

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Медных Илья Александрович

**ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ**

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Асеев

Новосибирск – 2014

Оглавление

Введение	4
1 Предварительные сведения	18
1.1 Римановы поверхности и автоморфизмы	18
1.2 Общие свойства голоморфных отображений	24
2 Решение проблемы де Франкиса для поверхностей минимальных родов	32
2.1 Классификация голоморфных отображений с точностью до эквивалентности	32
2.1.1 Классы эквивалентности голоморфных отображений	34
2.1.2 Основные результаты о числе классов эквивалентности	46
2.2 Классификация голоморфных отображений S_3 на S_2	49
2.2.1 Инварианты групп автоморфизмов и голоморфных отображений	50
2.2.2 Полная классификация голоморфных отображений	58
2.2.3 Верхняя оценка на число голоморфных отображений	76

3	Нерегулярные голоморфные отображения поверхностей рода четыре	79
3.1	Регулярные и нерегулярные голоморфные отображения . . .	80
3.2	Классификация нерегулярных голоморфных отображений .	82
4	Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы	91
4.1	Графы и гармонические отображения	92
4.2	Накрытия и поднятия гомеоморфизмов	95
4.3	Элементы топологической теории графов	97
4.4	Теорема Фаркаша для графов	103
4.5	Теорема Акколы для графов	107

Введение

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Теория римановых поверхностей возникла на основе классических работ Римана и Гурвица в конце 19 — начале 20 веков. Первоначальное определение римановой поверхности давалось в терминах разветвленных накрытий над расширенной комплексной плоскостью (сферой Римана). Позже понятие разветвленного накрытия естественным образом переросло в понятие голоморфного отображения одномерного комплексного многообразия (римановой поверхности). При этом выяснилось, что образом такого отображения может быть не только сфера, но также любая другая риманова поверхность. Частным случаем голоморфного отображения является конформный автоморфизм римановой поверхности. Со времен Гурвица [24] известно, что порядок группы конформных автоморфизмов римановой поверхности рода $g > 1$ не превосходит величины $84(g - 1)$. Группы, для которых достигается верхняя оценка, называются группами Гурвица. Они являются предметом изучения различных

разделов математики, таких как комплексный анализ, топологическая теория поверхностей, теория групп и теория чисел. В настоящее время существует более тысячи работ, написанных на эту тему.

Существенным обстоятельством, позволяющим добиться успехов в теории автоморфизмов, является классическая теорема Керекьярто. Она утверждает, что всякая конечная группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов топологической поверхности может быть представлена как группа конформных автоморфизмов после введения на поверхности подходящей комплексной структуры. Указанные результаты означают, что для исследования групп автоморфизмов можно использовать как топологический, так и мощный аналитический аппарат теории функций, включающий в себя как частный случай теорию фуксовых и клейновых групп.

Совсем другая ситуация возникает, когда требуется изучать голоморфные отображения одной римановой поверхности на другую. Если S_g и $S_{g'}$ римановы поверхности родов g и g' , соответственно, и $g > g' > 1$, то доказанная в 1913 году теорема де Франкиса утверждает, что множество $Hol(S_g, S_{g'})$ всех голоморфных отображений конечно и его порядок зависит только от g и g' . Точная оценка на величину $|Hol(S_g, S_{g'})|$ неизвестна до сих пор. Важно отметить, что топологическая версия теоремы де Франкиса в настоящее время также не установлена. Частные результаты связанные с теоремой де Франкиса можно найти в работах ([3], [16], [17], [18], [23], [27], [46]).

В последнее десятилетие появилось множество работ различных авторов ([4], [5], [7], [10], [40]), посвященных дискретным версиям теории

римановых поверхностей. Роль римановых поверхностей в этих теориях играют конечные графы, а в качестве голоморфных отображений выступают гармонические отображения. Для них построена теория якобиевых многообразий (дискретными аналогами которых являются конечные абелевы группы) и доказаны аналоги теоремы Римана-Роха. Многие теоремы классической теории римановых поверхностей также получили свое воплощение в дискретном случае. Этот подход нашел эффективные применения к теории кодирования, стохастической теории и финансовой математике. Библиографию по этому вопросу можно найти в [5].

В теории римановых поверхностей хорошо известен факт, что всякая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической, то есть представляет собой двулистное разветвленное накрытие сферы. Дискретный аналог этой теоремы, установленный в [5] утверждает, что всякий граф рода 2 представляет собой двулистное разветвленное накрытие дерева. Известные теоремы Акколы [2] и Фаркаша [13] утверждают, что двулистное неразветвленное накрытие над римановой поверхностью рода 2 всегда гиперэллиплично. Кроме того, Акколой [2] показано, что трехлистное неразветвленное накрытие над римановой поверхностью рода 2 — гиперэллиплично, если оно нерегулярно и является двулистным разветвленным накрытием тора в регулярном случае.

Цель работы.

Получить точные оценки в теореме де Франкиса для числа голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два.

Получить структурные теоремы, описывающие голоморфные отображения римановых поверхностей рода три и четыре на риманову поверхность рода два.

Установить дискретные версии теорем Акколы и Фаркаша о гиперэллиптичности накрытий над римановыми поверхностями.

Методы исследований.

Для получения основных результатов использованы методы классического комплексного анализа, топологической теории графов, а также современные методы геометрической теории орбифолдов.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Получена точная верхняя оценка на число голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Это решает проблему де Франкиса для поверхностей минимально возможного рода.

2) Получены структурные теоремы, описывающие голоморфные отображения римановых поверхностей рода три и четыре на риманову поверхность рода два.

3) Установлена дискретная версия теоремы Фаркаша, утверждающая, что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим.

4) Показано, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два также является гиперэллиптическим графом, в то время как его регу-

лярное трехлистное накрытие двулистно накрывает граф рода один. Это является дискретным аналогом теоремы Акколы.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в области геометрической теории функций, комплексного анализа, геометрии и теории графов.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на следующих российских и международных конференциях.

2008 год:

1. XLVI Международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс”, НГУ, Новосибирск, 2008 г.

2009 год:

1. Девятая международная Казанская летняя научная школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”, 1 – 7 июля 2009 г., Казань.

2. XLVII Международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс”, НГУ, Новосибирск, 2009 г.

2010 год:

1. International conference “Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010”, 08 – 12 March 2010, Hiroshima, Japan.

2. Международная школа-конференция “Геометрия и анализ на многообразиях”, 21 – 27 июня 2010 г., Новосибирск.

3. Школа конференция по геометрическому анализу, 2 – 8 августа 2010 г., с. Артыбаш, Горно-Алтайск.

2011 год:

1. Международная школа-конференция по геометрии и анализу, 19 – 26 июня 2011, Кемерово, КемГУ.

2. Десятая Казанская летняя школа-конференция “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы – 2011”, 30 июня – 7 июля 2011, Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

3. Школа конференция по геометрическому анализу, 13 – 19 августа 2011 г., с. Артыбаш, Горно-Алтайск.

2012 год:

1. International conference “Workshop on low dimensional conformal structures and their groups”, 26 – 29 June, 2012, Gdansk, Poland.

Кроме того, результаты диссертации обсуждались на следующих семинарах ведущих научно-исследовательских институтов и университетов: на семинаре отдела геометрии и анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством академика Ю. Г. Решетняка, на семинаре “Инварианты трехмерных многообразий” ИМ СО РАН под руководством чл.-корр. РАН А. Ю. Веснина и на семинаре “Графы и римановы поверхности” под руководством профессора Р. Недели, University Matej Bel, Banská Bystrica, Словакия.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [51] – [65].

Работы [51] – [55] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного содержания и списка литературы из 50 использованных источников. Общий объем диссертации — 122 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются основные результаты диссертации и дается краткий обзор исследований по теме диссертации.

Первая глава содержит предварительные сведения из теории римановых поверхностей, их автоморфизмов и голоморфных отображений.

Вторая глава посвящена решению проблемы де Франкиса для римановых поверхностей минимально возможного рода. Она состоит из двух параграфов.

В первом параграфе дается классификация голоморфных отображений римановой поверхности S_3 рода три на риманову поверхность S_2 рода два с точностью до эквивалентности. Обозначим через $Hol(S_3, S_2)$ множество голоморфных отображений S_3 на S_2 . Отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$ и $h : S_3 \rightarrow S_2$ называются эквивалентными, если существуют автоморфизмы $\alpha \in Aut S_3$ и $\beta \in Aut S_2$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ h$. В теореме 1 устанавливается, что для заданных поверхностей S_3 и S_2 множество $Hol(S_3, S_2)$

состоит не более чем из двух классов эквивалентности. Полностью описаны случаи, когда $Hol(S_3, S_2)$ — пусто, состоит из одного или двух классов эквивалентности. Как следствие, установлен следующий результат.

Теорема 2. Пусть S_3 и S_2 — римановы поверхности родов три и два, соответственно. Тогда число классов эквивалентности голоморфных отображений S_3 на S_2 не превосходит двух. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ и $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{a-2}{a+2})(v^2 - \frac{b-2}{b+2})$, где неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с какой-либо из следующих пар $\{-6, -2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, 2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i\sqrt{3}, -4 \pm 2i\sqrt{3}\}$. При этом, неэквивалентные отображения имеют вид $(u, v) = f(w, z)$ и $(u, v) = g(w, z)$, где $f(w, z) = (\frac{8}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1})$, $g(w, z) = (\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$ и $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$.

Пусть S_g — заданная риманова поверхность рода g . Обозначим через $I_{g'}(S_g)$ множество всех классов эквивалентности голоморфных отображений вида $f : S_g \rightarrow S_{g'}$, где $S_{g'}$ пробегает все возможные римановы поверхности рода g' и $g \geq g' > 1$. В работе Е. Кани [28] показано, что $|I_{g'}(S_g)| \leq 2^{2g^2-1}(2^{2g^2-1} - 1)$. Имеет место следующая теорема

Теорема 3. Число элементов множества $I_2(S_3)$ не превосходит 3. Данная оценка точная и достигается для римановой поверхности $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$, где $a \neq b$, $a, b \neq 0, \pm 2$ и $(a+2)(b+2) \neq 16$. При этом, за исключением конечного числа наборов $\{a, b\}$, поверхность S_3 имеет три попарно не изоморфных образа $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$, где f и g те же, что и в предыдущей теореме, а голоморфное отображение h имеет вид $h(w, z) = (\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}(z - \frac{1}{z}))$.

Следующий пример иллюстрирует, что случай $|I_2(S_3)| = 2$ также реализуется. Рассмотрим риманову поверхность $S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$ и заданные на ней голоморфные отображения $h_1(w, z) = (\frac{2i}{(z^2+1)^3}w, \frac{z^2-1}{z^2+1})$ и $h_2(w, z) = (\frac{\sqrt{i}(z^2-i)}{8z^3}w, \frac{1}{2}(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}))$. Тогда римановы поверхности $h_1(S_3)$ и $h_2(S_3)$ представляются уравнениями $h_1(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1)$ и $h_2(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75)$, соответственно. По классификации Больца они неизоморфны.

Целью второго параграфа главы 2 является конструктивное описание голоморфных отображений $Hol(S_3, S_2)$. Как следствие, будет получена точная верхняя оценка на число голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Будет установлено, что число указанных отображений не превосходит 48. Показано, что полученная оценка точная, и приведены пары поверхностей, для которых она достигается. Это полностью решает проблему де Франкиса для поверхностей минимальных родов. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. *Число элементов множества $Hol(S_3, S_2)$ не превосходит 48. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей $S_3 : w^2 = z^8 - 1$ и $S_2 : u^2 = v(v^4 - 1)$. При этом, произвольное голоморфное отображение S_3 на S_2 представимо в виде суперпозиции $\alpha \circ f \circ \beta$, где $f : (w, z) \rightarrow (u, v) = (zw, z^2)$, а α и β – подходящие автоморфизмы римановых поверхностей S_2 и S_3 , соответственно.*

Теорема 5. *Пусть S_3 и S_2 – произвольные римановы поверхности родов 3 и 2, соответственно. Предположим, что $|Hol(S_3, S_2)| = 48$. Тогда*

S_2 — кривая Больца $u^2 = v(v^4 - 1)$, а S_3 задается одним из следующих уравнений

$$(i) \ y^2 = x^8 - 1,$$

$$(ii) \ y^2 = x^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^6 + 5x^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2 + 1.$$

В случае (i) мы имеем $|Aut(S_3)| = 32$.

В случае (ii) справедливо равенство $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Основная цель **третьей главы** — получить структурные теоремы для голоморфных отображений римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два.

Пусть $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ — произвольное отображение римановых поверхностей. Группой преобразований наложения отображения f называется следующая группа гомеоморфизмов поверхности S_g :

$$Cov_f(S_g, S_{g'}) = \{h \in Homeo(S_g) : f \circ h = f\}.$$

Отметим, что если отображение f голоморфно и сюръективно, то $Cov_f(S_g, S_{g'})$ всегда состоит из конформных автоморфизмов римановой поверхности S_g .

Голоморфное отображение $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ поверхности S_g на $S_{g'}$ называется регулярным, если группа $\mathcal{G} = Cov_f(S_g, S_{g'})$ действует транзитивно на каждом слое отображения f . В этом случае, поверхность $S_{g'}$ конформно эквивалентна фактор-поверхности S_g/\mathcal{G} . В противном случае, отображение f называется нерегулярным.

Из формулы Римана-Гурвица следует, что всякое голоморфное отображение $f : S_4 \rightarrow S_2$ римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два имеет кратность два или три. Отсюда, группа $Cov_f(S_4, S_2)$ либо тривиальна, либо циклическая порядка два или три.

В первом случае отображение f нерегулярно, а в остальных случаях — регулярно.

Регулярный случай сводится к изучению действия циклической группы порядка два или три на поверхности S_4 . Все такие действия классифицированы в работе Такао Като [29]. Эти результаты позволяют получить полное описание регулярных голоморфных отображений S_4 на S_2 .

Нерегулярный случай представляется наиболее интересным и неизученным ранее.

Основной результат главы составляет следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $f : S_4 \rightarrow S_2$ — нерегулярное голоморфное отображение S_4 на S_2 . Тогда для подходящего набора комплексных параметров a, b, q , $a \neq b$, $q \neq 0, \pm 1, \infty$ поверхности S_4 и S_2 представимы уравнениями

$$S_4 : w^2 = (z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^3 - bqz^2 - qz + b)(z^4 + cz^2 + 1),$$

$$S_2 : y^2 = (x - a)(x - b)(x^4 + dx^2 + 1),$$

а отображение f имеет вид $(x, y) = f(z, w)$, где

$$x = z \frac{z^2 - q}{qz^2 - 1}, \quad y = w \frac{qz^4 + (q^2 - 3)z^2 + q}{(qz^2 - 1)^3 q}.$$

При этом, величины c и d выражаются через q по следующим формулам:

$$c = \frac{-3 - 6q^2 + q^4}{4q}, \quad d = \frac{-27 + 18q^2 + q^4}{4q^3}.$$

В случае, когда один из параметров a или b обращается в ∞ , без ограничения общности можно считать, что $b = \infty$. При этом уравнения поверхностей редуцируются к более простому виду

$$S_4 : w^2 = (z^2 - q^{-1})(z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^4 + cz^2 + 1) \text{ и } S_2 : y^2 = (x - a)(x^4 + dx^2 + 1).$$

Полученные результаты предполагается использовать в дальнейшем для получения точной верхней оценки на число элементов множества $Hol(S_4, S_2)$, которая в настоящее время неизвестна.

Четвертая глава посвящена изучению дискретных аналогов гиперэллиптических римановых поверхностей.

В последнее десятилетие появилось множество работ различных авторов ([4], [7], [10], [5]), посвященных дискретным версиям теории римановых поверхностей. Роль римановых поверхностей в этих теориях играют конечные графы, а в качестве голоморфных отображений выступают гармонические отображения. Для них построена теория якобиевых многообразий, получена формула Римана-Гурвица и доказаны аналоги теоремы Римана-Роха. Многие другие теоремы классической теории римановых поверхностей также получили свое воплощение в дискретном случае. Дискретная теория нашла эффективные применения в теории кодирования, стохастической теории и финансовой математике. Библиографию по этому вопросу можно найти в [5].

Основным объектом изучения данной главы являются графы и их накрытия. *Графом* называется связный конечный мультиграф без петель. В дальнейшем будем считать, что граф не содержит ребер, удаление которых разбивает его на две связных компоненты, то есть является 2 реберно-связным. Родом графа будем называть ранг его фундаментальной группы. Граф называется *гиперэллиптическим*, если он является двулистным разветвленным накрытием дерева. Это эквивалентно тому, что на графе существует инволюция τ такая, что фактор-граф G/τ является деревом. Указанная инволюция называется *гиперэллиптической инволюцией* графа G . Известно, что если гиперэллиптическая инволюция существует, то она — единственна. Это утверждение справедливо для 2 реберно-связных графов, род которых больше 1. Отметим, что граф рода два всегда гиперэллиптический [5]. Это хорошо согласуется с известным фактом, что любая поверхность рода два гиперэллипична.

Теорема Фаркаша [13] утверждает, что двулистное неразветвленное накрытие поверхности рода два также является гиперэллиптической поверхностью. Этот результат был известен, по-видимому, еще Енрике [12]. Позже, теорема Фаркаша была передоказана в работах Акколы [1] и Идальго [22]. В работе Акколы [2] показано, что нерегулярное трехлистное накрытие римановой поверхности рода два является гиперэллиптической поверхностью, в то время как ее регулярное трехлистное накрытие двулистно и разветвленно накрывает тор.

Основная цель четвертой главы — установить дискретные версии теорем Фаркаша и Акколы для графов. Установлено, что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим.

Далее, будет показано, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим графом, в то время как его регулярное трехлистное накрытие двулистно и разветвленно покрывает граф рода один.

Более точно, доказаны следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть \tilde{G} — двулистное неразветвленное накрытие графа G рода два. Тогда \tilde{G} — гиперэллиптический граф.

Теорема 8. Пусть \tilde{G} — трехлистное неразветвленное накрытие графа G рода два. Тогда, если накрытие нерегулярно, то \tilde{G} — гиперэллиптический граф. Если указанное накрытие регулярно, то \tilde{G} двулистно и разветвлено покрывает граф рода один.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Римановы поверхности и автоморфизмы

Римановой поверхностью называется одномерное связное комплексное многообразие.

В данной работе будут рассматриваться компактные римановы поверхности без края.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между объектами категории римановых поверхностей и категории алгебраических кривых. При этом, классу конформно эквивалентных поверхностей соответствует класс бирациональных эквивалентных кривых, а голоморфным отображениям — рациональные. В настоящей работе мы будем широко использовать указанные взаимно-однозначные соответствия. В

частности, основной результат работы — полная классификация голоморфных отображений поверхности S_3 рода 3 на поверхность S_2 рода 2 — будет дан в терминах алгебраических кривых и рациональных отображений.

В дальнейшем, следуя книге [15], мы будем отождествлять классы конформно эквивалентных римановых поверхностей с классами бирационально эквивалентных кривых. В этом случае, мы будем говорить, что риманова поверхность определяется (или задается) соответствующим алгебраическим уравнением, полагая, что указанное алгебраическое уравнение задает поле мероморфных функций на данной римановой поверхности. При этом, ([15], стр. 5), две римановы поверхности S и S' конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда между полями $\mathcal{M}(S)$ и $\mathcal{M}(S')$ определенных на них мероморфных функций существует изоморфизм, сохраняющий константы.

Пусть риманова поверхность S определяется уравнением $P(w, z) = 0$, где P — неприводимый над \mathbb{C} полином от двух переменных. Тогда S может быть рассмотрена как риманова поверхность алгебраической функции $w = w(z)$. В этом случае величины w и z удобно трактовать как определенные на S мероморфные функции, которые связаны соотношением $P(w, z) = 0$ и порождают поле всех мероморфных функций $\mathcal{M}(S)$. Это означает, что любая мероморфная функция $\varphi \in \mathcal{M}(S)$ представима в виде $\varphi = R(w, z)$, где R — подходящая рациональная функция от двух переменных.

Если римановы поверхности S и S' определяются неприводимыми алгебраическими уравнениями $P(w, z) = 0$ и $P'(u, v) = 0$, соответственно,

а $f : S \rightarrow S'$ — суръективное голоморфное отображение, то индуцированное им соответствие $\varphi \in \mathcal{M}(S') \rightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{M}(S)$ задает вложение полей $\mathcal{M}(S') \rightarrow \mathcal{M}(S)$. При этом, в силу предыдущего, $u \circ f = R_1(w, z)$ и $v \circ f = R_2(w, z)$ являются рациональными функциями от w и z . Отождествляя φ и $\varphi \circ f$, рассмотрим $\mathcal{M}(S')$ как подполе поля $\mathcal{M}(S)$.

Определенное всюду, за исключением конечного числа точек, рациональное отображение $F : (w, z) \rightarrow (u, v) = (R_1(w, z), R_2(w, z))$ переводит кривую $P(w, z) = 0$ в кривую $P'(u, v) = 0$.

Пользуясь теоремой Римана об устранении особенностей, нетрудно убедиться, что верно и обратное. Каждое рациональное отображение F указанного вида однозначно определяет суръективное голоморфное отображение $f : S \rightarrow S'$.

Гиперэллиптическая поверхность — это поверхность, допускающая двулистное накрытие над сферой Римана. Каждая гиперэллиптическая поверхность рода g представляется уравнением $w^2 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{2g+2})$, где $z_1, z_2 \dots z_{2g+2}$ — различные комплексные числа. При этом, действие гиперэллиптической инволюции на поверхности осуществляется по правилу $\tau : (w, z) \rightarrow (-w, z)$. Известно, что любая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической. Теорема Акколы [2] утверждает, что риманова поверхность рода 3, двулистно накрывающая поверхность рода 2, также будет гиперэллиптической римановой поверхностью.

Двумерным орбиолдом O будем называть риманову поверхность S с выделенным на нем дискретным подмножеством точек Σ , каждой из которых приписано некоторое натуральное число ≥ 2 . Σ называется син-

гулярным множеством или множеством особых точек орбифолда O , а поверхность S — его носителем. В настоящей работе в качестве S всюду будет использована замкнутая риманова поверхность рода 0, то есть риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, а в качестве $\Sigma = \{z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}\}$ — подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из четного числа точек, каждой из которой приписано число 2. Понятие орбифолда (или римановой поверхности с сигнатурой) возникло в классических работах Кёбе по теории униформизации ([30], [31]). В дальнейшем, оно было развито И. Сатаки [41] и получило свое идейное завершение в монографии У. Терстона [47]. Основные факты из теории орбифолдов изложены в работах ([50], § 2) и ([47], глава 13).

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g , и τ — гиперэллиптическая инволюция. Мы будем рассматривать факторпространство $O_g = S_g / \langle \tau \rangle$ как двумерный орбифолд, носителем которого является сфера Римана, а особыми точками — проекции $2g + 2$ точек Вейерштрасса при каноническом отображении $S_g \rightarrow O_g = S_g / \langle \tau \rangle$.

Автоморфизмом поверхности будем называть конформное отображение поверхности на себя. Группы автоморфизмов $Aut(S_2)$ хорошо известны и описаны в работе Больца [8]. В работе [33] приведен полный список групп конформных автоморфизмов $Aut(S_3)$ и дана полная классификация соответствующих им римановых поверхностей, задаваемых явными уравнениями. Для удобства читателя, мы приведем указанные результаты в таблицах 1 и 2.

Отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$ и $g : S_3 \rightarrow S_2$ называются эквивалентными, если существуют автоморфизмы $\alpha \in Aut(S_3)$ и $\beta \in Aut(S_2)$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$.

В нашей работе эта классификация будет использована для описания элементов множества $Hol(S_3, S_2)$. При этом, будут получены явные выражения для представителей всех классов эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$.

$Aut(S_2)$	$Aut(O_2)$	Сигнатура орбифолда $S_2/Aut(S_2)$	Уравнение поверхности S_2 $y^2 =$
48	\mathbb{S}_4	(2,3,8)	$x(x^4 - 1)$
24	\mathbb{D}_6	(2,4,6)	$x^6 - 1$
\mathbb{Z}_{10}	\mathbb{Z}_5	(2,5,10)	$x^5 - 1$
\mathbb{D}_6	\mathbb{D}_3	(2 ³ 3)	$(x^3 - a^3)(x^3 - a^{-3})$
\mathbb{D}_4	\mathbb{D}_2	(2 ³ 4)	$x(x^2 - a^2)(x^2 - a^{-2})$
\mathbb{D}_2	\mathbb{Z}_2	(2 ⁵)	$(x^2 - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$
\mathbb{Z}_2	1	(2 ⁶)	$x(x - 1)(x^3 + ax^2 + bx + c)$

Таблица 1. Автоморфизмы римановой поверхности рода 2

$Aut(S_3)$	$Aut(O_3)$	Сигнатура орбифолда $S_3/Aut(S_3)$	Уравнение поверхности S_3 $y^2 =$
48	\mathbb{S}_4	(2,4,6)	$x^8 + 14x^4 + 1$
32	\mathbb{D}_8	(2,4,8)	$x^8 - 1$
24	\mathbb{D}_6	(2,4,12)	$x(x^6 - 1)$
\mathbb{Z}_{14}	\mathbb{Z}_7	(2,7,14)	$x^7 - 1$
16	\mathbb{D}_4	(2,2,2,4)	$x^8 + ax^4 + 1$
\mathbb{D}_6	\mathbb{S}_3	(2,2,2,6)	$x(x^6 + ax^3 + 1)$
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	\mathbb{D}_2	(2,2,4,4)	$x(x^2 - 1)(x^4 + ax^2 + 1)$
\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{D}_2	(2 ⁵)	$(x^4 + ax^2 + 1)(x^4 + bx^2 + 1)$
\mathbb{Z}_4	\mathbb{Z}_2	(2,2,2,4,8)	$x(x^2 - 1)(x^4 + ax^2 + b)$
\mathbb{D}_2	\mathbb{Z}_2	(2 ⁶)	$(x^2 - 1)(x^6 + ax^4 + bx^2 + c)$
\mathbb{Z}_2	1	(2 ⁸)	$x(x - 1)(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$

**Таблица 2. Автоморфизмы римановой поверхности рода 3
(гиперэллиптический случай)**

Точкой Вейерштрасса называется точка P римановой поверхности, допускающая существование мероморфной функции с единственным полюсом порядка меньше, чем $g + 1$ в P . Согласно классической теореме Гурвица ([15], III.5.11), каждая риманова поверхность S_g имеет, по крайней мере, $2g + 2$ точки Вейерштрасса. При этом, нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда поверхность S_g гиперэллиптическая.

Отметим следующие важные свойства точек Вейерштрасса. Обозначим через $W(S_g)$ множество точек Вейерштрасса римановой поверхно-

сти S_g . Тогда, любой автоморфизм S_g оставляет множество $W(S_g)$ инвариантным. При голоморфном отображении поверхностей разных родов точки Вейерштрасса, вообще говоря, не переходят в точки Вейерштрасса, однако, в случае голоморфного отображения гиперэллиптических поверхностей этот факт имеет место ([34], [46]). Более точно, если S_g и $S_{g'}$ — гиперэллиптические римановы поверхности, а $f, h \in \text{Hol}(S_g, S_{g'})$, то выполняются следующие свойства:

1. $f(W(S_g)) \subset W(S_{g'})$;
2. Если $f|_{W(S_g)} = h|_{W(S_g)}$, то либо $f = h$, либо $f = h \circ \tau$, где τ — гиперэллиптическая инволюция поверхности S_g ;
3. $f \circ \tau = \tau' \circ f$, где τ' — гиперэллиптическая инволюция поверхности $S_{g'}$.

Последнее равенство означает, что f опускается до голоморфного отображения орбифолдов $\widehat{f} : O_g = S_g / \langle \tau \rangle \rightarrow O_{g'} = S_{g'} / \langle \tau' \rangle$. При этом, \widehat{f} имеет ровно два поднятия до отображения S_g на $S_{g'}$, а именно, f и $f \circ \tau$.

1.2 Общие свойства голоморфных отображений

Опишем общую схему построения голоморфного отображения f из S_3 на S_2 . Предположим, что $\text{Hol}(S_3, S_2) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный элемент $f \in \text{Hol}(S_3, S_2)$. Из формулы Римана-Гурвица следует, что

$f : S_3 \rightarrow S_2$ осуществляет неразветвленное двулистное накрытие. Следовательно, оно регулярно и существует нетривиальный автоморфизм $\gamma_f \in \text{Aut } S_3$ такой, что $f \circ \gamma_f = f$ и $\gamma_f^2 = id$. При этом $S_3/\langle \gamma_f \rangle \cong S_2$, где знак \cong означает конформную эквивалентность. По теореме Акколы [2] поверхность S_3 — гиперэллиптическая. Следовательно, существует гиперэллиптическая инволюция $\tau \in \text{Aut } S_3 : S_3/\langle \tau \rangle \cong \overline{\mathbb{C}}$. Отметим, что $S_3/\langle \gamma_f \rangle \cong S_2 \neq \overline{\mathbb{C}}$, откуда $\gamma_f \neq \tau$. Заметим, что τ всегда принадлежит центру группы $\text{Aut } S_3$, то есть для любого автоморфизма $\alpha \in \text{Aut } S_3$ справедливо равенство $\alpha\tau\alpha^{-1} = \tau$. Отсюда выводим, что $\gamma_f\tau = \tau\gamma_f$, $\gamma_f^2 = id$, $\tau^2 = id$.

Далее, без ограничения общности можно считать, что $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (w, -z)$. Действительно, рассмотрим орбиформ $O_3 = S_3/\langle \tau \rangle = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$. Так как $\gamma_f\tau = \tau\gamma_f$, то γ_f опускается до автоморфизма $\hat{\gamma}_f$ орбиформы O_3 . При этом, $\hat{\gamma}_f^2 = id$ и $\hat{\gamma}_f$ оставляет инвариантным сингулярное множество $\{z_1, z_2, \dots, z_8\}$ орбиформы O_3 . Отметим, что $\hat{\gamma}_f$ однозначно определяется по множеству своих неподвижных точек $\text{Fix } \hat{\gamma}_f$.

Так как $\hat{\gamma}_f \in \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$, то существует $\Gamma \in \text{Aut } \overline{\mathbb{C}} : \Gamma \circ \hat{\gamma}_f \circ \Gamma^{-1} : z \rightarrow -z$. То есть, с самого начала можно считать, что $\hat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$. Тогда $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (w, -z)$. Найдем вид отображения \hat{f} . По определению имеем $\hat{f} \circ \hat{\gamma}_f = \hat{f}$, то есть $\hat{f}(-z) = \hat{f}(z)$. С другой стороны, отображение $\hat{f} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ голоморфно и, следовательно, является рациональной функцией. Поскольку \hat{f} двулистно и четно, имеем $\hat{f}(z) = T(z^2)$ для подходящего дробно-линейного отображения $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Выбирая подходящую систему координат в образе $\hat{f}(\overline{\mathbb{C}})$, без ограничения общности можем считать, что $T(z) = z$. Получим $\hat{f}(z) = z^2$.

В общем случае, точки ветвления отображения \hat{f} и его критические значения не обязательно совпадают с 0 и ∞ . Отправляя точки ветвления и соответствующие им критические значения подходящими дробно-линейными преобразования S и T^{-1} в 0 и ∞ , запишем отображение $\hat{f}(z) = T((S(z))^2)$. При этом, поднятие \hat{f} до голоморфного отображения римановых поверхностей $f : S_3 \rightarrow S_2$ имеет вид $f : (w, z) \rightarrow (u, v)$, где $v = \hat{f}(z)$ находится по той же схеме, что и выше.

Проиллюстрируем сказанное на следующей диаграмме. (Рис. 1.1.)

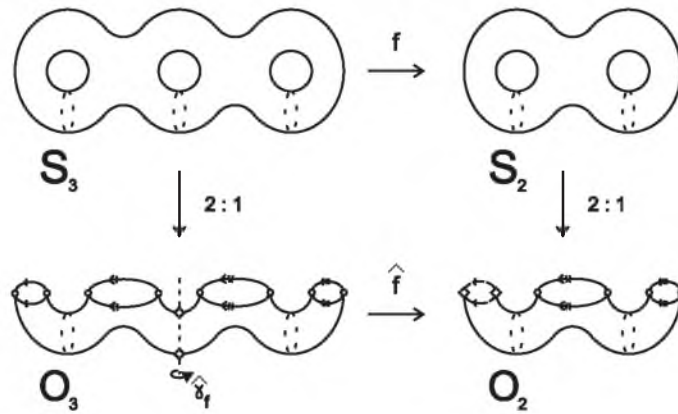


Рис. 1.1. Схема накрытий

В этой диаграмме \hat{f} разветвлена над 0, ∞ и особыми точками для орбифолда $O_2 = S_2/\langle\tau'\rangle \cong \overline{\mathbb{C}}(2^6)$. Однако прообразы $0 = \hat{f}^{-1}(0)$ и $\infty = \hat{f}^{-1}(\infty)$ не будут особыми точками орбифолда $O_3 = S_3/\langle\tau\rangle \cong \overline{\mathbb{C}}(2^8)$. С учетом множества $\{\pm z_1, \pm z_2, \pm z_3, \pm z_4\}$ особых точек орбифолда O_3 , уравнение поверхности S_3 может быть представлено алгебраическим уравнением

$$\tilde{w}^2 = (\tilde{z}^2 - z_1^2)(\tilde{z}^2 - z_2^2)(\tilde{z}^2 - z_3^2)(\tilde{z}^2 - z_4^2).$$

Принимая во внимание бирациональное отображение $(\tilde{w}, \tilde{z}) \rightarrow (w, z) = (\tilde{w}\tilde{z}, \tilde{z})$, перепишем последнее уравнение в виде

$$w^2 = z^2(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)(z^2 - z_3^2)(z^2 - z_4^2).$$

Аналогично, по множеству $\{0, \infty, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ особых точек орбифолда O_2 , где $v_1 = z_1^2, v_2 = z_2^2, v_3 = z_3^2, v_4 = z_4^2$, поверхность S_2 записывается как

$$u^2 = v(v - z_1^2)(v - z_2^2)(v - z_3^2)(v - z_4^2).$$

Отсюда, отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ в выбранных координатах имеет вид

$$f : (w, z) \rightarrow (u, v) = (w, z^2).$$

Пусть поверхность S_3 обладает одной из 11 возможных групп автоморфизмов, описанных в таблице 2. Будем строить отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ методом, описанным выше. Это возможно, если орбифолд $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$ обладает автоморфизмом $\hat{\gamma}_f$ второго порядка, переводящим проекции точек Вейерштрасса на себя (как множества), но не оставляющем ни одну из них неподвижной. При этом орбифолд $O_2 = \overline{\mathbb{C}}(v_1, v_2, \dots, v_6)$ получается из орбифолда $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$ факторизацией по инволюции $\hat{\gamma}_f$. Две неподвижные точки автоморфизма $\hat{\gamma}_f$ переходят в точки v_5, v_6 . Действительно, точки v_5, v_6 являются проекциями точек Вейерштрасса поверхности S_2 , однако их прообразы $\hat{f}^{-1}(v_5), \hat{f}^{-1}(v_6)$ не будут проекциями точек Вейерштрасса для S_3 . В противном случае, эти неподвижные точки станут точками ветвления четвертого порядка. То есть, особая точка орбифолда O_3 переходит в особую точку орбифолда O_2 порядка четыре, что невозможно, поскольку все особые точки орбифолда O_2 имеют порядок два.

Напомним, что элементы $Aut S_3$ осуществляют перестановку точек Вейерштрасса поверхности S_3 . Если группа $Aut S_3$ задана, то z_1, z_2, \dots, z_8 известны. Они являются корнями правых частей уравнений в таблице 2. Отображение $\widehat{\gamma}_f$ однозначно определяет $\widehat{f} : O_3 \rightarrow O_2 = O_3 / \langle \widehat{\gamma}_f \rangle$. Следовательно, и f , как поднятие \widehat{f} , однозначно, с точностью до суперпозиции с гиперэллиптической инволюцией τ , восстанавливается по отображению $\widehat{\gamma}_f$. Обратно, по каждому f можно однозначно построить $\widehat{\gamma}_f$. Это будет единственный нетривиальный элемент группы преобразований наложения $\widehat{f} : O_3 \rightarrow O_2$.

Для классификации нужно выяснить, как построить неэквивалентные голоморфные отображения f и g из S_3 на S_2 , то есть не связанные друг с другом автоморфизмами S_3 или S_2 . Ответ на вопрос об эквивалентности отображений получен в следующей лемме.

Лемма 1. *Отображения f и g эквивалентны тогда и только тогда, когда накрывающие инволюции $\widehat{\gamma}_f$ и $\widehat{\gamma}_g$ сопряжены в группе автоморфизмов орбифолда O_3 .*

Доказательство.

Необходимость. Пусть отображения f и g — эквивалентны, то есть существуют автоморфизмы $\alpha \in Aut S_3$ и $\beta \in Aut S_2$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ g$. Поскольку $\widehat{\gamma}_g = \widehat{\gamma}_{\beta \circ g}$, можем считать, что $\beta = 1$. Тогда $f \circ \alpha = g$ и $\widehat{f} \circ \widehat{\alpha} = \widehat{g}$, где $\widehat{\alpha}$ — проекция автоморфизма α на орбифолд O_3 . По определению, имеем $\widehat{g} \circ \widehat{\gamma}_g = \widehat{g}$. Откуда $\widehat{f} \circ \widehat{\alpha} \circ \widehat{\gamma}_g = \widehat{g} \circ \widehat{\gamma}_g = \widehat{g} = \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}$ и $\widehat{f} \circ \widehat{\alpha} \circ \widehat{\gamma}_g \circ \widehat{\alpha}^{-1} = \widehat{f}$. Следовательно, $\widehat{\alpha} \circ \widehat{\gamma}_g \circ \widehat{\alpha}^{-1} = \widehat{\gamma}_f$.

Достаточность. Пусть $\widehat{\gamma}_f$ и $\widehat{\gamma}_g$ сопряжены в группе $Aut O_3$. Тогда, существует автоморфизм $\widehat{\alpha} \in Aut O_3$ такой, что $\widehat{\gamma}_g = \widehat{\alpha}^{-1} \circ \widehat{\gamma}_f \circ \widehat{\alpha}$. Покажем,

что \widehat{g} и $\widehat{f} \circ \widehat{\alpha}$ имеют одну и ту же накрывающую инволюцию. Действительно, имеем $\widehat{g} \circ \widehat{\gamma}_g = \widehat{g}$ и $(\widehat{f} \circ \widehat{\alpha}) \circ \widehat{\gamma}_g = \widehat{f} \circ \widehat{\alpha} \circ \widehat{\alpha}^{-1} \circ \widehat{\gamma}_f \circ \widehat{\alpha} = (\widehat{f} \circ \widehat{\gamma}_f) \circ \widehat{\alpha} = \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}$.

Следовательно, существует $\widehat{\beta} \in \text{Aut } O_2$ такой, что $\widehat{\beta} \circ \widehat{g} = \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}$. В качестве такого автоморфизма можно выбрать корректно определенное конформное отображение $\widehat{\beta} = \widehat{f} \circ \widehat{\alpha} \circ \widehat{g}^{-1}$. По построению, конформное отображение $\widehat{\beta}$ переводит множество особых точек O_2 в себя и, следовательно, является автоморфизмом O_2 . Поднимая отображения $\widehat{\beta}$ и $\widehat{\alpha}$ до подходящих автоморфизмов $\alpha \in \text{Aut } S_3$ и $\beta \in \text{Aut } S_2$, получим равенство $\beta \circ g = f \circ \alpha$.

Подводя итог вышесказанному, приходим к следующему алгоритму построения голоморфного отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$.

Шаг 1. Выберем произвольную гиперэллиптическую поверхность S_3 из таблицы 2 и запишем ее уравнение в виде $w^2 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_8)$. Если одна из точек z_j равна ∞ , то соответствующий множитель $(z - z_j)$ опускаем. Найдем инволюцию $\widehat{\gamma}_f$ из группы автоморфизмов орбифолда $O_3 = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$, не оставляющую ни одну из его особых точек неподвижной.

С точностью до обозначений, всегда можно считать, что $\widehat{\gamma}_f(z_j) = z_{j+4}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Шаг 2. Найдем рациональное отображение $\widehat{f} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ степени два, инвариантное относительно инволюции $\widehat{\gamma}_f$. То есть такое, что $\widehat{f} \circ \widehat{\gamma}_f = \widehat{f}$. Пусть p_1 и p_2 — неподвижные точки $\widehat{\gamma}_f$, тогда \widehat{f} имеет ветвление порядка два в p_1 и p_2 . Отметим, что образом орбифолда O_3 при отображении \widehat{f} служит орбифолд $O_2 = \overline{\mathbb{C}}(v_1, v_2, \dots, v_6)$, где $v_j = \widehat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 =$

$\widehat{f}(p_1)$, и $v_6 = \widehat{f}(p_2)$.

Шаг 3. Восстановим уравнение гиперэллиптической поверхности S_2 по особым точкам орбифолда O_2 следующим образом $u^2 = (v - v_1)(v - v_2) \dots (v - v_6)$. По прежнему, если одна из точек v_j обращается в бесконечность, то соответствующий множитель опускается.

Шаг 4. Найдем голоморфное отображение $(u, v) = f(w, z)$ римановой поверхности S_3 на риманову поверхность S_2 . Для этого положим $v = \widehat{f}(z)$ и определим u как одно из двух решений уравнения

$$u^2 = (\widehat{f}(z) - v_1)(\widehat{f}(z) - v_2) \dots (\widehat{f}(z) - v_6).$$

Отметим, что u всегда представимо в виде $u = r(z)w$, где $r(z)$ подходящая рациональная функция от z .

Этот факт следует из эквиинвариантности отображения f относительно действия гиперэллиптических инволюций $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Действительно, в общем случае f задается отображением вида

$$f : (w, z) \rightarrow (u, v) = (F_1(w, z), F_2(w, z)),$$

где $F_1(w, z)$ и $F_2(w, z)$ — некоторые рациональные функции от w и z . Поскольку гиперэллиптические инволюции действуют по правилам $\tau : (w, z) \rightarrow (-w, z)$ и $\tau' : (u, v) \rightarrow (-u, v)$, из свойства эквиинвариантности имеем

$$F_1(-w, z) = -F_1(w, z) \text{ и } F_2(-w, z) = F_2(w, z).$$

Отсюда F_1 — нечетная, а F_2 — четная функции по переменной w . Следовательно, они допускают представление в виде $F_1(w, z) = R_1(w^2, z)w$

и $F_2(w, z) = R_2(w^2, z)$, где R_1, R_2 — рациональные функции. Заметим, что для гиперэллиптической римановой поверхности справедливо равенство $w^2 = P(z)$, где $P(z)$ — некоторый полином от z . Отсюда, $u = F_1(w, z) = R_1(P(z), z)w = r(z)w$ и $v = F_2(w, z) = R_2(P(z), z) = \widehat{f}(z)$, где $r(z)$ — рациональная функция от z , а $\widehat{f}(z)$ — рациональная функция, указанная выше.

Глава 2

Решение проблемы де Франкиса для поверхностей минимальных родов

2.1 Классификация голоморфных отображе- ний с точностью до эквивалентности

Классическая теорема Гурвица [24] утверждает, что число голоморфных автоморфизмов римановой поверхности рода $g > 1$ не превосходит $84(g - 1)$.

Обозначим через $Hol(S_g, S_{g'})$ множество всех голоморфных отображений римановой поверхности S_g рода g на риманову поверхность $S_{g'}$

рода g' , где $g \geq g' > 1$.

Обобщение теоремы Гурвица было получено де Франкисом [16], который установил, что число элементов $Hol(S_g, S_{g'})$ конечно и зависит только от g .

Первая верхняя оценка на число $Hol(S_g, S_{g'})$ была получена в работе А. Ховарда и А. Дж. Соммезе [23]. В дальнейшем оценка была улучшена в работе А. Альзатти и Г. П. Пирола [3] и М. Танабе ([44], [45], [46]).

Отметим также недавний результат М. Ито и Х. Ямамото [27], позволяющий получить верхнюю оценку в терминах родов и длин кратчайших геодезических.

Теореме де Франкиса также посвящена серия работ испанских математиков Г. Гонсалес-Диез и И. Фуертес ([18], [17]).

Теорема де Франкиса для римановых поверхностей конечного типа и ее обобщение на многомерный случай были получены в [6] и [26].

Отображения $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ и $h : S_g \rightarrow S_{g'}$ называются *эквивалентными*, если существуют автоморфизмы $\alpha \in Aut S_g$ и $\beta \in Aut S_{g'}$ такие, что $f \circ \alpha = \beta \circ h$.

Целью данного раздела является получение полной классификации голоморфных отображений римановой поверхности рода три S_3 на риманову поверхность рода два S_2 с точностью до эквивалентности. Кроме того, будет установлено, что каждая риманова поверхность рода три имеет не более трех голоморфных образов рода два.

2.1.1 Классы эквивалентности голоморфных отображений

Целью данного параграфа является классификация голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два с точностью до эквивалентности.

Будем последовательно разбирать 11 случаев, указанных в таблице 2. Для этого воспользуемся общей схемой, намеченной в предыдущем параграфе.

1. При $|Aut S_3| = 48$ поверхность S_3 представляется в виде $w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$. Группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{S}_4$, где z_1, z_2, \dots, z_8 — корни уравнения $z^8 + 14z^4 + 1 = 0$. Эти корни будут рассматриваться как вершины “куба”, вписанного в сферу Римана.

Найдем для f все инволюции $\widehat{\gamma}_f$, переставляющие вершины куба, то есть точки Вейерштрасса, но ни одну из них не оставляющие неподвижной. С точностью до сопряжения в группе \mathbb{S}_4 таких инволюций будет ровно две: $z \rightarrow -z$ и $z \rightarrow \frac{1}{z}$. В силу большой симметрии куба, все другие инволюции будут сопряжены в группе $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$, так как в этой группе есть четверть-поворот вокруг перпендикуляра к верхней грани куба. Таким образом, по лемме 1, существует два класса эквивалентности голоморфных отображений S_3 на поверхность рода два. Найдем представителей классов эквивалентности в каждом из указанных случаев.

1а. Пусть $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$. Имеем $\widehat{f} \circ \widehat{\gamma}_f = \widehat{f}$, то есть $\widehat{f}(-z) = \widehat{f}(z)$. В этом случае $\widehat{f}(z) = T(z^2)$, где T — произвольное дробно-линейное преобразо-

вание. Выбирая $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$, получим $\widehat{f}(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$. Без ограничения общности, можем считать, что $z_j = -z_{j+4}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Учитывая, что неподвижные точки $\widehat{\gamma}_f$ равны 0 и ∞ , положим $v_j = \widehat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \widehat{f}(0)$, и $v_6 = \widehat{f}(\infty)$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что уравнение $u^2 = (v - v_1)(v - v_2) \dots (v - v_6)$ римановой поверхности S_2 записывается в виде

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1).$$

По классификации Больца (Таблица 1) группа автоморфизмов S_2 изоморфна \mathbb{D}_4 .

Поднимая $\widehat{f} : O_3 \rightarrow O_2$ до отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$ по указанному в предыдущей главе алгоритму, получим

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{2i}{(z^2 + 1)^3} w, \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right).$$

1b. Пусть теперь $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{1}{z}$. В этом случае в качестве \widehat{f} удобно выбрать следующее отображение $\widehat{f}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z} \right)$. Неподвижными точками $\widehat{\gamma}_f$ являются ± 1 . Упорядочим корни z_1, \dots, z_8 таким образом, что $z_{j+4} = \frac{1}{z_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда $v_j = \widehat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \widehat{f}(-1)$, $v_6 = \widehat{f}(1)$. При этом, уравнение римановой поверхности S_2 имеет вид

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75).$$

Поднимая $\widehat{f} : O_3 \rightarrow O_2$ до отображения римановых поверхностей $f : S_3 \rightarrow S_2$, получим

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^4} w, \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z} \right) \right).$$

По прежнему, группа автоморфизмов S_2 равна \mathbb{D}_2 , однако римановы поверхности S_2 в случаях $1a$ и $1b$ не изоморфны.

2. При $|Aut S_3| = 32$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{D}_8$ имеет порядок 16. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^8 - 1$.

Заметим, что 0 и ∞ не являются точками Вейерштрасса для поверхности S_3 , а корни уравнения $z^8 - 1 = 0$ имеют вид $z_k = \exp(\frac{2\pi i}{8}k)$, $k = 1, 2, \dots, 8$. Обозначим через $P = P(z_1, z_2, \dots, z_8)$ правильный восьмиугольник на сфере Римана, инвариантный относительно вращения восьмого порядка. Тогда для неподвижных точек инволюции $\hat{\gamma}_f$ имеется три возможных положения:

1. Неподвижными точками являются 0 и ∞ . При этом $\hat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$;
2. $\hat{\gamma}_f$ оставляет неподвижными середины противоположных сторон P . Все такие инволюции попарно сопряжены в группе $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$;
3. Неподвижные точки $\hat{\gamma}_f$ равны z_k и z_{k+4} , где k принимает одно из значений $1, 2, 3, 4$. Снова, все такие инволюции попарно сопряжены.

Случай 3 не реализуется, так как $Fix \hat{\gamma}_f$ состоит из двух точек Вейерштрасса. Оба случая 1 и 2 реализуются. Таким образом, существует только два класса эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$. Выпишем по представителю в каждом из этих классов.

2a. Пусть $\hat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$. В качестве \hat{f} естественно взять отображение $\hat{f}(z) = z^2$. Тогда его поднятие до отображения римановых поверхностей

имеет вид

$$(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2).$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае поверхность $S_2 = f(S_3)$ задана уравнением

$$u^2 = v(v^4 - 1).$$

Это кривая Больца рода 2 с максимально возможной группой автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 48$.

2b. Рассмотрим отображение $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{\varepsilon}{z}$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}$. Оно, очевидно, оставляет инвариантным множество вершин восьмиугольника P и не имеет неподвижных точек на этом множестве. Поскольку $\widehat{f} \circ \widehat{\gamma}_f = \widehat{f}$, то в качестве \widehat{f} удобно выбрать $\widehat{f}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z} \right)$. Множество неподвижных точек $\widehat{\gamma}_f$ состоит из $\sqrt{\varepsilon}$ и $-\sqrt{\varepsilon}$. Найдем особые точки орбиформы O_2 по формулам $v_j = \widehat{f}(\varepsilon^j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \widehat{f}(\sqrt{\varepsilon})$, $v_6 = \widehat{f}(-\sqrt{\varepsilon})$. В результате получим, что поверхность S_2 задается уравнением

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 0.125).$$

Поднятие отображения \widehat{f} на римановы поверхности имеет вид

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - \varepsilon^2}{8z^3\varepsilon^3} w, \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z} \right) \right), \text{ где } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}.$$

Отметим, что группа автоморфизмов $Aut(S_2)$ изоморфна \mathbb{D}_2 .

3. При $|Aut S_3| = 24$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{D}_6$ имеет порядок 12. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z(z^6 - 1)$. Обозначим через z_1, z_2, \dots, z_6 корни уравнения $z^6 - 1 = 0$. Отметим, что точки

z_1, z_2, \dots, z_6 являются вершинами правильного шестиугольника, и вместе с 0 и ∞ задают все восемь точек Вейерштрасса. Обозначим через $B = B(z_1, z_2, \dots, z_6)$ правильную бипирамиду на сфере Римана, основанием которой служит указанный выше шестиугольник, а вершинами точки 0 и ∞ . (См. Рис. 2.1.)

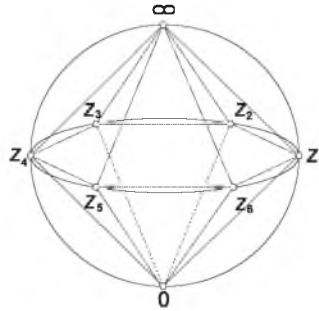


Рис. 2.1. Шестиугольная бипирамида

Для инволюции $\widehat{\gamma}_f$ имеется две возможных реализации:

1. $\widehat{\gamma}_f$ является вращением второго порядка в серединах противоположных ребер шестиугольника $\{z_1, z_2, \dots, z_6\}$;
2. $\widehat{\gamma}_f$ является вращением второго порядка в противоположных вершинах $B(z_1, z_2, \dots, z_6)$.

Случай 2 исключаем, так как вершины — это точки Вейерштрасса. По построению, они не могут быть неподвижными точками инволюции $\widehat{\gamma}_f$. Таким образом, имеется только один класс эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$. Он представлен отображениями следующего вида $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -\frac{1}{z}$ и $\widehat{f} : z \rightarrow z - \frac{1}{z}$. При этом, поверхность S_2 задается уравнением

$$u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + 3),$$

а голоморфное отображение f записывается как

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 + 1}{z^3} w, z - \frac{1}{z} \right).$$

По классификации Больца группа автоморфизмов $Aut(S_2)$ изоморфна \mathbb{D}_4 .

4. При $|Aut S_3| = 14$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{Z}_7$ имеет порядок 7 и является циклической группой. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^7 - 1$. Обозначим через z_1, z_2, \dots, z_7 корни уравнения $z^7 - 1 = 0$. Отметим, что точки z_1, z_2, \dots, z_7 являются вершинами правильного семиугольника, и вместе с ∞ дают все восемь точек Вейерштрасса для поверхности S_3 .

Заметим, что у правильной семиугольной пирамиды нет симметрии второго порядка. Следовательно, в этом случае нет сюръективных голоморфных отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$.

5. При $|Aut S_3| = 16$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{D}_4$ имеет порядок 8. Поверхность S_3 описывается уравнением $w^2 = z^8 + az^4 + 1$, где $a \neq 0, \pm 2, \pm 14$. В этом случае точки Вейерштрасса являются корнями уравнения $z^8 + az^4 + 1 = 0$, которые удобно обозначить в виде чисел z_1, z_2, z_3, z_4 и обратных к ним $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}$. При этом, можно считать, что $z_2 = iz_1, z_3 = -z_1$ и $z_4 = -iz_1$. Здесь, первая и вторая четверки являются вершинами квадратов, вписанных в окружности на сфере Римана. Указанные четверки будем интерпретировать как нижнюю и верхнюю грани "параллелепипеда" P . Нам понадобится один из корней \sqrt{i} , равный $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Для инволюции $\hat{\gamma}_f$ имеется три возможных ситуации:

1. $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$, $Fix \widehat{\gamma}_f = \{0, \infty\}$ — середины верхней и нижней граней P ;
2. $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{1}{z}$, $Fix \widehat{\gamma}_f = \{+1, -1\}$ — середины боковых граней P ;
3. $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{i}{z}$, $Fix \widehat{\gamma}_f = \{+\sqrt{i}, -\sqrt{i}\}$ — середины боковых ребер P .

Все три инволюции попарно не сопряжены в полной группе \mathbb{D}_4 симметрий "параллелепипеда". Таким образом, существуют три класса отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$, не связанных автоморфизмами поверхностей. Выпишем по представителю в каждом из этих классов.

5a. Пусть $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$ и $\widehat{f} : z \rightarrow z^2$. Неподвижные точки $\widehat{\gamma}_f$ равны 0 и ∞ . Положим $v_j = \widehat{f}(z_j)$, $v_{j+2} = \widehat{f}(z_j^{-1})$, $j = 1, 2$, $v_5 = \widehat{f}(0)$, $v_6 = \widehat{f}(\infty)$. Тогда поверхность S_2 представляется в виде

$$u^2 = v(v^4 + av^2 + 1), \quad a \neq 0, \pm 2, \pm 14,$$

а отображение $\widehat{f} : S_3 \rightarrow S_2$ имеет вид

$$(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2).$$

5b. Рассмотрим случай $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{1}{z}$ и $\widehat{f} : z \rightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Тогда $Fix \widehat{\gamma}_f = \{+1, -1\}$. В качестве особых точек орбиформы O_2 возьмем $v_j = \widehat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \widehat{f}(-1)$, $v_6 = \widehat{f}(1)$. Уравнение поверхности S_2 в данном случае запишется как

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + \frac{a+2}{16}), \quad \text{где } a \neq 0, \pm 2, \pm 14.$$

Отображение f задается формулой

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - 1}{8z^3} w, \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right).$$

Вычисляя диэдральные инварианты поверхности S_2 по алгоритму предложенному в [33], убеждаемся, что при $a \neq 14(128 \pm 31\sqrt{17})$ имеет место равенство $\text{Aut } S_2 = \mathbb{D}_2$. При $a = 14(128 \pm 31\sqrt{17})$ уравнение поверхности S_2 переписывается в виде $Y^2 = X^6 + sX^3 + 1$, где $s = 2(217 \mp 54\sqrt{17})$. В этом случае группа автоморфизмов $\text{Aut } S_2 = \mathbb{D}_6$.

5с. Пусть теперь $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{i}{z}$ и $\widehat{f} : z \rightarrow \frac{1}{2}(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z})$. Неподвижными точками для $\widehat{\gamma}_f$ являются $\pm\sqrt{i}$. Положим $v_j = \widehat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $v_5 = \widehat{f}(-\sqrt{i})$, $v_6 = \widehat{f}(\sqrt{i})$. Уравнение поверхности S_2 запишется как

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + \frac{2-a}{16}), \text{ где } a \neq 0, \pm 2, \pm 14.$$

Отображение f представляется в виде

$$(u, v) = f(w, z) = (\frac{z^2 - 1}{8z^3}w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})).$$

Аналогично предыдущему, при $a \neq -14(128 \pm 31\sqrt{17})$ имеем $\text{Aut } S_2 = \mathbb{D}_2$. В противном случае, $\text{Aut } S_2 = \mathbb{D}_6$.

6. При $|\text{Aut } S_3| = 12$, группа $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{S}_3$. Поверхность S_3 описывается уравнением $w^2 = z(z^6 + az^3 + 1)$. Точки Вейерштрасса удобно представить в следующем виде $\infty, z_1, z_1\omega, z_1\omega^2, 0, \frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_1\omega}, \frac{1}{z_1\omega^2}$, где z_1 — один из корней уравнения $z^6 + az^3 + 1 = 0$ и $\omega^3 = 1$. Можно считать, что они расположены в вершинах “треугольной призмы” и в серединах ее оснований. В данном случае имеется только одна возможность для инволюции $\widehat{\gamma}_f$. Она имеет две неподвижные точки — середину боковой грани и середину противоположного ребра. Все такие инволюции сопряжены в группе $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$. Можем считать, что $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{1}{z}$. При этом, в

качестве функции \widehat{f} естественно выбрать функцию $\widehat{f}(z) = z + \frac{1}{z}$. Положим $v_1 = \widehat{f}(z_1)$, $v_2 = \widehat{f}(z_1\omega)$, $v_3 = \widehat{f}(z_1\omega^2)$, $v_4 = \widehat{f}(0)$, $v_5 = \widehat{f}(-1)$, $v_6 = \widehat{f}(1)$. Тогда уравнение поверхности S_2 примет вид

$$u^2 = (v^2 - 4)(v^3 - 3v + a), \quad (a \neq 0, \pm 2).$$

Поднимая отображение \widehat{f} до голоморфного отображения f римановых поверхностей, получим $f(w, z) = (\frac{z^2-1}{z^3}w, z + \frac{1}{z})$.

7. При $Aut S_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ — четверная группа Клейна. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z(z^2 - 1)(z^4 + az^2 + 1)$. Ее точками Вейерштрасса являются $0, \infty, \pm 1, \pm z_1, \pm \frac{1}{z_1}$. Указанные точки образуют "октаэдр" с двумя отмеченными точками на противоположных ребрах. Это 0 и ∞ . В данном случае существует только одна инволюция $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -\frac{1}{z}$, переводящая множество точек Вейерштрасса в себя и не оставляющая ни одну из них неподвижной. Отсюда, $Hol(S_3, S_2)$ состоит только из одного класса эквивалентности. Пологая $\widehat{f}(z) = z - \frac{1}{z}$, получим, что S_2 представляется в виде

$$u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + a + 2), \quad a \neq \pm 2.$$

При этом, отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ записывается как

$$(u, v) = f(w, z) = (\frac{z^2+1}{z^3}w, z - \frac{1}{z}).$$

По классификации Больца $Aut S_2 = \mathbb{D}_4$.

8. Пусть $Aut S_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, и группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 +$

1). Ее точками Вейерштрасса являются $\pm z_1, \pm \frac{1}{z_1}, \pm z_2, \pm \frac{1}{z_2}$. Считаем, что все они различны и не равны $\pm 1, \pm i$. Тогда справедливы неравенства $a, b \neq \pm 2, a \neq b$. Кроме того, считаем, что $a \neq -b$, в противном случае задача сводится к пункту 7. В рассматриваемой ситуации возможны три инволюции:

1. $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$;
2. $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow \frac{1}{z}$;
3. $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -\frac{1}{z}$.

Заметим, что в данном случае инволюции попарно не сопряжены в группе $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8)$. Следовательно, возможны три класса эквивалентности голоморфных отображений. Выпишем по представителю каждого класса эквивалентности.

8a. Рассмотрим отображения $\widehat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$ и $\widehat{f} : z \rightarrow \frac{z^2+1}{z^2-1}$. Неподвижные точки $\widehat{\gamma}_f$ равны 0 и ∞ . Отсюда $v_1 = \widehat{f}(z_1), v_2 = \widehat{f}(\frac{1}{z_1}), v_3 = \widehat{f}(z_2), v_4 = \widehat{f}(\frac{1}{z_2}), v_5 = \widehat{f}(0)$, и $v_6 = \widehat{f}(\infty)$. Уравнение поверхности S_2 имеет вид

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{a-2}{a+2})(v^2 - \frac{b-2}{b+2}).$$

Голоморфное отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ представимо формулой

$$(u, v) = f(w, z) = (\frac{8}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1}),$$

где $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$.

8b. В этом случае $\widehat{\gamma}_g : z \rightarrow \frac{1}{z}$ и $\widehat{g} : z \rightarrow \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Учитывая, что $Fix \widehat{\gamma}_g = \{\pm 1\}$, получим $v_1 = \widehat{g}(z_1), v_2 = \widehat{g}(-z_1), v_3 = \widehat{g}(z_2), v_4 = \widehat{g}(-z_2), v_5 =$

$\widehat{g}(-1)$, и $v_6 = \widehat{g}(1)$. Откуда S_2 представимо в виде

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{2-a}{4})(v^2 - \frac{2-b}{4}).$$

Отображение $g : S_3 \rightarrow S_2$ записывается как

$$(u, v) = g(w, z) = (\frac{z^2 - 1}{8z^3}w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})).$$

8с. Пусть $\widehat{\gamma}_h : z \rightarrow -\frac{1}{z}$ и $\widehat{h} : z \rightarrow \frac{i}{2}(z - \frac{1}{z})$. Имеем $Fix \widehat{\gamma}_h = \{\pm i\}$, откуда $v_1 = \widehat{h}(z_1)$, $v_2 = \widehat{h}(\frac{1}{z_1})$, $v_3 = \widehat{h}(z_2)$, $v_4 = \widehat{h}(\frac{1}{z_2})$, $v_5 = \widehat{h}(-i)$, и $v_6 = \widehat{h}(i)$. Следовательно, поверхность S_2 задается уравнением

$$u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{a+2}{4})(v^2 - \frac{b+2}{4}).$$

Отображение $h : S_3 \rightarrow S_2$ записывается как

$$(u, v) = h(w, z) = (\frac{i(z^2 + 1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}(z - \frac{1}{z})).$$

Замечание 1. При $(a+2)(b+2) = 16$ из очевидных равенств $\frac{a-2}{a+2} = \frac{2-b}{4}$ и $\frac{b-2}{b+2} = \frac{2-a}{4}$ имеем $f(S_3) = g(S_3) \neq h(S_3)$. Из классификации Больца следует, что при $(a+2)(b+2) \neq 16$ римановы поверхности $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ конформно не эквивалентны друг другу.

Замечание 2. Следуя Р. Силёлю [43], отметим, что две римановы поверхности $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a)(x^2 - b)$ и $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a')(x^2 - b')$ с группами автоморфизмов \mathbb{D}_2 конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из пар (a', b') или (b', a') содержится в следующем списке

$$(a, b), (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}), (\frac{1}{a}, \frac{b}{a}), (a, \frac{b}{a}), (\frac{a}{b}, \frac{1}{b}), (\frac{b}{a}, b).$$

9. При $Aut S_3 = \mathbb{Z}_4$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{Z}_2$. Поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z(z^2 - 1)(z^4 + az^2 + b)$, $b \neq 1$ (для случая $b = 1$ смотри пункт 7). Ее точками Вейерштрасса являются $0, \infty, \pm 1, \pm z_1, \pm z_2$. Единственной симметрией второго порядка является $\alpha : z \rightarrow -z$. Ее неподвижными точками будут 0 и ∞ , которые являются точками Вейерштрасса. Следовательно, не существует голоморфных отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$ в этом случае.

10. При $Aut S_3 = \mathbb{D}_2$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = \mathbb{Z}_2$. В общем положении поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = (z^2 - 1)(z^6 + az^4 + bz^2 + c)$. Ее точками Вейерштрасса являются $\pm 1, \pm z_1, \pm z_2, \pm z_3$. При этом, эти точки находятся в общем положении друг к другу. Существует единственная инволюция $\hat{\gamma}_f : z \rightarrow -z$, которая не фиксирует ни одной точки Вейерштрасса. Таким образом, существует единственный класс эквивалентности отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$. Положим $\hat{f}(z) = z^2$. Так как неподвижными точками $\hat{\gamma}_f$ являются 0 и ∞ , то в качестве особых точек орбифолда O_2 выберем $v_j = \hat{f}(z_j)$, $j = 1, 2, 3$, $v_4 = \hat{f}(1)$, $v_5 = \hat{f}(0)$, $v_6 = \hat{f}(\infty)$. В результате, уравнение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = v(v - 1)(v^3 + av^2 + bv + c)$, а отображение f представимо по формуле

$$(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2).$$

11. При $Aut S_3 = \mathbb{Z}_2$, группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = 1$. Поверхность S_3 задается в общем виде $w^2 = z(z - 1)(z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e)$. Ее точки Вейерштрасса — это $0, 1, \infty, z_1, \dots, z_5$. Поскольку группа $Aut \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_8) = 1$, то она не содержит нетривиальных инволюций. Следовательно, в этом случае $Hol(S_3, S_2) = \emptyset$.

2.1.2 Основные результаты о числе классов эквивалентности

Основным результатом предыдущего параграфа является следующая классификационная теорема.

Теорема 1. Пусть S_3 и S_2 — римановы поверхности родов 3 и 2, соответственно, такие, что множество $\text{Hol}(S_3, S_2)$ голоморфных отображений S_3 на S_2 не пусто. Тогда имеет место один из 15 случаев из предыдущего параграфа, отличный от случаев 4, 9 и 11. При этом, число различных классов эквивалентности множества $\text{Hol}(S_3, S_2)$ в случае 8 равно 2, а в остальных случаях равно 1.

Обозначим через $E(S_3, S_2)$ множество всех классов эквивалентности голоморфных отображений S_3 на S_2 . Справедлива

Теорема 2. Число элементов множества $E(S_3, S_2)$ не превосходит 2. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$ и $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{a-2}{a+2})(v^2 - \frac{b-2}{b+2})$, где неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с какой-либо из следующих пар $\{-6, -2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, 2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i\sqrt{3}, -4 \pm 2i\sqrt{3}\}$. При этом, неэквивалентные отображения имеют вид $(u, v) = f(w, z)$ и $(u, v) = g(w, z)$, где $f(w, z) = (\frac{8}{k(z^2-1)^3}w, \frac{z^2+1}{z^2-1})$, $g(w, z) = (\frac{z^2-1}{8z^3}w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$ и $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$.

Доказательство.

Из классификации голоморфных отображений с точностью до эквивалентности и замечания 1 следует, что число классов эквивалентности

множества $Hol(S_3, S_2)$ не превосходит двух. Полученная оценка точная и достигается для пары поверхностей S_3 и S_2 из формулировки теоремы и леммы 2. Это случай 8 из предыдущего параграфа.

Римановы поверхности S и S' назовем *изоморфными*, если существует конформное отображение поверхности S на S' .

Пусть S_g — заданная риманова поверхность рода g . Обозначим через $I_{g'}(S_g)$ множество всех классов эквивалентности голоморфных отображений вида $f : S_g \rightarrow S_{g'}$, где $S_{g'}$ пробегает все возможные римановы поверхности рода g' и $g \geq g' > 1$. В работе Е. Кани [28] показано, что $|I_{g'}(S_g)| \leq 2^{2g^2-1}(2^{2g^2-1} - 1)$. Имеет место следующая теорема

Теорема 3. *Число элементов множества $I_2(S_3)$ не превосходит 3. Указанная оценка точная и достигается для римановой поверхности $S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1)$, где $a \neq b$, $a, b \neq 0, \pm 2$ и $(a + 2)(b + 2) \neq 16$. При этом, за исключением конечного числа наборов $\{a, b\}$, поверхность S_3 имеет три попарно не изоморфных образа $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$, где f и g те же, что и в предыдущей теореме, а голоморфное отображение h имеет вид $h(w, z) = (\frac{i(z^2+1)}{8z^3}w, \frac{i}{2}(z - \frac{1}{z}))$.*

Доказательство.

Из рассмотрения перечисленных выше 11 случаев заключаем, что голоморфными образами заданной римановой поверхности S_3 могут быть не более трех римановых поверхностей рода 2. При этом, максимальное число образов (три) достигается в случае 8. Голоморфные отображения f , g , h и соответствующие им образы перечислены в пунктах 8a, 8b и 8c. Доказательство теоремы непосредственно следует из следующих трех

ЛЕММ.

Лемма 2. Пусть $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$. Предположим, что римановы поверхности $f(S_3)$ и $g(S_3)$ конформно эквивалентны. Тогда либо $(a+2)(b+2) = 16$, либо неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с одной из следующих пар $\{-6, -2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, 2 \pm 4i\}$ и $\{\pm 2i\sqrt{3}, 2(-2 \pm i\sqrt{3})\}$.

Доказательство.

Решая систему уравнений $u_1^f = u_1^g$, $u_2^f = u_2^g$ при условии $(a+2)(b+2) \neq 16$, получим конечное число решений, указанных в формулировке леммы.

Лемма 3. Пусть $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$. Предположим, что римановы поверхности $f(S_3)$ и $h(S_3)$ конформно эквивалентны. Тогда либо $(a-2)(b-2) = 16$, либо неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с одной из следующих пар $\{6, 2 \pm 4i\}$, $\{\pm 2i, -2 \pm 4i\}$ и $\{\pm 2i\sqrt{3}, 2(2 \pm i\sqrt{3})\}$.

Доказательство.

Решая систему уравнений $u_1^f = u_1^h$, $u_2^f = u_2^h$ при условии $(a-2)(b-2) \neq 16$, получим, что система имеет конечное число решений, указанных в лемме.

Лемма 4. Пусть $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0, \pm 2$. Предположим, что римановы поверхности $g(S_3)$ и $h(S_3)$ конформно эквивалентны. Тогда неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с одной из пар $\{2 \pm 4i, -2 \pm 4i\}$ или $\{\pm 2i\sqrt{3}, \pm \frac{2i}{\sqrt{3}}\}$.

Доказательство.

Решая систему уравнений $u_1^g = u_1^h$, $u_2^g = u_2^h$ при условии $a + b \neq 0$, получим набор решений, приведенных в формулировке леммы.

Следующий пример иллюстрирует, что случай $|I_2(S_3)| = 2$ также реализуется.

Пример 1. Рассмотрим риманову поверхность $S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$ и заданные на ней голоморфные отображения $h_1(w, z) = (\frac{2i}{(z^2+1)^3}w, \frac{z^2-1}{z^2+1})$ и $h_2(w, z) = (\frac{\sqrt{i}(z^2-i)}{8z^3}w, \frac{1}{2}(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z}))$. Тогда римановы поверхности $h_1(S_3)$ и $h_2(S_3)$ представляются уравнениями $h_1(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1)$ и $h_2(S_3) : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75)$, соответственно. По классификации Больца они неизоморфны.

2.2 Классификация голоморфных отображений S_3 на S_2

В предыдущем параграфе получены структурные теоремы, описывающие голоморфные отображения римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два с точностью до эквивалентности.

Целью данного раздела является полное описание указанных отображений и, как следствие, получение точной верхней оценки на число голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Более точно, будет установлено, что число указанных отображений не превосходит 48. Будет показано, что полученная оценка точная и приведены пары поверхностей для которых она

достигается. Это полностью решает проблему де Франкиса для поверхностей минимальных родов.

2.2.1 Инварианты групп автоморфизмов и голоморфных отображений

Гиперэллиптическая поверхность — это поверхность, допускающая двулистное накрытие над сферой Римана. Накрывающая инволюция такого накрытия называется *гиперэллиптической инволюцией*. Каждая гиперэллиптическая поверхность рода g представляется уравнением $w^2 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{2g+2})$, где $z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}$ — различные комплексные числа. При этом, действие гиперэллиптической инволюции на поверхности осуществляется по правилу $\tau : (w, z) \rightarrow (-w, z)$. Известно, что любая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической. В работах [14] и [2] показано, что риманова поверхность рода 3, двулистно накрывающая поверхность рода 2, также будет гиперэллиптической римановой поверхностью.

Двумерным орбифордом O будем называть риманову поверхность S с выделенным на ней дискретным подмножеством точек Σ , каждой из которых приписано некоторое натуральное число ≥ 2 . Σ называется *сингулярным множеством* или множеством *особых точек* орбифорда O , а поверхность S его носителем. Основные факты из теории орбифордов изложены в работах ([50], § 2) и ([47], глава 13).

В настоящей работе в качестве S всюду будет использована замкнутая риманова поверхность рода 0, то есть риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, а в качестве $\Sigma = \{z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}\}$ — подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из четного числа

точек, каждой из которой приписано число 2. В этом случае, для краткости будем писать $O = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_{2g+2})$. Изоморфизмом обифолдов $O_g = \overline{\mathbb{C}}(z_1, z_2, \dots, z_{2g+2})$ и $O'_g = \overline{\mathbb{C}}(z'_1, z'_2, \dots, z'_{2g+2})$ называется конформное (дробно-линейное) отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, отображающее множество особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{2g+2}$ на множество особых точек $z'_1, z'_2, \dots, z'_{2g+2}$.

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g , и τ — гиперэллиптическая инволюция. Мы будем рассматривать факторпространство $O_g = S_g / \langle \tau \rangle$ как двумерный орбифолд, носителем которого является сфера Римана, а особыми точками — проекции $2g + 2$ точек Вейерштрасса при каноническом отображении $S_g \rightarrow O_g = S_g / \langle \tau \rangle$.

Приведем некоторые общие факты из теории римановых поверхностей [34], [46]. Пусть S_g и $S_{g'}$ — гиперэллиптические римановы поверхности, а τ и τ' — их гиперэллиптические инволюции. Тогда произвольное сюръективное голоморфное отображение $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ эквиинвариантно относительно действия инволюций. То есть справедливо равенство $f \circ \tau = \tau' \circ f$. Это означает, что f опускается до голоморфного отображения орбифолдов $\widehat{f} : O_g = S_g / \langle \tau \rangle \rightarrow O_{g'} = S_{g'} / \langle \tau' \rangle$. При этом \widehat{f} имеет ровно два поднятия до отображения S_g на $S_{g'}$, а именно, f и $f \circ \tau$. Кроме того, в случае $g = g'$ любой изоморфизм орбифолдов $\widehat{f} : O_g \rightarrow O_{g'}$ поднимается до изоморфизма римановых поверхностей $f : S_g \rightarrow S_{g'}$. В дальнейшем, мы будем неоднократно пользоваться указанными результатами.

Напомним, что всякая риманова поверхность S_2 рода 2, имеющая, по крайней мере, одну негиперэллиптическую инволюцию, представляется в виде $y^2 = x^6 + a_1x^4 + a_2x^2 + 1$. При этом, диэдральные инварианты

определяются как $u_1 = a_1^3 + a_2^3$ и $u_2 = 2a_1a_2$. Известно [42], что строение группы автоморфизмов римановой поверхности S_2 полностью определяется парой (u_1, u_2) . В частности, порядок $|Aut(S_2)| = 48$ тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) = (-250, 50)$, и $|Aut(S_2)| = 24$ тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) = (0, 0)$ или $(u_1, u_2) = (6750, 450)$. В случаях $Aut(S_2) = \mathbb{D}_6$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_4$ диэдральные инварианты удовлетворяют соотношениям $u_2^2 - 220u_2 - 16u_1 + 4500 = 0$ и $2u_1^2 - u_2^3 = 0$, соответственно. В последних двух случаях (см. [9]) уравнения поверхности S_2 бирациональными преобразованиями приводятся, соответственно, к виду $Y^2 = X^6 + X^3 + t$ или $Y^2 = X^5 + X^3 + tX$, где $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{4}\}$. Здесь t — так называемый абсолютный инвариант, однозначно определяющий риманову поверхность S_2 с точностью до конформной эквивалентности. В случае, когда группа $Aut(S_2)$ содержит только одну инволюцию (по классификации Больца это случаи $Aut(S_2) = \mathbb{Z}_2$ и $Aut(S_2) = \mathbb{Z}_{10}$), ее строение однозначно определяется набором инвариантов Больца [8] или их современной модификации, данной в работах Игуза [25]. Указанные соображения будут использованы в дальнейшем для вычисления групп автоморфизмов поверхностей рода 2.

Голоморфные отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$ и $f' : S'_3 \rightarrow S'_2$ называются эквивалентными, если существуют изоморфизмы римановых поверхностей $\alpha : S_3 \rightarrow S'_3$ и $\beta : S_2 \rightarrow S'_2$ такие, что $\beta \circ f = f' \circ \alpha$.

Следующее предложение дает простой критерий эквивалентности голоморфных отображений.

Предложение 1. Пусть $f : S_3 \rightarrow S_2$ и $f' : S'_3 \rightarrow S'_2$ — голоморфные отображения римановых поверхностей рода 3 на римановы поверхно-

сти рода 2. Обозначим через $\widehat{f} : O_3 \rightarrow O_2$ и $\widehat{f}' : O'_3 \rightarrow O'_2$ соответствующие им проекции на орбифолды. отображения f и f' эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм орбифолдов O_2 и O'_2 , переводящий критические значения функции \widehat{f} в критические значения функции \widehat{f}' .

Доказательство. Достаточность.

Обозначим через $p_i : S_i \rightarrow O_i$ и $p'_i : S'_i \rightarrow O'_i$, $i = 1, 2$ канонические проекции, индуцированные действием гиперэллиптической инволюции. Пусть $\widehat{\beta} : O_2 \rightarrow O'_2$ – изоморфизм орбифолдов, переводящий критические значения функции \widehat{f} в критические значения \widehat{f}' . Переходя к носителям орбифолдов или, что то же самое, игнорируя наличие на них особых точек, мы можем считать, что оба отображения \widehat{f} и \widehat{f}' являются двулиственными разветвленными накрытиями сферы \overline{S} над сферой \overline{S} . При этом, конформное отображение $\widehat{\beta}$ отображает критические значения одного из них в критические значения другого. Следовательно, $\widehat{\beta}$ поднимается до конформного отображения $\widehat{\alpha}$ носителя орбифолда O_3 на носитель орбифолда O'_3 . Покажем, что при этом отображении особые точки O_3 переходят в особые точки O'_3 . Действительно, в силу результатов, изложенных в параграфе 1.2 главы 1, особыми точками орбифолда O_3 являются прообразы особых точек O_2 при отображении \widehat{f} и его критические точки \widehat{f} (то есть прообразы его критических значений). Аналогично устроены и особые точки орбифолда O'_3 . По построению, $\widehat{\alpha}$ переводит прообразы особых точек O_2 в прообразы особых точек O'_2 . Далее, так как $\widehat{\beta}$ отображает критические значения \widehat{f} в критические значения \widehat{f}' , то $\widehat{\alpha}$ переводит критические точки \widehat{f} в критические точки \widehat{f}' . Следо-

вательно, $\widehat{\alpha}$ отображает особые точки O_3 на особые точки O'_3 и является изоморфизмом орбифолдов. Отсюда, оно поднимается до голоморфного отображения гиперэллиптических римановых поверхностей $\alpha : S_3 \rightarrow S'_3$. По аналогичным соображениям, $\widehat{\beta}$ поднимается до отображения римановых поверхностей $\beta : S_2 \rightarrow S'_2$.

Покажем, что отображения f и f' эквивалентны. Для этого проверим, что отображения f и $g = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha$ являются поднятиями одного и того же отображения \widehat{f} по каноническим проекциям p_2 и p_3 . То есть убедимся, что справедливы равенства $p_2 \circ f = \widehat{f} \circ p_3$ и $p_2 \circ g = \widehat{f} \circ p_3$. Первое равенство следует из определения \widehat{f} . Докажем второе равенство. По определению поднятий имеем тождества

$$p'_2 \circ f' = \widehat{f} \circ p'_3, p'_3 \circ \alpha = \widehat{\alpha} \circ p_3, p'_2 \circ \beta = \widehat{\beta} \circ p_2.$$

Откуда

$$p_2 \circ g = p_2 \circ \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha = \widehat{\beta}^{-1} \circ p'_2 \circ f' \circ \alpha = \widehat{\beta}^{-1} \circ \widehat{f} \circ p'_3 \circ \alpha = \widehat{\beta}^{-1} \circ \widehat{f} \circ \widehat{\alpha} \circ p_3 = \widehat{f} \circ p_3.$$

Поскольку оба отображения f и g являются поднятиями \widehat{f} , они либо совпадают, либо отличаются на гиперэллиптическую инволюцию τ римановой поверхности S_3 . В первом случае мы имеем равенство $f = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha$, а во втором $f = \beta^{-1} \circ f' \circ \alpha \circ \tau$. В обоих случаях отображения f и f' — эквивалентны, что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть отображения f и f' — эквивалентны. Это означает, что существуют изоморфизмы гиперэллиптических поверхностей $\alpha : S_3 \rightarrow S'_3$ и $\beta : S_2 \rightarrow S'_2$ такие, что $\beta \circ f = f' \circ \alpha$. Опуская указанные изоморфизмы до изоморфизмов орбифолдов $\widehat{\alpha} : O_3 \rightarrow O'_3$ и $\widehat{\beta} : O_2 \rightarrow O'_2$,

имеем равенства

$$p'_3 \circ \alpha = \widehat{\alpha} \circ p_3, p'_2 \circ \beta = \widehat{\beta} \circ p_2.$$

Аналогично, опуская отображения f и f' до отображений \widehat{f} и \widehat{f}' , получим

$$p_2 \circ f = \widehat{f} \circ p_3 \text{ и } p'_2 \circ f' = \widehat{f}' \circ p'_3.$$

Покажем, что отображение $\widehat{\beta} \circ \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}^{-1}$ наряду с \widehat{f}' является проекцией отображения $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = f'$. Действительно,

$$\widehat{\beta} \circ \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}^{-1} \circ p'_3 = \widehat{\beta} \circ \widehat{f} \circ p_3 \circ \alpha^{-1} = \widehat{\beta} \circ p_3 \circ f \circ \alpha^{-1} = p'_2 \circ \beta \circ f \circ \alpha^{-1} = p'_2 \circ f'.$$

В силу единственности проекции имеем равенство $\widehat{\beta} \circ \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}^{-1} = \widehat{f}'$. Последнее равенство означает, что отображение $\widehat{\alpha}$ отображает критические точки отображения \widehat{f} в критические точки \widehat{f}' , а отображение $\widehat{\beta}$ переводит критические значения \widehat{f} в критические значения \widehat{f}' . Необходимость установлена.

Нам потребуется два важных следствия из доказанного предложения. Дадим два следующих определения.

Правильным мебиусовым шестиугольником называется набор из шести точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, которые при подходящем дробно-линейном преобразовании переходят в точки $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5$, где $\varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — первообразный корень шестой степени из единицы.

Правильным мебиусовым октаэдром называется набор из шести точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, которые при подходящем дробно-линейном преобразовании переходят в точки $0, -1, -i, 1, i, \infty$.

Напомним, что окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$ называется либо окружность, либо прямая, проходящая через бесконечно удаленную точку.

Из приведенных выше определений следует, что точки правильного мебиусова шестиугольника лежат на общей окружности, и существует мебиусов автоморфизм шестого порядка, циклически переставляющий эти точки. Точки правильного мебиусова октаэдра лежат на трех окружностях, образующих остов октаэдра. При этом, группа мебиусовых автоморфизмов октаэдра действует транзитивно на множестве его вершин и на множестве его ребер.

Лемма 5. *С точностью до эквивалентности, существует не более двух сюръективных голоморфных отображений вида $f : S_3 \rightarrow S_2$, где S_3 — риманова поверхность рода 3, а S_2 риманова поверхность рода 2 с группой автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 48$.*

Доказательство.

По классификации Больца поверхность S_2 в этом случае представляется уравнением $u^2 = v(v^4 - 1)$. Это означает, что мероморфная функция v отображает риманову поверхность S_2 на орбифолд O_2 , особыми точками которого являются вершины правильного мебиусова октаэдра $0, -1, -i, 1, i, \infty$. Пусть $f : S_3 \rightarrow S_2$ — произвольное голоморфное отображение римановой поверхности S_3 на риманову поверхность S_2 , а $\hat{f} : O_3 \rightarrow O_2$ — его проекция на орбифолды. Тогда критическими значениями \hat{f} служат либо две смежных вершины октаэдра, либо две его противоположащих вершины. Эти два случая, очевидно, не сводятся друг к другу с помощью дробно-линейного преобразования, оставляющего множество вершин октаэдра инвариантным. В силу предложения 1, отобра-

жения f в указанных двух случаях неэквивалентны.

Отметим, что обе указанные возможности реализуются (теорема 5).

Лемма 6. *С точностью до эквивалентности, существует не более трех сюръективных голоморфных отображений вида $f : S_3 \rightarrow S_2$, где S_3 — риманова поверхность рода 3, а S_2 — риманова поверхность рода 2 с группой автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 24$.*

Доказательство.

По классификации Больца поверхность S_2 в этом случае представляется уравнением $u^2 = v^6 - 1$. Это означает, что мероморфная функция v отображает риманову поверхность S_2 на орбифолд O_2 , особыми точками которого являются вершины правильного мебиусова шестиугольника. Пусть $f : S_3 \rightarrow S_2$ — произвольное голоморфное отображение римановой поверхности S_3 на риманову поверхность S_2 , а $\hat{f} : O_3 \rightarrow O_2$ — его проекция на орбифолды. Тогда критическими значениями \hat{f} служат либо две смежных вершины шестиугольника, либо две его противоположных вершины, либо две вершины, которые несмежные и непротиволежащие. Эти три случая, очевидно, не сводятся друг к другу с помощью дробно-линейного преобразования, оставляющего множество вершин шестиугольника инвариантным. В силу предложения 1, отображения f во всех трех указанных случаях попарно неэквивалентны.

Ниже (см. случаи 5а, 7, 8а) будет показано, что все три отмеченных в лемме возможности действительно реализуются.

2.2.2 Полная классификация голоморфных отображений

В данном параграфе будет дано полное описание голоморфных отображений римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два. Для каждой пары римановых поверхностей S_3 и S_2 , указанных в предыдущем параграфе, мы рассмотрим базисное отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ из каждого класса эквивалентности. Затем, домножая f на подходящие автоморфизмы поверхности S_3 (или S_2), получим полный список голоморфных отображений.

1а. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_4$

В этом случае поверхности S_3 и S_2 задаются уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1 \text{ и } S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 1).$$

Согласно предыдущему параграфу, множество голоморфных отображений $Hol(S_3, S_2)$ состоит из единственного класса эквивалентности, представителем которого служит отображение $(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{2iz}{(z^2+1)^3}w, \frac{z^2-1}{z^2+1}\right)$.

Покажем, что все автоморфизмы S_2 поднимаются по отображению f до автоморфизмов S_3 . Действительно, группа автоморфизмов $Aut(S_2)$ изоморфна $\mathbb{D}_4 = \langle \alpha, \beta : \alpha^4 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1 \rangle$, где $\alpha : (u, v) \rightarrow \left(-\frac{iu}{v^3}, \frac{1}{v}\right)$, $\beta : (u, v) \rightarrow (u, -v)$. В качестве поднятий α и β на поверхности S_3 рассмотрим автоморфизмы $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (w, iz)$, $\tilde{\beta} : (w, z) \rightarrow \left(\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z}\right)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ f$ и

$f \circ \tilde{\beta} = \beta \circ f$. Другими словами, автоморфизмы α и β римановой поверхности S_2 поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ римановой поверхности S_3 , соответственно.

Напомним [33], что полная группа автоморфизмов S_3 изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$, где группы $\mathbb{Z}_2 = \langle \tilde{\tau} : \tilde{\tau}^2 = 1 \rangle$ и $\mathbb{S}_4 = \langle \tilde{\alpha}^4 = \tilde{\gamma}^3 = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma})^2 = 1 \rangle$, порождаются гиперэллиптической инволюцией $\tilde{\tau} : (w, z) \rightarrow (-w, z)$ и отображениями $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (w, iz)$ и $\tilde{\gamma} : (w, z) \rightarrow (-\frac{4}{(z+i)^4}w, \frac{i-z}{i+z})$.

По построению имеем $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f(w, z) = (-w, -z)$ – накрывающая инволюция отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$. Заметим, что $\gamma_f = \tilde{\alpha}^2\tilde{\tau}$. Для любых двух автоморфизмов $\alpha, \beta \in \text{Aut}(S_3)$ из равенства $f \circ \alpha = f \circ \beta$ следует, что либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = \gamma_f \circ \beta$. Отсюда, полный список элементов множества $\text{Hol}(S_3, S_2)$ имеет вид $\{f \circ s, s \in \mathcal{S}\}$, где $\mathcal{S} = \{\tilde{\alpha}^k, \tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^3\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k, \tilde{\alpha}^l\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k\}_{k,l=0,1,2,3}$ – шрейеровская система представителей классов смежности группы $\text{Aut}(S_3)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2 = \langle \gamma_f \rangle$. Это множество состоит из 24 элементов.

Таким образом, в рассматриваемом случае $|\text{Hol}(S_3, S_2)| = 24$.

1b. Случай $\text{Aut}(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$ и $\text{Aut}(S_2) = \mathbb{D}_2$

В данном случае поверхности S_3 и S_2 представлены уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 + 14z^4 + 1 \text{ и } S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 - 0.75).$$

По предыдущему параграфу, единственный класс эквивалентности множества $\text{Hol}(S_3, S_2)$ представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^3}w, \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z} \right) \right).$$

В этом случае группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ та же, что и в предыдущем пункте, а $Aut(S_2)$ порождается двумя инволюциями $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$ и $\sigma : (u, v) \rightarrow (u, -v)$. Каждая из указанных инволюций, очевидно, поднимается до автоморфизмов $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\sigma}$ поверхности S_3 , где $\tilde{\tau} : (w, z) \rightarrow (-w, z)$ и $\tilde{\sigma} : (w, z) \rightarrow (-w, -z)$. Заметим, что $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (\frac{iw}{z^6}, \frac{i}{z})$. При этом, $\gamma_f = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ те же что и выше.

Аналогично предыдущему, заключаем, что множество

$$Hol(S_3, S_2) = \{f\tilde{\alpha}^k, f\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^3\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k, f\tilde{\alpha}^l\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}^k\}_{k,l=0,1,2,3}.$$

Оно содержит 24 голоморфных отображения S_3 на S_2 .

2а. Случай $|Aut(S_3)| = 32$ и $|Aut(S_2)| = 48$

В рассматриваемом случае поверхности S_3 и S_2 задаются уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 - 1 \text{ и } S_2 : u^2 = v(v^4 - 1).$$

Множество $Hol(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, представленного отображением

$$(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2).$$

Группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ порождена преобразованиями $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (w, \sqrt{i}z)$, $\tilde{\beta} : (w, z) \rightarrow (\frac{iw}{z^4}, \frac{1}{z})$ и гиперэллиптической инволюцией $\tilde{\tau} : (w, z) \rightarrow (-w, z)$.

Непосредственно убеждаемся, что автоморфизмы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\tau}$ поверхности S_3 опускаются по отображению f до автоморфизмов $\alpha : (u, v) \rightarrow (\sqrt{i}u, iv)$, $\beta : (u, v) \rightarrow (\frac{iw}{v^3}, \frac{1}{v})$ и $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$. При этом, α , β и τ порождают подгруппу \mathbb{D}_8 группы $Aut(S_2)$. Заметим, что $|Aut(S_2) : \mathbb{D}_8| = 3$.

В данном случае поверхность S_2 имеет максимально возможную группу автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 48$. Поскольку $Hol(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, а все автоморфизмы S_3 опускаются по отображению f до автоморфизмов S_2 , имеем

$$\begin{aligned} |Hol(S_3, S_2)| &= |\{\alpha \circ f \circ \beta : \alpha \in Aut(S_2), \beta \in Aut(S_3)\}| \\ &= |\{\alpha \circ f : \alpha \in Aut(S_2)\}| = |Aut(S_2)| = 48. \end{aligned}$$

2b. Случай $|Aut(S_3)| = 32$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_2$

Поверхности S_3 и S_2 , соответствующие этому случаю, заданы следующими уравнениями

$$S_3 : w^2 = z^8 - 1 \text{ и } S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + 0.125).$$

Единственный класс эквивалентности множества $Hol(S_3, S_2)$ представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - \varepsilon^2}{8z^3\varepsilon^3} w, \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{z} \right) \right), \text{ где } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{16}}.$$

Группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ та же, что и в предыдущем пункте. Отметим, что $Aut(S_2)$ порождается инволюциями $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$ и $\sigma : (u, v) \rightarrow (u, -v)$. Они, соответственно, поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\tau} : (w, z) \rightarrow (-w, z)$ и $\tilde{\sigma} : (w, z) \rightarrow (-w, -z)$ поверхности S_3 . Заметим, что $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (\frac{-iw}{z^4}, \frac{\sqrt{i}}{z})$. Имеем $\gamma_f = \tilde{\tau}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, где $\tilde{\tau}$, $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ те же, что и в пункте 2a.

Далее, можно заключить, что полный список элементов множества $Hol(S_3, S_2)$ имеет вид $\{f \circ s, s \in \mathcal{S}\}$, где \mathcal{S} — произвольная система представителей классов смежности группы $Aut(S_3)$ по подгруппе $\mathbb{Z}_2 = \langle \gamma_f \rangle$.

Следовательно, $|Hol(S_3, S_2)| = |\{f \circ \beta : \beta \in \mathcal{S}\}| = |Aut(S_3)/\langle \gamma_f \rangle| = 16$.

3. Случай $|Aut(S_3)| = 24$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_4$

Рассматриваемые римановы поверхности представляются уравнениями

$$S_3 : w^2 = z(z^6 - 1) \text{ и } S_2 : u^2 = v(v^2 + 3)(v^2 + 4).$$

Множество $Hol(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности, порожденного отображением

$$f(w, z) = \left(\frac{z^2 + 1}{z^3} w, z - \frac{1}{z} \right).$$

В данном случае группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ порождена двумя элементами $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (\varepsilon_{12} w, \varepsilon_6 z)$, и $\tilde{\beta} : (w, z) \rightarrow (\frac{iw}{z^4}, \frac{1}{z})$, где $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i}{k}}$.

Группа автоморфизмов $Aut(S_2)$ имеет следующие порождающие $\alpha : (u, v) \rightarrow (iu, -v)$ и $\beta : (u, v) \rightarrow (\frac{(12)^{\frac{3}{4}} u}{v^3}, \frac{\sqrt{12}}{v})$. Заметим, что α поднимается по отображению f до автоморфизма S_3 равного $\tilde{\alpha}^9$, а автоморфизм β не поднимается на S_3 . В свою очередь, автоморфизм третьего порядка $\tilde{\alpha}^4$ не опускается до автоморфизма поверхности S_2 , поскольку $Aut(S_2)$ содержит элементы только четных порядков.

Накрывающая инволюция отображения f имеет вид $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (-\frac{w}{z^4}, -\frac{1}{z})$. Так как $\gamma_f = \tilde{\alpha}^3 \tilde{\beta}$, то в качестве шрейеровской системы представителей смежных классов $Aut(S_3)$ по подгруппе $\langle \gamma_f \rangle$ можно выбрать множество $\mathcal{S} = \{\tilde{\alpha}^k\}_{k=0,1,\dots,11}$. В конечном итоге, получим, что семейство голоморфных отображений записывается в виде $Hol(S_3, S_2) = \{\beta^j \circ f \tilde{\alpha}^k\}_{j=0,1, k=0,1,\dots,11}$. Это множество содержит 24 элемента.

5а. Случай $|Aut(S_3)| = 16$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_4$, $|Aut(S_2)| = 24$

Согласно предыдущему параграфу уравнения римановых поверхностей имеют вид

$$S_3 : w^2 = z^8 + az^4 + 1 \text{ и } S_2 : u^2 = v(v^4 + av^2 + 1).$$

При этом, единственный класс эквивалентности голоморфных отображений S_3 на S_2 представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = (zw, z^2).$$

В данном случае, группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ порождена следующими элементами $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (w, iz)$, $\tilde{\beta} : (w, z) \rightarrow (\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z})$ и $\tilde{\tau} : (w, z) \rightarrow (-w, z)$. Рассмотрим автоморфизмы $\alpha : (u, v) \rightarrow (iu, -v)$, $\beta : (u, v) \rightarrow (\frac{u}{v^3}, \frac{1}{v})$ и $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$ римановой поверхности S_2 . Заметим, что $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\tau}$ опускаются по отображению f на S_2 до автоморфизмов α , β и τ , соответственно.

Следовательно, множество голоморфных функций $Hol(S_3, S_2)$ представимо следующим образом

$$Hol(S_3, S_2) = \{\alpha \circ f, \alpha \in Aut(S_2)\}.$$

Отсюда, общее количество отображений равно числу элементов группы $Aut(S_2)$. Так как порядок $Aut(S_2)$ равен 8 при $a \neq \pm \frac{10}{3}$ и равен 24 при $a = \pm \frac{10}{3}$, то мы имеем, соответственно $|Hol(S_3, S_2)| = 8$ и $|Hol(S_3, S_2)| = 24$. В последнем случае, при $a = -\frac{10}{3}$ особые точки орбиформы O_2 образуют правильный мебиусов шестиугольник $\{-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, \infty\}$.

Отметим, критическими значениями отображения $\widehat{f} : z \rightarrow z^2$ являются точки 0 и ∞ , являющиеся противоположащими вершинами указанного шестиугольника. Случай $a = \frac{10}{3}$ приводит к аналогичной ситуации.

5b. Случай $|Aut(S_3)| = 16$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$

$$S_3 : w^2 = z^8 + az^4 + 1 \text{ и } S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + \frac{a+2}{16}).$$

$$(u, v) = f(w, z) = (\frac{z^2 - 1}{8z^3}w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})).$$

В этом случае, группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ порождена элементами $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\tau}$, теми же, что и в предыдущем случае. Пусть $a \neq -34 \pm 16\sqrt{5}, 14(128 \pm 31\sqrt{17})$. Тогда группа $Aut(S_2) = \mathbb{D}_2$ и порождается элементами $\alpha : (u, v) \rightarrow (u, -v)$ и $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$, которые поднимаются до автоморфизмов $\widetilde{\tau}\widetilde{\alpha}^2$ и $\widetilde{\tau}$, соответственно. Накрывающая инволюция находится из соотношения $f \circ \gamma_f = f$ и имеет следующий вид $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (-\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z})$. При этом, верно равенство $\gamma_f = \widetilde{\tau}\widetilde{\beta}$. В качестве шрейеровской системы представителей классов смежности $Aut(S_3)$ по подгруппе $\langle \gamma_f \rangle$ выберем множество $\mathcal{S} = \{\widetilde{\alpha}^k \widetilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3}$. В результате, получим, что множество $Hol(S_3, S_2) = \{f \circ \widetilde{\alpha}^k \widetilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3}$ состоит из 8 элементов.

Предположим теперь, что $a = -34 \pm 16\sqrt{5}$. Как было отмечено в предыдущем параграфе, при указанном выборе параметра группа автоморфизмов $Aut(S_2) = \mathbb{D}_4$. Она порождается автоморфизмами вида $\alpha : (u, v) \rightarrow (u, -v)$ и $\varphi : (u, v) \rightarrow (\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{5}}}{v^3}u, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2v})$. Нетрудно проверить, что $\varphi^2 = \tau$ — гиперэллиптическая инволюция поверхности S_2 . При

этом, φ не поднимается по отображению f до автоморфизма поверхности S_3 . Множество голоморфных отображений S_3 на S_2 имеет следующую структуру $Hol(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j, \varphi \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3}$ и состоит из 16 элементов.

Пусть теперь $a = 14(128 + 31\sqrt{17})$. Случай $a = 14(128 - 31\sqrt{17})$ рассматривается аналогичным образом. Бирациональное преобразование $u = \frac{Y\sqrt{771+187\sqrt{17}}}{(X+1)^3}, v = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{17}}{4} \frac{X-1}{X+1}}$ позволяет представить уравнение римановой поверхности S_2 в виде $Y^2 = X^6 + sX^3 + 1$, где $s = 2(217 - 54\sqrt{17})$. По классификации Больца $Aut(S_2) = \mathbb{D}_6$. Автоморфизм третьего порядка $(Y, X) \rightarrow (Y, \exp(\frac{2\pi i}{3})X)$ в переменных (u, v) имеет вид

$$\gamma : (u, v) \rightarrow \left(-\frac{16\sqrt{95 + 23\sqrt{17}}u}{(\sqrt{5 + \sqrt{17}} + 2iv)^3}, \frac{3i\sqrt{5 + \sqrt{17}} + 2v}{2 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{17}}v} \right).$$

Группа $Aut(S_2)$, в этом случае, порождается указанными выше инволюциями α, τ и дополнительным автоморфизмом γ .

Заметим, что группа автоморфизмов $Aut(S_3)$ имеет порядок 16 и, следовательно, не содержит элементов нечетного порядка. Откуда элементы γ и γ^2 не поднимаются до автоморфизмов поверхности S_3 . Автоморфизмы α и τ , как и выше, поднимаются до автоморфизмов $\tilde{\tau}\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{\tau}$, соответственно. Аналогично случаю $2a$, заключаем, что множество всех голоморфных отображений имеет вид $Hol(S_3, S_2) = \{\gamma^l \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3, l=0,1,2}$ и состоит из 24 элементов.

5с. Случай $|Aut(S_3)| = 16$ и $Aut(S_2) = \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$

$$S_3 : w^2 = z^8 + az^4 + 1 \text{ и } S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^4 - v^2 + \frac{2-a}{16}).$$

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{\sqrt{i}(z^2 - i)}{8z^3} w, \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{i}}{z} \right) \right).$$

Группы автоморфизмов S_3 и S_2 имеют то же аналитическое строение, что и в предыдущем пункте. Порождающие α и τ группы $Aut(S_2)$, по-прежнему, поднимаются по отображению f до автоморфизмов $\tilde{\tau}\tilde{\alpha}^2$ и $\tilde{\tau}$, соответственно. Однако, накрывающая инволюция отображения f в этом случае имеет вид $\gamma_f : (w, z) \rightarrow (\frac{w}{z^4}, \frac{i}{z})$.

Как и в предыдущем случае, при $a = 34 \mp 16\sqrt{5}$ группа автоморфизмов S_2 изоморфна \mathbb{D}_4 и порождается элементами вида $\alpha : (u, v) \rightarrow (u, -v)$ и $\varphi : (u, v) \rightarrow (\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{5}}}{v^3} u, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2v})$.

При этом, $Hol(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j, \varphi \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3}$ и состоит из 16 элементов.

При $a \neq -14(128 \pm 31\sqrt{17})$ шрейеровская система представителей полностью совпадает с аналогичным множеством из пункта 5b: $\mathcal{S} = \{\tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3}$. В связи с этим, множество голоморфных отображений может быть записано как $Hol(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3}$ и состоит из 8 элементов.

Аналогично предыдущему, при $a = -14(128 \pm 31\sqrt{17})$ множество голоморфных отображений имеет вид $Hol(S_3, S_2) = \{\gamma^l \circ f \circ \tilde{\alpha}^k \tilde{\beta}^j\}_{j=0,1, k=0,1,2,3, l=0,1,2}$, где γ — дополнительный автоморфизм третьего порядка. Отсюда, $Hol(S_3, S_2)$ состоит из 24 элементов.

Замечание 3. Основное отличие случаев 5b и 5c состоит в том, что образы $S_2 = f(S_3)$ фиксированной поверхности S_3 при соответствующих отображениях f конформно неэквивалентны.

6. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{D}_6$ и $Aut(S_2) = \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_2$

$$S_3 : w^2 = z(z^6 + az^3 + 1) \text{ и } S_2 : u^2 = (v^2 - 4)(v^3 - 3v + a).$$

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 - 1}{z^3} w, z + \frac{1}{z} \right).$$

По классификации Больца [8] при $a \neq \pm 322, \pm 22\sqrt{2}i$ и $\pm \frac{7i}{2\sqrt{2}}$ риманова поверхность S_2 не содержит нетривиальных автоморфизмов, отличных от гиперэллиптической инволюции. При $a = \pm 322, \pm 22\sqrt{2}i, \pm \frac{7i}{2\sqrt{2}}$ уравнение поверхности S_2 приводится к виду $y^2 = x^6 + a_1x^4 + a_2x^2 + 1$ и S_2 имеет дополнительный автоморфизм второго порядка $\delta : (y, x) \rightarrow (y, -x)$. Вычисляя диэдральные инварианты $u_1 = a_1^3 + a_2^3, u_2 = 2a_1a_2$ указанной кривой, убеждаемся, что в этом случае группа $Aut(S_2) = \mathbb{D}_2$. Группа $Aut(S_3)$ порождена элементами $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (\varepsilon_6 w, \varepsilon_3 z)$ и $\tilde{\beta} : (w, z) \rightarrow (\frac{w}{z^4}, \frac{1}{z})$.

Если $Aut(S_2) = \mathbb{Z}_2$, то единственным нетривиальным элементом группы $Aut(S_2)$ является гиперэллиптическая инволюция $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$, которая поднимается до гиперэллиптической инволюции $\tilde{\tau} = \tilde{\alpha}^3$ поверхности S_3 . При этом $\gamma_f = \tilde{\alpha}^3 \tilde{\beta}$, и имеет место разложение $Aut(S_3) = \bigcup_{k=0}^5 \langle \gamma_f \rangle \tilde{\alpha}^k$. Следовательно, множество $Hol(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k\}_{k=0,1,\dots,5}$ состоит из 6 элементов.

В случае $Aut(S_2) = \mathbb{D}_2$ имеем $Hol(S_3, S_2) = \{f \circ \tilde{\alpha}^k, \delta \circ f \circ \tilde{\alpha}^k\}_{k=0,1,\dots,5}$. Это множество содержит 12 элементов.

7. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$

$$S_3 : w^2 = z(z^2 - 1)(z^4 + az^2 + 1) \text{ и } S_2 : u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + a + 2)$$

Единственного класс эквивалентности $Hol(S_3, S_2)$ представлен отображением

$$(u, v) = f(w, z) = \left(\frac{z^2 + 1}{z^3} w, z - \frac{1}{z} \right).$$

Группа $Aut(S_3)$ порождена элементами $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (-iw, -z)$ и $\tilde{\beta} : (w, z) \rightarrow (\frac{iw}{z^4}, \frac{1}{z})$. Непосредственно убеждаемся, что $f \circ \gamma_f = f$, где $\gamma_f = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$. Порождающими элементами группы $Aut(S_2)$ являются автоморфизмы $\alpha : (u, v) \rightarrow (iu, -v)$ и $\beta : (u, v) \rightarrow (\frac{\sqrt{8(a+2)}^{\frac{3}{4}}u}{v^3}, \frac{2\sqrt{a+2}}{v})$.

Поскольку группа $Aut(S_3)$ абелева, то накрывающая инволюция γ_f отображения f перестановочна со всеми ее элементами. Это означает, что все элементы $Aut(S_3)$ опускаются до автоморфизмов поверхности S_2 .

При этом, α поднимается по отображению f до автоморфизма $\tilde{\alpha}$, а β не имеет поднятия на S_3 . По аналогии с предыдущим случаем имеет место разложение $Aut(S_3) = \bigcup_{k=0}^3 \langle \gamma_f \rangle \tilde{\alpha}^k$. Следовательно, множество голоморфных отображений S_3 на S_2 имеет вид $Hol(S_3, S_2) = \{\theta \circ f, \theta \in Aut(S_2)\}$. Откуда $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)|$. В силу предыдущего параграфа, при $a \neq -6, -\frac{14}{9}, 34$ имеем $|Aut(S_2)| = 8$. Следовательно, $|Hol(S_3, S_2)| = 8$.

При $a = -\frac{14}{9}, 34$, по предыдущему параграфу имеем $|Aut(S_2)| = 24$. В результате, получим $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)| = 24$. Заметим, что оба случая бирационально эквивалентны друг другу. Если $a = 34$, то урав-

нение поверхности S_2 имеет вид $u^2 = v(v^2 + 4)(v^2 + 36)$. Особыми точками орбиформы O_2 будут точки $-6i, -2i, 0, 2i, 6i, \infty$. Они образуют правильный мебиусов шестиугольник. Критическими значениями отображения $v = \widehat{f}(z) = z - \frac{1}{z}$ являются точки $\pm 2i$. Заметим, что они не являются смежными или противоположными вершинами шестиугольника. Следовательно, по предложению 1, отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ не эквивалентно соответствующему отображению из пункта 5а.

При $a = -6$ уравнение поверхности S_2 представляет из себя кривую Больца с группой автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 48$. Уравнение поверхности S_3 имеет вид $w^2 = z(z^2 - 1)(z^4 - 6z^2 + 1)$ и бирациональным преобразованием $w = \tilde{w} \frac{4\sqrt{i}}{(1+\tilde{z})^4}, z = i \frac{1-\tilde{z}}{1+\tilde{z}}$ приводится к уравнению $\tilde{w}^2 = \tilde{z}^8 - 1$. Это случай 2а, уже рассмотренный выше.

8. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$

В этом случае поверхность S_3 задается уравнением

$$S_3 : w^2 = (z^4 + az^2 + 1)(z^4 + bz^2 + 1), \quad a \neq \pm b, \quad a, b \neq \pm 2$$

и возникают следующие три типа голоморфных отображений:

а. $f(w, z) = \left(\frac{8z}{k(z^2-1)^3} w, \frac{z^2+1}{z^2-1} \right)$, где $k = \sqrt{(a+2)(b+2)}$,
 $f : S_3 \rightarrow S_2$, а $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{a-2}{a+2})(v^2 - \frac{b-2}{b+2})$.

б. $g(w, z) = \left(\frac{z^2-1}{8z^3} w, \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \right)$, $g : S_3 \rightarrow S_2$,
где $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{2-a}{4})(v^2 - \frac{2-b}{4})$.

в. $h(w, z) = \left(\frac{i(z^2+1)}{8z^3} w, \frac{i}{2}(z - \frac{1}{z}) \right)$, $h : S_3 \rightarrow S_2$,
где $S_2 : u^2 = (v^2 - 1)(v^2 - \frac{2+a}{4})(v^2 - \frac{2+b}{4})$.

Из непосредственного вычисления диэдральных инвариантов по формулам, приведенным в [42], заключаем, что в общей ситуации образы $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ являются попарно различными, то есть конформно неэквивалентными римановыми поверхностями. Это, в частности, имеет место если порядок группы автоморфизмов одной из римановых поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$, $h(S_3)$ равен 48 или 24.

Ситуации, когда $f(S_3) = g(S_3) \neq h(S_3)$, $f(S_3) = h(S_3) \neq g(S_3)$ и $f(S_3) \neq g(S_3) = h(S_3)$ описаны в леммах 2, 3 и 4, соответственно.

8а. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ и $S_2 = f(S_3)$

Как и в случае 7, группа автоморфизмов поверхности $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ – абелева. Следовательно, все автоморфизмы поверхности S_3 опускаются до автоморфизмов поверхности S_2 . Это позволяет заключить, что справедливо равенство $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)|$. Вычисляя диэдральные инварианты поверхности S_2 , убеждаемся, что порядок ее группы автоморфизмов $Aut(S_2)$ может принимать значения, равные 4, 8, 12, 24 и 48.

Рассмотрим случай наиболее богатой группы автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 48$. В силу сказанного выше (см. также [42]), это соответствует следующей системе уравнений на диэдральные инварианты $(u_1, u_2) = (-250, 50)$. Решая ее, находим четыре решения для параметров a и b . Ими будут пары

$$(a, b) = \left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right).$$

Во всех указанных случаях, уравнение поверхности S_3 имеет вид $w^2 = z^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}z^6 + 5z^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}z^2 + 1$, а S_2 – кривая Больца с максимально возмож-

ной группой автоморфизмов. При этом $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)| = 48$. Заметим, что найденная поверхность S_3 отлична от поверхности S_3 , рассмотренной в пункте 2а. Действительно, в случае 2а поверхность S_3 обладает автоморфизмом $\tilde{\alpha}$ восьмого порядка, который опускается до автоморфизма α поверхности S_2 также имеющего восьмой порядок. В текущей ситуации на поверхности S_2 не существует автоморфизма восьмого порядка, который можно поднять на поверхность S_3 . Этот факт непосредственно проверяется с использованием явного вида отображения $f : S_3 \rightarrow S_2$, описанного в пункте 8а предыдущего параграфа. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем $|Hol(S_3, S_2)| = 48$.

Теперь рассмотрим случай $|Aut(S_2)| = 24$. Ему соответствуют следующие уравнения на диэдральные инварианты $(u_1, u_2) = (0, 0)$ и $(u_1, u_2) = (6750, 450)$. При разрешении первой системы получаем, что $a = \pm b$. В силу условий, наложенных выше на параметры a и b , это невозможно. Решая вторую систему уравнений при условии $a \neq \pm b$, получим, что допустимыми парами параметров являются

$$(a, b) = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{7}{2\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{2\sqrt{3}}\right), \left(\frac{7}{2\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{7}{2\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

При всех указанных параметрах уравнение поверхности S_3 приводится к виду $w^2 = z^8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}z^6 + \frac{20}{\sqrt{3}}z^4 + \frac{5\sqrt{3}}{2}z^2 + 1$. При этом $|Hol(S_3, S_2)| = 24$. Критическими значениями отображения $\hat{f} : z \rightarrow \frac{z^2+1}{z^2-1}$ служат точки ± 1 . Они являются смежными вершинами правильного мебиусова шестиугольника $\{\pm 1, \pm\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}, \pm\sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\}$, образованного особыми точками орбифолда O_2 . Следовательно, в силу предложения 1, указанный случай неэквивалентен случаям 5а и 7, рассмотренным выше.

В оставшихся случаях имеет место неравенство $|Aut(S_2)| \leq 12$. Согласно теореме 1, множество $Hol(S_3, S_2)$ состоит из не более чем из 2 классов эквивалентности. Следовательно $|Hol(S_3, S_2)| \leq 2|Aut(S_2)| \leq 24$.

8b. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ и $S_2 = g(S_3)$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, заключаем, что $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)|$. Из вычисления диэдральных инвариантов следует, что S_2 является поверхностью с максимальной группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда, с точностью до перестановки a и b , пара параметров (a, b) принадлежит множеству $\{(14 \pm 8\sqrt{2}, -66 \mp 48\sqrt{2}), (14 \pm 8\sqrt{2}, 14 \mp 8\sqrt{2})\}$. Если неупорядоченная пара $\{a, b\}$ совпадает с парой $\{14 \pm 8\sqrt{2}, 14 \mp 8\sqrt{2}\}$, то уравнение римановой поверхности S_3 приобретает вид $w^2 = z^8 + 28z^6 + 70z^4 + 28z^2 + 1$. Заменой переменных $w = \frac{8\sqrt{2}}{(x-\sqrt[4]{i})^4}y$, $z = \frac{x+\sqrt[4]{i}}{x-\sqrt[4]{i}}$ оно приводится к виду $y^2 = x^8 - 1$. Тем самым, мы возвращаемся к случаю 2а, рассмотренному выше.

Если пара $\{a, b\}$ совпадает с парой $\{148\sqrt{2}, -66 + 48\sqrt{2}\}$, то замена переменных $w = \frac{16\sqrt{-7+5\sqrt{2}}}{(x-1)^4}y$, $z = \frac{x+1}{x-\sqrt[4]{i}}$ приводит уравнение кривой S_3 к виду $y^2 = x^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^6 + 5x^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2 + 1$. Это случай 8а, разобранный в предыдущем пункте.

Здесь, как и в предыдущем пункте 8а, справедливо неравенство $|Hol(S_3, S_2)| \leq 24$. Надо отметить, что ситуация, когда $|Aut(S_3)| = 24$ уже встречалась трижды. Это случаи 5а, 7 и 8а. Поэтому, в силу леммы 6, она здесь не реализуется.

Следовательно, на порядок группы автоморфизмов поверхности S_2 имеет место оценка $|Aut(S_2)| \leq 12$.

8с. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2^3$ и $S_2 = h(S_3)$

Данный случай сводится к предыдущему заменой пары (a, b) на пару $(-a, -b)$. При этом, $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)| = 48$ тогда и только тогда, когда, с точностью до перестановки a и b , пара параметров (a, b) принадлежит множеству $\{(10 - 8\sqrt{2}, -70 + 48\sqrt{2}), (10 + 8\sqrt{2}, 10 - 8\sqrt{2}), (10 + 8\sqrt{2}, -70 - 48\sqrt{2})\}$. В противном случае, выполняется неравенство $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)| \leq 24$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда среди поверхностей $f(S_3)$, $g(S_3)$ и $h(S_3)$ есть равные, то есть конформно эквивалентные. Прежде всего, исключим случай совпадения $f(S_3) = g(S_3) = h(S_3)$. Предположение, что все три образа могут совпадать и непосредственное вычисление диэдральных инвариантов (u_1, u_2) в этом случае приводят к тому, что поверхность S_3 задается уравнением $w^2 = z^8 + 14z^4 + 1$. Это случай 2а, рассмотренный выше. Из рассмотрения пунктов 8а, 8б и 8с делаем следующий вывод, что если одна из поверхностей имеет максимально возможную группу автоморфизмов или состоит из 24 автоморфизмов, то все они попарно различны. При этом, если $S_2 = f(S_3) = g(S_3) \neq h(S_3)$, то имеет место оценка $|Hol(S_3, S_2)| = 2|Aut(S_2)| \leq 2 \cdot 12 = 24$. Этот случай реализуется при выполнении равенства $(a + 2)(b + 2) = 16$. Аналогично, при $S_2 = f(S_3) = h(S_3) \neq g(S_3)$, справедливо неравенство $|Hol(S_3, S_2)| = 2|Aut(S_2)| \leq 2 \cdot 12 = 24$. Верхняя оценка достигается при $(a - 2)(b - 2) = 16$. Последняя логическая ситуация $S_2 = g(S_3) = h(S_3) \neq f(S_3)$, реализуется

лишь для конечного набора параметров $\{a, b\}$. При этом, по-прежнему, справедлива оценка $|Hol(S_3, S_2)| \leq 24$.

10. Случай $Aut(S_3) = \mathbb{D}_2$ и $Aut(S_2) = \mathbb{Z}_2$

Поверхности S_3 и S_2 задаются следующими уравнениями $S_3 : w^2 = (z^2 - 1)(z^6 + az^4 + bz^2 + c)$ и $S_2 : u^2 = v(v - 1)(v^3 + av^2 + bv + c)$, где параметры a, b, c находятся в общем положении. Группа $Aut(S_3)$ порождена двумя инволюциями $\tilde{\tau} : (w, z) \rightarrow (-w, z)$ (гиперэллиптическая инволюция) и $\tilde{\alpha} : (w, z) \rightarrow (w, -z)$. Отображение $f : S_3 \rightarrow S_2$ имеет вид $f : (w, z) \rightarrow (zw, z^2)$. Накрывающей инволюцией для отображения f является $\tilde{\alpha}$. В общем положении, группа $Aut(S_2) = \langle 1, \tau \rangle$, где $\tau : (u, v) \rightarrow (-u, v)$ является гиперэллиптической инволюцией S_2 .

Поскольку группа $Aut(S_3)$ абелева, то все ее элементы опускается по отображению f до автоморфизмов поверхности S_2 . Отсюда, $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)|$.

По лемме 1, с точностью до эквивалентности, существует не более двух голоморфных отображений вида $f : S_3 \rightarrow S_2$, где порядок группы автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 48$. Аналогично, по лемме 2, с точностью до эквивалентности, существует не более трех голоморфных отображений вида $f : S_3 \rightarrow S_2$, где порядок группы автоморфизмов $|Aut(S_2)| = 24$. Отметим, что ситуации, когда $|Aut(S_2)| = 48$ или $|Aut(S_2)| = 24$ — это случаи $2a, 8a$ и $5a, 7, 8a$, соответственно. Следовательно, $|Hol(S_3, S_2)| = |Aut(S_2)| \leq 12$.

Замечание 4. В случаях 4, 9 и 11 голоморфных отображений не суще-

стствует.

Таким образом, полная классификация всех голоморфных отображений из S_3 на S_2 , может быть представлена с помощью следующей таблицы.

№	$Aut(S_3)$	$Aut(S_2)$	$Hol(S_3, S_2)$
1a	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$	\mathbb{D}_4	24
1b	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{S}_4$	\mathbb{D}_2	24
2a	32	48	48
2b	32	\mathbb{D}_2	16
3	24	\mathbb{D}_4	24
4	\mathbb{Z}_{14}	Нет	Нет
5a	16	$\mathbb{D}_4, 24$	24
5b	16	$\mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$	8, 16, 24
5c	16	$\mathbb{D}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{D}_6$	8, 16, 24
6	\mathbb{D}_6	$\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_2$	6, 12
7	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{D}_4, 24$	8, 24
8a	\mathbb{Z}_2^3	48, 24, ≤ 12	48, 24, ≤ 24
8b	\mathbb{Z}_2^3	≤ 12	≤ 24
8c	\mathbb{Z}_2^3	≤ 12	≤ 24
9	\mathbb{Z}_4	Нет	Нет
10	\mathbb{D}_2	≤ 12	≤ 12
11	\mathbb{Z}_2	Нет	Нет

Таблица 3. Число голоморфных отображений $Hol(S_3, S_2)$

2.2.3 Верхняя оценка на число голоморфных отображений

Явные верхние оценки на число голоморфных отображений $Hol(S_g, S_{g'})$ были получены в работах различных авторов ([23], [3], [44], [45], [46], [27]). Однако, до сих пор не было известным являются ли полученные оценки точными. Вопрос оставался открытым даже для минимально возможного случая $g = 3$ и $g' = 2$. В этом параграфе будет получена точная верхняя оценка на число элементов множества $Hol(S_3, S_2)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Число элементов множества $Hol(S_3, S_2)$ не превосходит 48. Указанная оценка точная и достигается для пары римановых поверхностей $S_3 : w^2 = z^8 - 1$ и $S_2 : u^2 = v(v^4 - 1)$. При этом, произвольное голоморфное отображение S_3 на S_2 представимо в виде суперпозиции $\alpha \circ f \circ \beta$, где $f : (w, z) \rightarrow (u, v) = (zw, z^2)$, а α и β – подходящие автоморфизмы римановых поверхностей S_2 и S_3 , соответственно.*

Доказательство Для доказательства найдем верхнюю оценку на число элементов множества $Hol(S_3, S_2)$. В случаях 2а и 8а имеем равенства $|Hol(S_3, S_2)| = 48$. Во всех остальных случаях $|Hol(S_3, S_2)| \leq 24$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второй части теоремы, воспользуемся описанием структуры множества $Hol(S_3, S_2)$, данным в пункте 2а предыдущего параграфа. В этом случае уравнения римановых поверхностей имеют вид $S_3 : w^2 = z^8 - 1$ и $S_2 : u^2 = v(v^4 - 1)$. При этом, множество голоморфных отображений $Hol(S_3, S_2)$ состоит из одного класса эквивалентности

и порождается отображением $f : (w, z) \mapsto (u, v) = (zw, z^2)$. Отсюда, все голоморфные отображения из $Hol(S_3, S_2)$ представляются в виде $\alpha \circ f \circ \beta$, где α и β – подходящие автоморфизмы римановых поверхностей S_2 и S_3 , соответственно.

Теорема 5. Пусть S_3 и S_2 произвольные римановы поверхности родов 3 и 2, соответственно. Предположим, что $|Hol(S_3, S_2)| = 48$. Тогда S_2 – кривая Больца $u^2 = v(v^4 - 1)$, а S_3 задается одним из следующих уравнений

$$(i) \quad y^2 = x^8 - 1,$$

$$(ii) \quad y^2 = x^8 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^6 + 5x^4 + \frac{5}{\sqrt{2}}x^2 + 1.$$

В случае (i) мы имеем $|Aut(S_3)| = 32$.

В случае (ii) справедливо равенство $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Доказательство. В разобранных выше случаях 2а и 8а показано, что для римановых поверхностей, задаваемых уравнениями (i) и (ii) существует ровно 48 голоморфных отображений S_3 на кривую Больца S_2 . В первом случае, согласно [33], группа автоморфизмов $|Aut(S_3)| = 32$, а во втором – $Aut(S_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Критические значения отображений орбиформов $\hat{f} : O_3 \rightarrow O_2$ в первом случае являются противоположными вершинами правильного мебиусова октаэдра, образованного особыми точками орбиформа O_2 . Во втором случае, они являются смежными вершинами указанного октаэдра. Следовательно, по предложению 1 голоморфные отображения в случаях (i) и (ii) неэквивалентны. Этот факт может быть также получен из сравнения групп автоморфизмов поверхностей в случаях (i) и (ii). В силу леммы 1, существует не более двух

классов эквивалентности голоморфных отображений $f : S_3 \rightarrow S_2$, где S_2 это кривая Больца. Теорема доказана.

Глава 3

Нерегулярные голоморфные отображения поверхностей рода четыре

Цель данной главы — получить структурные теоремы для голоморфных отображений римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два. При этом возникает два возможных вида отображений: регулярные и нерегулярные.

Регулярный случай сводится к изучению действия циклической группы порядка два или три на поверхности S_4 . Все такие действия классифицированы в работе Такао Като [29]. Эти результаты позволяют получить полное описание регулярных голоморфных отображений S_4 на S_2 .

Нерегулярный случай представляется наиболее интересным и неизученным ранее. Структура голоморфных отображений S_4 на S_2 в этом

случае будет дана в теореме 6.

Все полученные результаты предполагается использовать в дальнейшем для получения точной верхней оценки на число элементов множества $Hol(S_4, S_2)$, которая в настоящее время неизвестна.

3.1 Регулярные и нерегулярные голоморфные отображения

Пусть $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ — произвольное отображение римановых поверхностей. Группой преобразований наложения отображения f называется следующая группа гомеоморфизмов поверхности S_g :

$$Cov_f(S_g, S_{g'}) = \{h \in Homeo(S_g) : f \circ h = f\}.$$

Отметим, что если отображение f голоморфно и сюръективно, то $Cov_f(S_g, S_{g'})$ всегда состоит из конформных автоморфизмов римановой поверхности S_g .

Голоморфное отображение $f : S_g \rightarrow S_{g'}$ поверхности S_g на $S_{g'}$ называется регулярным, если группа $\mathcal{G} = Cov_f(S_g, S_{g'})$ действует транзитивно на каждом слое отображения f . В этом случае поверхность $S_{g'}$ конформно эквивалентна фактор-поверхности S_g/\mathcal{G} . В противном случае, отображение f называется нерегулярным.

Из формулы Римана-Гурвица следует, что всякое голоморфное отображение $f : S_4 \rightarrow S_2$ римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два имеет кратность два или три. Отсюда, группа $Cov_f(S_4, S_2)$ либо тривиальна, либо циклическая порядка два или три.

В первом случае отображение f нерегулярно, а в остальных случаях — регулярно.

Точкой Вейерштрасса называется точка P римановой поверхности допускающая существование мероморфной функции с единственным полюсом порядка меньше, чем $g + 1$ в P . Согласно классической теореме Гурвица ([15], III.5.11), каждая риманова поверхность S_g имеет, по крайней мере, $2g + 2$ точки Вейерштрасса. При этом, нижняя граница достигается тогда и только тогда, когда поверхность S_g гиперэллиптическая.

Отметим следующие важные свойства точек Вейерштрасса. Обозначим через $W(S_g)$ множество точек Вейерштрасса римановой поверхности S_g . Тогда, любой автоморфизм S_g оставляет множество $W(S_g)$ инвариантным. При голоморфном отображении поверхностей разных родов точки Вейерштрасса, вообще говоря, не переходят в точки Вейерштрасса, однако, в случае голоморфного отображения гиперэллиптических поверхностей этот факт имеет место ([34], [46]). Более точно, если S_g и $S_{g'}$ — гиперэллиптические римановы поверхности, а $f, h \in \text{Hol}(S_g, S_{g'})$, то выполняются следующие свойства:

1. $f(W(S_g)) \subset W(S_{g'})$;
2. Если $f|_{W(S_g)} = h|_{W(S_g)}$, то либо $f = h$, либо $f = h \circ \tau$, где τ — гиперэллиптическая инволюция поверхности S_g ;
3. $f \circ \tau = \tau' \circ f$, где τ' — гиперэллиптическая инволюция поверхности $S_{g'}$.

Последнее равенство означает, что f опускается до голоморфного

отображения орбифолдов $\varphi : O_g = S_g / \langle \tau \rangle \rightarrow O_{g'} = S_{g'} / \langle \tau' \rangle$. При этом, φ имеет ровно два поднятия до отображения S_g на $S_{g'}$, а именно f и $f \circ \tau$.

Пусть S_g — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g и τ гиперэллиптическая инволюция. Мы будем рассматривать факторпространство $O_g = S_g / \langle \tau \rangle$ как двумерный орбифолд, носителем которого является сфера Римана, а особыми точками — проекции $2g+2$ точек Вейерштрасса при каноническом отображении $S_g \rightarrow O_g = S_g / \langle \tau \rangle$. Основные факты из теории орбифолдов изложены в ([47], ч. 13).

Теорема Акколы [2] утверждает, что если голоморфное отображение $f : S_4 \rightarrow S_2$ — нерегулярно, то риманова поверхность S_4 — гиперэллиптическая.

В случае регулярного трёхлистного отображения $f : S_4 \rightarrow S_2$ поверхность S_4 не является гиперэллиптической, однако представляется как двулистное разветвлённое накрытие над тором [2].

3.2 Классификация нерегулярных голоморфных отображений

Пусть $f : S_4 \rightarrow S_2$ — нерегулярное голоморфное отображение. Тогда имеет место

Теорема 6. *Пусть $f : S_4 \rightarrow S_2$ — нерегулярное голоморфное отображение S_4 на S_2 . Тогда для подходящего набора комплексных параметров a, b, q , $a \neq b$, $q \neq 0, \pm 1, \infty$ поверхности S_4 и S_2 представимы уравнения-*

ми:

$$S_4 : w^2 = (z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^3 - bqz^2 - qz + b)(z^4 + cz^2 + 1),$$

$$S_2 : y^2 = (x - a)(x - b)(x^4 + dx^2 + 1),$$

а отображение f имеет вид $(x, y) = f(z, w)$, где

$$x = z \frac{z^2 - q}{qz^2 - 1}, \quad y = w \frac{qz^4 + (q^2 - 3)z^2 + q}{(qz^2 - 1)^3 q}.$$

При этом, величины c и d выражаются через q по следующим формулам:

$$c = \frac{-3 - 6q^2 + q^4}{4q}, \quad d = \frac{-27 + 18q^2 + q^4}{4q^3}.$$

В случае, когда один из параметров a или b обращается в ∞ , без ограничения общности можно считать, что $b = \infty$. При этом уравнения поверхностей редуцируются к более простому виду

$$S_4 : w^2 = (z^2 - q^{-1})(z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^4 + cz^2 + 1) \text{ и } S_2 : y^2 = (x - a)(x^4 + dx^2 + 1).$$

Доказательство теоремы опирается на следующие две леммы.

Лемма 7. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре попарно различных точки на расширенной комплексной плоскости. Тогда существует дробно-линейное преобразование, переводящее указанные точки, соответственно, в $k, -k, k^{-1}$ и $-k^{-1}$, где k — некоторое комплексное число, отличное от $0, \infty, \pm 1, \pm i$.

Доказательство. Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

и обозначим через $Q = T(z_4)$ сложное ангармоническое отношение четырёх точек z_1, z_2, z_3 и z_4 . Тогда $T(z)$ отображает точки z_1, z_2, z_3, z_4 в $0, \infty, 1$ и Q , соответственно.

Найдём дробно-линейное отображение L , переводящее $0, \infty, 1$ и Q в точки $-k, k, -k^{-1}, k^{-1}$, соответственно. Сравнивая сложное ангармоническое отношение соответствующих четвёрок, получим

$$Q = \left(\frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)\right)^2. \quad (3.1)$$

Непосредственно убеждаемся, что дробно-линейное отображение

$$L(z) = \frac{-2kz + k(1 + k^2)}{2k^2z - (1 + k^2)}$$

обладает указанными свойствами.

Таким образом, отображение $L \circ T$ переводит z_1, z_2, z_3, z_4 в точки $-k, k, -k^{-1}, k^{-1}$, соответственно.

Замечание 5. Дискриминант невырожденного дробно-линейного отображения L равен $2k(1 - k^4)$. Отсюда, $k \neq 0, \infty, \pm 1, \pm i$.

Замечание 6. Величина k находится как корень уравнения (3.1). При этом, наряду с k , корнями указанных уравнений являются числа $-k, k^{-1}$ и $-k^{-1}$.

Лемма 8. Пусть $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ — трёхлистное рациональное отображение имеющее четыре точки ветвления порядка два. Тогда, с точностью до суперпозиции с дробно-линейным отображением, φ имеет следующий вид

$$\varphi(z) = z \frac{z^2 - p^2}{p^2 z^2 - 1},$$

где p — некоторое комплексное число, отличное от $0, \infty, \pm 1$ и $\pm i$.

Доказательство. Пусть c_1, c_2, c_3, c_4 — точки ветвления φ , а $d_i = \varphi(c_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ — её критические значения. Тогда, выполняя подходящие дробно-линейные преобразования, в силу леммы 7, без ограничения общности, можем считать $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (k, -k, k^{-1}, -k^{-1})$ и $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (v, -v, v^{-1}, -v^{-1})$, где k и v — некоторые комплексные числа, отличные от $0, \infty, \pm 1$ и $\pm i$. Из общего подсчета числа параметров следует, что трёхлистное рациональное отображение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(c_i) = d_i, \varphi'(c_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.2)$$

всегда единственно. Это решение интерполяционной задачи Паде-Эрмита для рациональных функций (см. также [19], теорема 1.4). Заметим, что рациональные отображения $z \rightarrow -\varphi(-z)$ и $x \rightarrow 1/\varphi(\frac{1}{z})$ также трёхлиственны и удовлетворяют условиям (3.2). Следовательно, они совпадают с $\varphi(z)$. В результате имеем тождества

$$\varphi(-z) = -\varphi(z) \quad \text{и} \quad \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\varphi(z)}, \quad (3.3)$$

справедливые для всех $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Из (3.3) заключаем, что $\varphi(z)$ — нечётная функция и, в частности, $\varphi(0) = 0$. Поскольку 0 не является точкой ветвления φ , найдётся ещё одна точка p , $p \neq 0, \infty$, в которой φ обращается в ноль. Тогда, в силу нечётности функции, $\varphi(p) = \varphi(-p) = 0$. Таким образом φ имеет три простых нуля в точках $0, p$ и $-p$. Из (3.3) следует, что точки $\infty, \pm p^{-1}$ являются простыми полюсами φ . Откуда функция φ имеет вид

$$\varphi(z) = Cz \frac{z^2 - p^2}{z^2 - p^{-2}}.$$

Подставляя это соотношение в (3.3), получим, что $C = p^{-2}$, что и завершает доказательство леммы. Изобразим отображение на следующей диаграмме (Рис. 3.1)

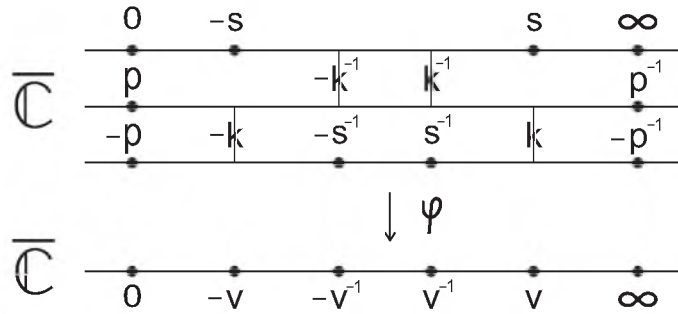


Рис. 3.1.

Доказательство теоремы.

Пусть $f : S_4 \rightarrow S_2$ — нерегулярное голоморфное отображение. По теореме Акколы [2] обе поверхности S_4 и S_2 — гиперэллиптические. Обозначим через τ_{S_4} и τ_{S_2} их гиперэллиптические инволюции. Напомним, что неподвижными точками τ_{S_4} являются 10 точек Вейерштрасса поверхности S_4 , а неподвижными точками τ_{S_2} — 6 точек Вейерштрасса поверхности S_2 . При каноническом проектировании $S_4 \rightarrow O_4 = S_4/\langle \tau_{S_4} \rangle$ и $S_2 \rightarrow O_2 = S_2/\langle \tau_{S_2} \rangle$ получаем два орбифолда, носителями которых являются сферы Римана, а особыми точками — проекции соответствующих точек Вейерштрасса. Заметим, что все особые точки O_2 и O_3 имеют порядок два.

В силу результатов Х. Мартенса [34] и М. Танабе [46] голоморфное отображение гиперэллиптических римановых поверхностей $f : S_4 \rightarrow S_2$ переводит точки Вейерштрасса в точки Вейерштрасса. При этом, оно эквивариантно относительно действия гиперэллиптических инволюций,

то есть $f \circ \tau_{S_4} = \tau_{S_2} \circ f$. Следовательно, f опускается до голоморфного отображения орбифолдов $\varphi : O_4 \rightarrow O_2$, переводящего особые точки O_4 в особые точки O_2 .

Заметим, что по формуле Римана-Гурвица φ имеет четыре точки ветвления порядка два. При этом, ни одна из них не является особой точкой O_4 . В противном случае, её образ был бы особой точкой O_2 , порядка большего двух, что невозможно. Поскольку носителями орбифолдов O_4 и O_2 является сфера Римана, то голоморфное отображение $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ рационально, и его структура описывается леммой 8. Поэтому, с точностью до выбора системы координат, можем считать, что

$$\varphi(z) = z \frac{z^2 - p^2}{p^2 z^2 - 1}$$

то же самое, что и в лемме 8.

Найдём 6 особых точек орбифолда O_2 . Ими будут четыре критических значения функции $\varphi : v = \varphi(k)$, $-v = \varphi(-k)$, $v^{-1} = \varphi(k^{-1})$, $-v^{-1} = \varphi(-k^{-1})$ и ещё две точки a и b со слоями $\varphi^{-1}(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\varphi^{-1}(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, полностью состоящими из особых точек орбифолда O_4 . Поскольку O_4 имеет ровно 10 особых точек, и все они при отображении φ переходят в особые точки орбифолда O_2 , то в каждом особом слое φ содержится по одной точке ветвления и по одной особой точке.

В силу равенств (3.3), отображения $z \rightarrow -z$, $z \rightarrow \frac{1}{z}$, и $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ переводят особый слой $\varphi^{-1}(v)$ в слои $\varphi^{-1}(-v)$, $\varphi^{-1}(v^{-1})$ и $\varphi^{-1}(-v^{-1})$, соответственно. Пусть s — особая точка O_4 , лежащая в слое $\varphi^{-1}(v)$. Тогда особые точки $-s, s^{-1}, -s^{-1}$ лежат в слоях $\varphi^{-1}(-v)$, $\varphi^{-1}(v^{-1})$ и $\varphi^{-1}(-v^{-1})$, соответственно. Схему отображения $\varphi : O_4 \rightarrow O_2$ можно изобразить на следующей диаграмме (см. Рис. 3.2). При этом, кружками обозначены

особые точки орбифолдов O_4 и O_2 , а вертикальными отрезками — точки ветвления отображения φ .

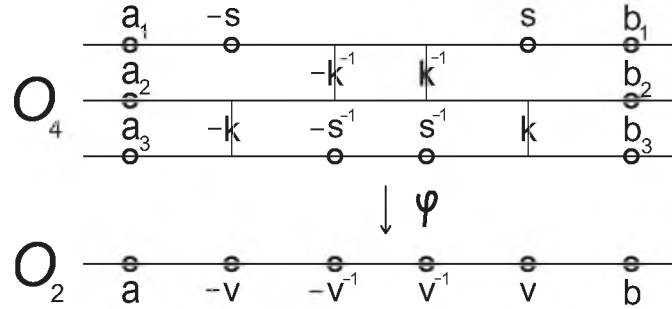


Рис. 3.2.

Выпишем уравнения гиперэллиптических римановых поверхностей S_4 и S_2 по проекциям их точек Вейерштрасса, то есть особым точкам орбифолдов O_4 и O_2 . При $a, b \neq \infty$ имеем

$$S_4 : w^2 = \prod_{j=1}^3 (z - a_j)(z - b_j)(z^4 - (s^2 + s^{-2})z^2 + 1)$$

и

$$S_2 : y^2 = (x - a)(x - b)(x^4 - (v^2 + v^{-2})z^2 + 1).$$

Для удобства положим $p^2 = q$. Поскольку $a_j, j = 1, 2, 3$ три различных корня кубического уравнения $z \frac{z^2 - q}{qz^2 - 1} = a$, по теореме Виета имеем

$$\prod_{j=1}^3 (z - a_j) = z^3 - aqz^2 - qz + a.$$

Аналогично,

$$\prod_{j=1}^3 (z - b_j) = z^3 - bqz^2 - qz + b.$$

Величины $c = -(s^2 + s^{-2})$ и $d = -(v^2 + v^{-2})$ найдём из следующих условий на функцию φ

$$\varphi(k) = v, \varphi'(k) = 0, \varphi(s) = v, s \neq k.$$

Указанные уравнения легко сводятся к квадратным. Решая их, непосредственно получим, что $c = \frac{-3-6q^2+q^4}{4q}$ и $d = \frac{-27+18q^2+q^4}{4q^3}$. Таким образом, поверхности S_4 и S_2 представлены уравнениями, указанными в формулировке теоремы.

Найдём общий вид нерегулярного голоморфного отображения $(x, y) = f(z, w) : S_4 \rightarrow S_2$. Поскольку его проекция на орбифорды $\varphi : O_4 \rightarrow O_2$ известна, положим $x = \varphi(z)$. Функцию y найдём как решение уравнения $y^2 = (\varphi(z) - a)(\varphi(z) - b)(\varphi(z)^4 + d\varphi(z)^2 + 1)$. Для этого положим $y = r(z)w$, где $r(z)$ — неизвестная функция от z . Подставляя это равенство в уравнение, и учитывая, что

$$w^2 = (z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^3 - bqz^2 - qz + b)(z^4 + cz^4 + 1),$$

закключаем, что $r^2(z) = \frac{(qz^4 + (q^2 - 3)z^2 + q)^2}{(qz^2 - 1)^6 q^2}$. Откуда, с точностью до выбора знака, имеем

$$y = w \frac{qz^4 + (q^2 - 3)z^2 + q}{(qz^2 - 1)^3 q}.$$

В случае, когда одна из точек a или b равна ∞ , с точностью до обозначения, можно считать, что $b = \infty$. При этом, особые точки орбифордов O_4 и O_2 задаются множествами $\{a_1, a_2, a_3, \infty, \pm p^{-1}, \pm s^{\pm 1}\}$ и $\{a, \infty, \pm v^{\pm 1}\}$, соответственно. В результате, получим следующие уравнения римановых поверхностей:

$$S_4 : w^2 = (z^2 - q^{-1})(z^3 - aqz^2 - qz + a)(z^4 + cz^2 + 1),$$

$$S_2 : y^2 = (x - a)(x^4 + dx^2 + 1).$$

Отметим, что вид отображения $f : S_4 \rightarrow S_2$ остается неизменным. Он не зависит от выбора a и b .

Глава 4

Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы

В последнее десятилетие появилось множество работ различных авторов ([4], [7], [10], [5]), посвященных дискретным версиям теории римановых поверхностей. Роль римановых поверхностей в этих теориях играют конечные графы, а в качестве голоморфных отображений выступают гармонические отображения. Для них построена теория якобиевых многообразий, получена формула Римана-Гурвица и доказаны аналоги теоремы Римана-Роха. Многие другие теоремы классической теории римановых поверхностей также получили свое воплощение в дискретном случае. Дискретная теория нашла эффективные применения в теории кодирования, стохастической теории и финансовой математике. Библиографию по этому вопросу можно найти в [5].

Основным объектом изучения данной главы являются графы и их накрытия. *Графом* называется связный конечный мультиграф без петель.

В дальнейшем будем считать, что граф не содержит ребер, удаление которых разбивает его на две связных компоненты. Родом графа будем называть ранг его фундаментальной группы. Граф называется *гиперэллиптическим*, если он является двулистным разветвленным накрытием дерева. Отметим, что граф рода два всегда гиперэллиптический [5].

Основная цель — установить дискретные версии теорем Фаркаша и Акколы для графов. Будет установлено, что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим. Далее, будет показано, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два также является гиперэллиптическим графом, в то время как его регулярное трехлистное накрытие двулистно накрывает граф рода один.

4.1 Графы и гармонические отображения

Римановой поверхностью называется одномерное связное компактное комплексное многообразие. Графом G будем называть связный конечный мультиграф без петель. Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ множество вершин и ребер графа G соответственно. Родом графа G называется величина $g(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$, где $|X|$ означает число элементов множества X . Такое определение не совпадает с традиционным определением "рода" графа, которое означает минимальный род поверхности в которую данный граф вкладывается.

Введенная нами характеристика $g(G)$ совпадает с рангом первой группы гомологий G и называется также числом Бетти графа G . Некоторые авторы называют величину $g(G)$ цикломатическим числом. Эй-

лерова характеристика $\chi(G) = |V(G)| - |E(G)|$ графа G связана с числом $g(G)$ по формуле $\chi(G) = 1 - g(G)$. Напомним, что в теории римановых поверхностей связь между эйлеровой характеристикой $\chi(S)$ и родом $g(S)$ поверхности S задается формулой $\chi(S) = 2 - 2g(S)$. Это подчеркивает определенную аналогию между теорией графов и теорией римановых поверхностей. Мостом графа G называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности G . Граф G называется 2 реберно-связным если он не содержит мостов. Все основные результаты настоящей работы будут установлены для 2 реберно-связных графов.

Пусть G и G' графы. Отображение $\varphi : V(G) \cup E(G) \rightarrow V(G') \cup E(G')$ называется морфизмом G в G' если $\varphi(V(G)) \subseteq V(G')$, а для любых $x \in V(G)$ и $e \in E(G)$, таких, что x инцидентна e и имеем либо $\varphi(e) \in E(G')$ и $\varphi(x)$ инцидентна $\varphi(e)$, либо $\varphi(e) = \varphi(x)$. Для краткости, в этом случае будем писать $\varphi : G \rightarrow G'$. Если, кроме того, $\varphi(E(G)) \subseteq E(G')$, то φ называется гомоморфизмом. Далее, биективный гомоморфизм называется изоморфизмом, а изоморфизм $\varphi : G \rightarrow G$ называется автоморфизмом.

Введем важное определение, необходимое нам в дальнейшем. Морфизм $\varphi : G \rightarrow G'$ называется гармоническим морфизмом (или разветвленным накрытием), если для всех $x \in V(G)$ и всех $y \in V(G')$, таких, что $y = \varphi(x)$, величина $|\{e \in E(G) : x \in e, \varphi(e) = e'\}|$ одна и также для всех ребер $e' \in E(G')$, инцидентных y . Это определение, с незначительными модификациями, было введено ранее в [40].

Пусть Γ — конечная группа действующая на графе G . Обозначим через $\gamma(x)$ результат действия элемента $\gamma \in \Gamma$ на элемент x из объединения $E(G) \cup V(G)$. Определим фактор-граф G/Γ и каноническое отображение

$\pi_\Gamma : G \rightarrow G/\Gamma$ по правилам, описанным ниже. Введем отношение эквивалентности для любых $x, y \in E(G) \cup V(G)$, полагая $x \sim y$ если существует $\gamma \in \Gamma$ такое, что $\gamma(x) = y$. Вершинами фактор-графа $V(G/\Gamma)$ назовем классы эквивалентности множества $V(G)$. Ребра фактор-графа $V(G/\Gamma)$ соответствуют тем классам эквивалентности множества $E(G)$, которые состоят из ребер, чьи концы неэквивалентны. Нетрудно убедиться, что множество G/Γ является графом в указанном выше смысле. Каноническое отображение $\pi_\Gamma : G \rightarrow G/\Gamma$ переводит каждую вершину G в ее класс эквивалентности, каждое ребро G с неэквивалентными концами в его класс эквивалентности, и каждое ребро G с эквивалентными концами в класс эквивалентности его концов. Нетрудно убедиться, что каноническое отображение является сюръективным морфизмом графов [5].

Граф называют гиперэллиптическим, если он представляется как разветвленное двулистное накрытие дерева. Это эквивалентно тому, что на графе существует инволюция τ , такая, что фактор-граф G/τ является деревом. Указанная инволюция называется гиперэллиптической инволюцией графа G . Известно, что если гиперэллиптическая инволюция существует, то она единственна. Это утверждение справедливо для 2-реберно-связных графов, род которых больше 1. Граф рода 2 всегда является гиперэллиптическим [5]. Это хорошо согласуется с известным фактом, что риманова поверхность рода 2 всегда гиперэллиптическая.

4.2 Накрытия и поднятия гомеоморфизмов

В дальнейшем нам потребуется несколько фактов из теории накрывающих пространств. Все необходимые сведения можно найти в [21]. Пусть X и \tilde{X} — линейно связные и локально линейные связные топологические пространства. Непрерывное отображение $p : \tilde{X} \rightarrow X$ называется накрытием если на пространстве X существует открытое покрытие $\{U_\xi\}$, $\xi \in I$ такое, что для любого $\xi \in I$ прообраз $p^{-1}(U_\xi)$ является дизъюнктным объединением открытых в \tilde{X} множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается p на U_ξ .

Обозначим через (X, x_0) пару состоящую из пространства X и выделенной из него точки x_0 . Введем обозначение $\pi_1(X, x_0)$ для фундаментальной группы X в точке x_0 . Хорошо известны следующие свойства накрытий ([21] с. 61 – 62).

Пусть $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$ переводящее точку \tilde{x}_0 в точку x_0 . Тогда

- 1° Отображение $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, индуцированное накрытием p — инъективно;
- 2° Число листов накрытия $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ совпадает с индексом подгруппы $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ в группе $\pi_1(X, x_0)$;
- 3° Пусть Y линейно связное и локально линейно связное топологическое пространство, а $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ непрерывное отображение. Тогда существует поднятие $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ отображения

f по накрытию p , то есть $f = p \circ \tilde{f}$, тогда и только тогда, когда $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Указанное поднятие всегда единственно.

Пусть $p : \tilde{X} \rightarrow X$ накрытие, а $f : X \rightarrow X$ гомеоморфизм пространства X . Отображение $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ называется поднятием f на \tilde{X} по отображению p если выполнено соотношение $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Пользуясь свойством 3°, установим критерий поднятия гомеоморфизма пространства X до гомеоморфизма \tilde{X} . Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть α гомеоморфизм пространства X переводящий точку x_0 в точку x_1 , а \tilde{x}_0 и \tilde{x}_1 точки \tilde{X} такие, что $p(\tilde{x}_0) = x_0$ и $p(\tilde{x}_1) = x_1$. Тогда α однозначно поднимается до гомеоморфизма $\tilde{\alpha} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\alpha_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $p_\alpha = \alpha^{-1} \circ p$, которое действует из (\tilde{X}, \tilde{x}_1) в (X, x_0) . Поскольку α — гомеоморфизм, это отображение является накрытием. Пользуясь пунктом 3° покажем, что отображение $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ однозначно поднимается по накрытию p_α до некоторого непрерывного отображения $\tilde{\alpha} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Действительно, для этого достаточно проверить включение $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subset p_{\alpha_*}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. По условию имеем $\alpha_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Так как α — гомеоморфизм, то $(\alpha_*)^{-1} = (\alpha^{-1})_*$. Отсюда

$$\begin{aligned} p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) &= (\alpha_*)^{-1}\alpha_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (\alpha_*)^{-1}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = \\ &= (\alpha^{-1} \circ p)_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_{\alpha_*}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1). \end{aligned}$$

В частности, тождественный гомеоморфизм X поднимается до тождественного гомеоморфизма \tilde{X} , а отображение $\beta = \alpha^{-1}$ поднимается до

непрерывного отображения $\tilde{\beta}$ такого, что $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} = \tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha} = Id_{\tilde{X}}$. Отсюда $\tilde{\alpha}$ — гомеоморфизм пространства \tilde{X} .

Обратное утверждение следует из гомеоморфности $\tilde{\alpha}$ и инъективности p_* .

4.3 Элементы топологической теории графов

С каждым связным графом G ассоциируем топологическое пространство, которое будем обозначать также G . Если граф конечен, то топологию можно ввести естественным образом ([49] с. 206). При этом G является линейно связным и локально линейно связным, а следовательно для него справедливы все приведенные выше утверждения.

Путем из ребер в графе G назовем конечную последовательность ориентированных ребер (e_1, e_2, \dots, e_n) , $n \geq 1$ в которой конечная вершина ребра e_{i-1} служит начальной вершиной ребра e_i для $1 < i \leq n$. Путь (e_1, e_2, \dots, e_n) называется приведенным если ни для какого числа $i = 2, 3, \dots, n$ ребра e_{i-1} и e_i не представляют одно и тоже ребро с противоположными ориентациями.

В дальнейшем, мы как правило будем рассматривать лишь приведенные пути и, если не оговорено противное, будем считать, что все пути приведены. Если (e_1, e_2, \dots, e_n) — путь из ребер, то начальная вершина ребра e_1 называется начальной вершиной пути, а конечная вершина ребра e_n — конечной вершиной пути. Путь из ребер называется замкнутым, если его начальная и конечная вершины совпадают. Замкнутый путь из

ребер называется петлей, а петля не имеющая самопересечений называется циклом.

Пусть G — связный граф, v_0 — его вершина и T — максимальное дерево в G , содержащее v_0 . Обозначим через $\{t_i\}_{i \in I}$ множество ребер графа G не содержащихся в T . Для каждого из ребер t_i выберем определенную ориентацию и обозначим через a_i и b_i начальную и конечную вершины ребра t_i . Каждому ребру t_i сопоставим элемент $x_i \in \pi_1(G, v_0)$ по следующему правилу. В графе $T \cup t_i$ существует единственный приведенный путь из ребер A_i , соединяющий v_0 с a_i , и единственный путь из ребер B_i , соединяющий b_i с v_0 . Тогда x_i — класс эквивалентности, определенный путем из ребер (A_i, t_i, B_i) . Если $a_i = v_0$, опускаем A_i , аналогично, если $b_i = v_0$, опускаем B_i . Хорошо известен следующий факт. Фундаментальная группа графа $\pi_1(G, v_0)$ свободно порождается образующими $\{x_i\}_{i \in I}$. При этом, если G конечный граф рода g , то I состоит из g элементов и ранг свободной группы $\pi_1(G, v_0)$ равен g .

Нам потребуются следующая лемма, характеризующая действие гиперэллиптической инволюции на графе G .

Обозначим через $\mathbf{H}_1(G)$ и $\mathbf{H}^1(G)$ группы целочисленных гомологий и когомологий графа G соответственно. Для любого $\alpha \in \text{Aut}(G)$ рассмотрим его индуцированные действия $\alpha_{\#}$ и $\alpha^{\#}$ на указанных группах.

Лемма 9. Пусть G — произвольный 2-реберно-связный граф рода $g \geq 2$ и $\tau \in \text{Aut}(G)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G — гиперэллиптический граф с гиперэллиптической инволюцией τ ;

(2) $\tau^\# : \mathbf{H}^1(G) \rightarrow \mathbf{H}^1(G)$ действует как умножение на -1 ;

(3) $\tau_\# : \mathbf{H}_1(G) \rightarrow \mathbf{H}_1(G)$ действует как умножение на -1 .

Доказательство. Эквивалентность утверждений (1) и (2) была показана в [5]. Покажем, что (2) и (3) также эквивалентны. Определим двойственность между пространствами $X = \mathbf{H}_1(G)$ и $Y = \mathbf{H}^1(G)$, полагая $\langle \omega, \omega^* \rangle = \sum_{e \in \omega} \omega^*(e)$. Покажем, что введенная двойственность исчерпывающая. То есть из равенства $\langle \omega, \omega^* \rangle = 0$ для всех $\omega \in X$ следует, что $\omega^* = 0$ и, соответственно, если $\langle \omega, \omega^* \rangle = 0$ для всех $\omega^* \in Y$, то $\omega = 0$.

Нетрудно видеть, что этот факт будет иметь место если возможно построить двойственные базисы $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ в X и $\{y_1, y_2, \dots, y_g\}$ в Y такие, что $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Для построения таких базисов зафиксируем порождающее дерево T в графе G и обозначим через $\{t_1, t_2, \dots, t_g\}$ — множество ребер из $G \setminus T$. Снабдим каждое из ребер t_i одной из двух возможных ориентаций. Выберем в качестве x_i единственный цикл графа $T \cup t_i$ содержащий ребро t_i . Тогда циклы $\{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ образуют базис в группе гомологий $\mathbf{H}_1(G)$. Определим коцикл $y_j \in \mathbf{H}^1(G)$, полагая $y_j(e) = 1$ для $e = t_j$ и $y_j(e) = 0$ для всех остальных ребер e . По построению имеем $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, g\}$. Из последнего соотношения, в частности следует, что $\{y_1, y_2, \dots, y_g\}$ линейно независимы и образуют базис в Y . По определению операций $\tau^\#$ и $\tau_\#$ имеем равенство

$$\langle \tau^\#(\omega), \omega^* \rangle = \langle \omega, \tau_\#(\omega^*) \rangle, \omega \in X, \omega^* \in Y.$$

Поскольку двойственность $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — исчерпывающая, последнее равенство означает, что оператор $\tau^\#$ однозначно определяется по оператору $\tau_\#$ и, в

свою очередь, $\tau_{\#}$ однозначно определяется по $\tau^{\#}$. Предположим, что выполнено условие (2) из доказываемой леммы. Тогда $\tau^{\#} = -Id$, откуда, в силу единственности, $\tau_{\#} = -Id$, что эквивалентно условию (3). Обратная импликация устанавливается аналогичным образом. Лемма доказана.

Пусть $v_0, v_1 \in V(G)$ и λ — гомотопический класс путей с началом v_0 и концом v_1 . Обозначим через φ_{λ} групповой изоморфизм $\varphi_{\lambda} : \pi_1(G, v_0) \rightarrow \pi_1(G, v_1)$ определенный равенством $\varphi_{\lambda}(\mu) = \lambda^{-1}\mu\lambda$.

Пусть $p : \tilde{G} \rightarrow G$ — накрытие графов. $\tilde{v}_0 \in V(\tilde{G})$, $v_0 \in V(G)$, $p(\tilde{v}_0) = v_0$ и $p_*\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0) = H$ — подгруппа $\pi_1(G, v_0)$. Обозначим через $Aut(G)$ группу автоморфизмов графа G .

Следуя Д.Ж. Джоковичу [11], представим предложение 2 в следующей форме.

Предложение 3. Пусть $\alpha \in Aut(G)$, $\alpha(v_0) = v_1$, а $\tilde{v}_1 \in p^{-1}(v_1)$. Тогда существует поднятие автоморфизма α до автоморфизма $\tilde{\alpha} \in Aut(\tilde{G})$ такого, что $\tilde{\alpha}(\tilde{v}_0) = \tilde{v}_1$ тогда и только тогда, когда существует гомотопический класс путей $\tilde{\lambda}$ из \tilde{v}_0 в \tilde{v}_1 такой, что отображение $\alpha_{v_0} = \varphi_{\lambda}^{-1}\alpha_*$, $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$ оставляет H инвариантной.

Следующее предложение является гомотопической версией леммы 9 для графов рода два.

Предложение 4. Пусть G — произвольный 2 реберно-связный граф рода два и $\tau \in Aut(G)$. Зафиксируем порождающее дерево T в графе G и обозначим через $\{t_1, t_2\}$ — множество ребер из $G \setminus T$. Снабдим каждое из ребер t_i одной из двух возможных ориентаций. Обозначим через x_i

порождающий элемент фундаментальной группы $\pi_1(G, v)$, однозначно определенный циклом, содержащим ребро t_i . Тогда τ является гиперэллиптической инволюцией, тогда и только тогда, когда существует вершина v_0 графа G и класс гомотопных путей λ соединяющих v_0 с $v_1 = \tau(v_0)$ такие, что отображение $\tau_{v_0} = \varphi_\lambda^{-1} \circ \tau_*$ задает следующий внешний автоморфизм группы $\pi_1(G, v_0) : \tau_{v_0}(x_1) = x_1^{-1}, \tau_{v_0}(x_2) = x_2^{-1}$.

Доказательство. Пусть τ — гиперэллиптическая инволюция. Обозначим через $C_i, i = 1, 2$ — единственный цикл в графе $T \cup t_i$. Заметим, что τ оставляет цикл C_i инвариантным, меняя ориентацию его ребер на противоположную. Действительно, если C_i и $\tau(C_i)$ различны, то их общий образ при каноническом отображении $G \rightarrow G/\tau$ является циклом в графе G/τ , что невозможно, поскольку G/τ — дерево. Если τ оставляет цикл C_i инвариантным, сохраняя ориентацию его ребер, то C_i/τ цикл длины $n/2$ в графе G/τ . Это также невозможно.

Так как t_1 не равно t_2 , то циклы C_1 и C_2 различны. Заметим, что в силу 2 реберно-связности графа G циклы C_1 и C_2 имеют по крайней мере одну общую вершину. Действительно, в противном случае существует реберный путь связывающий вершины C_1 с вершинами C_2 . Такой путь единственен, иначе граф G имеет род больше либо равный 3. Однако, каждое ребро этого пути, не лежащее ни в C_1 ни в C_2 , является мостом, удаление которого разбивает граф на две связные компоненты. Это противоречит 2 реберно-связности графа G . По аналогичным соображениям, пересечение $I = C_1 \cap C_2$ связно. Следовательно, I является линейным графом. В качестве v_0 выберем произвольную вершину из I . Положим $v_1 = \tau(v_0)$. Поскольку каждый из циклов C_1 и C_2 инвариантен

относительно τ , то и их пересечение I также инвариантно относительно τ . Следовательно, $v_1 \in I$. Обозначим через $\Lambda = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ реберный путь в I , соединяющий v_0 и v_1 . Если вершины v_0 и v_1 совпадают, будем считать, что путь состоит из одной вершины.

Опишем действие автоморфизма τ на циклах C_1 и C_2 . Для удобства, обозначим число ребер в цикле C_1 через m , а в цикле C_2 через n . Меняя, если потребуется, ориентацию циклов C_1 и C_2 на противоположную, без ограничения общности можем считать, что $C_1 = (e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m})$ и $C_2 = (e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n})$, где $e_{11} = e_{21} = e_1, e_{12} = e_{22} = e_2, \dots, e_{1k} = e_{2k} = e_k$. Если $k = 0$, то ориентацию на циклах можно сохранить.

Поскольку τ оставляет цикл C_1 инвариантным, меняя ориентацию его ребер и переводя вершину v_0 в вершину v_1 , имеем $\tau(e_{1j}) = \bar{e}_{1, k-j+1}(\text{mod } m), j = 1, \dots, m$, где \bar{e} означает замену ориентации ребра e . Аналогично, действие τ на цикле C_2 определяется как $\tau(e_{2j}) = \bar{e}_{2, k-j+1}(\text{mod } n), j = 1, \dots, n$.

В выбранных обозначениях, порождающие фундаментальной группы $\pi_1(G, v_0)$ задаются петлями $x_1 = C_1$ и $x_2 = C_2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что петля $\tau(x_1)$ гомотопна петле $\lambda^{-1}x_1^{-1}\lambda = \varphi_\lambda(x_1^{-1})$, а $\tau(x_2)$ гомотопна $\lambda^{-1}x_2^{-1}\lambda = \varphi_\lambda(x_2^{-1})$. Отсюда, переходя к классам гомотопных путей, имеем $\tau_*(x_1) = \varphi_\lambda(x_1^{-1})$ и $\tau_*(x_2) = \varphi_\lambda(x_2^{-1})$. Откуда, учитывая, что $\tau_{v_0} = \varphi_\lambda^{-1} \circ \tau_*$, окончательно получим $\tau_{v_0}(x_1) = x_1^{-1}$ и $\tau_{v_0}(x_2) = x_2^{-1}$.

Обратно, если выполнены равенства $\tau_{v_0}(x_1) = x_1^{-1}$ и $\tau_{v_0}(x_2) = x_2^{-1}$, то переходя к действию τ на первой группе гомологий графа G имеем $\tau_\#(X_1) = -X_1$ и $\tau_\#(X_2) = -X_2$. Здесь X_1 и X_2 — образы x_1 и x_2 при

каноническом отображении $\pi_1(G, v_0) \rightarrow \mathbf{H}_1(G)$. По лемме 9 автоморфизм τ — гиперэллиптическая инволюция.

4.4 Теорема Фаркаша для графов

Хорошо известно, что любая поверхность рода два гиперэллипична. Теорема Фаркаша [18] утверждает, что двулистное неразветвленное накрытие поверхности рода два также является гиперэллиптической поверхностью. Этот результат был известен, по-видимому, еще Енрике [12]. Позже, теорема Фаркаша была передоказана в работах Акколы [1] и Идальго [22]. Трехмерный аналог этой теоремы для двулистных накрытий ориентируемого многообразия хегорова рода два получен в [38]. В данном параграфе установлено что любое двулистное неразветвленное накрытие графа рода два является гиперэллиптическим.

Теорема 7. *Пусть \tilde{G} — двулистное неразветвленное накрытие графа G рода два. Тогда \tilde{G} — гиперэллиптический граф.*

Доказательство. Выберем вершину v_0 графа G и порождающие фундаментальной группы $\pi_1(G, v_0)$ как это сделано в предложении 4. Каждое двулистное накрытие $p : \tilde{G} \rightarrow G$, с точностью до эквивалентности, однозначно определяется по подгруппе H индекса два в группе $\Gamma = \pi_1(G, v_0)$. Заметим, что Γ свободно порождена $a = x_1$ и $b = x_2$. Так как H подгруппа индекса 2 в Γ , то она нормальна в Γ и фактор-группа Γ/H изоморфна S_2 , где $S_2 = \{(1), (12)\}$ — группа подстановок на двух символах. Следовательно, группа $H = \ker \varphi$, где $\varphi : \Gamma \rightarrow S_2$ — групповой эпиморфизм. Существует ровно три возможности:

1.1° $\varphi(a) = (12), \varphi(b) = (12);$

1.2° $\varphi(a) = (1), \varphi(b) = (12);$

1.3° $\varphi(a) = (12), \varphi(b) = (1).$

Пользуясь методом Райдемайстера-Шрайера ([48], с. 92), получим, что в случае 1.1° подгруппа $H = \langle a^2, b^2, ab \rangle$ — свободно порожденная группа ранга 3. В случаях 1.2° и 1.3° имеем $H = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$ и $H = \langle a^2, b, aba^{-1} \rangle$, соответственно. Проверим, что во всех случаях группа H остается инвариантной при действии автоморфизма $\tau_{v_0} : a \rightarrow a^{-1}, b \rightarrow b^{-1}$.

Действительно, в случае 1.1° полагая $x = a^2, y = b^2$ и $z = ab$ имеем $\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \tau_{v_0}(y) = y^{-1}$ и $\tau_{v_0}(z) = x^{-1}zy^{-1}$. В случае 1.2° для $x = a, y = b^2$ и $z = bab^{-1}$, получим $\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \tau_{v_0}(y) = y^{-1}$ и $\tau_{v_0}(z) = y^{-1}z^{-1}y$. Аналогично, в случае 1.3° для $x = a^2, y = b$ и $z = aba^{-1}$ имеем $\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \tau_{v_0}(y) = y^{-1}$ и $\tau_{v_0}(z) = x^{-1}z^{-1}x$.

Обозначим через X, Y и Z образы порождающих x, y и z группы H при ее каноническом отображении на абелизатор $H/[H, H]$. Пусть оператор $\tau_{\#} = (\tau_{v_0})_{\#}$ обозначает индуцированное действие τ_{v_0} на абелизаторе. Рассмотрим действие указанного оператора в каждом из трех случаев.

В случае 1.1° имеем $\tau_{\#}(X) = -X, \tau_{\#}(Y) = -Y$ и $\tau_{\#}(Z) = -X - Y + Z$. В случае 1.2° : $\tau_{\#}(X) = -X, \tau_{\#}(Y) = -Y$ и $\tau_{\#}(Z) = -Y - Z + Y = -Z$ и в случае 1.3° : $\tau_{\#}(X) = -X, \tau_{\#}(Y) = -Y$ и $\tau_{\#}(Z) = -X - Z + X = -Z$.

Построим поднятие гиперэллиптической инволюции τ графа G на граф \tilde{G} . Рассмотрим произвольную вершину \tilde{v}_0 графа \tilde{G} такую, что $p(\tilde{v}_0) = v_0$. Обозначим через $\tilde{\lambda}$ единственное поднятие пути λ с нача-

лом в вершине \tilde{v}_0 , а через \tilde{v}_1 конечную вершину $\tilde{\lambda}$. Так как автоморфизм τ_{v_0} оставляет подгруппу H инвариантной, по предложению 2, инволюция τ однозначно поднимается до автоморфизма $\tilde{\tau}$ графа \tilde{G} , переводящего \tilde{v}_0 в \tilde{v}_1 . Подобно τ_{v_0} , отображение $\tilde{\tau}_{\tilde{v}_0}$ задает внешний автоморфизм группы $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$. Покажем, что действие $\tilde{\tau}_{\tilde{v}_0}$ на $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$ эквивариантно действию τ_{v_0} на $\pi_1(G, v_0)$ по отображению $p_* : \pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0) \rightarrow \pi_1(G, v_0)$. Сформулируем это в виде следующей леммы.

Лемма 10. *В приведенных выше обозначениях справедливо равенство $p_* \circ \tilde{\tau}_{\tilde{v}_0} = \tau_{v_0} \circ p_*$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $\tilde{\mu}$ из группы $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$ и положим $\mu = p_*(\tilde{\mu})$. Тогда

$$\tau_{v_0}(p_*(\tilde{\mu})) = \tau_{v_0}(\mu) = \varphi_\lambda^{-1}(\tau_*(\mu)) = \varphi_\lambda(\mu') = \lambda^{-1}(\mu')^{-1}\lambda,$$

где $\mu' = \tau_*(\mu)$. Далее

$$p_*(\tilde{\tau}_{\tilde{v}_0}(\tilde{\mu})) = p_*(\varphi_\lambda^{-1}(\tilde{\tau}_*(\tilde{\mu}))) = p_*(\varphi_\lambda^{-1}(\mu')) = p_*(\tilde{\lambda}^{-1}(\mu')^{-1}\tilde{\lambda}) = \lambda^{-1}(\mu')^{-1}\lambda,$$

где $\mu' = \tilde{\tau}_*(\tilde{\mu})$. При этом, мы воспользовались равенством $p_*(\tilde{\mu}') = \mu'$ которое легко следует из свойства поднятий $p_* \circ \tilde{\tau}_* = \tau_* \circ p_*$. Лемма доказана.

Пользуясь леммой об эквивариантности, заключаем, что в случаях 1.2° и 1.3° действие автоморфизма $\tilde{\tau}_\# = (\tilde{\tau}_{\tilde{v}_0})_\#$ на первой группе гомологий $H_1(\tilde{G}) \cong H/[H, H]$ имеет вид $\tilde{\tau}_\# : X \rightarrow -X$. По лемме 9, это означает, что $\tilde{\tau}$ — гиперэллиптическая инволюция \tilde{G} . Отсюда, \tilde{G} — гиперэллиптический граф и теорема для случаев 1.2° и 1.3° доказана.

Для доказательства теоремы в случае 1.1° рассмотрим накрывающую инволюцию ω отображения $p : \tilde{G} \rightarrow G$, то есть такой автоморфизм графа \tilde{G} , что $p = p \circ \omega$. Заметим, что в рассматриваемом случае имеет место следующее разложение на классы смежности $\Gamma = H + H a$. Воспользуемся каноническим изоморфизмом между фактор-группой $\Gamma/H = \langle H, H a \rangle$ и группой преобразования наложения $\langle 1, \omega \rangle$ накрытия p . Тогда $\omega = H a$ и ω_* определяет следующий внешний автоморфизм группы $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$, где последняя отождествляется с группой H .

$$\omega_* : \langle x, y, z \rangle \rightarrow \langle axa^{-1}, aya^{-1}, aza^{-1} \rangle = \langle aa^2a^{-1}, ab^2a^{-1}, aaba^{-1} \rangle = \langle x, zyz^{-1}, xyz^{-1} \rangle.$$

Переходя к действию на первой группе гомологий $H_1(\tilde{G}) \cong H/[H, H] = \langle X, Y, Z \rangle$ имеем

$$\omega_{\#} : \langle X, Y, Z \rangle \rightarrow \langle X, Y, X + Y - Z \rangle.$$

Поскольку $p : \tilde{G} \rightarrow G$ — регулярное двулистное накрытие, автоморфизм τ имеем ровно два поднятия на G' . Это $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\tau} \circ \omega$. Так как $(\tilde{\tau} \circ \omega)_{\#} = \tilde{\tau}_{\#} \circ \omega_{\#}$ и по лемме об эквиинвариантности $\tilde{\tau}_{\#} = \tau_{\#}$, то действие поднятия $\tilde{\tau} \circ \omega$ на первой группе гомологий определяется по формуле

$$(\tilde{\tau} \circ \omega)_{\#} : \langle X, Y, Z \rangle \rightarrow \langle -X, -Y, -Z \rangle.$$

Следовательно, по лемме 9, $\tilde{\tau} \circ \omega$ — гиперэллиптическая инволюция, а \tilde{G} — гиперэллиптический граф. Теорема доказана.

4.5 Теорема Акколы для графов

В работе Акколы [2] показано, что нерегулярное трехлистное накрытие римановой поверхности рода два является гиперэллиптической поверхностью, в то время как ее регулярное трехлистное накрытие двулистно накрывает тор. Трехмерная версия теоремы Акколы была установлена в [39]. В данном параграфе будет установлено, что нерегулярное трехлистное накрытие графа рода два также является гиперэллиптическим графом, в то время как его регулярное трехлистное накрытие двулистно накрывает граф рода один.

Теорема 8. *Пусть \tilde{G} — трехлистное неразветвленное накрытие графа G рода два. Тогда, если накрытие нерегулярно, то \tilde{G} — гиперэллиптический граф. Если указанное накрытие регулярно, то \tilde{G} двулистно разветвлено накрывает граф рода один.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 7, будем считать, что группа $\Gamma = \pi_1(G, v_0)$ свободна порождена элементами $a = x_1$ и $b = x_2$. Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных n -листных накрытий G и классами эквивалентности транзитивных гомоморфизмов из группы Γ в симметрическую группу S_n на n символах. Напомним, что гомоморфизм в группу S_n называется транзитивным, если его образ транзитивная подгруппа в S_n . Два гомоморфизма $\theta, \theta' : \Gamma \rightarrow S_n$ называются эквивалентными, если существует $h \in S_n$, такой, что $\theta' = h\theta h^{-1}$ ([21], стр. 68).

Если накрытие трехлистно, а $\theta : \Gamma \rightarrow S_3$ соответствующий ему транзитивный гомоморфизм, то возможны два случая $\theta(\Gamma) = S_3$ и

$\theta(\Gamma) = \{(1), (123), (132)\}$. В первом случае накрытие нерегулярно, во втором — регулярно.

Начнем с рассмотрения случая нерегулярного накрытия. При этом, с точностью до перестановки a и b и эквивалентности, для гомоморфизма θ имеется две возможности:

$$2.1^\circ \theta(a) = (12), \theta(b) = (123);$$

$$2.2^\circ \theta(a) = (12), \theta(b) = (13).$$

Напомним стандартную конструкцию позволяющую по каждому транзитивному гомоморфизму $\theta : \Gamma \rightarrow S_n$ строить подгруппу H индекса n в Γ . Пусть $K = \theta(\Gamma) \leq S_n$, а K_1 это подгруппа K , оставляющая символ "1" неподвижным. Тогда $H = \theta^{-1}(K_1)$. При этом, эквивалентным гомоморфизмам соответствуют сопряженные подгруппы. И наоборот, каждому классу сопряженных подгрупп индекса n соответствует класс эквивалентности транзитивных гомоморфизмов Γ в S_n [20].

Пользуясь методом Райдемайстера-Шрайера, найдем порождающие группы H в случаях 2.1° и 2.2°. Учитывая, что по теореме Шрайера H — свободная группа ранга 4, имеем

$$2.1^\circ H = \langle ab^{-1}, ba, b^2ab^{-2}, b^3 \rangle;$$

$$2.2^\circ H = \langle a^2, b^2, aba^{-1}, bab^{-1} \rangle.$$

Как и в теореме 7, определим действие автоморфизма $\tau_{v_0} : a \rightarrow a^{-1}, b \rightarrow b^{-1}$ на подгруппе H .

В случае 2.1°, полагая $x = ab^{-1}, y = ba, z = b^2ab^{-2}$ и $w = b^3$ имеем $\tau_{v_0}(x) = b^{-1}x^{-1}b, \tau_{v_0}(y) = b^{-1}y^{-1}b, \tau_{v_0}(z) = b^{-1}z^{-1}wb$ и $\tau_{v_0}(w) =$

$b^{-1}w^{-1}b$. Откуда, подправляя τ_{v_0} на внутренний автоморфизм группы Γ , получим

$$b\tau_{v_0}b^{-1} : x \rightarrow x^{-1}, y \rightarrow y^{-1}, z \rightarrow w^{-1}z^{-1}w, w \rightarrow w^{-1}.$$

Переходя к индуцированному действию этого автоморфизма на абелизаторе $H/[H, H]$, получим

$$(b\tau_{v_0}b^{-1})_{\#} : X \rightarrow -X, Y \rightarrow -Y, Z \rightarrow -W - Z + W = -Z, W \rightarrow -W.$$

Построим накрытие $p : \tilde{G} \rightarrow G$ по подгруппе H . Будем считать, что $p(\tilde{v}_0) = v_0$, тогда мономорфизм p_* изоморфно отображает группу $\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)$ на $H = p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{v}_0)) \subset \pi_1(G, v_0) = \Gamma$.

Рассмотрим гиперэллиптическую инволюцию τ графа G и путь λ из v_0 в $v_1 = \tau(v_0)$, описанный в предложении 3. Поскольку отображение τ_{v_0} действует по правилу $\mu \in \Gamma \rightarrow \lambda\tau(\mu)\lambda^{-1} \in \Gamma$, то отображение $b\tau_{v_0}b^{-1}$ переводит петлю μ в петлю $b\lambda\tau(\mu)\lambda^{-1}b^{-1} = (b\lambda)\tau(\mu)(b\lambda)^{-1}$. То есть, $b\tau_{v_0}b^{-1} = \varphi_{b\lambda}^{-1} \circ \tau_*$. Последний автоморфизм оставляет группу H инвариантной. Следовательно, по предложению 2, гиперэллиптическая инволюция τ поднимается на \tilde{G} до автоморфизма $\tilde{\tau}$, переводящего \tilde{v}_0 в конечную вершину пути $\tilde{b}\tilde{\lambda}$, где $\tilde{b}\tilde{\lambda}$ — единственное поднятие пути $b\lambda$ на \tilde{G} с началом в \tilde{v}_0 . По лемме 10 об эквиинвариантности, поднятый автоморфизм $\tilde{\tau}$ действует на первой группе гомологий накрытия так же, как и $(b\tau_{v_0}b^{-1})_{\#}$ на группе $H/[H, H]$. То есть, переводит каждый ее элемент в противоположный.

По лемме 9, получим, что $\tilde{\tau}$ — гиперэллиптическая инволюция, а \tilde{G} — гиперэллиптический граф.

В случае 2.2°, полагая $x = a^2$, $y = b^2$, $z = aba^{-1}$ и $w = bab^{-1}$ имеем

$$\tau_{v_0}(x) = x^{-1}, \tau_{v_0}(y) = y^{-1}, \tau_{v_0}(z) = x^{-1}z^{-1}x, \tau_{v_0}(w) = y^{-1}w^{-1}y.$$

Индукцированное действие этого автоморфизма на абелизаторе $H/[H, H]$ имеет вид

$$\tau_{\#} : X \rightarrow -X, Y \rightarrow -Y, Z \rightarrow -X - Z + X = -Z, W \rightarrow -Y - W + Y = -W.$$

Рассмотрим гиперэллиптическую инволюцию τ графа G . Пусть λ — это путь из v_0 в $v_1 = \tau(v_0)$, описанный в предложении 3, а $\tilde{\lambda}$ — его поднятие с началом в \tilde{v}_0 и концом в \tilde{v}_1 . По предложению 2 гиперэллиптическая инволюция τ поднимается на \tilde{G} до автоморфизма $\tilde{\tau}$, переводящего \tilde{v}_0 в вершину \tilde{v}_1 . По свойству эквиинвариантности (лемма 10) поднятый автоморфизм $\tilde{\tau}$ действует на первой группе гомологий накрытия так же, как и τ_{v_0} на группе $H/[H, H]$. Это означает, что $\tilde{\tau}_{\#}$ переводит каждый элемент $\mathbf{H}_1(\tilde{G})$ в противоположный. По лемме 9 заключаем, что $\tilde{\tau}$ — гиперэллиптическая инволюция графа \tilde{G} .

Завершим доказательство рассмотрением регулярных накрытий. В нерегулярном случае, для гомоморфизма θ , с точностью до эквивалентности, имеется четыре возможности:

$$3.1^\circ \theta(a) = (123), \theta(b) = (123);$$

$$3.2^\circ \theta(a) = (123), \theta(b) = (132);$$

$$3.3^\circ \theta(a) = (1), \theta(b) = (123);$$

$$3.4^\circ \theta(a) = (123), \theta(b) = (1).$$

Как и выше, используя метод Райдемайстера-Шрайера, имеем следующие наборы порождающих для подгруппы $H = \langle x, y, z, w \rangle$.

$$3.1^\circ \quad x = ba^{-1}, y = aba^{-1}, z = a^3, w = a^2b;$$

$$3.2^\circ \quad x = ba^{-2}, y = ab, z = a^3, w = a^2ba^{-1};$$

$$3.3^\circ \quad x = a, y = bab^{-1}, z = b^2ab^{-2}, w = b^3;$$

$$3.4^\circ \quad x = b, y = aba^{-1}, z = a^3, w = a^2ba^{-2}.$$

Переносим действие автоморфизма $\tau_{v_0} : a \rightarrow a^{-1}, b \rightarrow b^{-1}$ на H , получим:

$$3.1^\circ \quad \tau_{v_0} : x \rightarrow w^{-1}z, y \rightarrow z^{-1}y^{-1}z, z \rightarrow z^{-1}, w \rightarrow z^{-1}x^{-1};$$

$$3.2^\circ \quad \tau_{v_0} : x \rightarrow y^{-1}z, y \rightarrow z^{-1}x^{-1}, z \rightarrow z^{-1}, w \rightarrow z^{-1}w^{-1}z;$$

$$3.3^\circ \quad \tau_{v_0} : x \rightarrow x^{-1}, y \rightarrow w^{-1}z^{-1}w, z \rightarrow w^{-1}y^{-1}w, w \rightarrow w^{-1};$$

$$3.4^\circ \quad \tau_{v_0} : x \rightarrow x^{-1}, y \rightarrow z^{-1}w^{-1}z, z \rightarrow z^{-1}, w \rightarrow z^{-1}y^{-1}z.$$

По предложению 2 инволюция τ поднимается до инволюции $\tilde{\tau}$ графа \tilde{G} .

В силу леммы 10, индуцированное действие инволюции $\tilde{\tau}$ на первой группе гомологий $\mathbf{H}_1(\tilde{G}) \cong H/[H, H]$ имеет вид:

$$3.1^\circ \quad \tilde{\tau}_\# : X \rightarrow Z - W, Y \rightarrow -Y, Z \rightarrow -Z, W \rightarrow -X - Z;$$

$$3.2^\circ \quad \tilde{\tau}_\# : X \rightarrow -Y + Z, Y \rightarrow -X - Z, Z \rightarrow -Z, W \rightarrow -W;$$

$$3.3^\circ \quad \tilde{\tau}_\# : X \rightarrow -X, Y \rightarrow -Z, Z \rightarrow -Y, W \rightarrow -W;$$

3.4° $\tilde{\tau}_{\#} : X \rightarrow -X, Y \rightarrow -W, Z \rightarrow -Z, W \rightarrow -Y$.

Проанализируем действие $\tilde{\tau}$ на графе \tilde{G} в случае 3.1°. Полагая $X' = X + Z$ и $W' = -W$, получим $\tilde{\tau}_{\#} : X' \rightarrow W', Y \rightarrow -Y, Z \rightarrow -Z, W' \rightarrow X'$. То есть, автоморфизм $\tilde{\tau}$ оставляет инвариантными два гомологических цикла графа \tilde{G} , меняя их ориентацию на противоположную, а два других цикла меняет местами. При каноническом отображении $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}/\tilde{\tau}$ инвариантные циклы переходят в тривиальные, а переставляемые циклы переходят в один цикл фактор-графа. Это означает, что фактор-граф имеет род один.

Оставшиеся случаи 3.2°, 3.3° и 3.4° рассматриваются аналогичным образом.

Теорема доказана.

Литература

- [1] Accola, R. D. M. Riemann surfaces with automorphism groups admitting partitions/ R. D. M. Accola // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. –Vol. 21. –P. 477–482.
- [2] Accola, R. D. M. On Lifting the Hyperelliptic Involution/ R. D. M. Accola // Proc. Amer. Math. Soc. –1994. –Vol. 122, №2. –P. 341–347.
- [3] Alzati, A. Some Remarks on the de Franchis Theorem/ A. Alzati, G. P. Pirola // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) –1990. –Vol. 36. –P. 45–52.
- [4] Bacher, R. The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph/ R. Bacher, P. de la Harpe, T. Nagnibeda // Bull. Soc. Math. Fr. –1997. –Vol. 125. –P. 167–198.
- [5] Baker, M. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs/ M. Baker, S. Norine // Int. Math. Res. Notes. –2009. –Vol. 15. –P. 2914–2955.
- [6] Bandman, T. M. Surjective holomorphic mappings of projective manifolds/ T. M. Bandman// Sib. Math. J. –1981. –Vol. 22. –P. 204–210.

- [7] Biggs, N. L. Chip-firing and the critical group of a graph/ N. L. Biggs // J. Algebraic Combin. –1999. –Vol. 9, №1. –P. 25–45.
- [8] Bolza, O. On binary sextics with linear transformations into themselves/ O. Bolza // Amer. J. Math. –1888. –Vol. 10. –P. 47–60.
- [9] Cardona, G. Curves of genus 2 with group of automorphisms isomorphic to D_8 or D_{12} / G. Cardona, J. Quer // Trans. Amer. Math. Soc. –2007. –Vol. 359, №6. –P. 2831–2849.
- [10] Cori, R. On the sandpile group of a graph/ R. Cori, D. Rossin // European J. Combin. –2000. –Vol. 21, №4. –P. 447–459.
- [11] Djoković, D. Ž. Automorphisms of graphs and coverings/ D. Ž. Djoković // J. Combinatorial Theory, Ser. B. –1974. –Vol.16, №3. –P. 243–247.
- [12] Enriques, F. Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali/ F. Enriques // Reale Accad. Lincei, Rendiconti. –1898. –Vol. 5, №7. –P. 281–286.
- [13] Farkas, H. M. Automorphisms of compact Riemann surfaces and the vanishing of theta constants/ H. M. Farkas // Bull. Amer. Math. Soc. –1967. –Vol. 73. –P. 231–232.
- [14] Farkas H. M., Unramified double coverings of hyperelliptic surfaces/ H. M. Farkas // J. Analyse Math. –1976. –Vol. 30. –P. 150–155.
- [15] Farkas H. M., Kra I., Riemann surfaces, Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. xi+337 pp.

- [16] de Franchis, M. Un teorema sulle involuzioni irrazionali/ M. de Franchis // Rend. Circ. Mat. Palermo. –1913. –Vol. 36. –P. 368.
- [17] Fuertes, Y. On the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces/ Y. Fuertes, G. Gonzalez-Diez // Publ. Mat. –1993. –Vol. 37. –P. 339–353.
- [18] Fuertes, Y. Some bounds for the number of coincidences of morphisms between closed Riemann surfaces/ Y. Fuertes // Israel J. Math. –1999. –Vol. 109, №1. –P. 1–12.
- [19] Goldberg, L. R. Catalan Numbers and Branched Coverings by the Riemann Sphere/ L. R. Goldberg // Adv. Math. –1991. –Vol. 85. –P. 129–144.
- [20] Hall, M. Subgroups of finite index in free group/ M. Hall // Canadian J. Math. –1949. –Vol. 1. –P. 187–190.
- [21] Hatcher A., Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002, 544 pp.
- [22] Hidalgo, R. On a theorem of Accola/ R. Hidalgo // Complex Variables: Theory and Applications. –1998. –Vol. 36. –P. 19–26.
- [23] Howard, A. On the theorem of de Franchis/ A. Howard, A. J. Sommese // Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. –1983. –Vol. 10, №4. –P. 429–436.

- [24] Hurwitz, A. Über Algebraische Gebilde mit Eindentigen Transformationen in Sich/ A. Hurwitz // Math. Ann. –1893. –Bd. 41. –P. 403–442.
- [25] Igusa, J. Arithmetic variety of moduli for genus two/ J. Igusa // Ann. Math. –1960. –Vol. 72, №3. –P. 612–649.
- [26] Imayoshi, Y. Generalizations of de Franchis theorem/ Y. Imayoshi // Duke Math. J. –1983. –Vol. 50. –P. 393–408.
- [27] Ito, M. Holomorphic mappings between compact Riemann surfaces/ M. Ito, H. Yamamoto // Proc. Edinburgh Math. Soc. –2009. –Vol. 52. –P. 109–126.
- [28] Kani, E. Bounds on the number of non-rational subfields of a function field/ E. Kani // Invent. Math. –1986. –Vol. 85. –P. 185–198.
- [29] Kato, T. On Riemann Surfaces of Genus Four with Non-Trivial Automorphisms/ T. Kato // Kodai Math. J. –1981. –Vol. 4. –P. 443–456.
- [30] Koebe, P. Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven/ P. Koebe // Nachr. K. Ges. Wiss. Gottingen. –1907. –P. 191–210, 633–669.
- [31] Koebe, P. Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Dritte Mitteilung/ P. Koebe // Nachr. K. Ges. Wiss. Gottingen. –1908. –P. 337–360.
- [32] Macbeath, A. M. On a Theorem of Hurwitz/ A. M. Macbeath // Proc. Glasgow Math. Assoc. –1961. –Vol. 5. –P. 90–96.

- [33] The locus of curves with prescribed automorphism group/ K. Magaard, T. Shaska, S. Shpectorov, H. Voelklein // RIMS Kyoto Series, Comm. Arithm. Fund. Groups. –2002. –Vol. 6. –P. 112–141.
- [34] Martens, H. A remark on Abel’s Theorem and the mapping of linear series/ H. Martens // Comment. Math. Helvetici. –1977. –Vol. 52. –P. 557–559.
- [35] Martens, H. Observations on Morphisms of Closed Riemann Surfaces/ H. Martens // Bull. London Math. Soc. –1978. –Vol. 10. –P. 209–212.
- [36] Martens, H. Observations on Morphisms of Closed Riemann Surfaces II/ H. Martens // Bull. London Math. Soc. –1988. –Vol. 20. –P. 253–254.
- [37] Martens, H. Mappings of Closed Riemann Surfaces/ H. Martens // Proc. Sympos. Pure Math. –1989. –Vol. 49, №1. –P. 531–539.
- [38] Mednykh, A. Twofold unbranched coverings of genus two 3-manifolds are hyperelliptic/ A. Mednykh, M. Reni M. // Israel J. Math. –2001. –Vol. 123. –P. 149–155.
- [39] Three-fold coverings and hyperelliptic manifolds: Three-Dimensional Version of a Result of Accola/ A. Mednykh, M. Reni, A. Vesnin, B. Zimmermann // Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste, Supp. –2001. –Vol. 32. –P. 181–191.
- [40] Parsons, T. D. Dual imbeddings and wrapped quasi-coverings of graphs/ T. D. Parsons, T. Pisanski, B. Jackson // Discrete Mathematics. –1980. –Vol. 31, №1. –P. 43–52.

- [41] Satake, I. On a generalization of the notion of manifold/ I. Satake // Proc. Nat. Acad. Sci. –1956. –Vol. 42. –P. 359–363.
- [42] Shaska, T. Determining the automorphism group of a hyperelliptic curve/ T. Shaska // Proceedings of the 2003 international symposium on symbolic and algebraic computation, Philadelphia, PA, USA. –2003. –P. 248–254.
- [43] Silhol, R. On some one parameter families of genus 2 algebraic curves and half-twists/ R. Silhol // Comment. Math. Helv. –2007. –Vol. 82. –P. 413–449.
- [44] Tanabe, M. On rigidity of holomorphic maps of Riemann surfaces/ M. Tanabe // Osaka J. Math. –1996. –Vol. 33. –P. 485–496.
- [45] Tanabe, M. A bound for the theorem of de Franchis/ M. Tanabe // Proc. Amer. Math. Soc. –1999. –Vol. 127. –P. 2289–2295.
- [46] Tanabe, M. Holomorphic maps of Riemann surfaces and Weierstrass points / M. Tanabe // Kodai Math. J. –2005. –Vol. 28, №2. –P. 423–429.
- [47] Thurston, W. P. The Geometry and Topology of three-manifolds/ W. P. Thurston, -Princeton, Princeton Univ. Press., 1978.
- [48] Магнус, В. Комбинаторная теория групп/ В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. -М.: Наука, 1974.
- [49] Масси, У. Алгебраическая топология. Введение/ У. Масси, Дж. Столлингс. -М.: Мир, 1977, – 344 с.

- [50] Скотт, П. Геометрия на трехмерных многообразиях/ П. Скотт. -М.: Мир, 1986, – 165 с.

Работы автора по теме диссертации

- [51] Медных, И. А. О голоморфных отображениях римановой поверхности рода три на риманову поверхность рода два/ И. А. Медных // Докл. РАН. –2009, –Т. 424, №2. –С. 165–167.
- [52] Медных, И. А. О нерегулярных голоморфных отображениях римановой поверхности рода четыре на риманову поверхность рода два/ И. А. Медных // Вестник НГУ, Серия: Математика, механика, информатика. –2009. –Т. 9, №2. –С. 73–80.
- [53] Медных, И. А. Классификация голоморфных отображений римановых поверхностей малых родов с точностью до эквивалентности/ И. А. Медных // Сиб. мат. журн. –2010. –Т. 51, №6. –С. 1379–1395.
- [54] Медных, И. А. О точной верхней оценке на число голоморфных отображений римановых поверхностей малого рода/ И. А. Медных // Сиб. мат. журн. –2012. –Т. 53, №2. –С. 325–344.
- [55] Медных, И. А. О теоремах Фаркаша и Акколы для графов / И. А. Медных // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 448, №4. –С. 387-391.
- [56] Медных, И. А. Теорема де Франкиса для римановых поверхностей малых родов/ И. А. Медных // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Изд. Новосиб. гос. ун-та., 2008. - С. 225.

- [57] Медных, И. А. Голоморфные отображения римановых поверхностей малого рода/ И. А. Медных // Международная научная конференция “X Белорусская математическая конференция”, Тезисы докладов Ч. 1. Минск: Изд. Института математики НАН Беларуси, 2008. - С. 91.
- [58] Медных, И. А. О голоморфных отображениях римановой поверхности рода четыре/ И. А. Медных // Материалы XLVII Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Изд. Новосиб. гос. ун-та., 2009, -С. 112–113.
- [59] Медных, И. А. О голоморфных отображениях римановых поверхностей малых родов/ И. А. Медных // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы девятой международной Казанской летней научной школы-конференции. Казань: Изд. Казан. матем. общ-ва, Изд. Казан. гос. ун-та, 2009, Т. 38, - С. 180–182.
- [60] Mednykh, I. A., Holomorphic maps between Riemann surfaces of small genera/ I. A. Mednykh // Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010, 08 - 12 March 2010, Hiroshima, Japan. Electronic Abstract P. 1–18.
www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~shimada/branched10/branched2010_en.html
- [61] Медных, И. А., Верхняя оценка для числа голоморфных отображений римановых поверхностей/ И. А. Медных // Материалы шко-

лы конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО Горно-Алтайского гос. ун-та, 2010, -С. 55–56.

- [62] Медных, И. А. О дискретных аналогах гиперэллиптических римановых поверхностей/ И. А. Медных // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы десятой международной Казанской летней научной школы-конференции. Казань: Изд. Казан. матем. общ-ва, Изд. Казан. гос. ун-та, 2011, Т. 43, -С. 252–253.
- [63] Mednykh, I. A. On the upper bound in the de Franchise theorem for Riemann surfaces of low genera/ I. A. Mednykh // Workshop on low dimensional conformal structures and their groups, Gdansk, 27-29 June 2012, Abstracts, -P. 8, Gdansk University, Poland. <http://mat.ug.edu.pl/conformal/files/Abstracts.pdf>
- [64] Медных, И. А. Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы для графов/ И. А. Медных // Материалы школы конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО Горно-Алтайского гос. ун-та, 2012, -С. 37–38.
- [65] Медных, И. А. О голоморфных отображениях компактных римановых поверхностей/ И. А. Медных// Тезисы докладов Республиканской научной конференции “Актуальные вопросы комплексного анализа”, Ташкент 19-21 сентября 2013 г.. Изд. Национального университета Узбекистана, 2013, -С. 86-87.