ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Лукьяновой Натальи Александровны
«Разработка метода и алгоритмов рекуррентного построения распределений вероятностей конечных случайных множеств»,
представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Актуальность избранной темы.

Диссертационная работа Н.А. Лукьяновой в полном соответствии с её названием посвящена разработке метода и алгоритмов рекуррентного построения распределений вероятностей конечных случайных множеств. Многие практические задачи могут быть смоделированы и исследованы с помощью конечных случайных множеств, что, показывает **актуальность** исследования.

Содержание работы.

Во **введении** содержатся все необходимые атрибуты диссертации: обоснование актуальности темы, обзор предшествующих исследований в выбранном направлении, отражена новизна исследования, соответствие паспорту специальности 05.13.18, теоретическая и практическая значимость результатов и рекомендации по использованию.

В **первой** главе в §1.1 приведены основные определения и утверждения, касающиеся конечных случайных множеств , но содержится много путаницы в определениях и обозначениях, связанных с понятием конечного случайного множества. Данный факт отражен в замечаниях к работе.

В §1.2 доказаны теоремы о достаточных условиях, при выполнении которых функция множества определяет распределение вероятностей конечного случайного множества II-го и V-го рода. Найденные условия используются в качестве теоретической базы при доказательстве теорем главы 2.

В §1.3 получены модификации границ Фреше для вероятностей пересечений и объединений событий. Уточненные границы Фреше применены в алгоритме 1 главы 3.

Вторая глава посвящена рекуррентному методу построения распределений конечных случайных множеств с помощью аппарата ассоциативных функций.

В §2.1 приводится мотивация использования ассоциативных функций для моделирования распределений конечных случайных множеств, в частности возможность применения рекуррентных процедур при их построении. Приводится определение ассоциативных функций и рассматриваются их основные свойства, а также связь этого понятия с другими понятиями, используемыми в современной математике неопределённости, таких как t-норма, копула.

Предложенный в §2.2 рекуррентный метод построения распределений конечного случайного множества с помощью ассоциативных функций хотя и обеспечивает основные свойства вероятностей, не всегда позволяет получать их распределения. Поэтому в §2.3 исследуются области применимости метода для построения распределений конечных случайных множеств II рода с помощью ассоциативных функций. Рассмотрено 4 семейства двух-параметрических и одно трёх-параметрическое семейство ассоциативных функций для построения распределений вероятностей случайного множества на основе распределений II-рода. В §2.4 этот метод распространяется на случай построения распределений конечных случайных множеств V-рода. Здесь исследованы три семейства двух- параметрических ассоциативных функций.

Содержание и результаты этих параграфов являются основным достижением автора в этой главе. Получены достаточные условия того, что заданные рекуррентными соотношениями с помощью различных семейств ассоциативных функций функции множеств являются распределениями вероятностей II-го рода (Теоремы 2.1 — 2.5, 2.7). Здесь же исследованы свойства распределений, полученных с помощью соответствующих семейств ассоциативных функций, такие как независимость признаков конечного случайного множества для ассоциативной функции $\mathrm{AF}(a, b) = a \times b$, структура вложенных событий для ассоциативной функции $\mathrm{AF}(a, b) = \min a, b$ и др.

Третья глава диссертации содержит реализацию (в виде алгоритмов и комплекса программ) разработанных во второй главе рекуррентных методов построения распределений конечных случайных множеств и пример их применения при построении модели исследования лекарственной устойчивости у больных туберкулёзом. Особого внимания здесь, конечно, заслуживает §3.3, содержащий численную аппроксимацию эмпирических данных по 8 признакам с помощью различных семейств ассоциативных функций и их сравнение.

В **заключении** сформулированы основные теоретические и практические результаты исследования.

Научная новизна и практическая значимость результатов работы. Результаты, представленные во второй и третьей главах содержат достаточно профессиональную математическую и программистскую работу соискателя, содержащую как новые научные результаты в виде:

- метода построения распределений конечных случайных множеств с помощью ассоциативных функций,

- доказательства достаточных условий существования распределений конечных случайных множеств построенных с помощью ассоциативных функций,

- так и программные средства их реализации и

- серьёзные практические приложения.

Результаты диссертации были представлены на многочисленных Российских и международных конференциях и опубликованы в 20 научных работах, 5 из которых в журналах, включённых в перечень ВАК.

Замечания по работе.

1. Глава 1 содержит много путаницы в определениях и обозначениях, связанных с понятием конечного случайного множества. Согласно автору глава посвящена (цитата, стр. 17) «конечным случайным множествам, носителями которых выступают множества случайных событий.» Ясно, что это — чистая тавтология с сомнительным понятием «носителя множества случай ных событий». Далее делается попытка уточнения этого понятия. «Конечные случайные множества с таким носителем можно рассматривать в качестве математической модели сложных объектов и систем, когда число описываемых их признаков конечно и появление любого из этих признаков представляется как случайное событие.» Хотя эта фраза содержит стилистическую ошибку, из неё можно извлечь намёк к пониманию рассматриваемого объекта. Действительно, из дальнейших примеров и рассуждений можно понять, что в диссертации рассматриваются конечные случайные множества, обладающие конечным набором **бинарных** признаков, который (набор бинарных признаков события) почему-то именуется «носителем» случайного множества. Вообще говоря в математике под носителем, например, меры понимается множество, на котором мера задана, так носителем лебеговой меры на прямой является прямая, на плоскости — плоскость, носителем дискретного распределения является множество точек скачков соответствующей функции распределения, то есть множество значений случайной величины, задаваемой этим распределением. В математической литературе не встречалось понятия носителя функции (известно понятие областей её определения и значений), тем более понятия носителей случайных величин

или процессов. По логике понимания математической науки под носителем случайного явления следовало бы понимать пространство элементарных событий, на котором это явление задано.

2. Далее на стр. 19 приводится традиционное определение случайного множества, как отображения основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ на систему подмножеств 2^M некоторого конечного множества M, которое затем уточняется следующим образом.

   «В диссертации исследуются специфические случайные множества, носителем которых выступают конечные множества случайных событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$, выбранных из алгебры $\mathcal{F}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $|\mathfrak{X}| < \infty$. Случайный элемент, значения которого являются подмножествами конечного множества $\mathfrak{X}$, т.е. элементами $2^{\mathfrak{X}}$, будем называть конечным случайным множеством, заданным на множестве случайных событий $\mathfrak{X}$.»

   В этом предложении много путаницы: во-первых, как следует из предыдущего общего определения, $\mathfrak{X}$ — принадлежит множеству значений случайного множества, а $\mathcal{F}$ — это алгебра событий основного вероятностного пространства, то есть система множеств из области определения случайного множества. Во-вторых, значениями случайного множества являются не подмножества множества $\mathfrak{X}$, а подмножества множества $2^{\mathfrak{X}}$, или элементы множества $2^{2^{\mathfrak{X}}}$ в чём автор фактически признаётся в следующем далее определении 1.2.

   Определение 1.2. Случайное множество K, на конечном множестве случайных событий $\mathfrak{X} \subset \mathcal{F}$, определяется как отображение $K : \Omega \to 2^{\mathfrak{X}}$, измеримое относительно пары алгебр $\left(\mathcal{F}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$ в том смысле, что для всякого $X \in 2^{2^{\mathfrak{X}}}$ справедливо $K^{-1}(X) \in \mathcal{F}$.

   Видимо отсюда начинается путаница понятий, так как $\mathcal{F}$ алгебра событий в области определения случайного множества, а $\mathfrak{X}$ — некоторое конечное множество, система подмножеств которого является множеством значений случайного множества. Эта путаница понятий продолжается и далее.

3. Наконец, попытаемся разобраться в формуле

$$\{\omega : K(\omega) = X,\ X \subset \mathfrak{X}\} = \left(\bigcap_{x \in X} x\right) \bigcap \left(\bigcap_{x \in X^c} x^c\right) \subset \Omega,$$

   приведённой в конце стр. 19 с помощью примера триплета $\mathfrak{X} = \{x, y, z\}$, на который автор ссылается на стр. 23 и демонстрирует в приложении 1. В этом случае указанное выражение, например, для $X = x$ принимает вид

$$\{\omega : K(\omega) = X,\ X \subset \mathfrak{X}\} = x \cap y^c \cap z^c.$$

Левая часть этого выражения по определению есть подмножество Ω, а почему правая принадлежит Ω не ясно. Более того, если левую и правую части этой формулы рассматривать в пространстве значений случайного множества, она содержит явное противоречие: $x = x \cap y^c \cap z^c$.

В тории вероятностей известно несколько парадоксов, когда различная трактовка эксперимента сводилась по существу к различному описанию пространства элементарных событий и различным результатам при вычислении соответствующих вероятностей. А ошибка в определении элементарных событий в задаче одновременного бросания трёх игральных костей стоила шевалье де Мере (видимо, не малого) состояния.

Нечто подобное можно отметить в рецензируемой диссертации: множество (конечное) элементарных событий не фиксировано, а подменяется фактически некоторым набором наблюдаемых событий, причём постоянно путаются события из основного вероятностного пространства и наблюдаемые события конечного случайного множества. Заметим, что в модели с конечным числом случайных исходов (будь то числа, события или абстрактные множества) вообще можно было бы не прибегать к использованию исходного основного вероятностного пространства, достаточно было бы ограничиться **каноническим** вероятностным пространством рассматриваемого эксперимента. В диссертации почему-то этого не сделано, что и привело к многочисленным неточностям и ошибкам. Детальный анализ всех противоречий в понимании конечного случайного множества и приводимых обозначений потребовал бы написания отдельного труда. Естественно, что подобная неразбериха в обозначениях и понятиях распространяется и на последующие главы диссертации. Удивительно, что при этом в дальнейшем автору удаётся получать содержательные результаты. Догадываюсь, что это происходит благодаря тому, что в приводимых в диссертации формулах используется не то, что в них написано, а то что подразумевается автором.

Однако ситуацию можно немного поправить, если предложить несколько другую трактовку рассматриваемого в диссертации явления. В различных областях человеческой деятельности часто приходится сталкиваться с наблюдениями явлений, характеризующихся конечным числом **бинарных** признаков. Именно исследованию и построению распределений таких случайных явлений и посвящена диссертационная работа. Замечу, кстати, что при такой трактовке понятия конечного случайного множества можно изучать множества, характеризующиеся конечным набором не обязательно бинарных признаков. Если наблюдаемое явление характеризуется N признаками, то множество элементарных исходов (канонического пространства элементарных событий бинарными случайного явления $\Omega = \{\omega_i,\ i = \overline{1, 2^N}\}$ состоит из 2^N событий, и проблема построения распределения конечного случайного множества состоит в задании 2^N неотрицательных чисел. Однако выбор или статистический анализ явления с целью построения распределения — это отдельная задача. В классической теории вероятностей или случайных процессов эта задача решается путём моделирования распределений. В теории вероятностей известно большое количество параметрических семейств распределений, обладающих теми или иными свойствами, позволяющими использовать эти распределения в различных приложениях. Подобная же картина имеет место в теории случайных процессов, где благодаря известной теореме Колмогорова распределение случайного процесса задаётся семейством его конечномерных распределений.

Поэтому, естественно возникает задача построения и исследования свойств распределений конечных случайных множеств. На этом пути возникает два вопроса: каков вообще объём необходимой информации для построения распределения, и каким образом моделировать соответствующие распределения. Ответ на первый вопрос достаточно прост. Для задания распределения на конечном множестве из 2^N элементарных событий $\Omega = \{\omega_i,\ i = \overline{1, 2^N}\}$ достаточно задать 2^N неотрицательных чисел $p(\omega_i)$ в сумме равных единице. Однако на практике это не всегда удобно или возможно, так как события с набором всех (присутствующих или отсутствующих) признаков могут наблюдаться редко или не наблюдаться вовсе. Поэтому возникает вопрос можно ли задавать распределение каким-либо другим способом, используя, например, знание вероятностей на какой-либо другой подходящей достаточной подсистеме событий. Ответ на этот вопрос подсказывает упомянутая уже теорема Колмогорова о конечномерных распределениях для случайных процессов. Конечномерные распределения случайного процесса — это семейство распределений на цилиндрических множествах функционального пространства. Цилиндрическими множествами X_j, $j = \overline{1, 2^N}$ для конечного случайного множества являются события, в которых присутствуют (или отсутствуют) различные наборы исходного набора признаков. На этом пути строятся распределения II-го и V-го родов. Именно, выбирая те или иные наборы цилиндрических множеств можно задавать распределения на всём множестве значений случайного события. Так как в системе событий с N признаками возможных наборов цилиндрических множеств столько же сколько элементарных событий, 2^N, то система однородных уравнений

$$P(X_j) = \sum_{\omega_i \in X_j} p(\omega_i), \quad j = \overline{1, 2^N}$$

с дополнительным условием нормировки

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1$$

допускает однозначное решение, которое, по-видимому, и называется в диссертации формулами обращения Мёбиуса.

Для решения второго вопроса — моделирования распределений конечных случайных множеств используется аппарат ассоциативных функций, и решению этого вопроса посвящены две последующие главы диссертации.

4. Хотелось бы сделать ещё одно замечание относительно использования результатов диссертации. В диссертации отмечается, что результаты диссертации используются в учебном процессе Сибирского федерального университета и Красноярского государственного медицинского университета им. проф. В.Ф. Войно-Ясенского для подготовки специалистов различных профилей. Считаю, что Учёному Совету **не следует** рекомендовать использование материалов диссертации в учебном процессе в том виде, как они в ней представлены. Материалы диссертации могут быть рекомендованы для использования в учебном процессе только после тщательного редактирования системы основных понятий и обозначений, используемых в диссертации, в противном случае Россия рискует воспитать свою Красноярскую школу математиков, говорящую на специфическом математическом языке, не понятным нигде в мире.

Общее заключение.

В целом по диссертации Лукьяновой Натальи Александровны можно сделать следующий вывод. Если не принимать во внимание путаницы в основных понятиях и обозначениях, содержащихся в первой главе диссертации, то по результатам второй и третьей глав диссертации работу можно признать научно-квалификационной работой, достаточной для присуждения диссертанту Лукьяновой Н.А. степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Работа соответствует критериям установленным «Положением о присуждении ученых степеней», и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент
Профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина», доктор физико-математических наук (специальность 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика), профессор

В. Рыков

Рыков Владимир Васильевич
E-mail: *vladimir_rykov@mail.ru*

27 марта 2017 г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина»

http:// www.gubkin.ru
Тел: +7(499)507-88-88
E-mail: *com@gubkin.ru*

Адрес: 119991,
Россия, г. Москва,
Ленинский пр-т, 65

Подпись профессора Рыкова Владимира Васильевича заверяю.
Начальник отдела кадров РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М.Губкина
Савельева О.В.