) в зависимости от итерации настройки оттяжками. Как было отмечено выше, длины оттяжек регулируются до тех пор, пока δ_{CKO} не примет некоторого постоянного значения. Количество итераций настройки зависит от вида СР.



Рисунок 3.34 – Величина СКО узлов ОП от офсетного параболоида в зависимости от номера итерации настройки оттяжками зонтичного СР, мм



Рисунок 3.35 – Величина СКО узлов ОП от офсетного параболоида в зависимости от номера итерации настройки оттяжками ободного СР, мм

Оценка величины δ_{CKO} производилась в круге радиуса 6,1 м для зонтичного рефлектора и круге радиуса 5 м – для ободного.

Из графиков видно, что в случае зонтичного СР величина $\delta_{CKO}=2,06$ мм начиная с седьмой итерации настройки, а для ободного СР $\delta_{CKO}=0,93$ мм начиная с шестой итерации настройки.

3.4 Оценка эффективности метода расчета. Сеточная сходимость

Для оценки эффективности метода была рассмотрена конструкция зонтичного СР, где форма ячеек ФС(ТС) также имела треугольную форму, но координаты их узлов не были рассчитаны по МПС (Рисунок 3.36).

Кроме того, расположение оттяжек реализовано несколько другим способом. Оттяжки вдоль спиц были не вертикальными, а в обход спиц. Таким образом, их количество составило 384 единицы, что на 54 больше по сравнению с предыдущей конструкцией.

В оценке эффективности сравнивались два параметра: время расчета и величина СКО по отношению к конструкции зонтичного СР, где ФОС рассчитана

91

по МПС. В обоих случаях задавались одинаковые граничные условия по начальным натяжениям в элементах ФОС (кроме оттяжек) и перемещениям в узлах ступицы.



Рисунок 3.36 – Схема ФС(ТС) и оттяжек зонтичного СР с координатами узлов, не рассчитанных по МПС

В результате расчета, в рассматриваемой конструкции получено следующее распределение перемещений узлов ОП (рисунок 3.37):



Рисунок 3.37 – Распределения отклонений $\Delta z_i^{\text{пар}}$ в ОП в круге 6.1 м, м

Из рисунка 3.37 видно, что максимальное значение отклонений меньше по сравнению с СР на рисунке 3.33 а). Это объясняется большим количеством оттяжек. Однако распределение перемещений на рисунке 3.33 а) более равномерно, что положительно сказывается на величине СКО.

На рисунке 3.38 показаны графики распределения СКО узлов ОП рефлекторов с ФС(ТС), рассчитанных и не рассчитанных по МПС, в зависимости

от номера итерации настройки оттяжками:



Рисунок 3.38 – Величина СКО узлов ОП от офсетного параболоида в зависимости от номера итерации настройки, мм

Далее приведены графики зависимостей времени расчета от количества разбиений стороны треугольной ячейки ФС рефлекторов (2, 4, 6, 8 элементов):



Рисунок 3.39 – Зависимость времени расчета зонтичных СР в зависимости от количества элементов на стороне ячейки ФС

Видно, что в случае ФС (TC), рассчитанных по МПС, величина $\delta_{CKO}=2,06$ мм – меньше по сравнению с величиной $\delta_{CKO}=2,23$ мм, где МПС не использовался.

На графике рисунка 3.39 видно, что в случае разбиения стороны ячейки на 8 элементов расчетное время увеличилось в 1,98 раза по сравнению с конструкцией, где МПС использовался. Такой скачок по времени расчета объясняется тем, что для получения сходящегося решения пришлось увеличить количество промежуточных решений с 2 до 5, т.е. последовательно освобождать от условий закрепления несколько составных частей рефлектора: шнуры ФОС и элементы силового каркаса. Расчетное время соответствовало начальному состоянию рефлектора без настройки оттяжками.

Для определения сеточной сходимости конструкции СР с ФОС, рассчитанной по МПС, рассматривались варианты КЭМ ОП, также с разбиением ячеек ФС на 2, 4, 6, 8 элементов. В результате получены следующие распределения перемещений ОП:



94



Рисунок 3.40 – Перемещения узлов ОП СР в зависимости от разбиений стороны ячейки ФС, м: а) 2 элемента, б) 4 элемента, в) 6 элементов, г) 8 элементов

Установлено, что при разбиении стороны треугольной ячейки ФС на 8 элементов, значения перемещений увеличиваются незначительно по сравнению с разбиением на 6 элементов. Так, в случае зонтичного рефлектора, изменения СКО узлов ОП (в круге 6,1 м) не превысили 2,1%, а в случае ободного – изменения СКО узлов ОП (в круге 5 м) не превысили 1,5% (Рисунок 3.41).

Таким образом, можно условно полагать, что сеточная сходимость достигается при разбиении ячейки ФС на 8 элементов.

Из графика видно, что при разбиении ячейки ФС на 8 элементов значения СКО узлов ОП уменьшилось с 2,06 мм до 1,917 мм для зонтичной конструкции и 0,93 мм до 0,89 мм для ободной. Также отметим, что при разбиении на 8 элементов стороны ячейки ФС зонтичного СР с ФОС, рассчитанной не по МПС, величина СКО составила 2,15 мм.



Рисунок 3.41 – Зависимость СКО узлов ОП от офсетного параболоида от количества элементов на стороне треугольной ячейки ФС

3.5. Выводы по главе 3

В настоящей главе рассмотрено приложение предложенного двухэтапного метода расчета ВОК применительно к конструкциям СР космических аппаратов. Метод оказался весьма эффективен как в случае рефлекторов с апертурой от 48 м, так и в случае апертуры от 12 м.

В третьем примере из п 3.3.2 отмечено, что количество промежуточных решений в определении начального НДС 48 метрового рефлектора меньше по сравнению с конструкцией, где МПС не использовался.

При исследовании НДС ободной и зонтичной конструкций СР с апертурой от 12 м, можно сделать следующие выводы:

1) На первом этапе расчета, с помощью МКЭ показано, что найденные формы Φ С по МПС действительно находятся в состоянии равновесия, а значения натяжений элементов Φ С(TC) распределены равномерно с заданной точностью. Таким образом, решения МПС были верифицированы независимыми решениями МКЭ. Кроме того, установлена сходимость по норме L_2 к требуемым решениям

96

для координат узлов и натяжений элементов ФОС в МПС (Рисунки 3.23-3.28);

2) На втором этапе расчета получено распределение перемещений узлов СР с требуемыми граничными условиями. Благодаря использованию результатов расчета МПС, решение получено сразу, то есть без промежуточных решений процедуры последовательного изменения граничных условий по перемещениям. Это означает, что данные для начального приближения, взятые по МПС, уже находились в области сходимости задачи. Также установлена сеточная сходимость в МКЭ при разбиении треугольной ячейки ФС рефлекторов на 2, 4, 6, 8 элементов. Установлено, что для разбиений стороны ячейки на 6 элементов и более решения меняются незначительно (Рисунки 3.40, 3.41);

3) Показана эффективность метода расчета при сравнении решений для зонтичных конструкций СР, в которых одна ФОС рассчитана по МПС, а другая – нет. Сравнивались два параметра: время расчета и величина СКО узлов ОП от офсетного параболоида. Установлено, что время расчета конструкции СР с ФОС, рассчитанной по МПС (при разбиении стороны ячейки ФС на 8 элементов), было в 1,98 раза меньше, а значение $\delta_{CKO}=1,917$ мм было меньше на 10,8%. Таким образом, использование решений МПС значительно сократило время расчета и повысило точность ОП.

ГЛАВА 4 Анализ устойчивости, собственных частот и форм колебаний конструкций рефлекторов

4.1 Предварительные замечания по Главе 4

Основной целью настоящей главы является оценка влияния натяжения вантовых элементов ФОС рефлекторов (рассчитанных по МПС) на устойчивость и жесткость конструкции СР.

Анализ устойчивости производится по МКЭ линейным и нелинейным подходами [76]. В случае линейного анализа определяются значения критической силы потери устойчивости спиц силового каркаса зонтичной конструкции и вертикальных стоек силового каркаса для ободной. Данный тип анализа является предварительным, так как он не учитывает геометрической нелинейности и определяет завышенные значения критических сил по сравнению с нелинейным. Для получения более точных значений производится нелинейный анализ, в котором последовательно задаются возрастающие нагрузки на исследуемые элементы до значений, которые близки к значениям критических сил, полученных в линейном анализе.

Жесткость конструкций рефлекторов оценивается по спектру собственных частот [29]. Следующий пример одномерной системы с сосредоточенными параметрами иллюстрирует связь жесткости и собственных частот.

Пусть дано уравнение движение одномерной системы в виде:

$$m\ddot{x} + kx = f\cos(\omega t) \tag{4.1}$$

где x – координата; m – масса; k – коэффициент жесткости; f – амплитуда внешней силы; ω – частота внешней силы; t – время; \ddot{x} – вторая производна по t. Тогда решение (4.1) имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t) \tag{4.2}$$

где А – амплитуда колебаний, определяемая по формуле:

$$A = \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$
(4.3)

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота собственных колебаний механической системы. В случае

постоянной внешней силы $\omega \rightarrow 0$. Тогда величина A имеет вид:

$$A = \frac{f}{m\omega_0^2} \tag{4.4}$$

Величина $m\omega_0^2$ – это жесткость системы с размерностью Н/м. Таким образом, чем больше собственная частота, тем меньше величина амплитуды колебаний (статического отклонения).

Известно, что самым нежелательным является случай, когда $\omega = \omega_0$, $A \to \infty$ (резонанс). При резонансе амплитуда ограничена демпфирующими свойствами материалов, несовершенством шарнирных и стыковочных соединений, специальным демпферами, либо система разрушается.

При условии $\omega_0 \ll \omega$ выражение (4.4) имеет вид:

$$A = \frac{f}{m\omega^2} \tag{4.5}$$

Это означает, амплитуда колебаний определяется частотой внешней силы.

При условии $\omega_0 >> \omega$, частота внешней нагрузки не имеет значительного влияния и система практически ведет себя как жесткое тело. Этот случай наиболее предпочтительный.

Конструкция СР является системой существенно более сложной, чем рассмотренная одномерная система. Балочные или оболочечные элементы, которые формируют силовой каркас СР, имеют относительно большую длину, и их жесткость меньше или сравнима с жесткостью соединительных элементов. Поэтому СР – это система с распределенными параметрами. При определении собственных частот СР также используется МКЭ.

Так как СР является напряженной конструкцией, то необходимо знать ее НДС с наилучшей точностью ОП (результаты главы 3). Далее произвести расчет

собственных частот СР. Основные уравнения, определяющие спектр собственных частот, будут описаны ниже.

4.2 Линейный и нелинейный анализ устойчивости в МКЭ

При выполнении линейного анализа устойчивости решается задача на нахождение критической силы потери устойчивости для идеальных линейно упругих элементов конструкции СР. Данная нагрузка является компонентой точки бифуркации, которая показана на рисунке 4.1 на кривой «усилие – перемещение».





В случае линейного подхода решается задача на собственные значения для уравнений равновесия конечно-элементной модели в виде [76]:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{4.6}$$

где **К** – матрица жесткости; **S** – матрица эффективной жесткости; λ – собственное значение; **u** – собственный вектор перемещений узлов модели, определяющий форму потери устойчивости. Значения критической нагрузки вычисляются по формуле:

$$F_{\rm KD} = \lambda F_{\rm HD} \tag{4.7}$$

где $F_{\rm np}$ – величина приложенной нагрузки. В некоторых случаях [30, 87] полагают, что $F_{\rm np}$ =1. Тогда наименьшее значение λ задачи (4.6) определяет величину

критического усилия на конструкцию. Однако оно имеет завышенное значение по сравнению с нелинейным решением.

К преимуществам линейного подхода можно отнести:

- более быстрое время расчета по сравнению с нелинейным анализом;

- получение верхнего оценочного значения критической нагрузки перед проведением нелинейного анализа;

- линейный анализ можно использовать в качестве средства проектирования, в котором определяется форма потери устойчивости;

К недостаткам линейного подхода можно отнести:

завышенные значения критических усилий по сравнению с нелинейным анализом;

- не учитывается отклик неупругих материалов конструкции;

- не учитываются эффекты геометрической нелинейности;

- не учитываются недостатки конструкции (вмятины и т. д.).

В случае нелинейного подхода, задача нахождения $F_{\kappa p}$ решается МКЭ для нелинейных уравнений теории упругости с уравнением равновесия относительно вектора перемещений узлов **u**:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f},\tag{4.8}$$

где **F**(**u**), **u**, **f** – векторы внутренних сил, искомых перемещений и внешних сил, элементов CP.

Уравнения (4.8) решаются итерационным способом Ньютона-Рафсона, где начальное приближение \mathbf{u}_0 считается известным. Далее определяется новое значение \mathbf{u}_i , при котором F(\mathbf{u}_i) \approx f :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u} \tag{4.9}$$

Для нахождения $\Delta \mathbf{u}$ разложим вектор-функцию $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ в ряд Тейлора в окрестности в окрестности \mathbf{u}_{i-1} до величин первого порядка малости. Тогда (4.8) можно представить в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad (4.10)$$

или как систему линейных уравнений:

$$K_{i-1}\Delta \mathbf{u} = \mathbf{R}_{i-1} \tag{4.11}$$

где, $K_{i-1} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1})}{\partial \mathbf{u}}$ – матрица жесткости, $\mathbf{R}_{i-1} = \mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1})$ – вектор невязки внешних и внутренних сил конечно-элементной модели. Решая (4.11) относительно $\Delta \mathbf{u}$, получим:

$$\Delta \mathbf{u} = K_{i-1}^{-1} \mathbf{R}_{i-1} \tag{4.12}$$

В задачах, которые учитывают большие перемещения, уменьшение шага $\Delta \mathbf{u}$ свидетельствует о сходимости итерационного процесса (4.4), т.е. система приобретает состояние устойчивого равновесия. При нагружении системы выше критического уровня, приращения $\Delta \mathbf{u}$ будут возрастать от итерации к итерации, и процесс (4.9) будет расходится. Это соответствует потере устойчивости системы. При нахождении $\Delta \mathbf{u}$ может возникнуть проблема плохо обусловленной матрицы \mathbf{K}_{i-1} из-за недостаточного (избыточного) натяжения веревочных элементов модели, что зачастую приводит к расхождению итерационного процесса. Для ее решения применяется процедура последовательного освобождения узлов конечно-элементной модели рефлектора, описанная выше.

В [76] под критической нагрузкой понимается такое значение действующей силы, при которой решение (4.8) расходится. В данной работе также указано, что при определении критической силы и при анализе закритического поведения используется метод корректирующих дуг Рикса, «вынуждающий» сходиться равновесные итерации Ньютона – Рафсона в пределах отрезков определенной длины. В настоящей работе под критической нагрузкой будем понимать тот ее уровень, при котором решение \mathbf{u}_i получает значительное увеличение по сравнению с предыдущим шагом нагрузки (в 1,5 и более раза).

4.3 Анализ устойчивости элементов силовых каркасов рефлекторов

4.3.1 Натяжения шнуров, действующих на элементы силового каркаса зонтичного рефлектора

Перед расчетом значений критических сил, рассмотрим значения натяжений, действующих в шнурах СР, соответствующих настроенному состоянию ОП и требуемым граничным условиям нулевых перемещений в узлах центральной ступицы (Рисунки 4.2–4.7). Так же, как и в главе 3, будут рассмотрены конструкции СР, где координаты узлов ФОС рассчитывалась по МПС и без него. Это позволит оценить вклад натяжений различных ФОС в коэффициент запаса устойчивости элементов спицы силового каркаса.

При определении граничных условий начальные натяжения шнуров определялись таким образом, чтобы они создавали приблизительно равные усилия на спицы силового каркаса.



Рисунок 4.2 – Натяжения в элементах ФС после настройки ОП, Н: а) с использованием МПС б) без использования МПС



Рисунок 4.3 – Натяжения в элементах ТС после настройки ОП, Н:

а) с использованием МПС б) без использования МПС





Рисунок 4.5 – Натяжения периферийных элементах ФС(ТС), Н: а) с использованием МПС б) без использования МПС

104



Рисунок 4.7 – Натяжения в элементах, соединяющих ФС(ТС) с периферийным шнуром, Н: а) с использованием МПС б) без использования МПС



Рисунок 4.8 – Натяжения в элементах, соединяющих спицы силового каркаса, Н: а) с использованием МПС б) без использования МПС



Рисунок 4.9 – Натяжения в элементах, соединяющих звенья А и Б спицы, Н а) с использованием МПС б) без использования МПС

Из приведенных рисунков видно, что для элементов внутри секторов ФС(TC), рассчитанных по МПС, значения натяжений находятся в интервале от 8,2 Н до 13,8 H, что значительно ближе к целевому 10 H по сравнению со случаем, натяжений в интервале от 0 H до 21 H для элементов ФС(TC), не рассчитанных по МПС. В последнем случае также наблюдаются элементы с нулевыми натяжениями (провисшие), что является нежелательным. Кроме того, величина СКО натяжений в элементах ФС от номинального 10 H, рассчитанная по формуле:

$$\Delta_T = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (T_i - T_0)^2} , \qquad (4.13)$$

где $T_i T_0$ – текущее и целевое значение натяжений соответственно, N – количество элементов, составила величину 0,94 Н для ФС, рассчитанной по МПС и 5,11 Н для ФС, не рассчитанной по МПС.

Разброс натяжений элементов ФС(ТС) от целевого значения 10Н связан с влиянием деформаций силового каркаса и сетеполотна, которые изначально не учитывались в МПС. Тем не менее использование решений МПС позволило получить ФОС без ненатянутых элементов и с меньшим СКО узлов ОП.

Значения СКО узлов ОП от параболического профиля в круге 6,2 м составили: 2,06 мм и 2,08 мм для ФОС, рассчитанных по (не по) МПС

Ниже приведена сравнительная таблица величин сжимающих усилий на спицы силового каркаса СР с различными ФОС.

Таблица 4.1 – Значения сжимающих усилий на спицы каркаса зонтичного СР

| | С использованием | Без использования | |
|-------|---------------------|-------------------|------------|
| Спица | МПС | МПС | |
| | Сжимающее усилие, Н | | Разница, % |
| 1 | 905,39 | 885,11 | 2,24 |
| 2 | 859,25 | 852,66 | 0,77 |
| 3 | 844,81 | 833,62 | 1,32 |
| 4 | 917,93 | 900,69 | 1,88 |
| 5 | 844,81 | 833,40 | 1,35 |
| 6 | 859,25 | 851,82 | 0,86 |

Соответствующая нумерация спиц приведена на рисунке 4.10



Рисунок 4.10 – Нумерация спиц силового каркаса зонтичного СР

4.3.2 Анализ устойчивости спицы зонтичного рефлектора

Оценим значение критической силы, действующей на спицу силового каркаса. Для этого выполним сначала линейный анализ устойчивости, задав на правых концах звеньев A(Б) сжимающие усилия с направлением, соответствующем действию шнуров $\Phi C(TC)$ (приближенно равным 14,78° к оси Ox). В результате расчета получим значение критич еской силы, равной $F_{\text{кр.}}$ =2314,6 Н. Соответствующая форма потери устойчивости и граничные условия показаны на рисунке 4.11



Рисунок 4.11 – Форма потери устойчивости спицы в линейном анализе, соответствующей значению критической силы *F*_{кр}=2314,6 Н

Как было отмечено выше, полученное значение является завышенным. Поэтому для уточнения его значения проведем нелинейный анализ, где будем задавать последовательно возрастающие усилия до значения близкого к $F_{\rm kp.}$ =2314,6H. В результате получена следующая форма потери устойчивости спицы (в увеличенном масштабе):



Рисунок 4.12 – Форма потери устойчивости спицы в нелинейном анализе, соответствующая значению критической силы *F*_{кр}=2126 Н
Из рисунков 4.11 и 4.12 следует, что формы потери устойчивости линейного и нелинейного анализа – одинаковы. Заметим, что на рисунке 4.12 присутствует боковая сила $F_{5}=1$ H, действующая вдоль оси O_{z} в узле A (конец промежуточного звена). Ее наличие обусловлено тем, что система, находящиеся в состоянии неустойчивого равновесия, теряет устойчивость при относительно небольшом воздействии. Тем дополнительном самым, значения критической силы определяются более точно. Для данного явления можно привести аналогию с круглым шариком, находящимся на выпуклой поверхности (Рисунок 4.13). Полагается, что поверхность шарика и выпуклая поверхность являются абсолютно гладкими.



Рисунок 4.13 – Схема неустойчивого равновесия шарика: a) неустойчивое равновесие б) действие боковой силы в) потеря устойчивости

На рисунке 4.13 а) шарик находится в состоянии неустойчивого равновесия, и при действии на него боковой силы он теряет устойчивость и скатывается.

Далее приведен график перемещения узла на конце промежуточного звена по оси *Oz*, в зависимости от приложенной сжимающей силы (рисунок 4.14).

Каждое значение перемещений соответствует последовательно возрастающей приложенной силе с шагом *F*_{шаг}=111,9 H.

По договоренности о значении критической силы можно полагать, что при достижении сжимающей силы F_{cx} =2125,94 H, имеет место потеря устойчивости, так как после этого значения, перемещения узла A увеличиваются более чем в полтора раза.

Как видно из графика, значения полученной критической *F*_{кр}=2126 Н силы меньше соответствующего значения 2314,6 Н, полученного в линейном анализе.



Рисунок 4.14 – Зависимость перемещения узла А на конце промежуточного звена спицы от величины сжимающих усилий на спицу

Ниже приведена таблица 4.2 коэффициентов запаса потери устойчивости спиц рефлектора

Таблица 4.2 – Коэффициенты запаса потери устойчивости

| Спица | С использованием МПС | Без использования МПС | | | | | |
|-------|----------------------|-----------------------|--|--|--|--|--|
| | Коэффиц | иент запаса | | | | | |
| 1 | 2,35 | 2,40 | | | | | |
| 2 | 2,47 | 2,49 | | | | | |
| 3 | 2,52 | 2,55 | | | | | |
| 4 | 2,32 | 2,36 | | | | | |
| 5 | 2,52 | 2,55 | | | | | |
| 6 | 2,47 | 2,50 | | | | | |

4.3.3 Натяжения шнуров, действующих на элементы силового каркаса ободного СР

Значения натяжений элементов ФОС, соответствующие настроенному состоянию рефлектора, показаны на рисунках 4.15 – 4.16, из которых видно, что из - за деформаций силового каркаса и натяжения сетеполотна значения натяжений элементов ФС(TC) отклоняются от целевого 10 Н. СКО натяжений составило величину 1, 03 Н.



Рисунок 4.15 – Натяжения элементов ФС (а) и ТС (б), Н



Рисунок 4.16 – Натяжения в оттяжках (а) и шнурах, соединяющих стойки (б), Н

Данные натяжения вызывают продольные усилия на сжатие элементов каркаса, показанных на 4.17. На рисунке 4.17 б) в узлах стойки (с нулевыми сжимающими усилиями) заданы нулевые граничные условия по перемещениям, т.е. положение стойки является фиксированным.



Рисунок 4.17 – Распределения сжимающих усилий в элементах силового каркаса ободного СР, Н: а) элементы обода б) элементы стоек

В следующем пункте исследуются на устойчивость элемент обода и стойка силового каркаса линейным и нелинейным подходами. На основе полученных значений критических сил, как и в предыдущем пункте, определяются значения коэффициентов запаса устойчивости на сжатие.

4.3.4 Анализ устойчивости стойки и элемента обода силового каркаса ободного рефлектора

Оценим значение критической силы, действующей на стойку и звено обода силового каркаса, соединяющего два ближайших узла ФС (ТС). На рисунке 4.18 показаны формы рассматриваемых элементов с соответствующими граничными условиями в системе координат *Оху*:



Рисунок 4.18 – Элементы силового каркаса ободного СР под действием сжимающей силы: a) звено обода прямоугольного сечения б) стойка круглого

Красными стрелками показаны действующие усилия. Нижние концы балок полагаются фиксированными.

В результате линейного и нелинейного расчета, получены одинаковые формы потери устойчивости стойки и звена обода (Рисунок 4.19), а соответствующие значения критических сил составили 1010, 53 H и 3814 H.



Рисунок 4.19 – Формы потери устойчивости элементов силового каркаса:

а) звено обода прямоугольного сечения б) стойка круглого сечения

В результате нелинейного расчета получены следующие графики перемещений узлов на конце рассматриваемых элементов в зависимости от сжимающих усилий (Рисунки 4.20, 4.21)



Рисунок 4.20 – Зависимость перемещения конца стойки силового каркаса от

сжимающих усилий



Рисунок 4.21 – Зависимость перемещения конца элемента обода силового каркаса от сжимающих усилий

Из графиков видно, что значения критических сил 960 Н и 3237 Н меньше соответствующих значений линейного анализа.

Минимальные значения коэффициентов запаса составили: 3237/186=17,4 для элемента обода и 960/65,5=14,7 – для стоек. Таким образом, при данных натяжениях, рассмотренные элементы конструкции силового каркаса имеют значительный коэффициент запаса, что можно рассматривать как потенциальную возможность к уменьшению массы рефлектора. Однако стоит учитывать, что в анализе рассмотрен относительно небольшой участок обода, т.е. при увеличении его длины коэффициент запаса будет меньше. Кроме того, уменьшение сечений элементов каркаса также может негативно сказаться на точности ОП. Данный вопрос требует дополнительного исследования.

4.4 Анализ собственных частот и форм колебаний рефлекторов

4.4.1 Уравнение движения, собственные формы и собственные частоты в МКЭ

Как было отмечено выше, собственные частоты и формы колебаний характеризуют жесткость СР. В общем случае эта задача основана на решении

114

уравнения движения с учетом геометрической нелинейности [14]:

$$\rho \ddot{u}_{i} = \frac{\partial}{\partial x_{k}} \left(\sigma_{kj} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} \right) \right)$$
(4.14)

где *ü_i* – ускорение по *i*-ой координате.

Частоты определяются для напряженной конструкции рефлектора. При этом полагается, что колебания являются малыми. Тогда перемещения представляются в виде [14]:

$$\overline{u}(t,\overline{x}) = \overline{u}^{I}(\overline{x}) + \overline{u}^{II}(t,\overline{x})$$
(4.15)

где $\overline{u}^{I}(\overline{x})$ – перемещения из статической задачи; $\overline{u}^{II}(\overline{x})$ – перемещения малых гармонических колебаний. Исходя из малости колебаний, имеют место неравенства:

$$u_i^{II} \ll u_i^I \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_j} \ll \frac{\partial u_i^{I}}{\partial x_j} \tag{4.17}$$

Если подставить (4.15) в (4.14) и с учетом неравенств (4.16), (4.17), выражения для компонент тензора деформаций примут вид [14]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{I} + \varepsilon_{ij}^{II}, \qquad (4.18)$$

$$\varepsilon_{ij}^{I} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{i}^{I}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}^{I}}{\partial x_{i}} + \frac{\partial u_{k}^{I}}{\partial x_{j}} \frac{\partial u_{k}^{I}}{\partial x_{i}} \right), \tag{4.19}$$

$$\varepsilon_{ij}^{II} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{II}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{II}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^{I}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{II}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^{I}}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^{II}}{\partial x_i} \right).$$
(4.20)

Тогда выражения закона Гука (1.38) запишутся в виде [14]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{I} + \sigma_{ij}^{II}, \qquad (4.21)$$

где

$$\sigma_{ij}^{I} = \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{ij}^{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{I}) - \frac{E}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_{ij}^{T} + \sigma_{ij}^{0}$$
(4.22)

$$\sigma_{ij}^{II} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^{II} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{II}\right)$$
(4.23)

С учетом того, что \mathbf{u}^{I} получено из статического решения, а также учитывая (4.15) - (4.17), уравнение движения (4.13) преобразуются к виду:

$$\rho_m \ddot{u}_i^{II} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{kj}^{II} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i^{I}}{\partial x_j} \right) \right).$$
(4.24)

граничные условия имеют вид (4.39) – (4.41).

В конечно-элементной формулировке уравнение движения (4.13) записывается в виде:

$$M\ddot{u}^{II} + Ku^{II} = 0, (4.25)$$

с решением

$$\overline{u}^{II} = \overline{\varphi} \cdot \cos \omega t \,, \tag{4.26}$$

где $\bar{\varphi}$ – вектор – столбец амплитудных форм колебаний (перемещений), ω – круговая собственная частота, M – масса рефлектора.

Подставляя решение (4.26) в (4.25), получим уравнение:

$$\left(K - \omega^2 M\right)\overline{\varphi} = 0, \qquad (4.27)$$

Собственные частоты определяются из решения характеристического уравнения:

$$\left|K - \omega^2 M\right| = 0, \qquad (4.28)$$

а соответствующие компоненты вектора-столбца форм колебаний тогда найдутся из уравнения:

$$\left(K - \omega_i^2 M\right) \overline{\varphi}_i = 0, \qquad (4.29)$$

где $\bar{\varphi}_i$ – вектор – столбец, соответствующий частоте ω_i , найденной из уравнения (4.28).

4.4.2 Собственные частоты и формы колебаний рефлекторов

На рисунках 4.22-4.21 показаны три первые формы колебаний и соответствующие значения собственных частот зонтичных СР, рассмотренных выше. Значения их масс приведены в таблице 4.3:

Таблица 4.3 – Массы рефлекторов

| Зонтичный ј | | |
|----------------------|-----------------------|--|
| ФОС, рассчитанная по | Ободный рефлектор, кг | |
| МПС | МПС | |
| 65,3 | 67,2 | |

Для ясности отображения форм колебаний в представленных КЭМ не отображено сетеполотно. Масштаб форм колебаний увеличен в 5 раз.

Из рисунка 4.22 видно, что первая форма колебаний соответствует вращательному движению спиц. При исследовании устойчивости схожей конструкции рефлектора [30, 86] установлено, что форма потери устойчивости рефлектора схожа с формой колебаний первой частоты.



Рисунок 4.22 – Первая форма колебаний зонтичных СР: а) с использованием МПС, частота f_1 =3,34 Гц; б) без использования МПС, частота f_1 =3,33 Гц



Рисунок 4.23 – Вторая форма колебаний зонтичных СР:

а) с использованием МПС, частота f_2 =3,38 Гц; б) без использования МПС, частота f_2 =3,37 Гц

Рисунок 4.24 – Третья форма колебаний зонтичных СР:

а) с использованием МПС, частота f_3 =3,42 Гц; б) без использования МПС, частота f_3 =3,4 Гц

Вторая и третья форма колебаний являются несимметричными. То есть если с одной стороны спицы поднимаются, то с другой опускаются. Эти формы колебаний являются схожими. Отличие только в том, что колебания происходят в разных плоскостях.

Во всех трех случаях величины собственных частот оказались близки. Разница между первой и третьей частотой не превышает 3 % для обоих вариантов. Это связано с тем, что колебания определяются изгибом спиц. То есть их жесткостью на изгиб. Также отметим тот факт, что во всех случаях собственные частоты рефлекторов с ФОС, рассчитанной по МПС, немного выше соответствующих частот конструкции, где МПС не применялся. Т.е. первая конструкция является более жесткой.

При исследовании ободной конструкции получены следующие формы колебаний:



Рисунок 4.25 – Формы колебаний ободного рефлектора с частотами: a) *f*₁=0,21 Гц; б) *f*₂=0,4 Гц; в) *f*₃=1,37 Гц

Установлено, что на жесткость конструкции рефлектора влияет толщина обода. Так, при увеличении его толщины в два раза с 0,009 м до 0,018 м, значение первой собственной частоты составило величину f_1 =0,34 Гц, а значение массы выросло до 132 кг (практически в два раза). Значения СКО узлов ОП при этом остались прежним – 0,93 мм. Формы колебаний были аналогичны рисунку 4.25. Таким образом, увеличение толщины обода существенно увеличивает массу, но не дает преимуществ по точности.

4.5 Выводы по главе 4

В настоящей главе рассмотрен анализ устойчивости, собственных частот и форм колебаний зонтичного и ободного рефлекторов.

Для зонтичных конструкций рассмотрены две ФОС: рассчитанная и не рассчитанная по МПС. Начальные значения натяжений в вантовых элементах задавались таким образом, чтобы создать приблизительно равные значения рабочих усилий на спицы силового каркаса. Устойчивость спиц анализировалась линейным и нелинейным подходами. Значения критической силы на сжатие составили величину 2314 Н в линейном анализе и 2126 Н – в нелинейном, что соответствует теории анализа на устойчивость. Наименьший коэффициент запаса устойчивости составил 2,32, что является удовлетворительным для данного типа конструкции.

Существенным оказался тот факт, что величина СКО натяжений Δ_T от целевого 10 Н элементов ФС, рассчитанных по МПС, составило величину 0,94 H, в то время как в элементах ФС, не рассчитанных не по МПС, она оказалось равной 5,11 Н. Таким образом, использование решений МПС дает существенное преимущество с точки зрения равномерного распределения натяжений.

Значения СКО узлов ОП от параболического профиля в круге 6,2 м составили 2,06 мм и 2,08 мм для ФОС, рассчитанных по (не по) МПС соответственно, а значения по всей площади – 2,46 мм и 2,92 мм. То есть и в этом случае использование решений МПС также повысило точность конструкции.

Собственные частоты зонтичных рефлекторов имеют приблизительно равные значения для двух вариантов ФОС. Однако у конструкции с ФОС, рассчитанной по МПС частоты оказались немного выше. То есть она несколько жестче.

Элементы силового каркаса ободного рефлектора (стойка и элемент обода) также анализировались линейным и нелинейным подходами на устойчивость. Значения критических сил линейного анализа оказались выше соответствующих значений нелинейного. Коэффициенты запаса составили 17,4 и 14,7 для элемента обода и стойки соответственно. Таким образом, существует потенциальная возможность к уменьшению массы рассмотренной конструкции. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

При анализе собственных частот ободного СР установлено, что на жесткость его конструкции, прежде всего, влияет толщина обода. Так, при увеличении его толщины с 0,009 м до 0,018 значения первой собственной частоты соответственно увеличились с f_1 =0,21 Гц до f_1 =0,34 Гц. Однако масса при этом увеличилась практически в два раза с 67,2 кг до 132 кг, что недопустимо. Значения СКО узлов ОП при этом осталось прежним – 0,93 мм. Таким образом, изначально рассмотренная ободная конструкция является более оптимальной с точки зрения точности и массы.

Заключение

В диссертационной работе предложен метод расчета геометрически нелинейных краевых задач определения НДС ВОК на основе комбинации конечных элементов и плотности сил. Данный метод может методов использоваться для расчета НДС таких ВОК, как тенты, вантово-оболочечные зданий и других подобных конструкций, обладающих свойством крыши геометрической нелинейности. Однако происхождение метода, прежде всего, связано с задачами определения НДС СР космических аппаратов, так как для данных конструкций необходимо не только определять поле перемещений узлов ОП с требуемым СКО от параболического профиля, но и поддерживать требуемое значения натяжений в вантовых элементах фронтальной сети. По этой причине был выбран нелинейный МПС для опреде9ления начальной равновесной формы вантовых элементов отражающей поверхности с определенными на них ограничениями по натяжениям. Последующая процедура последовательного изменения граничных условий по перемещениям узлов, разработанная в НИИ ПММ ТГУ, позволяет эффективно определять окончательное НДС, что подтверждено на многих конструкциях СР.

В представленной работе получены следующие результаты:

1. Построен двухэтапный метод расчета НДС ВОК, основанный на численном решении нелинейных уравнений равновесия механики деформируемого твердого тела с помощью методов конечных элементов и плотности сил.

2. На первом этапе метода оптимизирован шаг итерации плотности силы (на основе псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза) в процессе поиска формы вантовой сети для случая плохо обусловленной матрицы произведений матриц Якоби, возникающих при линеаризации функции, описывающей ограничения на элементы вантовой сети.

3. На втором этапе метода оптимизирована процедура последовательного изменения граничных условий по перемещениям узлов для определения НДС ВОК методом конечных элементов за счет использования решений МПС.

эффективность 4. Показана при сравнении решений метода для зонтичных рефлекторов с $\Phi OC.$ перспективных конструкций вантовой рассчитанной по МПС и без него. В случае конструкции, использующей решения МПС, время расчета оказалось меньше в 1,98 раза, СКО узлов ОП также оказалась меньше на 10,8 %. Кроме того, СКО натяжений элементов ФС от целевого значения 10 Н оказалась в 5,4 раза меньше по сравнению с конструкцией, где МПС не использовался.

5. Определены граничные условия (на основе решений МПС) по начальным напряжениям (натяжениям) вантовых элементов, а также начальные равновесные координаты их узлов для численных моделей вантовых ФОС зонтичного и ободного рефлекторов. Показана сходимость решений МПС на соответствующих графиках нормы векторов искомых координат узлов и вектор-функции, описывающей ограничения по натяжениям элементов, в зависимости от номера итерации. Геометрия рассчитанных структур по МПС верифицирована независимыми решениями МКЭ. Такой подход может применяться к любым вантовым конструкциям.

6. Произведена оценка собственных частот конструкций рефлекторов и определены соответствующие формы колебаний. Произведен анализ устойчивости элементов силовых каркасов.

Для зонтичной конструкции, использующей решения МПС, первые собственные частоты оказались незначительно выше (не более чем на 0,3%) по сравнению со случаем где МПС не использовался. В обоих случаях значения рабочих усилий на спицы было практически одинаковым. Коэффициент запаса устойчивости спиц составил величину более 2,3.

Для ободной конструкции первая собственная частота колебаний определяется прежде всего толщиной обода силового каркаса. Увеличение толщины обода с 0,009 м до 0,018 м дало увеличение первой собственной частоты. с f_1 =0,21 Гц до f_1 =0,34 Гц. Однако масса при этом увеличилась практически в два раза с 67,2 кг до 132 кг, что недопустимо. Значение СКО узлов отражающей поверхности при этом осталось прежним – 0,93 мм. Таким образом,

изначально рассмотренная ободная конструкция является более оптимальной с точки зрения точности и массы. Коэффициенты запаса устойчивости на сжатие составили 17,4 и 14,7 для элемента обода и стойки соответственно, что дает потенциальную возможность к уменьшению массы рассмотренной конструкции. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

Перспективы дальнейшей разработки темы. Полученные результаты, подтверждают эффективность такого подхода, позволяя В дальнейшем подключить в вариационную процедуру кроме гибких вантовых элементов жесткие элементы силового каркаса, что позволит в несколько раз сократить итерационный процесс проектирования прецизионных таких вантовооболочечных конструкций, как крупногабаритные трансформируемые антенные рефлекторы космических аппаратов. Кроме того, метод можно обобщить за счет введения в правые части уравнений равновесия МПС усилий, возникающих в результате действия начальных натяжений оболочки. Это позволит получить более сбалансированную конструкцию с одной стороны и уменьшит время расчета – с другой.

Список сокращений

- МПС метод плотности сил;
- МДР метод динамической релаксации;
- ММЖ метод матрицы жесткости;
- МКЭ метод конечных элементов;
- СЛАУ система линейных алгебраических уравнений;
- СР сетчатый рефлектор;
- ОП отражающая поверхность;
- ФОС формообразующая структура;
- ФС фронтальная сеть;
- ТС тыльная сеть;
- СКО среднеквадратическое отклонение;
- КЭ кинетическая энергия;
- НДС напряженно-деформированное состояние;

НИИ ПММ ТГУ – Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета.

Список литературы

1. Федосьев В. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Федосьев. // 10-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

2. Дмитриев Л. Г. «Вантовые покрытия». Расчет и конструирование / Л. Г. Дмитриев, А. В. Касилов // Изд. 2-е, переработанное и дополненное. – Киев, «Будівельник», 1974. – 272 с.

3. Lewis W. J. Tension structures. Form and behaviour / W. J. Lewis. – Thomas Telford, 2003. – 201 p.

4. Adriaenssens S. Shell structures for architecture: form finding and optimization
/ S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal and C. Williams. – Routledge Taylor & Francis Group, 2014. – 323 p.

5. Tibert A. G. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications [Electronic resource] : Doctoral Thesis / A. G. Tibert. – URL: URL: http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/TibertDocThesis.pdf (access date: 03.11.2017).

6. Сетчатый космический рефлектор AstroMesh компании NorthropGrumman [Электронный ресурс] // Newsroom | Northrop Grumman. – Электрон.дан.–[Б.м.,б.г.].r.].–URL:https://news.northropgrumman.com/news/releases/northrop-grummans-astro-aerospace-selected-for-airbus-defence-and-space-inmarsat-6-1-band-antenna-reflectorsобращения:06.02.2017).

7. Крыша стадиона «Волгоград Арена» в г. Волгоград [Электронный ресурс] // «Волгоград Арена», г. Волгоград. – Электрон. дан. – [Б. м., б. г.]. – URL: http://www.kurganstalmost.ru/deyatelnost/stadiony/volgograd-arena-g-volgograd/ (дата обращения: 26.05.2018).

8. Михайлов В. В. Предварительно напряженные и вантовые конструкции : учебное пособие / В. В. Михайлов. – М : АСВ, 2002. – 256 с.

9. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1979. – 744 с.

10. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности : монография / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 544 с.

11. Zienkiewicz O. C The finite element method for solid and structural mechanics / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu // 7th edition. – Butterworth-Heinemann, 2013. – 714 p.

12. Logan D. L. A first course in the finite element method / D. L. Logan // Fifth edition. – Cengage Learning, 2012. – 1000 p.

13. Присекин В. Л. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел: учебник / В. Л. Присекин, Г. И. Расторгуев // Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. – 238 с.

14. Жуков А. П. Динамика отражающей поверхности крупногабаритного зонтичного рефлектора космического аппарата [Электронный ресурс]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. П. Жуков. – Томск, 2016. – 156 с. – Электрон. версия печат. публ. – Доступ из "Электронная библиотека: Диссертации".

15. Ponomarev S. V. Stress–strain state simulation of large–sized cable–stayed shell structures [Electronic resource] / S. V. Ponomarev, A. P. Zhukov, A. V. Belkov, V. S. Ponomarev, S. V. Belov, M. C. Pavlov // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol. 71 : International Scientific Conference of Young Scientists : Advanced Materials in construction and Engineering. Tomsk, Russia, October 15–17, 2014. – Article number 012070. – 7 p. – DOI: 10.1088/1757–899X/71/1/012070. – URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/71/1/012070/pdf (access date: 20.01.2015).

16. Пономарев С. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния крупногабаритных вантово-оболочечных конструкций / С. В. Пономарев, А. П. Жуков, А. В. Бельков, В. С. Пономарев, С. В. Белов, М. С. Павлов // Перспективные материалы в строительстве и технике (ПМСТ – 2014) : материалы Международной конференции молодых ученых. Томск, 15–17 октября 2014 г. – Томск, 2014. – С. 390–397.

17. Linkwitz K. Einige Bemerkungen zur Berechnung vonvorgespannten Seilnetzkonstruktionen / K. Linkwitz and H. J Schek // Ingenieur-Archiv. – 1971. – № 40. – P. 145–158.

18. Schek H. -J. The force density method for form finding and computation of general networks / H. -J. Schek // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. $-1974. - N_{2} 3. - P. 115-134.$

19. Malerba P. G. An extended force density method for the form finding of cable systems with new forms / P. G Malerba, M Patelli and M. Quagliaroli // Structural Engineering and Mechanics. -2012. -Vol. 42, No 2. -P. 191–210.

20. Malerba P. G. Flexible bridge decks suspended by cable nets. A constrained form finding approach / P. G Malerba, M. Quagliaroli // International Journal of Solids and Structures. – 2013. – Vol. 50. – P. 2340–2352.

21. Белов С. В. Разработка метода расчета геометрически нелинейных задач вантово-оболочечных конструкций с поиском их начальной формы / С. В. Белов, М. С. Бухтяк, С. В. Пономарев // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (ФППСМ-216): сборник трудов Х Всероссийской научной конференции, посвященной 140-летию ТГУ и 50-летию НИИ ПММ ТГУ Томск, 03–05 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 88–90.

22. Вержбицкий В. М. Вычислительная линейная алгебра: учебное пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. // М. : Высш.шк., 2009. – 351 с.

23. Golub G. H. Matrix Computations / G. H. Golub, C. F. Van Loan. – The Johns Hopkins University Press, 2013. – 756 p.

24. Morterolle S. Numerical form-finding of geotension tension truss for mesh reflector. / S. Morterolle, B. Maurin, J. Quirant, C. Dupuy // Acta Astronautica. – 2012. – Vol. 76. – P. 154–163.

25. Yang G. Uniform-tension form-finding design for asymmetric cable-mesh deployable reflector antennas / G. Yang, B. Duan, Y. Zhang and D. Yang // Advances in Mechanical Engineering – 2016. – Vol. 8 (10). – P. 1–7. – DOI: 10.1177/1687814016672367.

26. Yang G. Form-finding design of cable-mesh reflector antennas with minimal length configuration / G. Yang, D. Yang, Y. Zhang, J. Du // Aerospace Science and Technology – 2017. – Vol. 63. – P. 9-15.

27. Yang D. Optimal surface profile design of deployable mesh reflectors via a force density strategy / D. Yang, J. Liu, Y. Zhang, S. Zhang // Acta Astronautica. – 2017. – Vol. 130. – P. 137–146.

28. Wang L. Exact mesh shape design of large cable-network antenna reflectors with flexible ring truss supports / L. Wang, D - X. Li, X - Z. Yu, J - P . Jiang // Acta. Mechanica Sinica – 2014. – Vol. 30 (2). – P. 198–305. – DOI: 10.1007/s10409-014-0029-6.

29. Belkov A. Stiffness estimation for large-sized umbrella space reflector [Electronic resource] / A. Belkov, S. Belov, M. Pavlov, V. Ponomarev, S. Ponomarev and A. Zhukov // MATEC Web of Conferences. - 2016. - Vol.48. : IV Russian Forum for Young Scientists with International Participation "Space Engineering". Tomsk, 12–14. 02001. Russia. April Article number 6 p. DOI: 10.1051/matecconf/20164802001. URL: https://www.matecconferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/11/matecconf_tomsk2016_02001.pdf (access date: 04.04.2016).

30. Belov S. Buckling analysis of large-sized space reflector [Electronic resource] / S. Belov, A. Belkov, M. Pavlov, S. Ponomarev, A. Zhukov and D. Shendalev // AIP Conference Proceedings. - 2017. - Vol. 1899, is. 1: Prospects of Fundamental Sciences Development (PFSD - 2017): Proceedings of the XIV International Conference of Students Young Scientists. Tomsk, Russia. and April 25–28, 2017. Article number 060007. 9 p. DOI: 10.1063/1.5009878. _ URL: https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5009878?class=pdf (access date: 03.11.2017).

31. Tang Y. Equvalent-frorce density method as a shape-finding tool for cablemembrance structures / Y. Tang, T. Li // Engineering Structures. – 2017. – Vol. 151. – P. 11–19. 32. Lewis W. J Lightweight tension structures-an aesthetic integration of geometry and mechanics / W. J Lewis // Mathematics today. Bulletin of the institute of mathematics and its applications – 1999. – Vol. 35, $N_{\rm P}$ 1. – P. 10–16.

33. Павильон ФРГ на выставке Expo'67 в г. Монреаль [Электронный ресурс] // ArchDaily | Broadcasting Architecture Worldwide. – Электрон. дан. – [Б. м., б. г.]. – URL: https://www.archdaily.com/623689/ad-classics-german-pavilion-expo-67-freiotto-and-rolf-gutbrod (дата обращения: 14.03.2019).

34. Дао Чонг Тхи Минимальные поверхности и проблема Плато: учебное пособие / Тхи Дао Чонг, А. Т. Фоменко. – М. : Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1987. – 312 с.

35. Перельмутер А. В. Беседы о строительной механике: научное издание / А. В. Перельмутер. – М.: Издательство SCAD Soft, издательство ассоциации строительных вузов, 2014. – 250 с.

36. Новожилов В. В. Теория упругости : учебное пособие / В. В. Новожилов // Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

37. Argyris J. H. A general method for the shape finding of lightweight tension structures / J. H Argyris, T. Angelopoulos and B. Bichat // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – Vol. 3. – P. 135–149.

38. Siev A. A general analysis of prestressed nets / A Siev // International Association of Bridge and Structural Engineering. – 1963. – Vol. 3. – P. 283–292.

39. Broughton P. The Analysis of Cable and Catenary Structures / P. Broughton and P. Ndumbaro. Thomas Telford, 1994. – 88 p.

40. Городецкий Д. А Программный комплекс ЛИРА-САПР[®] 2013 : учебное пособие / Д. А. Городецкий, М. А. Барабаш, Р. Ю. Водопьянов, В. П. Титок, А. Е. Артамонова. // Под редакцией академика РААСН Городецкого А. С. – К–М.: Электронное издание, 2013. – 376 с.

41. Alawadhi E. M. Finite element simulation using ANSYS / Alawadhi E. M. // Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2010. – 408 p.

42. Рычков С. П. Моделирование конструкций в среде MSC.visual NASTRAN для Windows / С. П. Рычков. – М.: НТ Пресс, 2004. – 552 с.

43. Khennane A. Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB[®] and Abaqus / A. Khennane. // CRC Press Taylor & Francis Group, 2013. – 487 p.

44. Lewis W. J. Computational form-finding methods for fabric structures / W. J. Lewis // Proceedings of the ICE - Engineering and Computational Mechanics. – 2008. – Vol. 161, is. 3. – P. 139–149.

45. Moaveni S. Finite element analysis. Theory and applications with ANSYS /S. Moaveni. // Pearson Education Limited, 2015. – 928 p.

46. Grundig L. A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970–1999 / Gründig L., E. Moncrieff, P. Singer and D. Ströbel // Proceedings of IASS-IACM 2000 of Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures. Chania-Crete, 5-7 June 2000. – Chania-Crete, 2000. – P. 1–13.

47. Крыша олимпийского стадиона в г. Мюнхен [Электронный ресурс] // Pinterest. – Электрон. дан. – [Б. м., б. г.]. – URL: https://www.pinterest.ru/pin/226728162470271725/ (дата обращения: 27. 01. 2019)

48. Sánchez J. A multi-step force – density method and surface-fitting approach for the preliminary shape design of tensile structures / J. Sánchez, M. À. Serna, P. Morer // Engineering Structures. – 2007. – Vol. 29. – P. 1966–1976.

49. Greco L. On the force density method for slack cable nets / L. Greco, M. Cumo // International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Vol. 49. – P. 1956–1540

50. Koohestani K. Nonlinear force density method for the form-finding of minimal surface membrane structures / K. Koohestani // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. – 2014. – Vol. 19. – P. 2071–2087.

51. Zhang J. Y. Adaptive force density method for form-finding problems of tensegrity structures / J. Y. Zhang, M. Ohsaki // Inernational Journal of Solids Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 5658–5673.

52. Hoang C. T. Advanced form-finding for cable-strut structures / C. T. Hoang, J. Lee // Inernational Journal of Solids Structures. – 2010. Vol. 47. – P. 1785 – 1794

53. Hernández-Montes E. Topological mapping for tension structures /
E. Hernández-Montes, R Jurado-Piña // Journal of Structural Engineering. – 2006. –
Vol. 132, № 6. – P. 970-977. – DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:6(970).

54. Ye J. The modified force-density method for form-finding of membrane structures / J. Ye, R. Feng, S. Zhou // International Journal of Steel Structures. – 2012. – Vol. 2, № 3. – P. 299-310. – DOI: 10.1007/s13296-012-3001-y.

55. Aboul-Nasr G. An extended force density method for form finding of constrained cable nets / G. Aboul-Nasr, S. A. Mourad // Case Studies in Structural Engineering. – 2015. Vol. 3. – P. 19-32.

56. Miki M. Extended force density method for form-finding of tension structures / M. Miki, K. Kawaguchi // Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures: J. IASS. – 2010. – Vol. 51, № 4. – P. 291-303.

57. Lee K. S. Advanced shape finding algorithm of force density method based on FEM / K. S. Lee, S. E. Han // Advanced Steel Construction. – 2011. – Vol. 7, № 4. – P. 313–329.

58. Hatichandran A. Form-finding of tensegrity structures based on force density method / A. Hatichandran, I. Y Sreevalli // Indian Journal of Science and Technology. – 2016. – Vol. 9 (24). – P. 1-6. – DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i24/93145.

59. Otter J. H. R. Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation / J. H. R. Otter // Nuclear Structural Engineering. – 1964. – Vol. 1. – P. 61–75.

60. Rushton K. R. Dynamic relaxation solution of elastic plate problems / K. R. Rushton // Journal of Strain Analysis. -1968. - Vol. 3, $N_{2} 1. - P. 23 - 32$.

61. Rushton K. R. Dynamic relaxation solution for the large deflection of plates with specified boundary stresses / K. R. Rushton // Journal of Strain Analysis. – 1968. – Vol. 4, N_{2} 2. – P. 75 – 80.

62. Lewis W. J. Dynamic relaxation analysis of the non-linear static response of pretensioned cable roofs / W. J. Lewis and M. S. Jones // Computer and Structures. – 1984. – Vol. 18, N_{2} 6. – P. 989 – 997.

63. Lewis W. J. The efficiency of numerical method for the analysis of prestressed nets and pin-jointed frame structures / W. J. Lewis // Computer and Structures. – 1989. – Vol. 33, N_{2} 3. – P. 791–800.

64. Brew J. S. Non-linear structural analysis by dynamic relaxation. / J. S. Brew and D. M. Brotton // International Journal of Numerical Methods in Engineering. – 1971. – Vol. 3. – P. 436 – 483.

65. Rezaiee-Pajand M. A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method / M. Rezaiee-Pajand, M. Kadkhodayan, J. Almatian, L. C. Zhang // Computers and Structures. - 2011. -Vol. 89. – P. 783–794.

66. Rezaiee-Pajand M. Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping / M. Rezaiee-Pajand, S. R. Sarafrazi // Computers and Structures. – 2011. – Vol. 89. – P. 1274–1285.

67. Nabaei S. S. Mechanical form-finding of the timber fabric structures with dynamic relaxation method / S. S. Nabaei, O. Baverel and Y. Weinand // International Journal of Space Structures. -2013. - Vol. 28, N_{2} 3 & 4. - P. 197–2014.

68. Gale S. Patterning of tensile fabric structures with a discrete element using dynamic relaxation / S. Gale, W. J. Lewis // Computers and Structures. – 2016. – Vol. 169. – P. 112–121.

69. Белов С. В. Расчет формообразующей структуры зонтичного сетчатого рефлектора / А. В. Бельков, С. В. Белов, А. П. Жуков, М. С. Павлов, С. В. Пономарев // Решетневские чтения: материалы XXI Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева. Красноярск, 08-11 ноября 2017 г. – Красноярск, 2017. – С. 82–83.

70. Белов С. В. Численное моделирование трансформируемых космических рефлекторных антенн / С. В. Белов, А. В. Бельков, А. С. Евдокимов, А. П Жуков, М. С. Павлов, С. В. Пономарев, В. С. Пономарев, В. А. Солоненко, А. А. Ящук // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2012. – № 9/3. – С. 13–18.

71. Величко А. И. Космический рефлектор с тензогридным ободом /
А. И. Величко, С. В. Белов, С. В. Пономарев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – № 7/3. – С. 143–145.

72. Белов С. В. Оценка напряженно-деформированного состояния силового каркаса крупногабаритного раскрываемого космического рефлектора / С. В. Белов, А. В. Бельков, А. П. Жуков, М. С. Павлов, В. С. Пономарев, С. В. Пономарев, А. И. Величко, В. И. Халиманович // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – № 7/3. – С. 131–133.

73. Бельков А. В. Поиск формы отражающей поверхности в задаче напряженно-деформированного состояния зонтичного космического рефлектора / А. В. Бельков, С. В. Белов, А. П. Жуков, М. С. Павлов, В. С. Пономарев, С. В. Пономарев // Фундаментальные и прикладные проблемы современной (ФППСМ-2016): сборник IX механики трудов Всероссийской научной конференции, посвященной 55-летию полета Ю.А. Гагарина. Томск, 21-25 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 267–269.

74. Меркулова Н. Н. Методы приближенных вычислений : учебное пособие / Н. Н. Меркулова, М. Д. Михайлов. // Томск: Томский государственный университет, 2005. – 257 с.

75. Tibert G. Numerical analyses of cable roof structures / G. Tibert. – Royal Institute of Technology, Stockholm, 1999. – 179 p.

76. Дащенко А. Ф. ANSYS в задачах инженерной механики : монография / А. Ф. Дащенко, Д. В. Лазарева, Н. Г. Сурьянинов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Харьков: «БУРУН и К», 2011. – 504 с.

77. Belov S. Calculation method for cable-beam shell structures [Electronic resource] / S. Belov, M. Pavlov, V. Ponomarev, S. Ponomarev and A. Zhukov // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1772 : Prospects of Fundamental Sciences Development (PFSD – 2016): Proceedings of the XIII International Conference of Students and Young Scientists. Tomsk, Russia, April 26–29, 2016. – Article number 060066. – 8 p. – DOI: 10.1063/1.4964586. –

URL:https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.4964586?class=pdf (access date:13.10.2016).

78. Белов С. В. Метод расчета нелинейных задач стержневых вантовооболочечных систем / С. В. Белов, А. П. Жуков, С. В. Пономарев // Перспективы развития фундаментальных наук: сборник научных трудов XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 2016. – Т. 3. – С. 15–17.

79. Ящук А. А. Моделирование, алгоритмы и комплекс программ прогнозирования термомеханического поведения крупногабаритного зонтичного рефлектора [Электронный ресурс] : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. А. Ящук. – Томск, – 2005. – 125 с. – Электрон. Версия печат. публ. – Доступ из "Электронная библиотека: Диссертации".

80. Eastwood I. Prospects of large deployable reflector antennas for a new generation of geostationary Doppler weather / I. Eastwood, M. Thomson, H. Fang // AIAA SPACE 2007 Conference & Exposition. Long Beach, California, 19-20 September 2007. Long Beach, California, 2007. – P. 1–11 – DOI:10.2514/6.2007-9917.

81. Thomson M. The AstroMesh deployable reflector / M Thomson // IEEE Antennas and Propogation Society International Symposium. Orlando, FL, USA, 11-16 July 1999.– Orlando, FL, USA, 2007. – P. 1–4 – DOI:10.1109/APS.1999.838231.

82. Пономарев В. С. Напряженно-деформированное состояние антенных рефлекторов космических аппаратов при нестационарных тепловых воздействиях [Электронный ресурс] : дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. С. Пономарев. – Томск. – 2015. – 139 с. – Электрон. Версия печат. публ. – Доступ из "Электронная библиотека: Диссертации".

83. Усманов Д. Б. Моделирование напряженно – деформированного состояния крупногабаритного трансформируемого рефлектора [Электронный ресурс] : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Д. Б. Усманов. – Томск. – 2006. – 179 с. – Электрон. Версия печат. публ. – Доступ из "Электронная библиотека: Диссертации".

84. Голдобин Н. Н. Аналитическая оценка начальных напряжений для повышения качества конечно-элементной модели космического сетчатого

рефлектора / Н. Н. Голдобин, Д. О. Шендалев // Решетневские чтения: материалы XVII Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. Красноярск, 11-14 ноября 2014 г. – Красноярск, 2014. – С. 71–73.

85. Belov S V Modelling large-sized mesh reflector with extended aperture [Electronic resource] / S V Belov, A V Belkov, A P Zhukov, S V Ponomarev, M S Pavlov // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1145: XV International Conference of Students and Young Scientists "Prospects of Fundamental Sciences Development". Tomsk, Russian Federation, April 24–27, 2018. – Article number 012006. – 7 p. – DOI:10.1088/1742-6596/1145/1/012006. – URL: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1145/1/012006/pdf (access date: 9.01.2019).

86. Белов С. В. Расчет начального приближения В геометрически нелинейной задаче сетчатого антенного рефлектора/ С. В. Белов, А. П. Жуков, С. В. Пономарев // Решетневские XX Юбилейной чтения: материалы посвященной международной научно-практической конференции, памяти генерального конструктора ракетно - космических систем академика М.Ф. Решетнева. Красноярск, 09-12 ноября 2016 г. – Красноярск, 2016. – С. 80–81.

87. Белов С. В. Оценка устойчивости крупногабаритного космического рефлектора/ С. В. Белов, М. С. Павлов, С. В. Пономарев // Перспективы развития фундаментальных наук: сборник научных трудов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 2017 г. – Т 3. – С. 20–22.

Приложение А Координаты узлов фронтальной сети зонтичного рефлектора,

рассчитанные нелинейным методом плотности сил

Таблица А.1 – Координаты узлов ФС зонтичного рефлектора, рассчитанных нелинейным МПС.

| | Коо | рдинаты | , M | | Координаты, м | | | | Координаты, м | | |
|----|-------|---------|------|----|---------------|-------|------|-----|---------------|------|------|
| № | X | У | Z | N⁰ | X | У | Z | N⁰ | X | У | Z |
| 1 | 0,75 | 0,00 | 0,17 | 40 | -1,50 | -2,52 | 0,35 | 79 | 4,69 | 2,61 | 0,94 |
| 2 | 1,51 | 0,00 | 0,24 | 41 | -1,89 | -3,19 | 0,51 | 80 | 4,26 | 3,32 | 0,99 |
| 3 | 2,29 | 0,00 | 0,33 | 42 | -2,29 | -3,88 | 0,73 | 81 | 3,88 | 4,06 | 1,10 |
| 4 | 3,09 | 0,00 | 0,44 | 43 | -2,72 | -4,64 | 1,03 | 82 | 3,54 | 4,83 | 1,27 |
| 5 | 3,92 | 0,00 | 0,58 | 44 | -3,22 | -5,54 | 1,47 | 83 | 7,29 | 0,41 | 1,35 |
| 6 | 4,80 | 0,00 | 0,75 | 45 | -3,47 | -5,99 | 1,74 | 84 | 6,62 | 1,16 | 1,21 |
| 7 | 5,75 | 0,00 | 0,96 | 46 | 0,37 | -0,63 | 0,16 | 85 | 6,04 | 1,85 | 1,13 |
| 8 | 6,85 | 0,00 | 1,23 | 47 | 0,75 | -1,26 | 0,23 | 86 | 5,51 | 2,56 | 1,11 |
| 9 | 7,37 | 0,00 | 1,37 | 48 | 1,14 | -1,90 | 0,33 | 87 | 5,04 | 3,31 | 1,14 |
| 10 | 0,37 | 0,63 | 0,16 | 49 | 1,53 | -2,56 | 0,46 | 88 | 4,62 | 4,08 | 1,24 |
| 11 | 0,75 | 1,26 | 0,23 | 50 | 1,94 | -3,24 | 0,64 | 89 | 4,25 | 4,89 | 1,40 |
| 12 | 1,14 | 1,90 | 0,33 | 51 | 2,35 | -3,95 | 0,86 | 90 | 3,87 | 5,80 | 1,65 |
| 13 | 1,53 | 2,56 | 0,46 | 52 | 2,80 | -4,73 | 1,13 | 91 | 7,44 | 0,34 | 1,39 |
| 14 | 1,94 | 3,24 | 0,64 | 53 | 3,29 | -5,63 | 1,51 | 92 | 3,87 | 5,96 | 1,71 |
| 15 | 2,35 | 3,95 | 0,86 | 54 | 3,53 | -6,07 | 1,71 | 93 | 0,00 | 1,26 | 0,18 |
| 16 | 2,80 | 4,73 | 1,13 | 55 | 1,13 | 0,63 | 0,22 | 94 | 0,38 | 1,89 | 0,27 |
| 17 | 3,29 | 5,63 | 1,51 | 56 | 1,90 | 0,64 | 0,29 | 95 | -0,37 | 1,89 | 0,24 |
| 18 | 3,53 | 6,07 | 1,71 | 57 | 1,52 | 1,27 | 0,29 | 96 | 0,77 | 2,54 | 0,40 |
| 19 | -0,37 | 0,63 | 0,13 | 58 | 2,69 | 0,64 | 0,40 | 97 | 0,01 | 2,53 | 0,35 |
| 20 | -0,75 | 1,25 | 0,16 | 59 | 2,30 | 1,28 | 0,38 | 98 | -0,75 | 2,52 | 0,34 |
| 21 | -1,12 | 1,88 | 0,23 | 60 | 1,91 | 1,92 | 0,41 | 99 | 1,16 | 3,21 | 0,56 |
| 22 | -1,50 | 2,52 | 0,35 | 61 | 3,50 | 0,65 | 0,52 | 100 | 0,39 | 3,18 | 0,50 |
| 23 | -1,89 | 3,19 | 0,51 | 62 | 3,09 | 1,29 | 0,50 | 101 | -0,37 | 3,17 | 0,48 |
| 24 | -2,29 | 3,88 | 0,73 | 63 | 2,69 | 1,94 | 0,51 | 102 | -1,13 | 3,17 | 0,48 |
| 25 | -2,72 | 4,64 | 1,03 | 64 | 2,31 | 2,59 | 0,55 | 103 | 1,57 | 3,90 | 0,76 |
| 26 | -3,22 | 5,54 | 1,47 | 65 | 4,35 | 0,65 | 0,68 | 104 | 0,79 | 3,86 | 0,69 |
| 27 | -3,47 | 5,99 | 1,74 | 66 | 3,91 | 1,30 | 0,63 | 105 | 0,02 | 3,84 | 0,65 |
| 28 | -0,75 | 0,00 | 0,10 | 67 | 3,49 | 1,95 | 0,63 | 106 | -0,75 | 3,83 | 0,64 |
| 29 | -1,50 | 0,00 | 0,11 | 68 | 3,09 | 2,61 | 0,66 | 107 | -1,52 | 3,85 | 0,67 |
| 30 | -2,26 | 0,00 | 0,14 | 69 | 2,71 | 3,28 | 0,74 | 108 | 2,01 | 4,63 | 1,01 |
| 31 | -3,03 | 0,00 | 0,20 | 70 | 5,24 | 0,63 | 0,86 | 109 | 1,21 | 4,56 | 0,92 |
| 32 | -3,82 | 0,00 | 0,31 | 71 | 4,76 | 1,29 | 0,80 | 110 | 0,42 | 4,51 | 0,87 |
| 33 | -4,67 | 0,00 | 0,46 | 72 | 4,31 | 1,95 | 0,78 | 111 | -0,37 | 4,50 | 0,85 |
| 34 | -5,60 | 0,00 | 0,69 | 73 | 3,89 | 2,62 | 0,80 | 112 | -1,16 | 4,51 | 0,86 |
| 35 | -6,72 | 0,00 | 1,06 | 74 | 3,49 | 3,31 | 0,86 | 113 | -1,94 | 4,56 | 0,92 |
| 36 | -7,28 | 0,00 | 1,29 | 75 | 3,13 | 4,01 | 0,97 | 114 | 2,50 | 5,42 | 1,33 |
| 37 | -0,37 | -0,63 | 0,13 | 76 | 6,22 | 0,59 | 1,09 | 115 | 1,66 | 5,29 | 1,21 |
| 38 | -0,75 | -1,25 | 0,16 | 77 | 5,66 | 1,25 | 0,99 | 116 | 0,84 | 5,20 | 1,12 |
| 39 | -1,12 | -1,88 | 0,23 | 78 | 5,15 | 1,92 | 0,94 | 117 | 0,03 | 5,17 | 1,09 |

Продолжение таблицы А. 1

| 118 | -0,78 | 5,18 | 1,09 | 166 | -7,20 | 0,41 | 1,27 | 214 | -0,37 | -3,17 | 0,48 |
|-----|-------|------|------|-----|-------|-------|------|-----|--------------|-------|------|
| 119 | -1,60 | 5,23 | 1,15 | 167 | -3,81 | 5,87 | 1,75 | 215 | 0,39 | -3,18 | 0,50 |
| 120 | -2,42 | 5,34 | 1,27 | 168 | -7,35 | 0,34 | 1,33 | 216 | 1,16 | -3,21 | 0,56 |
| 121 | 3,13 | 6,21 | 1,71 | 169 | -1,13 | -0,63 | 0,12 | 217 | -1,52 | -3,85 | 0,67 |
| 122 | 2,18 | 6,04 | 1,54 | 170 | -1,88 | -0,62 | 0,14 | 218 | -0,75 | -3,83 | 0,64 |
| 123 | 1,32 | 5,91 | 1,43 | 171 | -1,50 | -1,25 | 0,17 | 219 | 0,02 | -3,84 | 0,65 |
| 124 | 0,46 | 5,84 | 1,36 | 172 | -2,64 | -0,62 | 0,18 | 220 | 0,79 | -3,86 | 0,69 |
| 125 | -0,39 | 5,83 | 1,35 | 173 | -2,26 | -1,25 | 0,20 | 221 | 1,57 | -3,90 | 0,76 |
| 126 | -1,25 | 5,88 | 1,41 | 174 | -1,88 | -1,88 | 0,26 | 222 | -1,94 | -4,56 | 0,92 |
| 127 | -2,11 | 5,98 | 1,53 | 175 | -3,42 | -0,63 | 0,26 | 223 | -1,16 | -4,51 | 0,86 |
| 128 | -3,06 | 6,13 | 1,74 | 176 | -3,02 | -1,25 | 0,27 | 224 | -0,37 | -4,50 | 0,85 |
| 129 | 3,26 | 6,30 | 1,77 | 177 | -2,64 | -1,89 | 0,31 | 225 | 0,42 | -4,51 | 0,87 |
| 130 | -3,19 | 6,22 | 1,80 | 178 | -2,26 | -2,53 | 0,39 | 226 | 1,21 | -4,56 | 0,92 |
| 131 | -1,13 | 0,63 | 0,12 | 179 | -4,23 | -0,62 | 0,39 | 227 | 2,01 | -4,63 | 1,01 |
| 132 | -1,50 | 1,25 | 0,17 | 180 | -3,81 | -1,25 | 0,37 | 228 | -2,42 | -5,34 | 1,27 |
| 133 | -1,88 | 0,62 | 0,14 | 181 | -3,41 | -1,89 | 0,39 | 229 | -1,60 | -5,23 | 1,15 |
| 134 | -1,88 | 1,88 | 0,26 | 182 | -3,02 | -2,54 | 0,46 | 230 | -0,78 | -5,18 | 1,09 |
| 135 | -2,26 | 1,25 | 0,20 | 183 | -2,64 | -3,21 | 0,57 | 231 | 0,03 | -5,17 | 1,09 |
| 136 | -2,64 | 0,62 | 0,18 | 184 | -5,11 | -0,61 | 0,58 | 232 | 0,84 | -5,20 | 1,12 |
| 137 | -2,26 | 2,53 | 0,39 | 185 | -4,64 | -1,25 | 0,52 | 233 | 1,66 | -5,29 | 1,21 |
| 138 | -2,64 | 1,89 | 0,31 | 186 | -4,20 | -1,89 | 0,52 | 234 | 2,50 | -5,42 | 1,33 |
| 139 | -3,02 | 1,25 | 0,27 | 187 | -3,79 | -2,55 | 0,57 | 235 | -3,06 | -6,13 | 1,74 |
| 140 | -3,42 | 0,63 | 0,26 | 188 | -3,41 | -3,23 | 0,67 | 236 | -2,11 | -5,98 | 1,53 |
| 141 | -2,64 | 3,21 | 0,57 | 189 | -3,04 | -3,93 | 0,82 | 237 | -1,25 | -5,88 | 1,41 |
| 142 | -3,02 | 2,54 | 0,46 | 190 | -6,09 | -0,58 | 0,85 | 238 | -0,39 | -5,83 | 1,35 |
| 143 | -3,41 | 1,89 | 0,39 | 191 | -5,54 | -1,22 | 0,74 | 239 | 0,46 | -5,84 | 1,36 |
| 144 | -3,81 | 1,25 | 0,37 | 192 | -5,04 | -1,87 | 0,70 | 240 | 1,32 | -5,91 | 1,43 |
| 145 | -4,23 | 0,62 | 0,39 | 193 | -4,59 | -2,55 | 0,72 | 241 | 2,18 | -6,04 | 1,54 |
| 146 | -3,04 | 3,93 | 0,82 | 194 | -4,17 | -3,25 | 0,81 | 242 | 3,13 | -6,21 | 1,71 |
| 147 | -3,41 | 3,23 | 0,67 | 195 | -3,80 | -3,97 | 0,95 | 243 | -3,19 | -6,22 | 1,80 |
| 148 | -3,79 | 2,55 | 0,57 | 196 | -3,46 | -4,74 | 1,17 | 244 | 3,26 | -6,30 | 1,77 |
| 149 | -4,20 | 1,89 | 0,52 | 197 | -7,20 | -0,41 | 1,27 | 245 | 1,13 | -0,63 | 0,22 |
| 150 | -4,64 | 1,25 | 0,52 | 198 | -6,53 | -1,14 | 1,05 | 246 | 1,52 | -1,27 | 0,29 |
| 151 | -5,11 | 0,61 | 0,58 | 199 | -5,96 | -1,82 | 0,95 | 247 | 1,90 | -0,64 | 0,29 |
| 152 | -3,46 | 4,74 | 1,17 | 200 | -5,44 | -2,52 | 0,93 | 248 | 1,91 | -1,92 | 0,41 |
| 153 | -3,80 | 3,97 | 0,95 | 201 | -4,97 | -3,25 | 0,99 | 249 | 2,30 | -1,28 | 0,38 |
| 154 | -4,1/ | 3,25 | 0,81 | 202 | -4,55 | -4,01 | 1,13 | 250 | 2,69 | -0,64 | 0,40 |
| 155 | -4,59 | 2,55 | 0,72 | 203 | -4,18 | -4,81 | 1,34 | 251 | 2,31 | -2,59 | 0,55 |
| 156 | -5,04 | 1,87 | 0,70 | 204 | -3,81 | -5,/1 | 1,67 | 252 | 2,69 | -1,94 | 0,51 |
| 157 | -5,54 | 1,22 | 0,74 | 205 | -7,35 | -0,34 | 1,33 | 253 | 3,09 | -1,29 | 0,50 |
| 158 | -0,09 | 0,58 | 0,85 | 206 | -3,81 | -5,8/ | 1,/3 | 254 | 3,30 | -0,65 | 0,52 |
| 159 | -5,81 | 5,/1 | 1,6/ | 207 | 0,00 | -1,20 | 0,18 | 255 | 2,/1 | -5,28 | 0,74 |
| 160 | -4,18 | 4,81 | 1,34 | 208 | -0,37 | -1,89 | 0,24 | 256 | 3,09 | -2,61 | 0,66 |
| 161 | -4,55 | 4,01 | 1,13 | 209 | 0,38 | -1,89 | 0,27 | 257 | <i>5</i> ,49 | -1,95 | 0,63 |
| 162 | -4,9/ | 3,23 | 0,99 | 210 | -0,/5 | -2,52 | 0,34 | 258 | 5,91 | -1,30 | 0,03 |
| 103 | -3,44 | 2,52 | 0,93 | 211 | 0,01 | -2,53 | 0,35 | 239 | 4,35 | -0,05 | 0,08 |
| 104 | -3,90 | 1,82 | 0,93 | 212 | 0,// | -2,54 | 0,40 | 200 | 3,13 | -4,01 | 0,97 |
| 105 | -0,33 | 1,14 | 1,05 | 215 | -1,15 | -3,17 | 0,48 | 201 | 3,49 | -3,31 | 0,80 |

Продолжение таблицы А.1

| 262 | 3,89 | -2,62 | 0,80 | 310 | -5,64 | -2,63 | 1,01 | | |
|-----|-------|-------|------|-----|-------|-------|------|--|--|
| 263 | 4,31 | -1,95 | 0,78 | 311 | -5,16 | -3,37 | 1,07 | | |
| 264 | 4,76 | -1,29 | 0,80 | 312 | -4,74 | -4,14 | 1,22 | | |
| 265 | 5,24 | -0,63 | 0,86 | 313 | -4,37 | -4,94 | 1,45 | | |
| 266 | 3,54 | -4,83 | 1,27 | 314 | -4,06 | -5,79 | 1,76 | | |
| 267 | 3,88 | -4,06 | 1,10 | 315 | -3,00 | -6,39 | 1,86 | | |
| 268 | 4,26 | -3,32 | 0,99 | 316 | -2,13 | -6,21 | 1,64 | | |
| 269 | 4,69 | -2,61 | 0,94 | 317 | -1,26 | -6,10 | 1,51 | | |
| 270 | 5,15 | -1,92 | 0,94 | 318 | -0,40 | -6,05 | 1,45 | | |
| 271 | 5,66 | -1,25 | 0,99 | 319 | 0,46 | -6,06 | 1,46 | | |
| 272 | 6,22 | -0,59 | 1,09 | 320 | 1,33 | -6,13 | 1,52 | | |
| 273 | 3,87 | -5,80 | 1,65 | 321 | 2,19 | -6,27 | 1,64 | | |
| 274 | 4,25 | -4,89 | 1,40 | 322 | 3,06 | -6,47 | 1,81 | | |
| 275 | 4,62 | -4,08 | 1,24 | 323 | 4,12 | -5,88 | 1,72 | | |
| 276 | 5,04 | -3,31 | 1,14 | 324 | 4,44 | -5,02 | 1,48 | | |
| 277 | 5,51 | -2,56 | 1,11 | 325 | 4,81 | -4,20 | 1,31 | | |
| 278 | 6,04 | -1,85 | 1,13 | 326 | 5,23 | -3,42 | 1,21 | | |
| 279 | 6,62 | -1,16 | 1,21 | 327 | 5,71 | -2,67 | 1,17 | | |
| 280 | 7,29 | -0,41 | 1,35 | 328 | 6,24 | -1,95 | 1,19 | | |
| 281 | 3,87 | -5,96 | 1,71 | 329 | 6,84 | -1,26 | 1,28 | | |
| 282 | 7,44 | -0,34 | 1,39 | 330 | 7,49 | -0,59 | 1,41 | | |
| 283 | 7,49 | 0,59 | 1,41 | 331 | 0,27 | 0,00 | 0,14 | | |
| 284 | 6,84 | 1,26 | 1,28 | 332 | 0,13 | 0,23 | 0,13 | | |
| 285 | 6,24 | 1,95 | 1,19 | 333 | -0,13 | 0,23 | 0,12 | | |
| 286 | 5,71 | 2,67 | 1,17 | 334 | -0,27 | 0,00 | 0,12 | | |
| 287 | 5,23 | 3,42 | 1,21 | 335 | -0,13 | -0,23 | 0,12 | | |
| 288 | 4,81 | 4,20 | 1,31 | 336 | 0,13 | -0,23 | 0,13 | | |
| 289 | 4,44 | 5,02 | 1,48 | 337 | 8,21 | 0,00 | 1,61 | | |
| 290 | 4,12 | 5,88 | 1,72 | 338 | 3,90 | 6,76 | 2,05 | | |
| 291 | 3,06 | 6,47 | 1,81 | 339 | -3,84 | 6,65 | 2,18 | | |
| 292 | 2,19 | 6,27 | 1,64 | 340 | -8,12 | 0,00 | 1,71 | | |
| 293 | 1,33 | 6,13 | 1,52 | 341 | -3,84 | -6,65 | 2,18 | | |
| 294 | 0,46 | 6,06 | 1,46 | 342 | 3,90 | -6,76 | 2,05 | | |
| 295 | -0,40 | 6,05 | 1,45 | | | | | | |
| 296 | -1,26 | 6,10 | 1,51 | | | | | | |
| 297 | -2,13 | 6,21 | 1,64 | | | | | | |
| 298 | -3,00 | 6,39 | 1,86 | | | | | | |
| 299 | -4,06 | 5,79 | 1,76 | | | | | | |
| 300 | -4,37 | 4,94 | 1,45 | | | | | | |
| 301 | -4,74 | 4,14 | 1,22 | | | | | | |
| 302 | -5,16 | 3,37 | 1,07 | | | | | | |
| 303 | -5,64 | 2,63 | 1,01 | | | | | | |
| 304 | -6,17 | 1,92 | 1,03 | | | | | | |
| 305 | -6,75 | 1,24 | 1,15 | | | | | | |
| 306 | -7,40 | 0,58 | 1,37 | | | | | | |
| 307 | -7,40 | -0,58 | 1,37 | | | | | | |
| 308 | -6,75 | -1,24 | 1,15 | | | | | | |
| 309 | -6,17 | -1,92 | 1,03 | | | | | | |

Приложение Б Координаты узлов фронтальной сети ободного рефлектора,

рассчитанные нелинейным методом плотности сил

Таблица Б.1 – Координаты узлов ФС ободного рефлектора, рассчитанных нелинейным МПС.

| | Координаты, м | | | | Кос | рдинать | I, М | | Коо | Координаты, м | | |
|----|---------------|-------|------|----|-------|---------|------|-----|-------|---------------|------|--|
| № | Х | У | Z | N⁰ | Х | У | Z | N⁰ | X | У | Z | |
| 1 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | 40 | 1,91 | 1,09 | 0,16 | 79 | -2,53 | -1,08 | 0,14 | |
| 2 | 0,63 | 0,00 | 0,03 | 41 | 1,59 | 1,64 | 0,17 | 80 | -2,21 | -1,63 | 0,15 | |
| 3 | 0,31 | 0,54 | 0,02 | 42 | 1,27 | 2,19 | 0,20 | 81 | -1,90 | -2,18 | 0,19 | |
| 4 | -0,32 | 0,54 | 0,01 | 43 | 0,63 | 2,19 | 0,16 | 82 | -1,59 | -2,74 | 0,25 | |
| 5 | -0,64 | 0,00 | 0,00 | 44 | 0,00 | 2,18 | 0,14 | 83 | -0,96 | -2,74 | 0,22 | |
| 6 | -0,32 | -0,54 | 0,01 | 45 | -0,64 | 2,18 | 0,14 | 84 | -0,32 | -2,74 | 0,21 | |
| 7 | 0,31 | -0,54 | 0,02 | 46 | -1,27 | 2,18 | 0,15 | 85 | 0,32 | -2,74 | 0,23 | |
| 8 | 1,26 | 0,00 | 0,07 | 47 | -1,58 | 1,63 | 0,11 | 86 | 0,96 | -2,75 | 0,26 | |
| 9 | 0,94 | 0,54 | 0,05 | 48 | -1,89 | 1,08 | 0,09 | 87 | 1,60 | -2,76 | 0,31 | |
| 10 | 0,63 | 1,09 | 0,06 | 49 | -2,21 | 0,54 | 0,08 | 88 | 1,92 | -2,20 | 0,26 | |
| 11 | 0,00 | 1,08 | 0,04 | 50 | -2,52 | 0,00 | 0,11 | 89 | 2,23 | -1,65 | 0,24 | |
| 12 | -0,64 | 1,08 | 0,03 | 51 | -2,21 | -0,54 | 0,08 | 90 | 2,55 | -1,10 | 0,24 | |
| 13 | -0,95 | 0,54 | 0,01 | 52 | -1,89 | -1,08 | 0,09 | 91 | 2,87 | -0,55 | 0,26 | |
| 14 | -1,26 | 0,00 | 0,02 | 53 | -1,58 | -1,63 | 0,11 | 92 | 3,85 | 0,00 | 0,41 | |
| 15 | -0,95 | -0,54 | 0,01 | 54 | -1,27 | -2,18 | 0,15 | 93 | 3,53 | 0,55 | 0,36 | |
| 16 | -0,64 | -1,08 | 0,03 | 55 | -0,64 | -2,18 | 0,14 | 94 | 3,20 | 1,10 | 0,33 | |
| 17 | 0,00 | -1,08 | 0,04 | 56 | 0,00 | -2,18 | 0,14 | 95 | 2,89 | 1,65 | 0,32 | |
| 18 | 0,63 | -1,09 | 0,06 | 57 | 0,63 | -2,19 | 0,16 | 96 | 2,57 | 2,21 | 0,34 | |
| 19 | 0,94 | -0,54 | 0,05 | 58 | 1,27 | -2,19 | 0,20 | 97 | 2,25 | 2,77 | 0,37 | |
| 20 | 1,90 | 0,00 | 0,13 | 59 | 1,59 | -1,64 | 0,17 | 98 | 1,93 | 3,33 | 0,43 | |
| 21 | 1,58 | 0,54 | 0,10 | 60 | 1,91 | -1,09 | 0,16 | 99 | 1,29 | 3,32 | 0,37 | |
| 22 | 1,27 | 1,09 | 0,10 | 61 | 2,23 | -0,55 | 0,17 | 100 | 0,64 | 3,32 | 0,34 | |
| 23 | 0,95 | 1,63 | 0,12 | 62 | 3,20 | 0,00 | 0,30 | 101 | 0,00 | 3,31 | 0,32 | |
| 24 | 0,31 | 1,63 | 0,09 | 63 | 2,87 | 0,55 | 0,26 | 102 | -0,64 | 3,31 | 0,32 | |
| 25 | -0,32 | 1,63 | 0,08 | 64 | 2,55 | 1,10 | 0,24 | 103 | -1,28 | 3,31 | 0,33 | |
| 26 | -0,95 | 1,63 | 0,08 | 65 | 2,23 | 1,65 | 0,24 | 104 | -1,92 | 3,31 | 0,38 | |
| 27 | -1,26 | 1,08 | 0,05 | 66 | 1,92 | 2,20 | 0,26 | 105 | -2,23 | 2,74 | 0,30 | |
| 28 | -1,58 | 0,54 | 0,04 | 67 | 1,60 | 2,76 | 0,31 | 106 | -2,54 | 2,18 | 0,25 | |
| 29 | -1,89 | 0,00 | 0,05 | 68 | 0,96 | 2,75 | 0,26 | 107 | -2,85 | 1,63 | 0,22 | |
| 30 | -1,58 | -0,54 | 0,04 | 69 | 0,32 | 2,74 | 0,23 | 108 | -3,16 | 1,08 | 0,22 | |
| 31 | -1,26 | -1,08 | 0,05 | 70 | -0,32 | 2,74 | 0,21 | 109 | -3,48 | 0,54 | 0,24 | |
| 32 | -0,95 | -1,63 | 0,08 | 71 | -0,96 | 2,74 | 0,22 | 110 | -3,79 | 0,00 | 0,29 | |
| 33 | -0,32 | -1,63 | 0,08 | 72 | -1,59 | 2,74 | 0,25 | 111 | -3,48 | -0,54 | 0,24 | |
| 34 | 0,31 | -1,63 | 0,09 | 73 | -1,90 | 2,18 | 0,19 | 112 | -3,16 | -1,08 | 0,22 | |
| 35 | 0,95 | -1,63 | 0,12 | 74 | -2,21 | 1,63 | 0,15 | 113 | -2,85 | -1,63 | 0,22 | |
| 36 | 1,27 | -1,09 | 0,10 | 75 | -2,53 | 1,08 | 0,14 | 114 | -2,54 | -2,18 | 0,25 | |
| 37 | 1,58 | -0,54 | 0,10 | 76 | -2,84 | 0,54 | 0,15 | 115 | -2,23 | -2,74 | 0,30 | |
| 38 | 2,55 | 0,00 | 0,20 | 77 | -3,16 | 0,00 | 0,18 | 116 | -1,92 | -3,31 | 0,38 | |
| 39 | 2,23 | 0,55 | 0,17 | 78 | -2,84 | -0,54 | 0,15 | 117 | -1,28 | -3,31 | 0,33 | |

Продолжение таблицы Б. 1

| 118 | -0,64 | -3,31 | 0,32 | 166 | 3,23 | -2,22 | 0,43 | 214 | 3,90 | -2,25 | 0,55 |
|-----|-------|-------|------|-----|-------|-------|------|-----|-------|-------|------|
| 119 | 0,00 | -3,31 | 0,32 | 167 | 3,55 | -1,67 | 0,43 | 215 | 4,22 | -1,68 | 0,55 |
| 120 | 0,64 | -3,32 | 0,34 | 168 | 3,86 | -1,11 | 0,44 | 216 | 4,52 | -1,12 | 0,57 |
| 121 | 1,29 | -3,32 | 0,37 | 169 | 4,18 | -0,55 | 0,47 | 217 | 4,82 | -0,56 | 0,61 |
| 122 | 1,93 | -3,33 | 0,43 | 170 | 5,11 | 0,00 | 0,66 | 218 | 5,65 | 0,00 | 0,79 |
| 123 | 2,25 | -2,77 | 0,37 | 171 | 4,82 | 0,56 | 0,61 | 219 | 5,41 | 0,57 | 0,74 |
| 124 | 2,57 | -2,21 | 0,34 | 172 | 4,52 | 1,12 | 0,57 | 220 | 5,16 | 1,14 | 0,71 |
| 125 | 2,89 | -1,65 | 0,32 | 173 | 4,22 | 1,68 | 0,55 | 221 | 4,89 | 1,72 | 0,69 |
| 126 | 3,20 | -1,10 | 0,33 | 174 | 3,90 | 2,25 | 0,55 | 222 | 4,61 | 2,29 | 0,69 |
| 127 | 3,53 | -0,55 | 0,36 | 175 | 3,58 | 2,80 | 0,57 | 223 | 4,30 | 2,85 | 0,70 |
| 128 | 4,49 | 0,00 | 0,53 | 176 | 3,26 | 3,36 | 0,60 | 224 | 3,97 | 3,39 | 0,73 |
| 129 | 4,18 | 0,55 | 0,47 | 177 | 2,92 | 3,91 | 0,66 | 225 | 3,62 | 3,93 | 0,77 |
| 130 | 3,86 | 1,11 | 0,44 | 178 | 2,58 | 4,46 | 0,74 | 226 | 3,25 | 4,44 | 0,83 |
| 131 | 3,55 | 1,67 | 0,43 | 179 | 1,94 | 4,49 | 0,68 | 227 | 2,86 | 4,95 | 0,90 |
| 132 | 3,23 | 2,22 | 0,43 | 180 | 1,29 | 4,51 | 0,63 | 228 | 2,23 | 5,05 | 0,85 |
| 133 | 2,91 | 2,78 | 0,46 | 181 | 0,65 | 4,52 | 0,60 | 229 | 1,60 | 5,13 | 0,82 |
| 134 | 2,59 | 3,34 | 0,51 | 182 | 0,00 | 4,53 | 0,59 | 230 | 0,96 | 5,18 | 0,79 |
| 135 | 2,26 | 3,91 | 0,58 | 183 | -0,64 | 4,52 | 0,59 | 231 | 0,32 | 5,21 | 0,78 |
| 136 | 1,62 | 3,91 | 0,52 | 184 | -1,28 | 4,50 | 0,61 | 232 | -0,32 | 5,21 | 0,77 |
| 137 | 0,97 | 3,91 | 0,47 | 185 | -1,92 | 4,47 | 0,64 | 233 | -0,96 | 5,17 | 0,78 |
| 138 | 0,32 | 3,91 | 0,44 | 186 | -2,56 | 4,44 | 0,70 | 234 | -1,59 | 5,12 | 0,80 |
| 139 | -0,32 | 3,90 | 0,43 | 187 | -2,89 | 3,88 | 0,60 | 235 | -2,22 | 5,04 | 0,83 |
| 140 | -0,96 | 3,89 | 0,44 | 188 | -3,21 | 3,33 | 0,53 | 236 | -2,85 | 4,94 | 0,88 |
| 141 | -1,60 | 3,89 | 0,48 | 189 | -3,53 | 2,77 | 0,48 | 237 | -3,22 | 4,42 | 0,79 |
| 142 | -2,24 | 3,88 | 0,53 | 190 | -3,84 | 2,21 | 0,44 | 238 | -3,57 | 3,90 | 0,71 |
| 143 | -2,56 | 3,31 | 0,44 | 191 | -4,15 | 1,65 | 0,44 | 239 | -3,91 | 3,36 | 0,66 |
| 144 | -2,87 | 2,75 | 0,37 | 192 | -4,44 | 1,09 | 0,45 | 240 | -4,23 | 2,81 | 0,61 |
| 145 | -3,18 | 2,19 | 0,33 | 193 | -4,74 | 0,54 | 0,49 | 241 | -4,53 | 2,24 | 0,59 |
| 146 | -3,49 | 1,64 | 0,32 | 194 | -5,03 | 0,00 | 0,55 | 242 | -4,81 | 1,68 | 0,59 |
| 147 | -3,80 | 1,08 | 0,32 | 195 | -4,74 | -0,54 | 0,49 | 243 | -5,08 | 1,11 | 0,60 |
| 148 | -4,11 | 0,54 | 0,35 | 196 | -4,44 | -1,09 | 0,45 | 244 | -5,33 | 0,54 | 0,64 |
| 149 | -4,42 | 0,00 | 0,41 | 197 | -4,15 | -1,65 | 0,44 | 245 | -5,59 | 0,00 | 0,71 |
| 150 | -4,11 | -0,54 | 0,35 | 198 | -3,84 | -2,21 | 0,44 | 246 | -5,33 | -0,54 | 0,64 |
| 151 | -3,80 | -1,08 | 0,32 | 199 | -3,53 | -2,77 | 0,48 | 247 | -5,08 | -1,11 | 0,60 |
| 152 | -3,49 | -1,64 | 0,32 | 200 | -3,21 | -3,33 | 0,53 | 248 | -4,81 | -1,68 | 0,59 |
| 153 | -3,18 | -2,19 | 0,33 | 201 | -2,89 | -3,88 | 0,60 | 249 | -4,53 | -2,24 | 0,59 |
| 154 | -2,87 | -2,75 | 0,37 | 202 | -2,56 | -4,44 | 0,70 | 250 | -4,23 | -2,81 | 0,61 |
| 155 | -2,56 | -3,31 | 0,44 | 203 | -1,92 | -4,47 | 0,64 | 251 | -3,91 | -3,36 | 0,66 |
| 156 | -2,24 | -3,88 | 0,53 | 204 | -1,28 | -4,50 | 0,61 | 252 | -3,57 | -3,90 | 0,71 |
| 157 | -1,60 | -3,89 | 0,48 | 205 | -0,64 | -4,52 | 0,59 | 253 | -3,22 | -4,42 | 0,79 |
| 158 | -0,96 | -3,89 | 0,44 | 206 | 0,00 | -4,53 | 0,59 | 254 | -2,85 | -4,94 | 0,88 |
| 159 | -0,32 | -3,90 | 0,43 | 207 | 0,65 | -4,52 | 0,60 | 255 | -2,22 | -5,04 | 0,83 |
| 160 | 0,32 | -3,91 | 0,44 | 208 | 1,29 | -4,51 | 0,63 | 256 | -1,59 | -5,12 | 0,80 |
| 161 | 0,97 | -3,91 | 0,47 | 209 | 1,94 | -4,49 | 0,68 | 257 | -0,96 | -5,17 | 0,78 |
| 162 | 1,62 | -3,91 | 0,52 | 210 | 2,58 | -4,46 | 0,74 | 258 | -0,32 | -5,21 | 0,77 |
| 163 | 2,26 | -3,91 | 0,58 | 211 | 2,92 | -3,91 | 0,66 | 259 | 0,32 | -5,21 | 0,78 |
| 164 | 2,59 | -3,34 | 0,51 | 212 | 3,26 | -3,36 | 0,60 | 260 | 0,96 | -5,18 | 0,79 |
| 165 | 2,91 | -2,78 | 0,46 | 213 | 3,58 | -2,80 | 0,57 | 261 | 1,60 | -5,13 | 0,82 |

Продолжение таблицы Б.1

| 262 | 2,23 | -5,05 | 0,85 | 310 | -4,01 | -4,46 | 0,98 | | |
|-----|-------|-------|------|-----|-------|-------|------|--|--|
| 263 | 2,86 | -4,95 | 0,90 | 311 | -3,53 | -4,85 | 0,98 | | |
| 264 | 3,25 | -4,44 | 0,83 | 312 | -3,00 | -5,20 | 0,98 | | |
| 265 | 3,62 | -3,93 | 0,77 | 313 | -2,44 | -5,48 | 0,98 | | |
| 266 | 3,97 | -3,39 | 0,73 | 314 | -1,85 | -5,71 | 0,98 | | |
| 267 | 4,30 | -2,85 | 0,70 | 315 | -1,25 | -5,87 | 0,98 | | |
| 268 | 4,61 | -2,29 | 0,69 | 316 | -0,63 | -5,97 | 0,98 | | |
| 269 | 4,89 | -1,72 | 0,69 | 317 | 0,00 | -6,00 | 0,98 | | |
| 270 | 5,16 | -1,14 | 0,71 | 318 | 0,63 | -5,97 | 0,98 | | |
| 271 | 5,41 | -0,57 | 0,74 | 319 | 1,25 | -5,87 | 0,98 | | |
| 272 | 6,00 | 0,00 | 0,98 | 320 | 1,85 | -5,71 | 0,98 | | |
| 273 | 5,97 | 0,63 | 0,98 | 321 | 2,44 | -5,48 | 0,98 | | |
| 274 | 5,87 | 1,25 | 0,98 | 322 | 3,00 | -5,20 | 0,98 | | |
| 275 | 5,71 | 1,85 | 0,98 | 323 | 3,53 | -4,85 | 0,98 | | |
| 276 | 5,48 | 2,44 | 0,98 | 324 | 4,01 | -4,46 | 0,98 | | |
| 277 | 5,20 | 3,00 | 0,98 | 325 | 4,46 | -4,01 | 0,98 | | |
| 278 | 4,85 | 3,53 | 0,98 | 326 | 4,85 | -3,53 | 0,98 | | |
| 279 | 4,46 | 4,01 | 0,98 | 327 | 5,20 | -3,00 | 0,98 | | |
| 280 | 4,01 | 4,46 | 0,98 | 328 | 5,48 | -2,44 | 0,98 | | |
| 281 | 3,53 | 4,85 | 0,98 | 329 | 5,71 | -1,85 | 0,98 | | |
| 282 | 3,00 | 5,20 | 0,98 | 330 | 5,87 | -1,25 | 0,98 | | |
| 283 | 2,44 | 5,48 | 0,98 | 331 | 5,97 | -0,63 | 0,98 | | |
| 284 | 1,85 | 5,71 | 0,98 | | | | | | |
| 285 | 1,25 | 5,87 | 0,98 | | | | | | |
| 286 | 0,63 | 5,97 | 0,98 | | | | | | |
| 287 | 0,00 | 6,00 | 0,98 | | | | | | |
| 288 | -0,63 | 5,97 | 0,98 | | | | | | |
| 289 | -1,25 | 5,87 | 0,98 | | | | | | |
| 290 | -1,85 | 5,71 | 0,98 | | | | | | |
| 291 | -2,44 | 5,48 | 0,98 | | | | | | |
| 292 | -3,00 | 5,20 | 0,98 | | | | | | |
| 293 | -3,53 | 4,85 | 0,98 | | | | | | |
| 294 | -4,01 | 4,46 | 0,98 | | | | | | |
| 295 | -4,46 | 4,01 | 0,98 | | | | | | |
| 296 | -4,85 | 3,53 | 0,98 | | | | | | |
| 297 | -5,20 | 3,00 | 0,98 | | | | | | |
| 298 | -5,48 | 2,44 | 0,98 | | | | | | |
| 299 | -5,71 | 1,85 | 0,98 | | | | | | |
| 300 | -5,87 | 1,25 | 0,98 | | | | | | |
| 301 | -5,97 | 0,63 | 0,98 | | | | | | |
| 302 | -6,00 | 0,00 | 0,98 | | | | | | |
| 303 | -5,97 | -0,63 | 0,98 | | | | | | |
| 304 | -5,87 | -1,25 | 0,98 | | | | | | |
| 305 | -5,71 | -1,85 | 0,98 | | | | | | |
| 306 | -5,48 | -2,44 | 0,98 | | | | | | |
| 307 | -5,20 | -3,00 | 0,98 | | | | | | |
| 308 | -4,85 | -3,53 | 0,98 | | | | | | |
| 309 | -4,46 | -4,01 | 0,98 | | | | | | |