Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Московский государственный университет информационных
технологий, радиотехники и электроники"

На правах рукописи

Петрусевич Денис Андреевич

Некоторые проблемы квантовой теории ориентируемых объектов

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Шелепин Алексей Леонидович

Москва – 2015

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Описание ориентируемых объектов в квантовой теории 9

1.1. Ориентация в нерелятивистской квантовой теории. Квантовый ротатор. 9

1.2. Группа Пуанкаре и описание ориентации в релятивистской квантовой теории 12

1.3. Когерентные состояния и ориентация 16

Глава 2. Квазиклассическое описание квантового ротатора в терминах когерентных состояний группы $SU(2)$ 23

2.1. Лабораторная и прикрепленная системы отсчёта 23

2.2. Волновые функции ротатора как функции на группе $SU(2)$ 33

2.3. Когерентные состояния ротатора. Мгновенные КС 38

2.4. Эволюция КС ротатора во времени. Уравнения Эйлера . . 41

2.5. КС ротатора с нефиксированным угловым моментом . . . 48

Глава 3. Конечнокомпонентные (типа Дирака) и бесконечнокомпонентные (типа Майораны) уравнения для спиновой частицы в магнитном поле 54

3.1. Уравнение Майораны 54

3.2. Релятивистские волновые уравнения в $2+1$ измерениях . 59

3.3. Свободные решения в z-представлении 64

3.4. Решение уравнения Майораны в однородном магнитном поле 67

3.5. Уравнение Майораны: нерелятивистский предел и разложение по степеням 1/c 89

Заключение 103

Приложения 105

1. Группа Пуанкаре в $2+1$ измерении 105

1.1. Параметризация 105

1.2. Обобщённое регулярное представление и спин в $2+1$ измерении 110

2. Когерентные состояния групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$ 123

2.1. Группы $SU(2)$ и $SU(1,1)$ как единая система 123

2.2. Когерентные состояния углового момента 127

Список литературы 131

Введение

Актуальность работы. Область приложений теоретико-групповых методов в теоретической физике постоянно расширяется. На языке теории групп формулируются имеющие фундаментальное значение свойства симметрии физических систем; в частности, теория представлений групп лежит в основе квантового описания объектов, обладающих ориентацией.

Для квантово-механического описания точечной бесспиновой частицы в n-мерном (псевдо)евклидовом пространстве достаточно использовать однокомпонентную волновую функцию, зависящую только от пространственно-временных координат. Описание ориентируемых объектов требует введения дополнительных координат. Например, чтобы указать точное положение твердого тела в трехмерном пространстве, надо задать 3 координаты его центра масс и еще 3 угла, задающие его ориентацию. Естественное рассмотрение квантовомеханического описания таких ориентируемых объектов достигается введением волновых функций, зависящих не только от n координат центра масс, но также от некоторых дополнительных переменных, описывающих ориентацию.

В квантовой теории присутствуют два важных примера ориентируемых объектов. Первый – жесткий нерелятивистский ротатор, второй – частицы, обладающие спином.

Как мы уже отметили, описание ориентированных объектов основано на теории представлений групп. Ориентация в трехмерном евклидовом пространстве задается элементом группы вращений $SO(3) \sim$

$SU(2)$, в пространстве Минковского – элементом группы Лоренца $SO(3,1) \sim SL(2,C)$. Соответственно, в первом случае имеем три действительных параметра (углы Эйлера, отвечающие трем поворотам), во втором – шесть действительных параметров, отвечающих 3 обычным и трем гиперболическим поворотам. В свою очередь, пространственные координаты x^μ задаются элементами группы трансляций $T(n)$. Набор пространственных и ориентационных координат можно рассматривать как элемент группы движений пространства, являющейся полупрямым произведением групп трансляций и вращений. Квантовомеханическое описание ориентируемого объекта дается однокомпонентной волновой функцией, зависящей от элементов группы движений соответствующего евклидового или псевдоевклидова пространства $M(n)$ или $M(n,1)$. Таким образом, с точки зрения теории представлений групп при квантовом описании ориентированного объекта мы в общем случае имеем дело с функциями на группах движений $M(n)$ или $M(n,1)$. Этот круг вопросов подробно рассмотрен в [1].

Настоящая работа посвящена исследованию ряда аспектов теории квантовых ориентированных объектов.

Цель работы – развитие методов описания ориентации на основе теории представлений групп Ли и применение этих методов к состояниям квантового ротатора и нахождению точных решений релятивистских волновых уравнений, в том числе бесконечнокомпонентных уравнений Майораны.

Научная новизна исследования определяется тем, что на основе использования волновых функций, зависящих от координат и ориентации, производится построение когерентных состояний ротатора и развиваются оригинальные методы в теории релятивистских волновых уравнений.

Практическая значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в возможности их использования в ядерной, атомной и молекулярной спектроскопии, физике элементарных частиц и когерентных явлений, в частности, при построении точных решений релятивистских волновых уравнений.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Построена система КС квантового ротатора $|juv\rangle$, обладающих минимальной неопределённостью. Они имеют определённую проекцию j на подвижную ось, жёстко связанную с ротатором, и на неподвижную ось.

2. Показано, что в системах с квадратичным по генераторам группы $SO(3)$ гамильтонианом КС со временем, в общем случае, "расплывается" (для аксиально-симметричного ротатора такого расплывания нет); при больших значениях углового момента j уравнения на параметры КС переходят в классические уравнения Эйлера, при малых j их правая часть отличается численным множителем, что соответствует замедлению прецессии.

3. Получены точные решения 2+1-мерных аналогов уравнений Майораны и Бхаббы в постоянном однородном магнитном поле. Предложена методика построения точных решений конечно- и бесконечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений во внешнем поле, основанная на их записи через генераторы групп Ли и разделении пространственных и ориентационных переменных.

4. Для уравнений Майораны, описывающих произвольные спины, как и для конечнокомпонентных уравнений спинов $1/2$ и 1, решения существуют при любых значениях напряженности магнитного поля, и их спектры обладают сходным поведением. Для конечнокомпонентных уравнений для высших спинов ($s>1$) уровни энергии при больших напряженностях поля становятся комплексными.

5. Для 2+1-мерных уравнений Дирака и Майораны (спин $1/2$) во внешнем электромагнитном поле проведено разложение по степеням $1/c$. В первом приближении ($1/c$) разложения совпадают (уравнение Паули). Различия возникают во втором приближении (учитываются члены до $1/c^2$), в постоянном однородном магнитном поле - в третьем.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на 60-й (2011), 61-й (2012) и 62-й (2013) Научно-технических конференциях МГТУ МИРЭА, на семинарах ЛЯР ОИЯИ (Дубна) и МГТУ МИРЭА.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 6 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК РФ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Все изложенные в диссертации результаты получены автором лично. Автор принимал активное участие в обсуждении, интерпретации полученных результатов и написании статей. Вклад соискателя в опубликованные работы, вошедшие в диссертацию, является решающим.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии из 90 наименований и приложения. Работа изложена на 140 страницах, содержит 11 рисунков и 1 таблицу. Библиография включает 90 наименований на 10 страницах.

Глава 1. Описание ориентируемых объектов в квантовой теории

1.1. Ориентация в нерелятивистской квантовой теории. Квантовый ротатор.

Твёрдое тело обладает 6 степенями свободы – тремя поступательными и тремя вращательными, связанными с ориентацией тела. Соответственно, в классической механике имеются уравнения на 3 компоненты вектора импульса $\mathbf{P}$, $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = \sum f$ – действующая на тело сила, и уравнения на 3 проекции момента импульса $\mathbf{M}$,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum [\mathbf{rf}]. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – это плечо силы $\mathbf{f}$.

Для описания вращения удобно перейти в подвижную систему координат, связанную с телом. Оси системы координат направим по главным осям инерции тела A_1, A_2, A_3. В такой системе движение волчка описывается уравнениями Эйлера:

$$A_a \dot{\omega}_a = \epsilon^{abc} A_b \omega_b \omega_c + K_a, \tag{1.2}$$

здесь $\omega_a, a = 1, 2, 3$ – это компоненты угловой скорости, K_a – компоненты суммы моментов сил, приложенных к телу. При свободном вращении $\mathbf{K} = 0$, поэтому уравнения Эйлера в таком случае имеют вид

$$A_a \dot{\omega}_a = \epsilon^{abc} A_b \omega_b \omega_c. \tag{1.3}$$

В частности, для свободного аксиально-симметричного ротатора ($A_1 = A_2 = A$) имеем

$$\omega_1 = C\cos(\omega t), \quad \omega_2 = C\sin(\omega t), \quad \omega_3 = const. \tag{1.4}$$

Проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью ω и остаётся постоянной по величине, равной C. Подробный вывод уравнений Эйлера представлен, например, в [2].

При рассмотрении квантового ротатора, как и в классической теории, используются две системы отсчёта: лабораторная (space-fixed), связанная с окружающим пространством, и локальная или молекулярная (body-fixed) – с вращающимся телом. Естественно, имеется и два набора операторов углового момента: в лабораторной системе левые генераторы группы вращений $\hat{J}_k^L$ и в локальной –правые генераторы $\hat{J}_k^R$. На квантовой теории нерелятивистского ротатора (построенной в конце 20-х - начале 30-х гг.)в значительной мере основана теория молекулярных спектров. С математической точки зрения построение теории нерелятивистского ротатора – это построение поля на группе $SO(3) \sim SU(2)$.

Основные элементы теории квантового ротатора можно найти в книгах [3, 4, 5, 6]. Эта теория описывает вращательное движение жестко связанной многочастичной системы с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2A_1}\hat{\mathcal{I}}_1^2 + \frac{1}{2A_2}\hat{\mathcal{I}}_2^2 + \frac{1}{2A_3}\hat{\mathcal{I}}_3^2, \tag{1.5}$$

где A_a, $a = 1, 2, 3$ – главные моменты инерции, а $\hat{\mathcal{I}}_a$ – проекции оператора углового момента на оси локальной системы отсчёта. Соответственно, $\hat{\mathcal{I}}_a = \hbar \hat{I}_a$, где $\hat{I}_a$ – правые генераторы группы вращений. Наиболее полное описание квантового ротатора в терминах дискретного базиса можно найти в работах [4, 7].

В случае свободного аксиально-симметричного ротатора (симметричного волчка) $A_1 = A_2 = A$ и гамильтониан приобретает вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar^2 \left(\frac{1}{A}\hat{J}^2 + \Omega \hat{I}_3^2\right), \quad \Omega = \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A}\right). \tag{1.6}$$

В этом случае удобно рассматривать общие собственные состояния $|jmk\rangle$ оператора квадрата углового момента $\hat{\mathbf{J}}^2$ и операторов проекций момента $\hat{J}_3$ и $\hat{I}_3$ в лабораторной и локальной системах координат. При величине момента j собственное значение оператора $\hat{\mathbf{J}}^2$ – это $j(j+1)$, а у операторов $\hat{J}_3$ и $\hat{I}_3$ собственные значения m, k меняются в диапазоне $-J, ..., +J$. В состояниях $|jmk\rangle$ энергия равна

$$E = \frac{\hbar^2}{2A} j(j+1) + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A}\right) k^2. \tag{1.7}$$

Функции $|jmk\rangle$ представляют собой D-функции Вигнера, которые зависят от ориентации волчка (углов Эйлера).

Для несимметричного волчка в практических расчетах используется разложение волновых функций по функциям аксиально-симметричного. Квантовая теория несимметричного волчка подробно рассматривается в [8].

Системы когерентных состояний ротатора с различными свойствами строились в работах [9, 10, 11]. Все эти состояния могут быть записаны в виде

$$|xyz\rangle = \sum_{j,m,k} J_{jmk} |jmk\rangle, \tag{1.8}$$

где J_{jmk} – набор коэффициентов. Первое семейство таких КС было построено Янссеном [9], но суммирование в (1.8) велось как по целым, так и по полуцелым значениям углового момента. Это сильно ограничивало применение таких КС к вращательным молекулярным спектрам, где важно описание состояний с целочисленным моментом. Затем в работе [10] по схеме, близкой к использованной Янссеном (и не связанной с построением КС по Переломову) были построены КС, где суммирование в (1.8) ограничивалось целочисленными значениями. Однако, если у КС, введенных Янссеном, квазиклассический вектор ω, удовлетворяющий в классическом пределе уравнениям Эйлера, определялся стандартным способом как $\omega_a = \frac{1}{A_a}\langle \hat{I}_a \rangle$, то для вновь построенных состояний надо было вводить в эту формулу дополнительный множитель. Еще несколько систем КС были введены в работе [11], где также было проведено сравнение их свойств. Все полученные в указанных работах системы КС параметризуются тремя комплексными числами, причем полный угловой момент j таких систем не определён. Ниже мы проведем построение систем КС с фиксированным полным моментом.

1.2. Группа Пуанкаре и описание ориентации в релятивистской квантовой теории

Рассмотрение релятивистских полей, зависящих от дополнительных непрерывных переменных, связанных с ориентацией или спином, имеет длительную историю.

В конце 40-х - начале 50-х годов независимо несколькими авторами [12, 13, 14, 15], главным образом в связи с построением релятивистских волновых уравнений (РВУ), были введены поля, зависящие, кроме x^μ, также от некоторого набора спиновых переменных. Систематическая трактовка таких полей как полей на однородных пространствах группы Пуанкаре была дана Финкельштейном [16] в 1955 г. Он также дал классификацию и явные конструкции однородных пространств группы Пуанкаре, содержащих пространство Минковского. В 1964г. Лурсатом [17] было предложено строить квантовую теорию на группе Пуанкаре вместо пространства Минковского, которое является однородным пространством группы Пуанкаре.

В 70-90 гг. идеи построения полей на различных однородных пространствах группы Пуанкаре, включающих пространство Минковского, получили определенное развитие, в частности, в работах [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Рассматривались преимущества различных однородных пространств, возможности введения взаимодействий в спиновом фазовом пространстве и построения лагранжевой формулировки. Изучались ограничения, накладываемые на скалярные поля выбором однородного пространства. Так, авторы [18] пришли к заключению, что минимальная размерность однородного пространства, пригодного для одновременного описания как целых, так и полуцелых спинов, равна 8. Шестимерное пространство является пространством наименьшей размерности, в котором спин может быть описан однокомпонентной функцией; соответствующие геометрические модели частиц были подробно изучены в [26, 27].

В работах [28, 29, 1] был развит общий подход к построению полей на группах движений евклидовых и псевдоевклидовых пространств и подробно изучены случаи 2,3 и 4 измерений. В нем скалярное поле на группе Пуанкаре, включающее поля всех спинов, является производящей функцией для обычных многокомпонентных полей. В частности, было показано, что в отличие от скалярных полей на однородных пространствах, поле на группе в целом замкнуто относительно дискретных преобразований. Задача построения РВУ выглядит в этом подходе особенно естественно, так как теснейшим образом связана с классификацией скалярных функций на группе.

Для этого, в согласии с общей теорией гармонического анализа, были рассмотрены различные наборы коммутирующих операторов на группе Пуанкаре.

Положение точечного объекта ("материальной точки") в d-мерном евклидовом пространстве задается пространственными координатами x^k, $k = 1, \ldots, d$ (и соответственно пространственно-временными координатами x^μ, $\mu = 0, 1, \ldots, d-1$ в псевдоевклидовом). Для задания положения ориентируемого объекта, кроме x_k, надо задать его ориентацию относительно этой лабораторной системы, описываемую (псевдо)ортогональной матрицей $V \in SO(n)$ или $V \in SO(n-1,1)$. Таким образом, чтобы зафиксировать положение твёрдого тела в трёхмерном пространстве, необходимо задать не только три координаты его центра, но и три угла (обычно принято пользоваться углами Эйлера), определяющих его ориентацию.

Ориентируемый объект описывается парой (x, V). Элемент группы движений $M(n)$ или $M(n,1)$ задается такой же парой (a, Λ), где a отвечает трансляциям, а Λ - поворотам.

Нетрудно убедиться, что при преобразованиях лабораторной и локальной систем соответственно

$$(x', V') = (a, \Lambda)^{-1}(x, V), \qquad (x', V') = (x, V)(a, \Lambda).$$

Далее мы рассматриваем регулярное представление – представление в пространстве функций на группе $f(x, V)$. Важным (и не только технически) вопросом является параметризация матриц V. Используя гомоморфизм $\mathrm{Spin}(n) \sim SO(n)$, мы рассматриваем функции $f(x, z)$ от пространственно-временных координат x и комплексных спинорных переменных z.

Максимальный набор коммутирующих операторов (их число равно числу параметров группы) образуют операторы Казимира вместе с равным количеством функций левых и правых генераторов. Если для описания неориентируемых объектов вполне достаточно функций $f(x)$ на однородном пространстве (а для их классификации – операторов Казимира и левых генераторов), то в рассматриваемом случае функции зависят соответственно от ещё одного, дополнительного, параметра при $n = 2$, трех – при $n = 3$, шести – при $n = 4$, и т.д.

Т.е. мы имеем набор "дополнительных" операторов и соответствующих им квантовых чисел. Часть этих квантовых чисел (в зависимости от размерности $n = 2, 3, 4$, один или два) интерпретируются как спин или его проекция, часть остальных могут быть интерпретированы как заряды [30].

Использование ориентационных переменных дает возможность использования для описания частиц, обладающих спином, однокомпонентных функций и дифференциальных операторов (а не матриц). Это позволяет, в свою очередь, в компактном и единообразном виде записывать различные РВУ (см. [28]) и их решения.

Существует несколько "семейств" уравнений для массивных частиц с высшими спинами. Однако, необходимо отметить, что большое количество точных решений в различных внешних полях было получено лишь для уравнения Дирака [31]. Для остальных уравнений, описывающих массивные частицы, как правило, известны лишь свободные плосковолновые решения. Кроме того, было обнаружено, что для ряда уравнений введение внешнего поля приводит к возникновению принципиальных трудностей (неказуальное распространение, см. [32]).

Как мы увидим ниже, использование ориентационных переменных может облегчить поиск точных решений.

1.3. Когерентные состояния и ориентация

Когерентные состояния (КС) играют важную роль в современной квантовой механике из-за своей фундаментальной теоретической важности. Они широко применяются, в том числе в полуклассическом описании квантовых систем, в теории квантования, в теории излучения, квантовых вычислениях и т.д., см, например, [33, 34, 35, 36, 37, 38]. Впервые систему волновых функций, отражающую поведение нерасплывающихся волновых пакетов для квантовых осцилляторов, ввел Шредингер [39] в процессе изучения связи квантовой и классической теорий. Глаубер исследовал эти состояния [40, 41] и дал им название "когерентные".

КС углового момента были построены в начале 70-х гг. [42], а чуть позже Переломов [43, 36] дал определение обобщенных когерентных состояний (ОКС) для произвольной группы Ли. КС играют существенную роль в современной физике: в теории излучения, квантовых вычислениях, физике конденсированного состояния и т.д. [33, 34, 35, 36, 37, 38]. Впоследствии была хорошо проработана схема построения КС для систем с квадратичным гамильтонианом ([40, 41, 33, 44, 34, 45]). Некоторые нетривиальные обобщения подхода сделаны в работах [37, 46, 47]. Авторы рассмотрели системы с гамильтонианом, состоящим из двух частей: непрерывной и дискретной.

Согласно Переломову [43, 36], можно построить подобный вид КС для систем с фиксированной группой симметрии Ли. Важный пример переломовских КС – это состояния на группе $SU(N)$, см. [48, 49, 42, 50, 51, 52, 53, 54, 55] для $SU(2)$ и [56, 57] для симметричных представлений групп $SU(N)$ с произвольным N. Ниже мы рассматриваем важные применения КС группы $SU(2)$ в теории жёсткого квантового ротатора и на этой основе изучаем полуклассическое описание такой системы.

Для построения КС как квантовых состояний, максимально близких к классическим, необходимо выделить из различных систем ОКС (орбит) состояния с минимальной неопределённостью. Первоначально выбирался старший вес $|z_0\rangle$ неприводимого представления (НП). Такой способ подходит при рассмотрении любой компактной группы, но он не работает для представлений некомпактных групп, не ограниченных старшим и/или младшим весом [61].

Второй способ - выделение состояний с максимальной стационарной подалгеброй [36]. Стационарная подалгебра $\mathcal{B} = \{\hat{B}_k\}$ состояния $|\psi\rangle$ определяется как множество таких элементов $\hat{B}_k$ комплексифицированной алгебры Ли $\mathbf{g}^{\mathcal{C}}$ группы G, что:

$$\hat{B}_k|\psi\rangle = \lambda_k|\psi\rangle. \tag{1.9}$$

Подалгебра максимальна, если $\mathcal{B} \oplus \overline{\mathcal{B}} = \mathbf{g}^{\mathcal{C}}$, где $\overline{\mathcal{B}}$ - подалгебра $\mathbf{g}^{\mathcal{C}}$, сопряжённая $\mathcal{B}$. Состояния, для которых стационарные подалгебры максимальны, обладают наибольшей симметрией и являются выделенными, см. [58]. Но такой способ для нильпотентной группы Гейзенберга-Вейля $W(1)$ даёт не только КС, но и другие системы ОКС (сжатые состояния).

Третий способ – непосредственно использовать соотношения неопределённостей. Имеется два типа таких соотношений. К первому типу, схожему с соотношением неопределённостей Гейзенберга, относятся выражения, в которые входят произведения неопределённостей [59] (например, координаты и импульсы или проекции углового момента):

$$W(1) : \Delta x \Delta p \geq \hbar/2, \tag{1.10}$$

$$SU(2) : \Delta J_x \Delta J_y \geq |\langle \hat{J}_z \rangle| \hbar/2. \tag{1.11}$$

Однако, этот тип соотношений непригоден для определения КС групп $W(1), SU(2)$ в связи с тем, что среди состояний, минимизирующих соотношения (1.10), (1.11) могут встретиться состояния, обладающие сколь угодно большими неопределённостями. Например: равенство (1.10) может достигаться при $\Delta x \to \infty$ и $\Delta p \to 0$, соотношение (1.11) обратится в тождество для состояний с определённой проекцией момента J_x вне зависимости от величин ΔJ_y, ΔJ_z [61]. Кроме этого, следует отметить, что они неинвариантны относительно конечных преобразований группы: в частности, соотношение (1.11) – относительно вращений.

Вторая форма соотношений содержит сумму квадратов неопределённостей:

$$W(1) : \left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 \geq 1, \quad x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}, x_0 p_0 = \hbar. \tag{1.12}$$

$$SU(2) : (\Delta J)^2 = (\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 \geq j\hbar^2. \tag{1.13}$$

Левые части этих соотношений инвариантны относительно групповых преобразований. Они минимальны только для КС и могут служить определением для КС групп $W(1)$ [60] и $SU(2)$ [53].

Для компактных полупростых групп инвариантная мера неопределённости ΔC_2 - длина вектора "изоспина" - определяется с использованием квадратичного оператора Казимира $\hat{C}_2 = g^{ab}\hat{T}_a\hat{T}_b$:

$$\Delta C_2 = \langle g^{ab}\hat{T}_a\hat{T}_b \rangle - g^{ab}\langle \hat{T}_a \rangle \langle \hat{T}_b \rangle, \tag{1.14}$$

здесь g^{ab} - метрический тензор Картана-Киллинга, $\hat{T}_a$ - генераторы группы [54]. Для компактных групп путём особого выбора генераторов можно преобразовать соотношение (1.14) к виду $\Delta C_2 = (\Delta T)^2 = \sum_a (\Delta T_a)^2$, схожему с (1.13). Эта же величина $\hat{C}_2$ может служить мерой неопределённости для некомпактных групп [59].

Однако, даже состояния с минимальной инвариантной дисперсией могут быть далеки от классических. В качестве примеров достаточно указать основное состояние $|0\rangle$ осциллятора (группа $W(1)$) или систему КС группы $SU(2)$, отвечающую $j = 1/2$.

Естественной характеристикой близости состояния к классическому является относительная дисперсия [61]

$$D_{\text{rel}} = (\Delta T)^2 / \langle \hat{\mathbf{T}}^2 \rangle, \quad 0 \leq D_{\text{rel}} \leq 1. \tag{1.15}$$

Классическому пределу отвечает $D_{\text{rel}} \to 0$, т.е. неопределенности должны быть пренебрежимо малы по сравнению со средними. Для группы $W(1)$ относительная дисперсия максимальна (равна 1), в частности, для состояний $|x\rangle, |p\rangle, |n\rangle$; для КС $D_r = 1/(1 + 2|z|^2)$ и обращается в ноль в пределе $|z| \to \infty$. Относительная дисперсия углового момента $D_r = \Delta J^2 / \langle J^2 \rangle$ для состояний с определенной проекцией момента $|jm\rangle$ равна $1 - m^2/(j(j+1))$. Для КС $D_{\text{rel}} = 1/(j+1)$, обращаясь в ноль в пределе $j \to \infty$.

Отметим, что в классическом пределе дисперсии малы лишь по отношению к средним; они могут быть постоянными (КС группы W(1)) или даже возрастать (КС группы SU(2)).

Следует ожидать, что для состояний с $D_{\text{rel}} \to 0$ многие квантовомеханические формулы переходят в классические. В частности, коэффициенты Клебша-Гордана, связывающие КС углового момента, в пределе $j \to \infty$ приводят к классической формуле сложения моментов [58, 61].

Рассматривая физические системы, описываемые конкретными гамильтонианами, мы естественным образом приходим к рассмотрению эволюции КС.

Пусть гамильтониан физической системы и некоторый оператор $\hat{L}$, не зависящий явно от времени, есть операторные функции генераторов группы. Рассмотрим уравнения движения системы в форме Гейзенберга:

$$\frac{d\hat{L}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_H, \hat{L}_H]. \tag{1.16}$$

Если КС $|z\rangle$ соответствующей группы не расплываются, т.е. остаются когерентными со временем, $\hat{U}|z\rangle = |z(t)\rangle$, где $\hat{U}$ – оператор эволюции, то

$$\langle z(t_0)|\hat{L}_H|z(t_0)\rangle = \langle z(t_0)|\hat{U}^\dagger \hat{L}\hat{U}|z(t_0)\rangle = \langle z(t)|\hat{L}|z(t)\rangle$$

и (1.16) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle z|\hat{L}|z\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle z|[\hat{H}, \hat{L}]|z\rangle, \tag{1.17}$$

причем операторы берутся в представлении Шредингера [61]. Чтобы КС не расплывались, достаточно, чтобы $\hat{H}$ был линеен по генераторам группы, так как тогда оператор эволюции является оператором конечных преобразований группы. Для полупростых групп класс гамильтонианов, сохраняющих когерентные состояния когерентными, ограничивается линейными по генераторам операторами и операторами Казимира; для разрешимых групп он дополнительно включает некоторые билинейные комбинации генераторов, которые образуют полупростую алгебру [62]. В частности, для n-мерной группы Гейзенберга $W(n)$ КС $|z\rangle = |z_1 \ldots z_N\rangle$

стабильны при

$$\hat{H} = \hbar(\omega^{kl}\hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_l + F^k a_k + \bar{F}^k a_k^{\dagger} + \beta) \quad \omega^{kl} = \bar{\omega}^{lk},\ \bar{\beta} = \beta. \qquad (1.18)$$

Для таких гамильтонианов, подставляя в (1.17) $\hat{L} = \hat{a}_k$, $k = 1, \ldots, N$, получим точные уравнения движения квантовой системы в виде N канонических уравнений ("точная квазиклассика"):

$$\frac{dz_k}{dt} = -i\omega^{kl} z_l + \bar{F}^k.$$

В случае гамильтонианов, линейных по генераторам $\hat{T}_j^k$ групп $U(N)$

$$\hat{H} = \hbar\, c_k^j\, \hat{T}_j^k, \quad \bar{c}_k^j = c_j^k, \qquad (1.19)$$

аналогичным образом, выбрав $\hat{L} = \hat{T}_k^j$, получим в КС

$$\frac{d(\bar{z}_j z_k)}{dt} = i(c_l^j\, \bar{z}_l z_k - c_k^l \bar{z}_j z_l), \quad \text{или} \quad \frac{dz_k}{dt} = -ic_k^j z_j.$$

Для групп $SU(N)$ можно записать уравнения в независимых переменных $\alpha_k = z_k/z_N$, $k = 1, \ldots, N-1$. Уравнения на α_k использовались в случае групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$, однако для различных приложений надо выписать еще и уравнение на фазу состояния [36].

КС параметризуются точками фазового пространства классической системы, но в общем случае уравнения на параметры КС могут отличаться от классических. Для гамильтонианов, отличных от (1.19), КС вообще говоря, расплываются – волновые функции при произвольном t уже не являются КС, причем в уравнения, определяющие эволюцию, в отличие от рассмотренного выше случая, будет явно входить j. Особый случай, к которому мы вернемся ниже, представляют собой фундаментальные НП, т.к. для них степени генераторов линейно выражаются через генераторы и КС не расплываются при любом $\hat{H}$. Однако в этом важном для приложений случае уравнения для эволюции параметров КС, вообще говоря, существенно отличаются от классических.

Как мы увидим, классические уравнения получаются как уравнения на параметры КС в случае больших значений j, то есть, фактически, для КС с относительной дисперсией $D_{\rm rel} \to 0$.

При описании ориентации в n-мерном пространстве мы имеем дело с группами $SO(n)$ (нерелятивистский случай) или $SO(n,1)$ (релятивистский случай).

КС углового момента, являющиеся КС группы $SO(3) \sim SU(2)$, определяются двумя углами, задающими ось, на которую проектируется угловой момент. Именно эти состояния являются наиболее близкими к классическим – при больших j мы имеем состояния с определенной ориентацией вектора углового момента, т.к. относительная дисперсия $D_{rel} = 1/(j+1) \to 0$.

КС некомпактных групп появляются, в том числе, и в релятивистской квантовой теории. Как мы увидим ниже, свободные решения ряда РВУ в 2+1 измерениях представляют собой КС группы $SO(2,1) \sim SU(1,1)$, параметры КС при этом задаются вектором импульса p_μ.

Глава 2. Квазиклассическое описание квантового ротатора в терминах когерентных состояний группы $SU(2)$

2.1. Лабораторная и прикрепленная системы отсчёта

Состояние ротатора можно описать с помощью матрицы $V = \|v^i_a\|$ из группы $SO(3) \sim SU(2)$. Она связывает две системы отсчёта: локальную (body-fixed, *brf*), связанную с телом, с базисом $\boldsymbol{\xi}_a$, и лабораторную (space-fixed, *srf*) с базисом $\boldsymbol{e}_i$,

$$\boldsymbol{\xi}_a = v^i{}_a \boldsymbol{e}_i. \tag{2.1}$$

Матрица V ортогональна, $V^T = V^{-1}$.

Пусть $v^i{}_a$ – набор координат ротатора. Их можно выразить через углы Эйлера. Также положим, что левый индекс, ответственный за строки матрицы $v^i{}_a$, – “внешний”; правый, нумерующий столбцы, – “внутренний”.

Используя матрицы размера 2×2: $\Xi = \sigma^a \boldsymbol{\xi}_a$ и $E = \sigma^i \boldsymbol{e}_i$, мы можем переписать уравнение (2.1) с использованием комплексных параметров Кэли-Клейна z_i,

$$\Xi = Z^\dagger E Z, \quad Z \in SU(2), \tag{2.2}$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1.$$

Параметры Кэли-Клейна можно выразить через углы Эйлера ψ, θ, ϕ,

$$z_1 = \cos(\theta/2) e^{-i(\phi+\psi)/2}, \quad z_2 = -\sin(\theta/2) e^{i(-\phi+\psi)/2}. \tag{2.3}$$

Таким образом, существует зависимость $V \iff z$, благодаря которой можно описать ориентацию ротатора двумя комплексными параметрами z_i, $i = 1, 2$.

Можно рассматривать два вида преобразований: вращения лабораторной системы, которые мы назовём внешними преобразованиями; и вращения системы, связанной с телом — внутренние преобразования. Очевидно, $\{\boldsymbol{e}_i\}$ преобразуются как векторы под действием внешних преобразований. В то же время, они остаются неизменными под действием внутренних преобразований (вращений тела). Напротив, $\{\boldsymbol{\xi}_a\}$ неизменны при внешних преобразованиях и меняются под действием внутренних.

Для описания преобразований координат v^i_a под действием двух типов вращений мы преобразуем уравнение (2.1) к виду $\xi = eV$, подразумевая, что ξ и e - два столбца, составленные из компонент векторов $\boldsymbol{\xi}_a$ и $\boldsymbol{e}_i$. Внешнее преобразование $e' = e\Lambda$ изменяет матрицу V следующим образом:

$$\xi = eV = e'\Lambda^{-1}V = e'V' \Longrightarrow V' = \Lambda^{-1}V. \tag{2.4}$$

Внутреннее преобразование $\xi' = \xi\underline{\Lambda}$ изменяет ту же матрицу так:

$$\xi = \xi'\underline{\Lambda}^{-1} = eV \Longrightarrow V' = V\underline{\Lambda}\ . \tag{2.5}$$

Так, внешнее преобразование Λ — это умножение слева матрицы V на матрицу Λ^{-1}, тогда как внутреннее преобразование $\underline{\Lambda}$ представляет собой умножение матрицы V справа на $\underline{\Lambda}$.

Если оба преобразования проводятся одновременно, мы имеем общее преобразование,

$$V' = \Lambda^{-1}V\underline{\Lambda}. \tag{2.6}$$

Обе матрицы поворотов Λ и $\underline{\Lambda}$ можно параметризовать углами Эйлера. В представлении (2.6) генераторы — это стандартные матрицы размером 3×3. К тому же, матрицы генераторов преобразований (2.4) и (2.5) имеют одинаковую форму (но их действие различно – умножение матриц слева или справа).

Рассмотрим общее преобразование (2.6) в виде комплексной записи (2.2). Оно воздействует на обе матрицы: Ξ и E. Изменение $\Xi \to \Xi'$, индуцированное внутренними преобразованиями, задается матрицами $g_r \in SU(2)_{\text{int}}$:

$$\Xi' = (g_r)^{-1}\Xi g_r,$$

в то время как изменение $E \to E'$, индуцированное внешними преобразованиями, даётся матрицами $g_l \in SU(2)_{\text{ext}}$,

$$E' = (g_l)^{-1}E g_l.$$

Как следует из (2.2), при внутреннем преобразовании g_r матрица Z преобразуется следующим образом: $Z' = Zg_r$, тогда как при внешнем преобразовании g_l имеем $Z' = g_l^{-1}Z$. Общее преобразование - это комбинация обоих преобразований, и оно меняет матрицу Z по правилу:

$$Z' = g_l^{-1}Zg_r, \tag{2.7}$$

где

$$g_l = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -\bar{u}_2 & \bar{u}_1 \end{pmatrix}, \quad g_r = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_2 & \bar{v}_1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Очевидно, общее преобразование (обозначим его $\Pi(g_l, g_r)$) принадлежит прямому произведению $SU(2)_{\text{ext}} \times SU(2)_{\text{int}}$,

$$\Pi(g_l, g_r) \in SU(2)_{\text{ext}} \times SU(2)_{\text{int}}. \tag{2.9}$$

Аналогичные рассуждения можно провести, работая с группой $SO(3)$. Ориентация трехмерного ротатора описывается ортогональной матрицей $V \in O(3)$ размером 3x3, составленной из коэффициентов переразложения базисов (лабораторной системы отсчета и системы отсчета, связанной с телом). Если системы $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\xi_k\}$ обе правые или левые, то матрица $V \in SO(3)$ и зависит от трех вещественных параметров, в качестве которых можно выбрать углы Эйлера:

$$V = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi\cos\theta - \sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\psi\cos\theta + \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta & \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\theta & \sin\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Инфинитезимальные операторы (генераторы) группы $SO(3)$, отвечающие конечным преобразованиям (2.4), (2.5), задаются стандартными матрицами 3x3. При этом выражения для правых и левых генераторов совпадают (но действие их различно - соответственно умножение слева или справа).

Для нахождения генераторов в произвольном НП группы вращений надо рассмотреть представления в пространстве функций на группе, т.е. функций $f(\phi, \psi, \theta)$ от ориентации ротатора.

Левое регулярное представление $T_L(g)$ действует в пространстве функций $f(q)$, $q = q(\phi, \psi, \theta) \in SO(3)$, на группе как

$$T_L(g) f(q) = f'(q) = f(g^{-1}q), \; g \in G, \qquad (2.11)$$

что отвечает замене лабораторной системы координат, см. (2.4), а правое регулярное представление $T_R(g)$ действует в том же пространстве как

$$T_R(g) f(q) = f'(q) = f(qg), \quad g \in G, \qquad (2.12)$$

что отвечает преобразованию локальной системы координат, см. (2.5). В разложении левого или правого регулярного представления содержатся (с точностью до эквивалентности) все НП группы.

Как множество левых, так и множество правых преобразований образуют группу $SO(3)$. Так как эти два набора преобразований коммутируют, то мы можем рассматривать их как прямое произведение $\Pi = SO(3) \otimes SO(3)$. Преобразования группы Π действуют в пространстве функций, зависящих от 3-х параметров (ориентации ротатора), следующим образом:

$$T_{\Pi}(g,h)f(q) = f(g^{-1}qh) = f'(q). \tag{2.13}$$

Очевидно, набор генераторов группы Π в этом представлении состоит из генераторов преобразований $SO(3)$-подгрупп (2.11) и (2.12).

Для генераторов, отвечающих однопараметрической подгруппе $\omega(t)$, в левом и правом регулярных представлениях имеем

$$\hat{J}_\omega f(q) = -i \lim_{t\to 0} \frac{f(\omega^{-1}(t)q) - f(q)}{t}, \qquad \hat{I}_\omega f(q) = -i \lim_{t\to 0} \frac{f(q\omega(t)) - f(q)}{t}. \tag{2.14}$$

Соответственно операторы конечных преобразований, отвечающие этим однопараметрическим подгруппам, запишутся как

$$T_L(\omega(t)) = \exp(i\hat{J}_\omega t), \qquad T_R(\omega(t)) = \exp(i\hat{J}_\omega t).$$

В (2.14) множитель i обеспечивает эрмитовость генераторов (в математической литературе его как правило не вводят и рассматривают антиэрмитовы генераторы).

Обозначим через $\phi(t), \psi(t), \theta(t)$ углы Эйлера элемента $\omega^{-1}(t)q$. Тогда

$$\hat{J}_\omega f(q) = -i \left.\frac{df(\omega^{-1}(t)q)}{dt}\right|_{t\to 0} = -i\left(\frac{df}{d\phi}\phi'(0) + \frac{df}{d\theta}\theta'(0) + \frac{df}{d\psi}\psi'(0)\right).$$

Обозначив через $\phi(t), \psi(t), \theta(t)$ углы Эйлера элемента $q\omega(t)$, получим аналогичную формулу для правых генераторов.

В качестве однопараметрических подгрупп выберем

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

и

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразованиям $\omega_k^{-1}(t)q$ отвечают повороты вокруг осей e_k, а $q\omega_k(t)$ - вокруг ξ_k. Непосредственное вычисление дает следующие выражения для генераторов преобразований лабораторной системы (2.4) и системы, связанной с телом (2.5), через углы Эйлера:

$$\hat{J}_1 = -i\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{2.15}$$

$$\hat{J}_2 = -i\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{2.16}$$

$$\hat{J}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{2.17}$$

$$\hat{I}_1 = -i\left(\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\psi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right), \tag{2.18}$$

$$\hat{I}_2 = i\left(\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right), \tag{2.19}$$

$$\hat{I}_3 = i\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{2.20}$$

Нетрудно видеть, что все правые генераторы коммутируют со всеми левыми,

$$[\hat{J}_i, \hat{I}_k] = 0, \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon^{ikl}\hat{J}_l, \quad [\hat{I}_i, \hat{I}_k] = i\epsilon^{ikl}\hat{I}_l, \tag{2.21}$$

Это является следствием ассоциативности операции группового умножения – в произведении $g^{-1}qh$ результат не зависит от того, умножаем ли мы сначала справа или слева.

Коммутационные соотношения имеют вид:

$$[\hat{J}_i, v^j_{\ a}] = i\varepsilon_{ijk} v^k_{\ a}, \quad [\hat{I}_a, v^i_{\ b}] = i\varepsilon_{abc} v^i_{\ c}, \tag{2.22}$$

где $v^j_{\ a}$ - элементы матрицы V (2.10).

Величины $\hat{I}_k$ не изменяются при замене лабораторной (space-fixed) системы, а следовательно – это три “внешних” (координатных) скаляра, однако при замене локальной (body-fixed) системы они преобразуются как компоненты вектора. Т.о., $\hat{J}_k$ и $\mathbf{e}_k$- “внешние” векторы и “внутренние” скаляры, $\hat{I}_k$ и ξ_k - “внешние” скаляры и “внутренние” векторы. Величины $v^i_{\ k}$ имеют один “внешний” и один “внутренний” индексы.

Для рассмотрения квантовых чисел, характеризующих ротатор, мы построим максимальный набор коммутирующих операторов в пространстве функций $f(\phi, \psi, \theta)$. Алгебра операторов $\hat{I}_k$ имеет те же коммутационные соотношения, что и алгебра операторов $\hat{J}_k$, а следовательно стандартные результаты теории углового момента непосредственно переносятся на них. Мы получаем вращательные мультиплеты размерности $2I + 1$, где I есть целая или полуцелая максимальная величина проекции $K = I_3$ на подвижную ось $\boldsymbol{\xi_3}$, квадрат величины момента $\hat{I}^2 = I(I+1)$. Величина полного момента не зависит от того, к каким осям его отнести (что можно проверить, используя явный вид генераторов),

$$J(J+1) = \hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = \hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + \hat{I}_3^2 = \hat{I}^2 = I(I+1), \qquad (2.23)$$

и следовательно квантовые числа I и J должны совпадать. Набор одновременно измеримых величин (коммутирующих операторов), характеризующих состояние ротатора, содержит:

$$\hat{J}^2 = \hat{I}^2, \quad \hat{J}_3, \quad \hat{I}_3. \qquad (2.24)$$

Им отвечают квантовые числа $J(J+1)$, $M = -J, -J+1, \ldots, J$, $K = -J, -J+1, \ldots, J$. Поэтому состояния ротатора $|J\,MK\rangle$ однозначно задаются моментом J и двумя его проекциями: M - на фиксированную в пространстве ось и K - на некоторую ось, жестко связанную с ротатором. Размерность мультиплета при данной величине J равна, очевидно, $(2J+1)^2$. Явный вид состояний $|J\,M\,K\rangle$ дается так называемыми D-функциями Вигнера – матричными элементами НП $T_J(g)$ группы $SO(3)$.

Волновые функции, не зависящие от угла ψ, являются собственными для $\hat{I}_3$ с собственным значением $K = 0$. При этом операторы $\hat{J}^k$ (2.15)-(2.17) приобретают вид "обычных" операторов углового момента для неориентируемой точечной частицы, зависящих только от двух углов θ и ϕ. Состояния такой системы $|J\,M\rangle = |J\,M\,0\rangle$.

При данном полном моменте J действие дифференциальных операторов $\hat{J}_k$ на $(2J+1)$ состояний $|J\,M\,K\rangle$ при фиксированной проекции K дает линейную комбинацию тех же состояний, аналогичное верно и для действия $\hat{I}_k$ при фиксированной проекции M. Действие генераторов $\hat{J}_k$ и $\hat{I}_k$ на матрицу, составленную из $|J\,M\,K\rangle$, может быть, следовательно, представлено умножением (соответственно слева и справа) на $(2J+1)\times(2J+1)$ матрицы генераторов в этом представлении.

В терминах переменных $z^{\alpha}{}_{a}$ и производных $\partial_{\alpha}{}^{a} = \partial/\partial z^{\alpha}{}_{a}$ генераторы примут вид

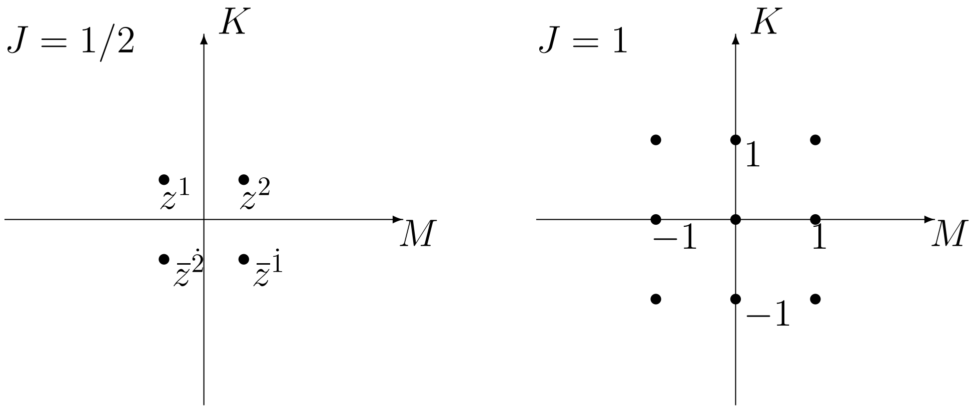
$$\hat{J}_k = \frac{1}{2}(\sigma_k)^a{}_b z^{\beta}{}_a \partial_{\beta}{}^a, \qquad \hat{I}_k = -\hat{J}^R_k = \frac{1}{2}(\sigma_k)^a{}_b z_{\alpha}{}^b \partial^{\alpha}{}_a\,,$$

Явный вид состояний $|J\,M\,K\rangle$ дается полиномами степени $2J$:

$$j=1/2: \quad \begin{array}{ccc} m\backslash k & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & z_1 & z_2 \\ 1/2 & \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{array} \qquad j=1: \quad \begin{array}{cccc} m\backslash k & -1 & 0 & 1 \\ -1 & (z_1)^2 & z_1 z_2 & (z_2)^2 \\ 0 & z_1\bar{z}_2 & z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 & \bar{z}_1 z_2 \\ 1 & (\bar{z}_2)^2 & \bar{z}_1\bar{z}_2 & (\bar{z}_1)^2 \end{array} \tag{2.25}$$

Не вошедший в (2.25) полином второй степени $(1/2)z^{\beta}{}_a z_{\beta}{}^a = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1$ представляет собой инвариант группы.

Как уже отмечалось, одновременное рассмотрение левых и правых преобразований означает рассмотрение представлений прямого произведения $SU(2)\otimes SU(2)$. Однако НП $SU(2)\otimes SU(2)$ характеризуются собственными значениями *двух различных* операторов Казимира (операторов квадрата полного момента) $\hat{J}^2$ и $\hat{I}^2$. В нашем же случае $\hat{J}^2 = \hat{I}^2$, и состояния характеризуются всего 3 числами – полным моментом J и двумя проекциями M и K. Это является следствием того, что в нашем случае коммутирующие наборы действуют в пространстве функций, зависящих лишь от 3 параметров. И в таком пространстве можно построить только часть представлений прямого произведения.



На рисунке для наглядности изображены весовые диаграммы представлений с $J = 1/2$ и $J = 1$. При левых преобразованиях перемешиваются состояния по горизонтали, при правых - по вертикали. В частности, при при $J = 1$, рассматривая только левые или только правые преобразования (соответственно при фиксированных собственных значениях $\hat{I}_3$ или $\hat{J}_3$), мы получим два различных набора из 3 эквивалентных НП (в общем случае число эквивалентных НП в разложении, будет, очевидно, равно размерности этого НП). Если же рассматривать оба типа преобразований одновременно, то связанными повышающими и понижающими операторами $\hat{J}_\pm$ и $\hat{I}_\pm$ окажутся все 9 состояний с $M, K = -1, 0, 1$. Т.о., диаграмма состояний ротатора при фиксированном полном моменте J совпадает с весовой диаграммой представления $T_{J,J}$ прямого произведения $SU(2) \otimes SU(2)$.

Подробнее собственные функции оператора углового момента и когерентные состояния углового момента рассмотрены в Приложении "Когерентные состояния углового момента", см. также [58], [63], [61]. Дальнейшее изложение материала главы основано на работах [66, 67].

2.2. Волновые функции ротатора как функции на группе $SU(2)$

В квантовой теории волновые функции зависят от положения (координат). Как было показано, положение ротатора можно описать матрицей V или двумя комплексными параметрами $z_{1,2}$, $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, которые составляют матрицу $Z \in SU(2)$, согласно (2.2). Далее мы рассматриваем векторы состояний ротатора как функции от таких матриц: $\Psi = \Psi(Z)$, $Z \in SU(2)$.

Согласно (2.7), общие преобразования (2.9) определяют представление $T(g_l, g_r)$ группы $\Pi(g_l, g_r)$ в пространстве скалярных функций $\Psi(Z)$ (волновые функции ротатора):

$$T(g_l, g_r)\Psi(Z) = \Psi'(Z) = \Psi(g_l^{-1} Z g_r). \tag{2.26}$$

Ясно, что генераторы представления $T(g_l, g_r)$ состоят из левых $\hat{J}_i$ (2.11) в $T_L(g_l)$ и правых генераторов $\hat{J}^R_a$ (2.12) в $T_R(g_r)$ регулярных представлений группы $SU(2)$.

Прямое вычисление левых и правых генераторов даёт выражения (2.17), (2.20). Коммутационные соотношения (угловой момент измеряется в единицах $\hbar$: $J_i = \mathcal{J}_i/\hbar$, $I_i = \mathcal{I}_i/\hbar$):

$$[\hat{J}_i, \hat{J}^R_a] = 0, \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon^{ikl}\hat{J}_l, \quad [\hat{J}^R_a, \hat{J}^R_b] = i\epsilon^{abc}\hat{J}^R_c. \tag{2.27}$$

Обратимся к физической интерпретации левых и правых генераторов. Операторы $\hat{J}_k$ - это проекции углового момента в лабораторной системе отсчёта. Проекция $\hat{I}_a$ вектора $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ на единичный вектор $\boldsymbol{\xi}_a$ из локальной системы отсчёта определяется как скалярное произведение:

$$\hat{I}_a = (\hat{\mathbf{J}}, \boldsymbol{\xi}_a) = \hat{J}_k v^k_a. \tag{2.28}$$

Следует отметить, что $\hat{J}_k$ и v_a^k коммутируют (вращение не затрагивает компоненты v_a^k векторов $\boldsymbol{\xi}_a$, которые параллельны осям вращения $\boldsymbol{e}_k$), см (2.22)). Прямой подсчёт даёт следующий результат:

$$\hat{I}_a = -\hat{J}_a^R, \tag{2.29}$$

т.е. операторы $\hat{I}_a$ совпадают с правыми генераторами с точностью до знака. В свою очередь, такой результат ведёт к тому, что коммутационные соотношения для операторов $\hat{I}_a$ отличаются от обычных коммутационных соотношений для операторов углового момента (2.27) знаками:

$$[\hat{I}_a, \hat{I}_b] = -i\epsilon^{abc}\hat{I}_c. \tag{2.30}$$

Операторы $\hat{I}_a$ можно рассматривать как генераторы, которые отвечают параметрам вращения, взятым со знаком минус.

Причину такой разницы в коммутационных соотношениях можно легко понять на примере двумерного ротатора с группой симметрии $SO(2) \sim U(1)$. Волновая функция ψ такого ротатора зависит только от угла ϕ. Функция $z = e^{i\phi}$ изменяется под действием умножения слева на $g = e^{i\alpha} \in U(1)$, $z' = g^{-1}z$, или справа: $z' = zg$ и $g^{-1}zg = z$. В двумерном случае внешнее вращение эквивалентно обратному внутреннему. Соответствующие генераторы отличаются только знаком: $\hat{J} = -id/d\phi$, $\hat{J}^R = id/d\phi$, $\hat{J}^R = -\hat{J}$. Это следствие того факта, что группа $U(1)$ коммутативна.

В трёхмерном случае, где мы имеем дело с группой $SO(3) \sim SU(2)$, такая интерпретация (см. [3]) уже не верна. Последняя группа некоммутативна, и внешнее вращение в общем случае неэквивалентно внутреннему. Если мы предположим обратное, то $\Lambda^{-1}V\Lambda = V$ или

$[\Lambda, V] = 0$. Последнее соотношение имеет место, только если Λ и V отвечают вращениям вокруг одной и той же оси. Различие в генераторах внутренних и внешних вращений не ограничивается знаком. Но операторы углового момента в локальной системе отсчёта: $\hat{I}_a = -\hat{J}^R_a$, и разница в коммутационных соотношениях проявляется только в знаке.

Пусть $\hat{J}_i$ – генераторы группы $SU(2)_{\text{ext}}$, а $\hat{I}_a$ – генераторы группы $SU(2)_{\text{int}}$. Операторы $\hat{J}_k$ преобразуются как векторы под действием $SU(2)_{\text{ext}}$ и инвариантны относительно внутренних преобразованиях $SU(2)_{\text{int}}$, а операторы $\hat{I}_a$ преобразуются как векторы под действием внутренних преобразований и остаются неизменными при действии $SU(2)_{\text{ext}}$.

Как следует из (2.28), квадрат оператора полного углового момента совпадает в обоих системах отсчёта:

$$\hat{\mathbf{I}}^2 = \sum_a \hat{J}_i v^i_a \hat{J}_k v^k_a = \hat{\mathbf{J}}^2. \tag{2.31}$$

В представлении $T(g_l, g_r)$ обе подгруппы действуют в одном пространстве функций, зависящих от трёх действительных параметров (углов Эйлера). Можно выписать три коммутирующих друг с другом оператора:

$$\hat{J}_3,\ \hat{I}_3,\ \hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{\mathbf{I}}^2. \tag{2.32}$$

Общие собственные функции $|j\,mk\rangle$, набора операторов (2.32):

$$\hat{J}_3|jmk\rangle = m|jmk\rangle,\ -j \leq m \leq j,\quad \hat{I}_3|j\,m\,k\rangle = k|j\,m\,k\rangle,\ -j \leq k \leq j,$$
$$\hat{\mathbf{J}}^2|j\,m\,k\rangle = j(j+1)|j\,m\,k\rangle,\quad 2j = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{2.33}$$

Они отвечают состояниям ротатора с определённым угловым моментом j и его z-проекцией m в лабораторной системе отсчёта и z-проекцией k в локальной.

Как было сказано выше, общие преобразования (2.7) принадлежат прямому произведению $SU(2)\times SU(2)$. В общем случае НП $SU(2)\times SU(2)$ характеризуются собственными значениями двух операторов Казимира $\hat{\mathbf{J}}^2$ и $\hat{\mathbf{I}}^2$. В рассматриваемом случае $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{\mathbf{I}}^2$ и состояния ротатора зависят только от трёх чисел: полного углового момента j и двух проекций m, k. Это следствие того, что в рассматриваемом случае операторы обеих подгрупп действуют в одном и том же пространстве функций от трёх переменных. В этом пространстве реализуется только часть представлений прямого произведения $SU(2) \times SU(2)$.

Алгебра операторов $\hat{J}^R_a = -\hat{I}_a$ обладает теми же коммутационными соотношениями, как и алгебра операторов $\hat{J}_i$, и мы можем использовать стандартные результаты теории углового момента. Мы имеем мультиплеты размерности $2j + 1$, где j - целое или полуцелое максимальное значение проекции $k = I_3$ на фиксированную ось $\boldsymbol{\xi}_3$.

Таким образом, есть $(2j + 1)^2$ состояний с одинаковым j. Как известно, состояния $|j\, m\, k\rangle$ даются D-функциями Вигнера. Эти функции – матричные элементы НП $T_j(g)$ группы $SU(2)$ [6, 4]. Выразим D-функции Вигнера через параметры Кэли-Клейна:

$$\langle z|j\, m\, k\rangle = D^j_{m,k}(z) = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+k)!(j-k)!}$$
$$\times \sum_{n_\alpha}{}' \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \bar{z}_1^{n_3} (-\bar{z}_2)^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!}, \ n_\alpha \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.34}$$

где суммирование по n_α ограничивается условиями:

$$n_1+n_2+n_3+n_4 = 2j, \ -n_1-n_2+n_3+n_4 = 2m, \ -n_1+n_2+n_3-n_4 = 2k, \tag{2.35}$$

см. [64]. Только одна из переменных n_α независима.

Для старших весов НП групп $SU(2)_{\rm ext}$ или $SU(2)_{\rm int}$, т.е. для $m = \pm j$ (функции только от одного столбца матрицы (2.2) z_1, z_2 или $\bar z_1, \bar z_2$) или $k = \pm j$ (функции только от одной строки (2.2)) суммирование отсутствует:

$$\langle z|j\,m\,j\rangle = \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}\right)^{1/2} \bar z_1^{j+m}(z_2)^{j-m},$$
$$\langle z|j\,j\,k\rangle = \left(\frac{(2j)!}{(j+k)!(j-k)!}\right)^{1/2} \bar z_1^{j+k}(-\bar z_2)^{j-k}. \qquad (2.36)$$

Скалярное произведение в пространстве функций $\Psi(Z)$, $Z \in SU(2)$ определяется при помощи интегрирования по параметрам Кэли-Клейна с инвариантной мерой $d\mu(z)$:

$$\int \bar\Psi_1(z)\Psi_2(z)d\mu(z), \quad d\mu(z) = \frac{1}{8\pi^2}\delta(|z_1|^2{+}|z_1|^2{-}1)\, d^2z_1 d^2z_2 = \frac{1}{8\pi^2}\sin\theta d\theta d\phi d\psi. \qquad (2.37)$$

Волновые функции в z-представлении (2.34) нормируются при помощи этого скалярного произведения. Фактически, эти функции представляют собой скалярное произведение (2.37) состояний $|z\rangle$ с определённой ориентацией и состояний $|jmk\rangle$ с определённым угловым моментом и его проекциями.

Волновые функции, не зависящие от угла ψ, – это собственные функции оператора $\hat I_3$ с собственным значением $k = 0$. Следует отметить, что в этом случае операторы $\hat J_k$ (2.17) приобретают форму "обычных" операторов углового момента для неориентированной точечной частицы, которые зависят только от двух углов θ и ϕ. Соответственно, волновые функции состояний функции такой частицы $|j\,m\rangle = |j\,m\,0\rangle$.

2.3. Когерентные состояния ротатора. Мгновенные КС

Мы строим КС как орбиты в пространстве НП групп (см [43, 36]). Для выбора состояний, наиболее близких к классическим, рассмотрим инвариантную относительно преобразований систем отсчета дисперсию. В состояниях, отвечающих дискретному базису $|j\,m\,k\rangle$, имеем:

$$\Delta J^2_{\text{ext}} = \langle J^2\rangle - \langle J\rangle^2 = j(j+1) - m^2,\ \Delta J^2_{\text{int}} = \langle J^2\rangle - \langle I\rangle^2 = j(j+1) - k^2, \tag{2.38}$$

так что полная неопределённость

$$\Delta J^2_{\Sigma} = \Delta J^2_{\text{ext}} + \Delta J^2_{\text{int}} = 2j(j+1) - m^2 - k^2. \tag{2.39}$$

Относительная неопределенность состояния

$$\frac{\Delta J^2_{\Sigma}}{2J^2} = 1 - \frac{m^2+k^2}{2j(j+1)}, \tag{2.40}$$

может служить мерой близости состояния к классическому. При фиксированном j относительная неопределенность минимальна для состояний с $|m| = |k| = j$, для них она равна $1/(1+j)$ и обращается в ноль при $j \to \infty$.

При фиксированном угловом моменте j состояниями, наиболее близкими к классическим, являются состояния $|m| = |k| = j$ и состояния, получаемые из них действием преобразований группы $SU(2)_{\text{ext}} \times SU(2)_{\text{int}}$, характеризующиеся той же относительной неопределенностью $1/(1+j)$.

Рассмотрим сначала по отдельности КС групп $SU(2)_{\text{ext}}$ и $SU(2)_{\text{int}}$.

Поворотом лабораторной системы (т.е. внешним преобразованием) из состояния $|j\,j\,j\rangle = \bar{z}_1^{2j}$ получим "левые" КС $|j\,u\,j\rangle$,

$$|j\,u\,j\rangle = (u_1\bar{z}_1 + \bar{u}_2 z_2)^{2j} = \sum_{m=-j}^{j} \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}\right)^{1/2} u_1^{j+m}\bar{u}_2^{j-m}|j\,m\,j\rangle, \tag{2.41}$$

где $u_1 = \cos(\gamma/2)e^{i\delta/2}$ и $u_2 = \sin(\gamma/2)e^{-i\delta/2}$. В записи (2.41) вид этих состояний совпадает с видом КС углового момента (см. [42, 36]). Однако в случае ротатора z_1, z_2 зависят от трех переменных (углов Эйлера ϕ, θ, ψ, являющихся координатами на группе $SU(2)$), а в случае КС углового момента – только от двух переменных ϕ, θ, являющихся координатами на однородном пространстве $SU(2)/U(1)$.

Нетрудно заметить, что состояние $|j\,u\,j\rangle$ – это собственный вектор проектора $\hat{J}_{\boldsymbol{n}}$ на направление, заданное единичным вектором $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = (\sin\gamma\cos\delta, \sin\gamma\sin\delta, \cos\gamma), \quad n_i = \sigma_i^{\alpha\beta}\bar{u}_\alpha u_\beta. \tag{2.42}$$

т.е., $\hat{J}_{\boldsymbol{n}}|j\,u\,j\rangle = j|j\,u\,j\rangle$.

Нетрудно вычислить перекрытие двух "левых" КС (2.41), отвечающих векторам $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{n}'$:

$$\langle j\,u\,j|j\,u'\,j\rangle = (\cos(\beta'/2))^{2j}\,. \tag{2.43}$$

Здесь β' - это угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$.

В пределе $j \to \infty$ "левые" КС $|j\,u\,j\rangle$ и $|j\,u'\,j\rangle$ ортогональны, если $u \neq u'$,

$$\lim_{j\to\infty}\langle j\,u\,j|j\,u'\,j\rangle = 0,\ u \neq u'.$$

Соответствующие относительные неопределённости (2.40) стремятся к нулю, и мы получаем классические состояния с угловым моментом j и осью вращения, заданной углами γ и δ.

Применяя внутренние преобразования к состоянию $|j\,j\,j\rangle = \bar{z}_1^{2j}$, мы получим "правые" КС $|j\,j\,v\rangle$ ротатора:

$$|j\,j\,v\rangle = (\bar{v}_1\bar{z}_1 + v_2(-\bar{z}_2))^{2j} = \sum_{k=-j}^{j} \left(\frac{(2j)!}{(j+k)!(j-k)!}\right)^{1/2} \bar{v}_1^{j+k} v_2^{j-k} |j\,j\,k\rangle, \tag{2.44}$$

где $v_1 = \cos(\gamma/2)e^{i\delta/2}$ и $v_2 = \sin(\gamma/2)e^{-i\delta/2}$.

Состояние $|jjk\rangle$ обладает определённой проекцией k на ось $\boldsymbol{\xi}^3$ в системе, связанной с телом. Соответственно, КС $|jj\,v\rangle$ – это состояние с максимальной проекцией $k = j$ углового момента на направление

$$\boldsymbol{\nu} = (\sin\gamma\cos\delta, \sin\gamma\sin\delta, \cos\gamma), \quad \nu_a = \sigma_a^{\alpha\beta}\bar{v}_\alpha v_\beta. \tag{2.45}$$

Т.е., КС $|jj\,v\rangle$ – это собственный вектор проектора $\hat{I}_{\boldsymbol{\nu}}$ на направление $\boldsymbol{\nu}$, заданное углами γ, δ в системе, связанной с телом,

$$\hat{I}_{\boldsymbol{\nu}}|j\,j\,v\rangle = j|j\,j\,v\rangle.$$

В классической теории, в системе, совпадающей с главными осями ротатора, $\mathcal{I}_a = \hbar I_a = A_a\omega_a$, где A_a – главные моменты инерции и ω_a – компоненты угловой скорости. Вектор квазиклассического вращения или угловая скорость в таком случае определяется компонентами

$$\omega_a = A_a^{-1}\hbar\langle\hat{I}_a\rangle, \tag{2.46}$$

и для КС (2.44) имеем $\omega_a = A_a^{-1} j\hbar\nu_a$.

В общем случае, применяя преобразования (2.9) (т.е. поворачивая лабораторную и связанную с телом системы) к состоянию $|j\,j\,j\rangle$, получим

КС $|j\,u\,v\rangle$ ротатора,

$$|j\,u\,v\rangle = (u_1\bar{v}_1\bar{z}_1 + \bar{u}_2\bar{v}_1 z_2 + \bar{u}_2 v_2 z_1 + u_1 v_2(-\bar{z}_2))^{2j} \tag{2.47}$$

$$= \sum_{m,k=-j}^{j} \frac{(2j)!}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+k)!(j-k)!}}\, {u_1}^{j+m}\bar{u}_2^{j-m}\bar{v}_1^{j+k}v_2^{j-k}|j\,m\,k\rangle. \tag{2.48}$$

разлагающееся по состояниям (2.34) – D-функциям Вигнера. Состояния $|j\,u\,v\rangle$ характеризуются проекциями j углового момента на ось $\boldsymbol{n}$ в лабораторной системе отсчёта и на ось $\boldsymbol{\nu}$ в системе, связанной с телом. При фиксированном j эти состояния обладают минимальной инвариантной дисперсией (2.39) $\Delta J_\Sigma^2 = 2j$.

Подробнее о соотношениях между параметрами исходного элемента Z (2.2), (2.3) группы $SU(2)$ и $Z^{'}$, полученного в результате действия внешнего, внутреннего или общего преобразования на Z см. в Приложении пункт "Соотношения между параметрами элемента группы $SU(2)$ при внешнем, внутреннем и общем преобразовании".

2.4. Эволюция КС ротатора во времени. Уравнения Эйлера

В силу изотропии пространства гамильтониан свободного ротатора не может зависеть от ориентации волчка явно, а значит, он инвариантен по отношению к внешним ("левым") преобразованиям.

Такой гамильтониан может зависеть от единственной комбинации левых генераторов $\hat{J}_k$, – оператора Казимира $\hat{\mathbf{J}}^2$. Однако, он может быть функцией от операторов $\hat{I}_a$, инвариантных относительно "внешних" преобразований.

Для симметричного ротатора не только внешние, но и внутренние преобразования являются симметриями гамильтониана. В этом случае группа симметрии – это $SO(3) \times SO(3)$. В случае осевой симметрии, существует внутренняя симметрия относительно правых вращений вокруг оси $\boldsymbol{\xi}_3$ (с генератором $\hat{I}_3$). Здесь группа симметрии – это $SO(3) \times SO(2)$. Такая симметрия связана с аддитивным квантовым числом k. В общем случае, когда все три момента инерции различны (внутренняя симметрия отсутствует), внутренние преобразования с генераторами $\hat{I}_a$ не являются симметриями гамильтониана, и группа симметрии – $SO(3)$.

Таким образом, симметрию по отношению ко внешним преобразованиях (внешнюю симметрию), можно трактовать как симметрию вмещающего пространства, в которое помещён ротатор. А симметрию по отношению к внутренним преобразованиям (внутреннюю симметрию) – как симметрию самого ротатора.

Перейдем к описанию эволюции КС ротатора во времени. Рассмотрим гамильтониан

$$\hat{H} = \hbar^2 \left(\frac{1}{2A_1}\hat{I}_1^2 + \frac{1}{2A_2}\hat{I}_2^2 + \frac{1}{2A_3}\hat{I}_3^2 \right) + U, \tag{2.49}$$

где A_b – главные моменты инерции. Система, связанная с телом совпадает с системой, направленной по главным осям ротатора, U – потенциальная энергия ротатора, которая в общем случае зависит от положения волчка в пространстве.

В классической теории движение ротатора описывается уравнениями Эйлера:

$$A_a \dot{\omega}_a = \epsilon^{abc} A_b \omega_b \omega_c + K_a, \tag{2.50}$$

где $K_a = i\hat{I}_a U$ – момент вращения.

Наша цель – получить уравнения, описывающие эволюцию КС, в которые входит угловая скорость ω_a (2.46), а затем – сравнить результаты с уравнениями Эйлера.

Сначала рассмотрим гамильтониан свободного аксиально-симметричного ротатора ($A_1 = A_2 = A$):

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar^2 \left(\frac{1}{A}\hat{J}^2 + \Omega \hat{I}_3^2 \right), \quad \Omega = \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A} \right). \tag{2.51}$$

Состояния с определённой энергией – это собственные векторы операторов $\hat{J}^2$ и $\hat{I}_3$, а именно, состояния дискретного базиса $|j\,m\,k\rangle$ и "левые" КС $|j\,u\,j\rangle$ (2.41). Если в начальный момент времени ротатор находится в состоянии $|j\,m\,k\rangle$ или $|j\,u\,j\rangle$, то оператор эволюции изменяет только их фазу. В общем случае, для векторов, не являющихся собственными для оператора $\hat{I}_3$, ситуация сложнее. Ниже мы рассмотрим подробнее пример "правых" КС $|j\,j\,v\rangle$ (2.44).

Уравнение Шрёдингера с гамильтонианом (2.49) для состояний с определённым угловым моментом j принимает вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\hbar^2 \left[A^{-1} j(j+1) + \Omega \hat{I}_3^2 \right] \Psi(z,t). \tag{2.52}$$

Здесь надо выделить особый случай $j = 1/2$. Тогда $\hat{I}_1^2 = \hat{I}_2^2 = \hat{I}_3^2 = 1/4$ (в спинорном представлении при $j = 1/2$ генераторы удовлетворяют и коммутационным (2.30), и антикоммутационным соотношениям

$$\{\hat{I}_i, \hat{I}_k\} = \frac{1}{4}\delta_{ik},$$

подробнее см. [65]). Поэтому правая часть уравнения (2.52) принимает вид

$$\frac{1}{2}\left[A^{-1}j(j+1)+\Omega\hat{I}_3^2\right]\Psi_{1/2}(z,t)$$
$$=\frac{1}{8}\left(3A^{-1}+\Omega\right)\Psi_{1/2}(z,t)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{2A_3}\right)\Psi_{1/2}(z,t),$$

и, какое бы не было начальное состояние, меняется только его фаза:

$$\Psi_{1/2}(z,t)=\exp\left[-i\hbar\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{2A_3}\right)\frac{t}{4}\right]\Psi_{1/2}(z,0).$$

Выберем КС ротатора $|j\,j\,v\rangle$ (2.44) в качестве начального. В общем случае, форма волнового пакета со временем изменяется (пакет “расплывается”). Рассмотрим сначала проблему “расплывания”. Произведём замену волновой функции $\Psi(z,t)$ на $\tilde{\Psi}(z,t)$:

$$\tilde{\Psi}(z,t)=\Psi(z,t)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{j(j+1)}{2A}t\right]. \tag{2.53}$$

Новая функция $\tilde{\Psi}(z,t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\Psi}(z,t)}{\partial t}=\frac{\Omega}{2}\hat{I}_3^2\tilde{\Psi}(z,t). \tag{2.54}$$

Предположим, что КС не меняет форму, а под действием эволюции меняется только параметр v, т.е. существуют решения уравнения (2.54) вида $|j\,j\,v(t)\rangle$:

$$\tilde{\Psi}(z,t)=|j\,j\,v(t)\rangle=\left[\bar{v}_1(t)\bar{z}_1+v_2(t)(-\bar{z}_2)\right]^{2j}.$$

Тогда уравнение (2.54) приобретает вид:

$$2ij\left[\bar{v}_1'\bar{z}_1+v_2'(-\bar{z}_2)\right]\left[\bar{v}_1\bar{z}_1+v_2(-\bar{z}_2)\right]$$
$$=\frac{\Omega}{2}\left\{j(j-1/2)\left[\bar{v}_1\bar{z}_1-v_2(-\bar{z}_2)\right]^2+j\left[\bar{v}_1\bar{z}_1+v_2(-\bar{z}_2)\right]^2\right\}. \tag{2.55}$$

Раскладывая обе части уравнения (2.55) по степеням z_k, мы получим три уравнения (в случае $j = 1/2$ их два, а для состояний с $v_1(0) = 0$ или $v_2(0) = 0$ – только одно). Соответственно для $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ и $\bar{z}_1\bar{z}_2$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&ij(\bar{v}_1^2)' = \frac{\Omega}{2} j(j+1/2)\bar{v}_1^2,\\
&ij(v_2^2)' = \frac{\Omega}{2} j(j+1/2)v_2^2,\\
&2ij(\bar{v}_1 v_2)' = \Omega \bar{v}_1 v_2 j(j-3/2).
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Система (2.56) в случае $j = 0$ превращается в тождество. Так же она совместна для случая $j = 1/2$. Параметры приобретают вид:

$$
\begin{aligned}
&\bar{v}_1 = c_1 \exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\Omega}{2}(j+\frac{1}{2})t\right),\\
&v_2 = c_2 \exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\Omega}{2}(j+\frac{1}{2})t\right).
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Здесь c_1, c_2 - произвольные постоянные.

В общем случае, эти три уравнения несовместны, следовательно, решения уравнения (2.52) не могут иметь вид $|j\,j\,v(t)\rangle$ (для полупростых групп сохраняет форму КС только гамильтонианы, линейные по генераторам группы или зависящие от оператора Казимира, для разрешимых групп такие гамильтонианы могут содержать некоторые комбинации, билинейные по генераторам и образующие простую алгебру, см. [62]).

Тем не менее, можно построить решения, “близкие” к КС. Представим волновую функцию $\tilde{\Psi}(z,t)$ в следующем виде:

$$
\tilde{\Psi}(z,t) = \sum_k c_k(t)|j\,j\,k\rangle, \quad c_k(0) = \left(\frac{(2j)!}{(j+k)!(j-k)!}\right)^{1/2} \bar{v}_1^{j+k} v_2^{j-k}\ . \tag{2.58}
$$

При $t = 0$ состояние $\Psi(z,t)$ из (2.53) – это КС $\Psi(z,0) = |j\,j\,v\rangle$. Подставим функцию (2.58) в уравнение (2.54) и получим:

$$c_k(t) = c_k(0)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}k^2\Omega t\right),$$

так что

$$\Psi(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{j(j+1)}{2A}t\right]\sum_k c_k(0)\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}k^2\Omega t\right)|j\,j\,k\rangle. \tag{2.59}$$

Функция $\tilde{\Psi}(z,t)$ является периодической, её период $T_0 = 4\pi\hbar\Omega^{-1}$. Таким образом, в моменты времени nT_0 волновая функция $\Psi(z,t)$, отличающаяся от $\tilde{\Psi}(z,t)$ фазовым множителем, снова приобретает вид КС. Значит, неопределённость ΔI^2 не возрастает, а волновой пакет не расплывается со временем.

Рассмотрим средние значения $\langle\hat{I}_i\rangle$ в КС $|j\,j\,v(t)\rangle$ (2.44), которое зависит от времени. Предположим, что эволюция состояний задается гамильтонианом (2.49). Тогда

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{I}_a\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{I}_a]\rangle = \hbar\sum_j \epsilon^{abc}\frac{1}{2A_b}\langle\hat{I}_b\hat{I}_c + \hat{I}_c\hat{I}_b\rangle + \frac{1}{\hbar}K_a. \tag{2.60}$$

Чтобы найти явный вид средних, которые входят в уравнение (2.60), воспользуемся тем фактом, что операторы $\hat{I}_b$ выражаются через операторы $\hat{T}_\alpha^\beta = a_\alpha\partial/\partial a_\beta$, $a_1 = \bar{z}_1$, $a_2 = -\bar{z}_2$,

$$\hat{I}_1 = \hat{T}_2^1 + \hat{T}_1^2, \quad \hat{I}_2 = i(\hat{T}_2^1 - \hat{T}_1^2), \quad \hat{I}_3 = \hat{T}_2^2 - \hat{T}_1^1,$$

и Q-символы операторов $T_\beta^\alpha(\bar{v},v) = \langle\hat{T}_\beta^\alpha\rangle$ и $(T_\beta^\alpha T_\delta^\gamma)(\bar{v},v) = \langle\hat{T}_\beta^\alpha\hat{T}_\delta^\gamma\rangle$, которые были вычислены в [51, 57],

$$T_\beta^\alpha(\bar{v},v) = 2j\bar{v}_\alpha v_\beta, \quad (T_\beta^\alpha T_l^\gamma)(\bar{v},v) = 2j(2j-1)\bar{v}_\alpha\bar{v}_\gamma v_\beta v_\delta + 2j\bar{v}_\alpha v_\delta\delta_\beta^\gamma.$$

Учитывая выражение (2.46) для угловой скорости ω_a ротатора, зависящее от параметров КС, получим следующие уравнения:

$$A_a\dot{\omega}_a = \frac{2j-1}{2j}\epsilon^{abc}A_b\omega_b\omega_c + K_a. \tag{2.61}$$

Для $j = 1/2$ КС стабильны и эволюция во времени сводится к изменению параметров КС согласно уравнениям:

$$A_a\dot{\omega}_a = K_a,$$

прецессия отсутствует; при $K_i = 0$ со временем меняется только фаза волновой функции.

Уравнения (2.61) можно трактовать, как квантовую версию уравнений Эйлера для классического ротатора (2.50). Они отличаются от классических выражений только множителем $(2j-1)/2j$ в правой части. Следует отметить, что для малых j этот множитель существенно отличается от 1. Это отличие приводит к замедлению прецессии ротатора; он стремится к классическому значению 1 при $j \to \infty$. Таким образом, $(j)^{-1}$ можно рассматривать как малый безразмерный параметр, описывающий переход к классическому пределу. Вспоминая, что $(j)^{-1} = \hbar\mathcal{J}^{-1}$, мы видим, что в рассматриваемом случае, как и во многих других квантовомеханических задачах, формальное разложение по степеням $\hbar$ можно интерпретировать как квазиклассическое разложение, см. [66].

Пусть ω_a^{cl} удовлетворяет классическим уравнениям Эйлера (2.50). Представим решение уравнения (2.61) в виде $\omega_a = \omega_a^{\mathrm{cl}} + \Delta\omega_a + O\left((j)^{-2}\right)$, где $\Delta\omega_a$ – квантовые поправки порядка $(j)^{-1}$. Тогда эти поправки удовлетворяют набору линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$A_a\Delta\dot{\omega}_a = -(2j)^{-1}A_a\dot{\omega}_a^{\mathrm{cl}} + \epsilon^{abc}A_b(\Delta\omega_b\omega_c^{\mathrm{cl}} + \omega_b^{\mathrm{cl}}\Delta\omega_c).$$

2.5. КС ротатора с нефиксированным угловым моментом

Как мы уже отмечали выше, было построено несколько систем КС ротатора, обладающих различными свойствами. Первой такой системой были КС, введенные Янссеном [9]:

$$|xyz\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}y\bar{y}(1+x\bar{x})(1+z\bar{z})\right)\times$$
$$\sum_{JMK}\sqrt{\frac{(2J)!}{(J+M)!(J-M)!(J+K)!(J-K)!}}x^{J+M}y^{2J}z^{J+K}|JMK\rangle. \quad (2.62)$$

Суммирование производится по всем значениям J - и целым, и полуцелым. Перекрытие двух КС имеет вид:

$$\begin{aligned}&\langle xyz|x^{'}y^{'}z^{'}\rangle = \\ &\exp\left(\bar{y}y^{'}(1+\bar{x}x^{'})(1+\bar{z}z^{'})-1/2y\bar{y}(1+x\bar{x})(1+z\bar{z})\right)\\ &\exp\left(-1/2y^{'}\bar{y}^{'}(1+x^{'}\bar{x}^{'})(1+z^{'}\bar{z}^{'})\right). \end{aligned}\quad (2.63)$$

Средние значения проекций оператора углового момента на оси внутренней системы координат $\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z$ в базисе когерентных состояний имеют вид:

$$\begin{aligned}\langle xyz|\hat{I}_x|xyz\rangle &= \frac{z+z^*}{1+zz^*}\langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle,\\ \langle xyz|\hat{I}_x^2|xyz\rangle &= \langle xyz|\hat{I}_x|xyz\rangle^2+\langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle/2,\\ \langle xyz|\hat{I}_y|xyz\rangle &= i\frac{z-z^*}{1+zz^*}\langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle,\\ \langle xyz|\hat{I}_y^2|xyz\rangle &= \langle xyz|\hat{I}_y|xyz\rangle^2+\langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle/2,\end{aligned}\quad (2.64)$$

$$\langle xyz|\hat{I}_z|xyz\rangle = \frac{zz^*-1}{1+zz^*}\langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle,$$
$$\langle xyz|\hat{I}_z^2|xyz\rangle = \langle xyz|\hat{I}_z|xyz\rangle^2 + \langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle/2,$$
$$\langle xyz|\hat{I}_i\hat{I}_k|xyz\rangle + \langle xyz|\hat{I}_k\hat{I}_i|xyz\rangle = 2\langle xyz|\hat{I}_k|xyz\rangle\langle xyz|\hat{L}_i|xyz\rangle,$$
$$\langle xyz|\hat{J}|xyz\rangle = yy^*(1+xx^*)(1+zz^*), \quad i \neq k = x, y, z. \tag{2.65}$$

Аналогичный набор выражений получается и для средних значений проекций оператора углового момента на оси лабораторной системы $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ – они отличаются от (2.65) заменой $x \leftrightarrow z$.

Чтобы придать переменным x, y, z наглядный смысл, Янссен вводит параметр r – среднее значение оператора углового момента в базисе КС, или абсолютная величина вектора $\boldsymbol{J}$,

$$r^2 = \langle J_x\rangle^2 + \langle J_y\rangle^2 + \langle J_z\rangle^2. \tag{2.66}$$

и углы, характеризующие ориентацию волчка в пространстве. Углы α и β задают направление вектора $\boldsymbol{J}$ в лабораторной системе отсчёта, а φ и θ задают направление $\boldsymbol{I}$ в системе отсчёта, связанной с ротатором. Для связи положения подвижной системы координат с лабораторной требуется ещё один параметр γ. Старые переменные выражаются через новый набор следующим образом:

$$x = -\exp(-i\alpha)\tan(\beta/2),$$
$$y = \sqrt{2r}\cos(\beta/2)\cos(\theta/2)\exp\left(i(\alpha+\gamma+\varphi)/2\right),$$
$$z = -\exp(-i\varphi)\tan(\theta/2). \tag{2.67}$$

КС (2.62) теперь можно записать через D-функции Вигнера:

$$|xyz\rangle = |\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = \exp(-r)\sum_{JMK} D^J_{M,-J}(\alpha,\beta,\gamma)D^J_{K,-J}(\theta,\varphi,0)\frac{(2r)^J}{\sqrt{(2J)!}}|JMK\rangle. \tag{2.68}$$

Средние значения проекций оператора углового момента на оси внутренней и лабораторной системы (2.65) в когерентном состоянии $|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{I}_x|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = -r\cos\phi\sin\theta,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{I}_y|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = -r\sin\phi\sin\theta,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{I}_z|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = -r\cos\theta,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{J}_x|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = -r\cos\alpha\sin\beta,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{J}_y|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = -r\sin\alpha\sin\beta,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{J}_z|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = -r\cos\beta,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{J}|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = r,\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{I}_x^2+\hat{I}_y^2+\hat{I}_z^2|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = r(r+3/2),\\
&\langle\alpha\beta\gamma\theta\varphi r|\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2|\alpha\beta\gamma\theta\varphi r\rangle = r(r+3/2).
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Янссен отдельно отмечает тот факт, что набор когерентных состояний (2.62) содержит состояние с целыми и полуцелыми значениями углового момента, поэтому “при исследовании квазиклассических свойств вращающегося ядра приходится рассматривать чётные и нечётные ядра одновременно”.

Авторы [10] на основе подхода Янссена построили набор КС, включающий только целые квантовые числа,

$$
\begin{aligned}
|xyz\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}y\bar{y}(1+x\bar{x})^2(1+z\bar{z})^2\right)\times\\
\sum_{JMK}\sqrt{\frac{((2J)!)^2}{(J+M)!(J-M)!(J+K)!(J-K)!}}\frac{x^{J+M}y^Jz^{J+K}}{\sqrt{J!}}|JMK\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Вводятся переменные, которые имеют смысл аналогичный параметру r

и углам в (2.68):

$$\begin{aligned} &x = -\exp(-i\alpha)\cot(\beta/2), \\ &y = \sqrt{\zeta}\sin^2(\beta/2)\sin^2(\delta/2)\exp\left(i(\alpha-\gamma-\epsilon)\right), \\ &z = \exp(i\gamma)\cot(\delta/2), \\ &0 \le \alpha,\gamma,\epsilon \le 2\pi; \quad 0 \le \beta,\delta \le \pi; \quad 0 \le \zeta \le \infty. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Фактически ζ играет роль r, а остальные параметры являются функцией параметров из набора (2.67). В новых переменных КС (2.70) выглядит следующим образом:

$$|xyz\rangle = |\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \exp(-\zeta/2)\sum_{JMK} D^J_{M,J}(\alpha,\beta,0)D^J_{K,J}(-\gamma,\delta,\epsilon)\sqrt{\frac{\zeta}{J!}}|JMK\rangle. \tag{2.72}$$

Аналоги выражений (2.69) для средних имеют вид:

$$\begin{aligned} &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{I}|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{I}_x|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta\cos\gamma\cos\delta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{I}_y|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta\sin\gamma\sin\delta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{I}_z|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta\cos\delta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{J}_x|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta\cos\alpha\sin\beta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{J}_y|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta\sin\alpha\sin\beta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{J}_z|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta\cos\beta, \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{I}_x^2+\hat{I}_y^2+\hat{I}_z^2|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta(\zeta+2), \\ &\langle\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta|\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2|\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\rangle = \zeta(\zeta+2). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Общим для рассмотренных семейств КС является то, что производится суммирование не только по всем возможным значениям проекций углового момента M и K, но и по всем значениям самого момента J. Таким образом, когда квантовый ротатор находится в когерентном состоянии (2.68) или (2.72), значение полного момента импульса не определено. Как параметр состояния используется средний полный момент в смысле (2.66). Нетрудно заметить, что состояния (2.72) и (2.68) фактически представляют собой суммы построенных нами выше КС с фиксированным угловым моментом (2.47) с весами $e^{-r}\frac{(2r)^J}{\sqrt{(2J)!}}$ и $e^{-\zeta/2}\sqrt{\frac{\zeta}{J!}}$. Отметим, что подобных систем (задаваемых весовыми множителями) с неопределенным полным моментом можно построить много, и ряд таких систем был предложен в [11].

Все эти системы, как было показано в [11], имеют ряд общих свойств. В частности, в пределе $\langle J\rangle \to \infty$ средние $\omega_i = \langle \hat{J}_i\rangle / A_i$ удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_x &= \frac{\omega_y \omega_z}{A_x}(A_y - A_z),\\
\dot{\omega}_y &= \frac{\omega_x \omega_z}{A_y}(A_x - A_z),\\
\dot{\omega}_z &= \frac{\omega_x \omega_y}{A_z}(A_x - A_y).
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Последнее свойство, как и минимизация соотношений неопределенностей, представляются достаточно очевидными в силу того, что, как мы уже отметили, рассматриваемые семейства КС представляют собой различные суммы КС (2.47) с фиксированным полным моментом. Действительно, состояния (2.47) обладают минимальной инвариантной дисперсией (см. (2.38) – (2.40)), а усреднение по ним в пределе больших j дает уравнения Эйлера.

Ещё одной особенностью подхода Янссена и авторов [10], вслед за ним, является то, что КС углового момента не строятся по схеме Переломова. Авторы отмечают сложности такого построения и используют, по их мнению, “более простую конструкцию”. Рассмотренные в представленной работе КС соответствуют схеме построения переломовских КС.

В классической теории для задания состояния ротатора используется 6 чисел – три угла (ориентация ротатора) и три компоненты угловой скорости (или ось вращения и угловая скорость). Как известно, КС параметризуются точками фазового пространства классической системы, и должны определяться 6 аналогичным по смыслу параметрам.

В качестве характеристик КС авторы [9] и [10] используют набор из 6 параметров (2.68) и (2.72): 5 углов, 3 из которых характеризуют ориентацию ротатора в пространстве, а 2 задают направление вектора $\langle J \rangle$, и среднего значения полного углового момента. КС (2.47) характеризуются двумя комплексными параметрами $u, v \in SU(2)$, которым можно придать смысл поворотов, и определенным полным моментом j. В свою очередь, u, v определяются углами Эйлера, см. (2.41), (2.44). В частности, как и для КС Янссена, по два параметра задают ориентацию осей, см. (2.42), (2.45).

Глава 3. Конечнокомпонентные (типа Дирака) и бесконечнокомпонентные (типа Майораны) уравнения для спиновой частицы в магнитном поле

3.1. Уравнение Майораны

Бесконечнокомпонентные волновые уравнения, связанные с унитарными представлениями группы Лоренца, были впервые рассмотрены Этторе Майораной [68] и переоткрыты позднее Гельфандом и Ягломом [69]. С одной стороны, уравнения Майораны, в отличие от уравнения Дирака, имеют пространственноподобные решения с положительным спектром энергии; с другой – они описывают спектр спинов и масс [69, 70]. Сравнительно недавний обзор [71] дает хорошее представление об истории уравнений Майораны, их современном состоянии и широком круге вопросов, связанных с ними.

В 1932 году Э. Майорана опубликовал работу “Релятивистская теория частиц с произвольным угловым моментом”. В тот момент физическая интерпретация уравнения Дирака была под вопросом из-за существования решений с отрицательной энергией. Основной целью работы было построить уравнение, у которого были бы решения только с положительной энергией. Майорана показал, что это возможно, но волновая функция должна преобразовываться по унитарным бесконечномерным представлениям группы Лоренца. В то время бесконечномерные унитарные представления были практически неизвестны ни физикам, ни математикам; тем не менее, Майоране удалось построить два таких унитарных представления.

Он предложил следующий вид уравнения:

$$(\hat{E} + \alpha\hat{p} - \beta m)\psi = 0. \tag{3.1}$$

Для того, чтобы избежать решений с отрицательной энергией, он потребовал, чтобы β был положительно определённым оператором. С другой стороны, не требовалось, чтобы ψ удовлетворяла уравнению Клейна-Гордона. Таким образом, не ставилось условие, чтобы с волновой функцией было связано только одно значение массы.

Майорана записал действие в следующем виде:

$$\int d^4x\psi^\dagger(\hat{E} + \alpha\hat{p} - \beta m)\psi. \tag{3.2}$$

Т.к. β предполагается положительно определённой величиной, волновую функцию можно переопределить так:

$$\widetilde{\psi} = \sqrt{\beta}\psi. \tag{3.3}$$

Тогда действие (3.2) приобретает вид:

$$\int d^4x\widetilde{\psi}^\dagger(\Gamma_\mu\hat{p}^\mu - m)\widetilde{\psi}, \tag{3.4}$$

где

$$\Gamma_\mu = (\Gamma_0, \Gamma), \quad \Gamma_0 = \beta^{-1}, \quad \Gamma = \beta^{-1/2}\alpha\beta^{-1/2}, \quad \hat{p}^\mu = (\hat{E}, \hat{p}). \tag{3.5}$$

Отсюда следует уравнение Майораны:

$$(\Gamma_\mu\hat{p}^\mu - m)\widetilde{\psi} = 0. \tag{3.6}$$

При преобразованиях Лоренца $\widetilde{\psi}$ должна преобразовываться по унитарному представлению группы Лоренца:

$$\widetilde{\psi}' = S\widetilde{\psi}, \quad S^\dagger S = 1. \tag{3.7}$$

Операторы $\hat{\Gamma}_\mu$ удовлетворяют коммутационным соотношениям с генераторами $\hat{J}_{\mu\nu}$ группы Лоренца

$$[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_\rho] = i(\hat{\Gamma}_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_\nu g_{\mu\rho}). \tag{3.8}$$

Далее, выписав коммутационные соотношения генераторов группы Лоренца, Майорана получил их матричные элементы для двух простых случаев. Впоследствии оба представления были названы его именем. Получив матричные элементы оператора Γ_μ, для времениподобных решений он пришёл к спектру масс

$$m_j = \frac{m}{j + 1/2}, \quad j = j_0, j_0 + 1, ..., \quad j_0 = 0 \text{ или } 1/2. \tag{3.9}$$

Наличие спектра спинов и масс стало отличительной особенностью уравнения Майораны и его модификаций. Также Майорана в своей работе обратил внимание на наличие пространственноподобных решений.

Необходимо отметить, что кроме уравнения (3.6) на бесконечнокомпонентную функцию, уравнением Майораны также (особенно в последнее время) называют уравнение, подобное уравнению Дирака,

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi_c = 0 \tag{3.10}$$

где $\psi_c = \gamma^2 \psi^*$ – спинор, зарядово-сопряженный ψ. При выполнении условия $\psi_c = \psi$ спинор ψ называют майорановским. В этом случае спинор описывает нейтральную частицу, совпадающую со своей античастицей – майорановский фермион. Вопросы, связанные с конечнокомпонентным уравнением Майораны, рассматриваются, в ряде публикаций и обзоров: [72, 73, 74, 75]. Отметим еще, что майорановская частица может служить для объяснения некоторых явлений в физике твёрдого тела (см. [76], [77]).

Мы, говоря об уравнении Майораны, будем иметь в виду бесконечнокомпонентное уравнение (3.6).

Во многом аналогичные ему уравнения для конечномерных представлений группы Лоренца были построены и изучены позднее. Это уравнения Бхаббы (или Любаньского-Бхаббы). Уравнения были получены и изучены Любаньским [78] и несколько позднее и независимо Бхабба [79]. Они имеют тот же вид

$$(\Gamma_\mu \hat{p}^\mu - \varkappa)\psi = 0, \tag{3.11}$$

что и уравнение Майораны (3.6), а матрицы Γ_μ удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (3.8) с генераторами $\hat{J}_{\mu\nu}$ группы Лоренца. Так же, как и уравнение Майораны, уравнения Бхаббы в общем случае описывают спектр спинов и масс. Отличие состоит в том, что ψ имеет конечное число компонент и преобразуется по некоторому конечномерному неунитарному приводимому представлению группы Лоренца.

Дополняя генераторы группы Лоренца $\hat{S}^{\mu\nu}$ четырьмя операторами

$$\hat{S}^{4\mu} = \hat{\Gamma}^\mu, \quad \hat{S}^{ab} = -\hat{S}^{ba}, \tag{3.12}$$

получим

$$[\hat{S}^{ab}, \hat{S}^{cd}] = i(\eta^{bc}\hat{S}^{ad} - \eta^{ac}\hat{S}^{bd} - \eta^{bd}\hat{S}^{ac} + \eta^{ad}\hat{S}^{bc}), \quad \eta^{44} = \eta^{00} = 1. \tag{3.13}$$

т.е. $\hat{S}^{ab}$, $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов $SO(3,2) \sim Sp(4,R)$. Генераторы конечномерных представлений $SO(3,2)$ удовлетворяют условиям $\hat{\Gamma}^{0\dagger} = \hat{\Gamma}^0$, $\hat{\Gamma}^{k\dagger} = -\hat{\Gamma}^k$.

Соответственно, ψ должна преобразовываться по НП $SO(3,2)$; при редукции на группу Лоренца эти представления распадаются на сумму нескольких НП. Уравнения Дирака и Даффина-Кеммера являются частными случаями уравнений Бхаббы. Наиболее подробный анализ уравнений Бхаббы дан в серии из 7 статей Крайчика и Ньето, см. [80].

В пространстве 2+1 измерений уравнения, аналогичные уравнениям Майораны в 3+1-мерном пространстве, связаны с бесконечномерными унитарными неприводимыми представлениями (НП) группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. Эти уравнения описывают частицы с произвольным действительным спином и используются в релятивистской теории анионов, см. [81, 82, 83, 84]. Конечнокомпонентные уравнения, аналогичные уравнениям Бхаббы в 3+1-мерном пространстве, связаны с конечномерными НП группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. В отличие от 3+1-мерного случая, в 2+1 измерениях для свободной частицы эти уравнения являются уравнениями на собственные значения для оператора Казимира соответствующей (2+1 мерной) группы Пуанкаре, что облегчает их рассмотрение.

Нахождение точных решений релятивистских волновых уравнений для произвольных спинов во внешнем поле представляет собой важную задачу, причем такие решения известны в основном только для уравнений Клейна-Гордона и Дирака [31]. Для уравнений Майораны известны свободные решения, однако поиск точных решений во внешнем электромагнитном поле представляет собой сложную задачу ввиду бесконечного числа компонент.

В настоящей работе мы строим точные решения уравнений Майораны в постоянном однородном магнитном поле. Кроме того, мы сравниваем их с решениями конечнокомпонентных уравнений, описывающих частицы с целым или полуцелым спином, в частности, с решениями уравнения Дирака. Рассмотрение проводится с помощью подхода, развиваемого в работах [1, 85, 30, 87] и основанного на использовании функций $f(x,z)$ на группе Пуанкаре, зависящих от положения и ориентации.

3.2. Релятивистские волновые уравнения в $2+1$ измерениях

2+1-мерная группа Пуанкаре $M(2,1)$ представляет собой полупрямое произведение групп трансляций $T(3)$ и $SO(2,1) \sim SU(1,1)$. Соответственно, функции на группе зависят от 3 параметров группы $T(3)$ – пространственных координат x^μ, и трех параметров группы $SU(1,1)$, задающих ориентацию. Вместо трех действительных параметров (аналогов углов Эйлера) для описания ориентации удобно использовать комплексные параметры – элементы первого столбца z^1, z^2, $|z^1|^2 - |z^2|^2 = 1$, матрицы $SU(1,1)$ (т.е. аналоги параметров Кэли-Клейна компактной группы $SU(2)$).

Как известно, представление в пространстве функций на группе (обобщенное регулярное представление) содержит все (с точностью до эквивалентности) НП группы. Соответственно, в разложении этого представления на неприводимые содержатся поля, отвечающие произвольным спинам.

Так как столбец z инвариантен по отношению к трансляциям, любая функция $\phi(z)$ преобразуется по некоторому представлению группы Лоренца $SU(1,1)$. Пусть

$$f(x,z) = \sum_n \phi^n(z)\psi_n(x), \tag{3.14}$$

где функции $\phi^n(z)$ составляют базис в пространстве представления группы Лоренца. Последнее означает, что можно разложить функции $\phi^n(z')$ преобразованного аргумента $z' = gz$, $g \in SU(1,1)$, по набору функций $\phi^n(z)$

$$\phi^n(z') = \sum_l \phi^l(z) L_l{}^n(g). \tag{3.15}$$

Таким образом, действие группы Пуанкаре на строку $\phi(z)$, состоящую из $\phi^n(z)$, сводится к умножению на матрицу $L(g)$, где $g \in SU(1,1)$, $\phi(z') = \phi(z)L(g)$.

Сравнивая разложения функций $f'(x', z') = f(x,z)$ в преобразованном базисе $\phi(z')$ и исходном $\phi(z)$,

$$f'(x', z') = \phi(z')\psi'(x') = \phi(z)L(g)\psi'(x') = \phi(z)\psi(x),$$

где $\psi(x)$ - это столбец с компонентами $\psi_n(x)$, получим

$$\psi'(x') = L(g^{-1})\psi(x), \tag{3.16}$$

т.е., закон преобразования тензорного поля в пространстве Минковского.

Ниже мы будем рассматривать общие собственные функции оператора Казимира группы Лоренца $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_\mu \hat{S}^\mu$ и оператора проекции $\hat{S}^0$,

$$\hat{\mathbf{S}}^2 |SS_0\rangle = S(S+1)|SS_0\rangle, \tag{3.17}$$

$$\hat{S}^0 |SS_0\rangle = S_0 |SS_0\rangle, \tag{3.18}$$

которые образуют базис НП группы Лоренца. Функции

$$f(x,z) = \sum_{S_0} \psi_{SS_0}(x)|SS_0\rangle \tag{3.19}$$

удовлетворяют уравнению

$$\hat{\mathbf{S}}^2 f(x,z) = S(S+1))f(x,z). \tag{3.20}$$

Группа Лоренца имеет два типа представлений, которые могут быть использованы для описания частиц. Во-первых, это неунитарные НП размерности $2S+1$ (серия T_S^0), $2S \geq 0$, целое. В этом случае $f(x,z)$ – полином степени $2S$ от z_1, z_2,

$$|SS_0\rangle = \left[\frac{(2S)!}{(S+S_0)!(S-S_0)!}\right]^{1/2} z_1^{S+S_0} z_2^{S-S_0}, \quad S^0 = -S, -S+1, \ldots, S-1, S. \tag{3.21}$$

Во-вторых, это бесконечномерные унитарные НП дискретных серий (положительной T_S^+ и отрицательной T_S^-). В этом случае $f(x,z)$ – квазиполином отрицательной степени $2S$ (подробнее см. [84]). Для НП $T_S^+(g)$ проекция $S^0 = |S|, |S|+1, |S|+2, ...$, а для НП $T_S^-(g)$ проекция $S^0 = -|S|, -|S|-1, -|S|-2, ...$,

$$T_S^+ : |SS_0\rangle = \left(\frac{\Gamma(-n_2)}{\Gamma(-2S)n_1!}\right)^{1/2} (-i)^{n_1} {z_1}^{n_1} {z_2}^{n_2}, \quad n_1 \geq 0, \text{ целое}, \ n_2 < 0, \tag{3.22}$$

$$T_S^- : |SS_0\rangle = \left(\frac{\Gamma(-n_1)}{\Gamma(-2S)n_2!}\right)^{1/2} (-i)^{n_1} {z_1}^{n_1} {z_2}^{n_2}, \quad n_1 < 0, \ n_2 \geq 0, \text{ целое}, \tag{3.23}$$

где $n_1 = S + S_0$, $n_2 = S - S_0$. Генераторы группы $SU(1,1)$ являются дифференциальными операторами по z,

$$\begin{aligned} \hat{S}^0 &= \frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right), \\ \hat{S}^1 &= \frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_2} - z_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right), \\ \hat{S}^2 &= -\frac{i}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_2} + z_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Неэквивалентные НП 2+1-мерной группы Пуанкаре $M(2,1)$ ненулевой массы задаются массой m, спином s и знаком энергии $\operatorname{sgn} p_0$

[86, 84]. Свободные частицы характеризуются собственными значениями двух операторов Казимира группы $M(2,1)$,

$$\hat{p}^2 f(x,z) = m^2 f(x,z), \tag{3.25}$$

$$\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu f(x,z) = \kappa f(x,z), \tag{3.26}$$

где $\hat{p}_\mu$ и $\hat{S}^\mu$ – операторы проекций импульса и спина.

Для частицы ненулевой массы спин задается НП малой группы $SO(2)$, т.е. действительным числом со знаком. В системе покоя

$$\kappa = mS^0 \operatorname{sgn} p_0, \tag{3.27}$$

и спин можно определить как собственное значение оператора Казимира $\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu$, деленное на $m \operatorname{sgn} p_0$.

Частицы с целым или полуцелым спином могут быть описаны как конечномерными НП группы Лоренца, так и бесконечномерными ее представлениями серий T_S^+ и T_S^- (при целых $2S$), и соответственно конечнокомпонентными и бесконечнокомпонентными уравнениями типа Майораны. Частицы с дробным спином – только бесконечномерными представлениями, см. [84] и цитируемые там работы.

Знак энергии частицы связан со спектром оператора $\hat{S}^0$ в НП группы $SU(1,1)$. Действительно, рассмотрим свободную частицу в системе покоя, где $\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu = \hat{S}^0 m \operatorname{sgn} p_0$. При таких условиях возможные значения спина s определяются спектром оператора $\hat{S}^0$ в НП группы $SU(1,1)$. Для конечномерных НП возможны и положительные, и отрицательные собственные значения оператора $\hat{S}_0$, $-S \leq S^0 \leq S$. Но для НП дискретной положительной серии T_S^+ все собственные значения положительны, $S^0 \geq S$, а для НП отрицательной серии T_S^- - все собственные значения отрицательны, $S^0 \leq -S$. Таким образом, при фиксированном собственном значении оператора Казимира $\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu$ (3.26) оба знака энергии возможны для НП серий T_S^0, а в случае серий T_S^+, T_S^- знак фиксирован.

Релятивистские волновые уравнения в традиционной матричной форме могут быть получены из (3.26) заданием представления группы Лоренца, определённого собственным значением оператора Казимира $\hat{\mathbf{S}}^2$, см. (3.20). Явный вид выражений для матричных элементов операторов $\hat{S}^\mu$ следует из уравнений (3.19), (3.21)-(3.24) (подробнее см. приложение). В случае НП серий T_S^0 это матрицы размером $(2S+1) \times (2S+1)$ (в частности, $S^\mu = \frac{1}{2}\gamma^\mu$ для $S = 1/2$),

$$\begin{aligned}
S^0{}_{nm} &= \delta_{nm}(S+1-n), \quad n = 1, 2, \ldots 2S+1, \\
S^1{}_{nm} &= -\frac{1}{2}\left(\delta_{n\,m+1}\sqrt{(2S+2-n)(n-1)} - \delta_{n+1,m}\sqrt{(2S+1-n)n}\right), \\
S^2{}_{nm} &= -\frac{i}{2}\left(\delta_{n\,m+1}\sqrt{(2S+2-n)(n-1)} + \delta_{n+1,m}\sqrt{(2S+1-n)n}\right),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

и бесконечнокомпонентные матрицы для НП серий T_S^+,

$$\begin{aligned}
S^0{}_{nm} &= \delta_{nm}(-S-1+n), \quad n = 1, 2, \ldots, \\
S^1{}_{nm} &= -\frac{i}{2}\left(\delta_{n\,m+1}\sqrt{(-2S-2-n)(n-1)} - \delta_{n+1,m}\sqrt{(-2S-1+n)n}\right), \\
S^2{}_{nm} &= -\frac{1}{2}\left(\delta_{n\,m+1}\sqrt{(-2S-2-n)(n-1)} + \delta_{n+1,m}\sqrt{(-2S-1+n)n}\right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Для НП серии T_S^- матрица S^1 остаётся такой же, а матрицы S^0 и S^2 меняют знаки.

В отличие от $3+1$-мерного случая, в $2+1$ измерениях свободные уравнения Дирака и Майораны связаны с собственными значениями оператора Казимира группы $M(2,1)$ – оператором $\hat{W} = \hat{p}_\mu \hat{J}^\mu = \hat{p}_\mu \hat{S}^\mu$.

Эти уравнения являются частными случаями уравнений (3.26) для значений $S = 1/2$ и $S = -1/2$ соответственно.

Можно увидеть, что система уравнений (3.25),(3.26) описывает частицу с определёнными массой и спином, в то время как уравнение (3.26) задает только произведение указанных величин. Т.е., уравнение (3.26) описывает спектр масс и спинов.

Далее мы положим $s = \pm S$ в уравнении (3.26). Это означает, что, описывая спин s при помощи конечномерных НП T_S^0, мы выбрали представления с минимальной размерностью $2|s|+1$. В таком случае, мы получим следующий спектр спинов и масс:

$$\begin{aligned}
&m_i = m\frac{s}{s_i},\\
&T_s^0: \quad s_i = -s, -s+1, \ldots, s-1, s;\\
&T_s^+: \quad s_i = s, s+1, s+2, \ldots; s > 0,\\
&T_s^-: \quad s_i = s, s-1, s-2, \ldots; s < 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.3. Свободные решения в z-представлении

При рассмотрении релятивистских волновых уравнений и их решений, в частности, в $2+1$ измерениях, удобно пользоваться z-представлением, т.е. работать с волновыми функциями частиц со спином в виде $f(x,z)$. В этой части мы рассматриваем свободные решения волнового уравнения в z-представлении. В нём также удобно использовать так называемые обобщённые когерентные состояния (КС) дискретных серий унитарных НП группы $SU(1,1) \sim SO(2,1)$ (впервые построенные Переломовым [36]).

Согласно уравнениям (3.22) и (3.23) младший вес НП $T_S^+(g)$ – это

$(z_2)^{2S}$, старший вес НП $T_S^-(g)$ – это $(z_1)^{2S}$. Подействовав на эти векторы оператором конечных преобразований, мы получим КС группы $SU(1,1)$,

$$f_u^-(z) = (z_1u^1 + \bar{z}_2u^2)^{2S}, \quad f_u^+(z) = (z_1\bar{u}^2 + \bar{z}_2\bar{u}^1)^{2S}, \quad |u^1|^2 - |u^2|^2 = 1. \tag{3.31}$$

которое в дальнейшем мы будем называть спиновыми КС.

Далее мы ищем решение уравнения (3.26) при $\kappa = mS$ в виде

$$f(x,z) = f_u^-(z)\psi(x) = (z_1u^1 + \bar{z}_2u^2)^{2S}\psi(x), \tag{3.32}$$

где

$$|u^1|^2 - |u^2|^2 = 1. \tag{3.33}$$

Подставим функцию (3.32) в уравнение (3.26) и, используя явный вид дифференциальных операторов $\hat{S}^\mu$, получим:

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu\hat{S}^\mu f(x,z) &= S\left[\hat{p}_0(z_1u^1 - \bar{z}_2u^2) + \hat{p}_1 i(z_1u^2 - \bar{z}_2u^1) - i\hat{p}_2(z_1u^2 + \bar{z}_2u^1)\right] \\ &\times (z_1u^1 + \bar{z}_2u^2)^{2S-1}\psi(x) = S\,(z_1\bar{z}_2\,)\,\hat{p}_\mu\gamma^\mu \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} (z_1u^1 + \bar{z}_2u^2)^{2S-1}\psi(x) \\ &= mS(z_1u^1 + \bar{z}_2u^2)^{2S}\psi(x). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Из (3.34) следует, что столбцы $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \psi(x) \tag{3.35}$$

удовлетворяют уравнению Дирака в $2+1$ измерении

$$(\hat{p}_\mu\gamma^\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda, \quad \gamma^\mu = (\sigma^3, i\sigma^2, -i\sigma^1). \tag{3.36}$$

Подстановка

$$f(x,z) = f_u^+(z)\psi(x) = (z_1 u^2 + \bar{z}_2 u^1)^{2S}\psi(x) \tag{3.37}$$

(спиновое КС дискретной положительной серии) в уравнение (3.26) при $\kappa = -mS$ ведёт к тому же результату.

Условию (3.33) удовлетворяют решения только с положительной энергией (решения с отрицательной энергией связаны со спинором $(0\,1)^T$). Решения уравнения Дирака для свободной частицы:

$$\Psi_p^k(x) = u^k(p)e^{ipx}, \tag{3.38}$$

где

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m \\ -p_1 + ip_2 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

могут быть получены из соответствующих решений в покоящейся системе отсчёта

$$\Psi_0^k(x) = (1\ 0)^T e^{imx^0}$$

при помощи преобразований Лоренца.

Таким образом, решения свободного уравнения (3.26) с положительной энергией и спином $s = \pm S$ имеют вид спиновых КС (3.32) или (3.37) с параметрами u^k, определяемыми из условия (3.39) и удовлетворяющими уравнению Дирака.

Раскладывая функцию $f(x,z)$ (3.32) в ряд по степеням z, мы получаем решения свободного уравнения Майораны в виде столбцов $\psi_n(x)$ с бесконечным числом компонент

$$f(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)|S,\ |S|{+}n\rangle, \quad \psi_n(x) = \left(\frac{\Gamma(-S-n)}{n!\Gamma(-2S)}\right)^{1/2} (u_1)^{S-n}(u_2)^n e^{ipx}.$$

Полученные решения соответствуют фиксированным спину и массе, как и ожидалось для решений системы уравнений (3.25), (3.26)). Выбор других КС, не связанных со старшими весами НП, может иметь своим следствием другой спектр спинов и масс, в общем случае, удовлетворяющих (3.30).

3.4. Решение уравнения Майораны в однородном магнитном поле

В случае постоянного однородного магнитного поля возможность нахождения точного решения задачи как для конечномерных, так и бесконечномерных представлений группы Лоренца связана с записью дифференциального оператора в алгебраической форме через генераторы групп Гейзенберга и $SU(1,1)$. При описании спина мы, следуя [1], вместо многокомпонентных (а в случае уравнений типа Майораны и бесконечнокомпонентных) функций от координат x^μ, $\mu = 0,1,2$, используем волновые функции, зависящие кроме x^μ, от спинора z_α, $\alpha = 1,2$, задающего ориентацию. Изложение в настоящем параграфе в основном следует работам [87, 88, 89].

Рассмотрим частицу, описываемую уравнением (3.26), во внешнем электромагнитном поле:

$$\hat{L}f(x,z) = \kappa f(x,z), \quad \hat{L} = (\hat{p}_\mu - eA_\mu)\hat{S}^\mu, \quad \kappa = \pm mS. \tag{3.40}$$

В пространстве 2+1 измерений магнитное поле имеет одну компоненту

$$B_0(x) = \epsilon_{012}F^{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}.$$

В постоянном магнитном поле, выбирая потенциалы $A_\mu = (0,0,Bx^1)$, и восстанавливая c в формулах, получим:

$$\hat{L} = p_0\hat{S}^0 + c\hat{p}_1\hat{S}^1 + c(p_2 - x^1Be/c)\hat{S}^2$$
$$= p_0\hat{S}^0 - \sqrt{|eB|c}\left(i\hat{S}^1\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{sgn}(eB)\hat{S}^2\xi\right), \quad (3.41)$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{|eB|}{c}}\left(x^1 - p_2\frac{c}{eB}\right). \quad (3.42)$$

Операторы $\hat{p}_0$ и $\hat{p}_2$ коммутируют с $\hat{L}$, их собственные функции имеют вид:

$$f_{p_0p_2}(x,z) = e^{-i(p_0x^0 - p_2x^2)}\Phi(x^1, z). \quad (3.43)$$

Далее будем искать решения вида (3.43).

Введем в рассмотрение операторы рождения $\hat{a}^\dagger$ и уничтожения $\hat{a}$, а также повышающие $\hat{S}_+$ и понижающие $\hat{S}_-$ операторы,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \frac{\partial}{\partial\xi}),$$
$$\hat{S}_- = \hat{S}^1 - i\hat{S}^2 = z_1\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \hat{S}_+ = \hat{S}^1 + i\hat{S}^2 = z_2\frac{\partial}{\partial z_1}, \quad (3.44)$$

и выразим $\hat{L}$ через них,

$$\hat{L} = p_0\hat{S}^0 + \frac{\varkappa}{2}[(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) - \mathrm{sgn}(eB)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)], \quad (3.45)$$

где (если мы восстановим постоянную Планка)

$$\varkappa = \sqrt{\frac{|eB|c\hbar}{2}}. \quad (3.46)$$

В частности, при $\mathrm{sgn}(eB) = -1$ имеем

$$\hat{L} = p_0\hat{S}^0 + \varkappa(\hat{a}\hat{S}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{S}_-), \quad (3.47)$$

а при $\mathrm{sgn}(eB) = +1$

$$\hat{L} = p_0\hat{S}^0 + \varkappa(\hat{a}\hat{S}_- - \hat{a}^\dagger\hat{S}_+), \quad (3.48)$$

Рассмотрим состояния $|nSS_0\rangle$, собственные для операторов $\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{S}^0, \hat{\mathbf{S}}^2$ с собственными значениями $n, S_0, S(S+1)$,

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger\hat{a}|nSS_0\rangle &= n|nSS_0\rangle, \\ \hat{S}^0|nSS_0\rangle &= S_0|nSS_0\rangle, \\ \hat{\mathbf{S}}^2|nSS_0\rangle &= S(S+1)|nSS_0\rangle. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Операторы $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ и $\hat{S}^0$ не коммутируют с $\hat{L}$, и решение уравнения (3.43) мы будем искать в виде линейных комбинаций состояний $|nSS_0\rangle$ с различными n и S_0,

$$\begin{aligned} &\Phi(x^1, z) = \sum_{n,S_0} C_{nS_0}|nSS_0\rangle = \sum_{n,S_0} C_{nS_0}\Psi_n(\xi)\Psi_{SS^0}(z), \\ &\Psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\xi^2/2}H_n(\xi), \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}, \\ &\hat{a}\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}, \quad \hat{a}^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

С этой целью мы рассмотрим инвариантные подпространства оператора $\hat{L}$ в терминах состояний $|nSS_0\rangle$.

Собственные значения оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$ задают НП группы $SU(1,1)$. Для функций $\Psi_{ss^0}(z)$ имеем 2 различных случая, отвечающих конечномерным неунитарным НП группы $SU(1,1)$, $-S \le S_0 \le S$, см. (3.21) и бесконечномерным унитарным НП дискретных серий $T^+, S^0 \ge S$ и $T^-, S^0 \le -S$, см. (3.22), (3.23).

Рассмотрим сначала первый случай. Для конечномерных неунитарных НП группы $SU(1,1)$

$$\begin{aligned} \hat{S}_-|S, S_0\rangle &= \sqrt{(S+S_0)(S-S_0+1)}|S, S_0-1\rangle, \\ \hat{S}_+|S, S_0\rangle &= \sqrt{(S+S_0+1)(S-S_0)}|S, S_0+1\rangle, \end{aligned} \tag{3.51}$$

оператор $\hat{S}^0$ эрмитов, $\hat{S}^1$ и $\hat{S}^2$ антиэрмитовы, соответственно $\hat{S}_-^\dagger = -\hat{S}_+$.

Оператор $\hat{L}$ (3.47) при знаке заряда $\operatorname{sgn}(eB) = -1$ состоит из трёх слагаемых. Для первого из них, $\hat{p}_0\hat{S}^0$, состояния $|nSS_0\rangle$ являются собственными. Второе, пропорциональное $\hat{a}\hat{S}_+$, переводит состояние $|nSS_0\rangle$ в $|n-1, S, S_0+1\rangle$, а третье, пропорциональное $\hat{a}^\dagger\hat{S}_-$, – в $|n+1, S, S_0-1\rangle$,

$$\hat{L}|nSS_0\rangle = p_0S_0|nSS_0\rangle + \varkappa\sqrt{n(S+S_0+1)(S-S_0)}|n-1, S, S_0+1\rangle \\ - \varkappa\sqrt{(n+1)(S+S_0)(S-S_0+1)}|n+1, S, S_0-1\rangle, \quad (3.52)$$

При $\operatorname{sgn}(eB) = 1$

$$\hat{L}|nSS_0\rangle = p_0S_0|nSS_0\rangle + \varkappa\sqrt{(n+1)(S+S_0+1)(S-S_0)}|n+1, S, S_0+1\rangle \\ - \varkappa\sqrt{(n)(S+S_0)(S-S_0+1)}|n-1, S, S_0-1\rangle, \quad (3.53)$$

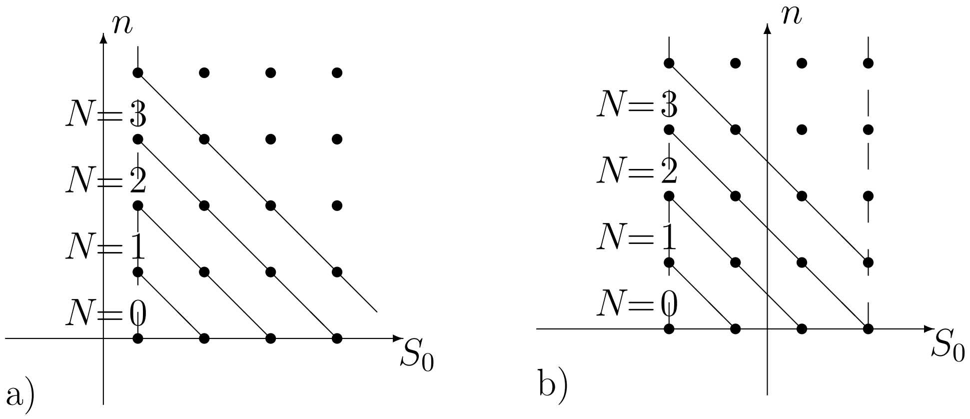


Рис. 1. Состояния $|nSS_0\rangle$, входящие в разложение волновой функции, отвечающей N-му уровню, для бесконечномерных унитарных НП T_S^+, $S = -s = -1/2$, и конечномерных НП T_S^0, $S = -s = -3/2$, группы $SU(1,1)$.

Нетрудно заметить, что

$$\hat{a}\hat{S}_+|0SS_0\rangle = 0, \quad \hat{a}\hat{S}_+|nSS\rangle = 0, \quad \hat{a}^\dagger\hat{S}_-|n, S, -S\rangle = 0.$$

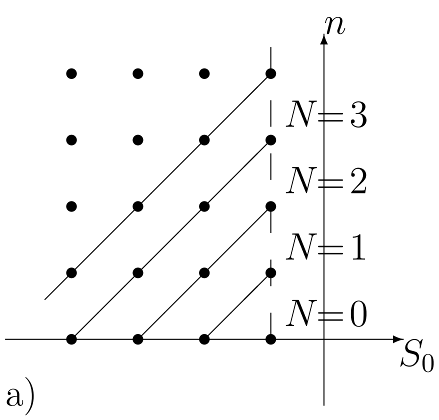


Рис. 2. Состояния $|nSS_0\rangle$, входящие в разложение волновой функции, отвечающей N-му уровню, для бесконечномерных унитарных НП T_S^-, $S=-s=-1/2$, и конечномерных НП T_S^0, $S=-s=-3/2$, группы $SU(1,1)$.

В соответствии со сказанным выше, состояние $|0,S,-S\rangle$ является собственным для оператора $\hat{L}$ при $\mathrm{sgn}(eB)=-1$ (при $\mathrm{sgn}(eB)=+1$ собственным является состояние $|0,S,S\rangle$). Это состояние отвечает нижнему (нулевому) уровню энергии $p_0=mc^2$.

Следующий уровень энергии отвечает линейной комбинации состояний $|1,S,-S\rangle$ и $|0,S,-S+1\rangle$. В общем случае собственными функциями оператора $\hat{L}$, отвечающими N-му уровню энергии, согласно (3.52), является линейная комбинация

$$\Phi_N(x^1,z)=\sum_{K=0}^{\min(N,2S)} c_K|N-K,S,-S+K\rangle, \tag{3.54}$$

см. рис. 1b. Формулу (3.52) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\hat{L}|N-K,S,-S+K\rangle=p_0(-S+K)|N-K,S,-S+K\rangle\\
&+\varkappa\sqrt{(N-K)(K+1)K'}|N-K-1,S,-S+K+1\rangle\\
&-\varkappa\sqrt{(N-K+1)(K'+1)K}|N-K+1,S,-S+K-1\rangle,\\
&K^{'}=2S-K.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Составим столбец из функций, входящих в разложение (3.54)

$$\tilde{\Phi}_N = \begin{pmatrix} |N, S, -S\rangle \\ ... \\ |0, S, -S+N\rangle \end{pmatrix}, \quad 2S \geq N,$$

имеющий $N+1$ компоненту, или

$$\tilde{\Phi}_N = \begin{pmatrix} |N, S, -S\rangle \\ ... \\ |N-S, S, S\rangle| \end{pmatrix}, \quad 2S \leq N.$$

имеющий $2S+1$ компонент. Действие оператора $\hat{L} \pm mc^2 S$ теперь может быть записано в матричной форме,

$$(\hat{L} \pm mc^2 S)\tilde{\Phi}_N = A\tilde{\Phi}_N, \tag{3.56}$$

Матрица A является трехдиагональной,

$$A = \begin{pmatrix} (-p_0 \pm mc^2)S & \varkappa\sqrt{2SN} & ... & 0 \\ -\varkappa\sqrt{2SN} & (-p_0 \pm mc^2)S + p_0 & ... & 0 \\ 0 & -\varkappa\sqrt{2(2S-1)(N-1)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & \varkappa\sqrt{N(2S-N)} \\ 0 & 0 & ... & (-p_0 \pm mc^2)S + Np_0 \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

где последний столбец выписана для $N \leq 2S$ (в этом случае A - это $(N+1) \times (N+1)$ матрица, а в случае $N \geq 2S$ A -это $(2S+1) \times (2S+1)$ матрица).

Спектр энергии p_0 дается решениями уравнения $\det A = 0$ – алгебраического уравнения степени $1 + \min(N, 2S)$.

При $\mathrm{sgn}(eB) = +1$

$$\Phi_N(x^1, z) = \sum_{K=0}^{\min(N,2S)} c_K |N-K, S, S-K\rangle, \tag{3.58}$$

нижнему уровню отвечает $|0, S, S\rangle$, а формулу (3.53) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\hat{L}|N-K, S, -S+K\rangle = p_0(S-K)|N-K, S, S-K\rangle \\ &+ \varkappa\sqrt{(N-K+1)K(K'+1)}|N-K-1, S, S-K+1\rangle \\ &- \varkappa\sqrt{(N-K)(K+1)K'}|N-K+1, S, S-K-1\rangle, \quad K' = 2S-K. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Составим столбец из функций, входящих в разложение (3.54)

$$\tilde{\Phi}_N = \begin{pmatrix} |N, S, S\rangle \\ ... \\ |0, S, S-N\rangle \end{pmatrix}, \quad 2S \geq N,$$

имеющий N компонент, или

$$\tilde{\Phi}_N = \begin{pmatrix} |N, S, S\rangle \\ ... \\ |N-S, S, -S\rangle| \end{pmatrix}, \quad 2S \leq N.$$

имеющий $2S$ компонент.

Матрица в уравнении (3.56)

$$A' = \begin{pmatrix} (p_0 \pm mc^2)S & -\varkappa\sqrt{2SN} & ... & 0 \\ \varkappa\sqrt{2SN} & (p_0 \pm mc^2)S - p_0 & ... & 0 \\ 0 & \varkappa\sqrt{2(2S-1)(N-1)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & -\varkappa\sqrt{N(2S-N)} \\ 0 & 0 & ... & (-p_0 \pm mc^2)S - Np_0 \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

связана с матрицей (3.57), а именно $A' = -A^T$ (если быть точным, надо также заменить $\pm$ на $\mp$ перед mc^2). Уравнения $\det A = 0$ и $\det A' = 0$ имеют одни и те же решения и спектр энергий одинаков (хотя состояния разные, см. (3.54) и (3.58).)

В случае бесконечномерных НП группы $SU(1,1)$ дискретных серий операторы $\hat{S}^\mu$ эрмитовы, $\hat{S}_-^\dagger = \hat{S}_+$,

$$\begin{aligned}
T_S^+ : \qquad & -\hat{S}_+|SS_0\rangle = i\sqrt{(S_0 - S)(S + S_0 + 1)}|S, S_0 + 1\rangle, \\
& \hat{S}_-|SS_0\rangle = -i\sqrt{(S_0 - S - 1)(S + S_0)}|S, S_0 - 1\rangle. \\
T_S^- : \qquad & \hat{S}_+|SS_0\rangle = -i\sqrt{(S - S_0)(-S - S_0 - 1)}|S, S_0 + 1\rangle, \\
& -\hat{S}_-|SS_0\rangle = i\sqrt{(S - S_0 + 1)(-S - S_0)}|S, S_0 - 1\rangle.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\hat{a}\hat{S}_+|0SS_0\rangle = 0$, $\hat{a}^\dagger\hat{S}_-|nS - S\rangle = 0$, $\hat{a}\hat{S}_+|nSS\rangle = 0$. Собственными функциями оператора $\hat{L}$, отвечающими N-му уровню энергии, при $\mathrm{sgn}(eB) < 0$ являются линейные комбинации

$$\Phi_n(x^1, z) = \sum_{K=0}^{N} c_K|N - K, S, -S + K\rangle, \tag{3.61}$$

содержащие $N + 1$ слагаемое, см. рис. 1а.

Нижний энергетический уровень $p_0 = mc^2$ отвечает состоянию $|0, S, -S\rangle$. Для действия $\hat{L}$ на $|nSS_0\rangle$ получим

$$\begin{aligned}
\hat{L}|nSS_0\rangle = p_0 S_0|nSS_0\rangle - i\varkappa\sqrt{n(S + S_0 + 1)(-S + S_0)}|n - 1, S, S_0 + 1\rangle \\
+ i\varkappa\sqrt{(n + 1)(S + S_0)(-S + S_0 + 1)}|n + 1, S, S_0 - 1\rangle,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

где $\varkappa$ дается (3.46). Формула (3.62) может быть переписана в виде:

$$\hat{L}|N-K,S,-S+K\rangle = p_0(-S+K)|N-K,S,-S+K\rangle$$
$$-i\varkappa\sqrt{(N-K)(K+1)K'}|N-K-1,S,-S+K+1\rangle$$
$$+i\varkappa\sqrt{(N-K+1)(K'+1)K}|N-K+1,S,-S+K-1\rangle, \quad K^{'}=-2S+K. \tag{3.63}$$

Трехдиагональная матрица A является эрмитовой,

$$A=\begin{pmatrix} (p_0\mp mc^2)|S| & i\varkappa\sqrt{2|S|N} & ... & 0 \\ -i\varkappa\sqrt{(2|S|)N} & (p_0\mp mc^2)|S|+p_0 & ... & 0 \\ 0 & -i\varkappa\sqrt{2(1+2|S|)(N-1)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & i\varkappa\sqrt{N(2|S|-N)} \\ 0 & 0 & ... & (p_0\mp mc^2)|S|+Np_0 \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

Всего при данном N имеется $N+1$ решение, что связано с тем, что уравнение Майораны описывает спектр спинов и масс, $m_k s_k = ms$, где $s_k = s, s+1, \ldots$. (Отметим, уравнения, связанные с конечномерными представлениями группы Лоренца T_S^0, также описывают спектр спинов и масс, $m_k s_k = ms$, где $s_k = -s, -s+1, \ldots, s$.)

При $\operatorname{sgn}(eB) > 0$ собственными функциями оператора $\hat{L}$, отвечающими N-му уровню энергии, являются линейные комбинации

$$\Phi_n(x^1,z) = \sum_{K=0}^{N} c_K|N-K,S,S-K\rangle. \tag{3.65}$$

Нижний энергетический уровень $p_0 = mc^2$ отвечает состоянию $|0,S,S\rangle$. Для действия $\hat{L}$ на $|nSS_0\rangle$ получим

$$\hat{L}|nSS_0\rangle = p_0S_0|nSS_0\rangle - i\varkappa\sqrt{n(S-S_0+1)(-S-S_0)}|n-1,S,S_0-1\rangle$$
$$+i\varkappa\sqrt{(n+1)(S-S_0)(-S-S_0-1)}|n+1,S,S_0+1\rangle. \tag{3.66}$$

Формула (3.66) может быть переписана в виде:

$$\hat{L}|N-K,S,S-K\rangle = p_0(S-K)|N-K,S,S-K\rangle$$
$$-i\varkappa\sqrt{(N-K)(K+1)K'}|N-K-1,S,S-K-1\rangle$$
$$+i\varkappa\sqrt{(N-K+1)(K'+1)K}|N-K+1,S,S-K+1\rangle, \quad K' = -2S+K. \tag{3.67}$$

Матрица в уравнении (3.56)

$$A' = \begin{pmatrix} -(p_0 \pm mc^2)|S| & i\varkappa\sqrt{2|S|N} & ... & 0 \\ -i\varkappa\sqrt{(2|S|)N} & -(p_0 \pm mc^2)|S| - p_0 & ... & 0 \\ 0 & -i\varkappa\sqrt{2(1+2|S|)(N-1)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & i\varkappa\sqrt{N(2|S|-N)} \\ 0 & 0 & ... & -(p_0 \pm mc^2)|S| - Np_0 \end{pmatrix}, \tag{3.68}$$

$A' = -A^T$. Как и в случае конечномерных представлений, уравнения $\det A = 0$ и $\det A' = 0$ имеют одни и те же решения и спектр энергий одинаков.

Рассмотрим сначала решения уравнения в случае конечномерных представлений. **Для первого уровня** ($N = 1$) при $S \neq 1$ имеем квадратное уравнение

$$p_0^2(S-1) - p_0 mc^2(2S-1) + m^2c^4 S + 2\varkappa^2 = 0, \tag{3.69}$$

$$p_0 = \frac{mc^2}{2(S-1)}\left(2S - 1 \pm \sqrt{1 + 8(\varkappa^2/m^2c^4)(1-S)}\right). \tag{3.70}$$

Условие положительности дискриминанта дает $4(S-1)\frac{2\varkappa^2}{m^2c^4} < 1$, или

$$4(S-1)\frac{2\varkappa^2}{m^2c^4} = 4(S-1)\frac{\Omega\hbar}{mc^2} < 1, \quad \Omega = \frac{|e|B}{mc}. \tag{3.71}$$

При $S = 1/2$ дискриминант положителен при любом значении напряженности магнитного поля B, при $S = 1$ уравнение является линейным, а для $S > 1$ при достаточно больших B дискриминант становится отрицательным, что приводит к появлению комплексных значений p_0. Однако, необходимо отметить, что согласно (3.71) такие комплексные значения p_0 возникают, только когда расстояние между уровнями, задаваемое $\Omega\hbar$, близко к энергии покоя mc^2, т.е. в случае, когда одночастичная интерпретация становятся неприменимой. Для $\Omega\hbar/mc^2 \ll 1$ имеем $p_0 \approx mc^2 + \Omega\hbar - (S-1)\Omega^2\hbar^2/mc^2$.

Для бесконечномерных унитарных представлений при $N = 1$ получим квадратное уравнение

$$p_0^2(|S|+1) - p_0 mc^2(2|S|+1) + m^2c^4|S| - 2\varkappa^2 = 0, \tag{3.72}$$

отличающееся от (3.69) знаком перед $\varkappa^2$, с положительным дискриминантом $m^2c^4 + 8(|S|+1)\varkappa^2$. В отличие от предыдущего случая, для бесконечномерных унитарных НП действительные корни существуют при любых N в силу эрмитовости оператора $\hat{p}_\mu \hat{S}^\mu$. Для решения уравнения (3.72), отвечающего знаку $+$ перед квадратным корнем, получим

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{mc^2}{2(|S|+1)}\left(1 + 2|S| + \sqrt{1 + 8(|S|+1)\frac{\varkappa^2}{m^2c^4}}\right) \\ &\approx mc^2\left(1 + 2\frac{\varkappa^2}{m^2c^4} - 4(|S|+1)\frac{\varkappa^4}{m^4c^8}\right) \\ &= mc^2 + \Omega\hbar - (|S|+1)\frac{(\Omega\hbar)^2}{mc^2}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Мы выбрали знак $+$ перед корнем, т.к. именно это решение при обращающемся в ноль поле $B = 0$ переходит в решение, отвечающее спину $s = |S|$ и массе m (другое решение отвечает спину $s = |S| - 1$ и массе $m|S|/(|S|-1)$.

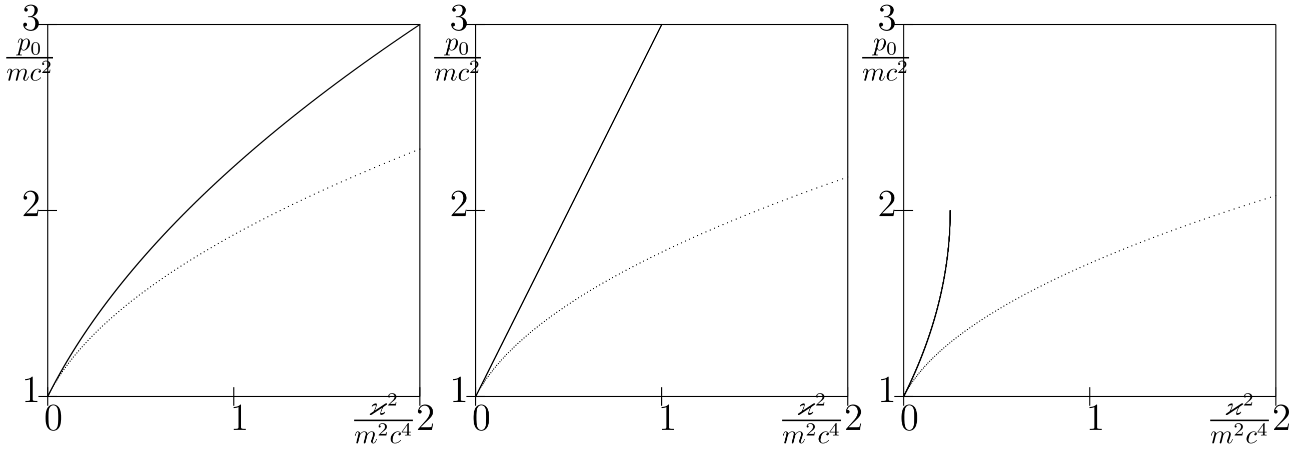


Рис. 3. Графики зависимости энергии первого уровня p_0/mc^2 от безразмерного параметра $\varkappa^2/(mc^2)^2$ для конечнокомпонентных уравнений (сплошная линия) и уравнений типа Майораны (пунктирная линия), $s = 1/2, 1, 3/2$.

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость первого уровня энергии p_0/mc^2 от безразмерного параметра $\varkappa^2/m^2c^4$ для $s = 1/2, 1, 3/2$. Решения для уравнений типа Майораны качественно ведут себя одинаково при любых спинах, и соответствующие кривые зависимости энергии первого уровня сходны с кривой Дираковской частицы. Для конечнокомпонентных уравнений, описывающих спины $s > 1$, кривые ведут себя иначе – скорость их роста увеличивается с увеличением поля, а в точке, где кривая заканчивается, значения энергии становятся комплексными.

В конечнокомпонентном случае при $S = \pm 1/2$ и $S = \pm 1$ несложно получить точные формулы для энергии произвольного уровня N.

Действительно, для $S = \pm 1/2$ (уравнение Дирака) имеем

$$p_0^2 = m^2c^4 + 4N\varkappa^2. \tag{3.74}$$

В случае $S = \pm 1$ (описываемого аналогом уравнения

Даффина-Кеммера) уравнение для определения p_0 при $N > 1$ остаётся квадратным:

$$p_0^2 mc^2 - 2p_0\varkappa^2 - mc^2(m^2c^4 + 2\varkappa^2(2N-1)) = 0. \qquad (3.75)$$

Дискриминант

$$D = 4\left(4m^2c^4\varkappa^2(N-1) + (m^2c^4 + \varkappa^2)^2\right) > 0, \qquad (3.76)$$

и корни p_0 действительны при любых значениях B,

$$p_0 = \frac{1}{mc^2}\left[\varkappa^2 + \sqrt{(\varkappa^2 + m^2c^4)^2 + 4\varkappa^2 m^2c^4(N-1)}\right] \qquad (3.77)$$

$$\approx mc^2 + N\Omega\hbar - \frac{(\Omega\hbar)^2 N(N-1)}{2mc^2}. \qquad (3.78)$$

Мы выбрали знак + перед корнем, т.к. именно это решение при обращающемся в ноль поле $B = 0$ переходит в решение, отвечающее спину $s = 1$ и массе m.

Обратимся теперь к сравнению значений энергии **второго уровня** $N = 2$ в конечнокомпонентном и бесконечнокомпонентном случаях. Сначала рассмотрим конечнокомпонентные уравнения (3.98). В общем случае, для определения энергии уровня $N = 2$ имеем уравнение 3-й степени. Для $S = 1/2$ имеем квадратное уравнение (3.74), соответственно

$$\frac{p_0}{mc^2} = \left(1 + 8\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2\right)^{1/2}. \qquad (3.79)$$

Перейдём к случаю $S = 1$. При рассмотрении первого уровня $N = 1$ степень уравнения (3.70) при $S = 1$ снижалась на единицу. Здесь имеем тот же эффект из-за коэффициента при старшей степени p_0^n в определителе (3.57) или (3.60). Он имеет вид $S(S-1)...(S-n+1)$ и при целых значениях S степень многочлена снижается на 1: при $N = 1$ (3.70) квадратное уравнение стало линейным, а в рассматриваемом случае кубическое уравнение вырождается в квадратное (3.75), соответственно

$$\frac{p_0}{mc^2} = \left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 + \left(1 + \left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2\right)\left(1 + 4\frac{(\frac{\varkappa}{mc^2})^2}{(1+(\frac{\varkappa}{mc^2})^2)^2}\right)^{1/2}. \tag{3.80}$$

При $\frac{\varkappa}{mc^2} \to \infty$ последняя скобка в (3.80) стремится к 1, и при больших $\frac{\varkappa}{mc^2}$, оставляя первые два члена разложения этой скобки в ряд, получим (с точностью до членов $\sim 1/\Omega$) асимптотическую формулу

$$\frac{p_0}{mc^2} \approx 1 + 2\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 + 2\frac{\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)}{\left(1 + \left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)\right)^2} \approx 1 + \Omega\hbar + 2. \tag{3.81}$$

Это означает, что в очень сильных полях разница между 1-м и 2-м уровнями перестает зависить от напряженности поля.

При $S > 1$ уравнение для определения энергии второго уровня $N = 2$ – это уравнение 3-й степени; в частности, при $S = 3/2$

$$p_0^3 - mc^2p_0^2 - (9m^2c^4 + 8\varkappa^2)p_0 + mc^2(9m^2c^4 + 40\varkappa^2) = 0. \tag{3.82}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{mc^2} = &\left(-\left(\frac{80}{27} + \frac{56}{3}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2\right) + \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3} \\ &+ \left(-\left(\frac{80}{27} + \frac{56}{3}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2\right) - \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3} + \frac{1}{3},\end{aligned} \tag{3.83}$$

где $D(m,\varkappa)$ – это дискриминант,

$$D(m,\varkappa) = -\frac{64}{3} + \frac{896}{27}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 + \frac{7616}{27}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^4 - \frac{512}{27}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^6. \tag{3.84}$$

При малых $\frac{\varkappa}{mc^2}$ дискриминант отрицателен и имеются 3 действительных решения кубического уравнения (3.82), которые при $\varkappa/mc^2 \to 0$ обращаются в $mc^2, 3mc^2, -3mc^2$. При значении

$p_0 \approx 0.22\frac{\varkappa^2}{mc^2}$ дискриминант $D(m,\varkappa)$ (3.84) меняет знак, и в этом случае кубическое уравнение имеет только одно действительное и 2 комплексных решения. Интересующее нас решение, отвечающее массе m, в этой точке становится комплексным.

Отметим, что для $S = 3/2$ решение (3.70), соответствующее первому уровню $N = 1$, тоже становится комплексным, но при большей напряженности магнитного поля – в точке $p_0 = 0.25\frac{\varkappa^2}{mc^2}$. Мы видим, что качественно решения конечнокомпонентных уравнений ведут себя одинаково при $N = 1$ и $N = 2$.

Графики решений (3.79),(3.80) и (3.83) приведены на рисунке 4.

Перейдём к рассмотрению случая $N = 2$ для бесконечнокомпонентных уравнений (3.99). При $S = 1/2$ имеем уравнение

$$p_0^3 - \frac{23}{15}mc^2p_0^2 + \frac{1}{15}(9m^2c^4 - 56\varkappa^2)p_0 - \frac{mc^2}{15}(m^2c^4 + 24\varkappa^2) = 0. \quad (3.85)$$

Его решение:

$$\frac{p_0}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{2464}{91125} + \frac{77}{250}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 + \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{2464}{91125} + \frac{77}{250}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 - \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3} + \frac{23}{45}. \quad (3.86)$$

Дискриминант соответствующего квадратного уравнения $D(m,\varkappa)$

$$D(m,\varkappa) = -\frac{256}{1366875} - \frac{3584}{91125}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 - \frac{1425664}{1366875}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^4 - \frac{702464}{91125}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^6, \quad (3.87)$$

отрицателен, поэтому решения (3.86) следует искать в виде суммы значений кубических корней, сопряжённых друг другу.

Для $S = 1$ имеем следующее кубическое уравнение:

$$p_0^3 - \frac{11}{6}mc^2p_0^2 + (m^2c^4 - 3\varkappa^2)p_0 - \frac{mc^2}{6}(m^2c^4 + 10\varkappa^2) = 0. \quad (3.88)$$

Его решение имеет вид комбинации кубических корней:

$$\frac{p_0}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{35}{2916} + \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 + \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3}$$
$$+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{35}{2916} + \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 - \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3} + \frac{11}{18}. \qquad (3.89)$$

Дискриминант $D(m,\varkappa)$ так же, как и в случае $S = 1/2$, отрицателен:

$$D(m,\varkappa) = -\frac{1}{8748} - \frac{67}{4374}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 - \frac{49}{108}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^4 - 4\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^6, \qquad (3.90)$$

поэтому и здесь решения – это комбинации сопряжённых значений кубических корней.

И наконец, вид уравнения и поведение его решения при $S = 3/2$ не отличается от приведённых выше. Уравнение при $N = 2$ выглядит так:

$$p_0^3 - \frac{71}{35}mc^2p_0^2 + \frac{1}{35}(45m^2c^4 - 88\varkappa^2)p_0 - \frac{mc^2}{5}(9m^2c^4 - 8\varkappa^2) = 0. \qquad (3.91)$$

Решение записываем в виде суммы корней:

$$\frac{p_0}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{70}{1157625} + \frac{368}{3675}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 + \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3}$$
$$+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{70}{1157625} + \frac{368}{3675}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 - \sqrt{D(m,\varkappa)}\right)^{1/3} + \frac{71}{105}. \qquad (3.92)$$

Дискриминант $D(m,\varkappa)$ отрицателен:

$$D(m,\varkappa) = -\frac{256}{4501875} - \frac{285184}{40516875}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^2 - \frac{9382144}{40516875}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^4 - \frac{2725888}{1157625}\left(\frac{\varkappa}{mc^2}\right)^6. \qquad (3.93)$$

Поведение полученных решений (3.86), (3.89) и (3.92) удобнее рассмотреть на графике. Вместе с решениями соответствующих конечнокомпонентных уравнений (3.74),(3.80) и (3.83) они приведены на рисунке 4.

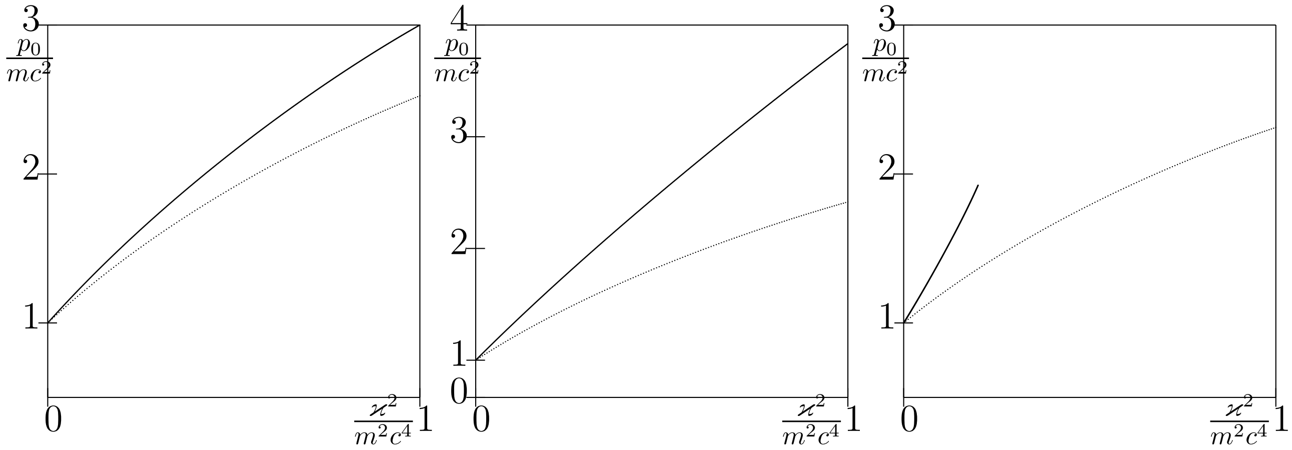


Рис. 4. Графики зависимости энергии второго уровня p_0/mc^2 от безразмерного параметра $\varkappa^2/(mc^2)^2$ для конечнокомпонентных уравнений (сплошная линия) и уравнений типа Майораны (пунктирная линия), $s = 1/2, 1, 3/2$.

Сравним теперь описания частицы спина 1/2 в магнитном поле, основанные на уравнениях Дирака и Майораны.

В первом случае спектр дается формулой (3.74), и соответственно при малых $\varkappa/mc^2$ имеем

$$\pm p_0 = mc^2(1 + 4N\varkappa^2/m^2c^4)^{1/2}$$
$$\approx mc^2(1 + 2N\varkappa^2/m^2c^4 - 2N^2\varkappa^4/m^4c^8) = mc^2 + N\Omega - N^2\Omega^2/2mc^2. \tag{3.94}$$

Для нахождения спектра уравнения Майораны частицы спина 1/2 в магнитном поле надо вычислить определитель матрицы (3.62), что приводит нас к алгебраическому уравнению на p_0 порядка $N + 1$. Приблизительно найдем его наименьший корень (т.е. корень p_0, наиболее близкий к mc^2) при $\varkappa/mc^2 \ll 1$, записывая p_0 в виде ряда

$$p_0 = mc^2(1 + \sum_k a_k(\varkappa/mc^2)^{2k}). \tag{3.95}$$

Для подсчета определителя (3.64) мы воспользуемся рекуррентной формулой

$$D_k = [(p_0 - mc^2)|S| + (k-1)p_0]D_{k-1} - \varkappa^2 k(2|S| + k - 1)(N - k + 1)D_{k-2} = 0, \tag{3.96}$$

где D_k - главный минор k-го порядка матрицы A. Заметим, что, согласно (3.96), если в разложении определителей D_i, $i = k-2, k-1$ по степеням $\varkappa$ содержатся только члены порядка $2i$ и выше, то в разложении D_k содержатся только члены порядка $2(k-1)$ и выше. Т.о., последовательно приравнивая определители D_k к нулю с точностью до членов порядка $2k$, мы можем найти коэффициенты a_k в (3.95). В частности, используя представление (3.95) для вычисления D_3, получим с точностью до членов 4 порядка по $\varkappa$

$$\begin{aligned} &p_0 \approx mc^2(1 + 2N\varkappa^2/m^2c^4 - (2N^2 + 4N)\varkappa^4/m^4c^8) = \\ &mc^2 + N\Omega - (N^2 + 2N)\Omega^2/2mc^2. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Сравнивая спектры (3.94) и (3.97), заключаем, что разница $N\Omega^2/mc^2$ проявляется в третьем члене разложения, то есть в ультрарелятивистском режиме $\hbar\Omega/mc^2 \approx 1$, что соответствует $B \approx \frac{m^2c^3}{|e|\hbar} \approx 10^{13}$Gauss.

Т.о., уравнения Дирака и Майораны дают различный спектр для заряженной массивной частицы спина 1/2 в магнитном поле. Однако, эти спектры совпадают в нерелятивистском пределе $\varkappa/mc^2 \to 0$.

Для максимальных создаваемых в лаборатории полей 10^6Гс отношение поправки к высоте уровня к расстоянию между уровнями составит

$$\frac{\Delta E_N}{\left(E_N^{\mathrm{D}} - E_{N-1}^{\mathrm{D}}\right)} \approx 10^{-7},$$

N	Конечнокомпонентный случай	Бесконечномерный случай
1	$1, 2, -4(1-S)$	$1, 2, -4(1+\vert S\vert)$
2	$1, 4, -8(1-S)$	$1, 4, -8(1+\vert S\vert)$
3	$1, 6, -12(2-S)$	$1, 6, -12(2+\vert S\vert)$

Таблица 3.1. Коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции $p_0/(mc^2)$ по степеням $\varkappa^2/(m^2c^4)$ (нулевая, первая и вторая степени)

где $\Delta E_N = E_N^{\mathrm{M}} - E_N^{\mathrm{D}}$ – разность между уровнями энергии, получаемыми при решении уравнений Майораны и Дирака.

Для полноты приведем здесь выражения для **энергии N-го уровня частицы спина** s с точностью до членов 4 порядка по $\varkappa$. Как и выше, вычисляя определитель D_3, получим соответственно в случае конечномерных представлений

$$
\begin{aligned}
p_0 &\approx mc^2(1 + 2N\varkappa^2/m^2c^4 - 2N(N-2S+1)\varkappa^4/m^4c^8) \\
&= mc^2 + N\Omega - N(N-2S+1)\Omega^2/2mc^2,
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

и бесконечномерных НП серии T^+

$$
\begin{aligned}
p_0 &\approx mc^2(1 + 2N\varkappa^2/m^2c^4 - 2N(N+2|S|+1)\varkappa^4/m^4c^8) \\
&= mc^2 + N\Omega - N(N+2|S|+1)\Omega^2/2mc^2.
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

Для наглядности представим первые коэффициенты разложения решений в ряд Тейлора в виде таблицы 3.1.

Приведем также здесь графики для энергии третьего уровня $N = 3$ (рис.5).

Как видно, графики имеют ту же структуру, что и в случае $N = 2$, можно лишь отметить, что разница между решениями

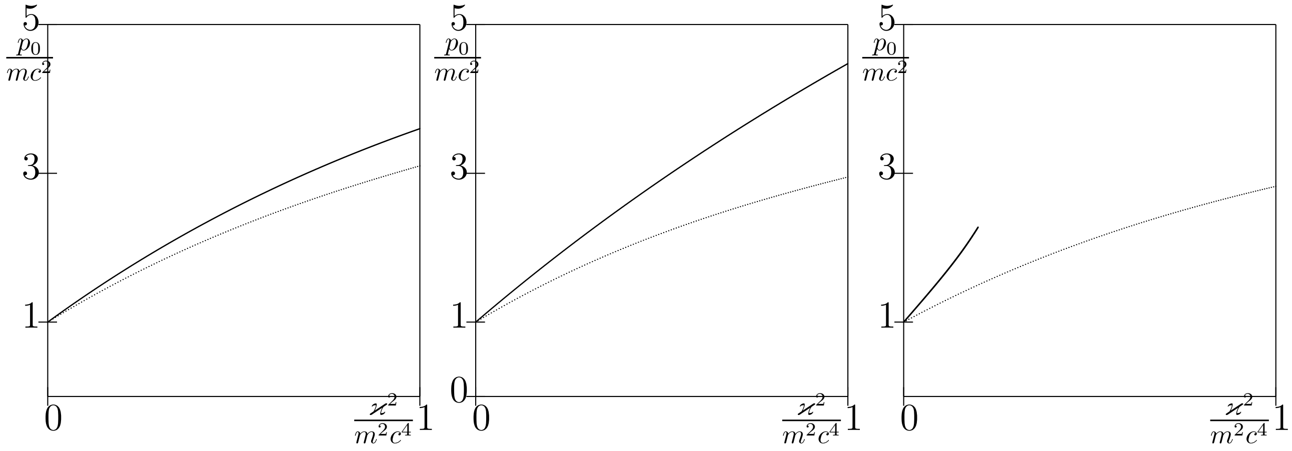


Рис. 5. Графики зависимости энергии p_0/mc^2 третьего уровня $N = 3$ от безразмерного параметра $\varkappa^2/(mc^2)^2$ для конечнокомпонентных уравнений (сплошная линия) и уравнений типа Майораны (пунктирная линия), для значений $s = 1/2, 1, 3/2$.

для конечнокомпонентного и бесконечнокомпонентного случая растёт быстрее, чем в случае $N = 2$.

Рассмотрим теперь поведение решений в очень **сильных полях** $\hbar\Omega = 2\frac{\varkappa^2}{m^2c^4} > 1$. В конечномерном случае решения для таких полей существуют только при $s = 1/2$ и $s = 1$, поэтому ограничим наше рассмотрение именно этими значениями спина.

Графики для $s = 1/2$ представлены на рис.6.

Графики решений в случае $s = 1$ представлены на рис. 7. В бесконечнокомпонентном случае решения качественно ведут себя аналогично случаю $s = 1/2$. Для конечнокомпонентного случая (2+1-мерный аналог уравнения Даффина-Кеммера) поведение решений существенно отличается. Минимальному уровню энергии $N = 1$ соответствует линейная зависимость. При $N > 1$ перепишем (3.78) в виде

$$\frac{p_0}{mc^2} = x + (1+x)\left(1 + 4(N-1)\frac{x}{(1+x)^2}\right)^{1/2}, \quad x = \frac{\varkappa^2}{m^2c^4}. \qquad (3.100)$$

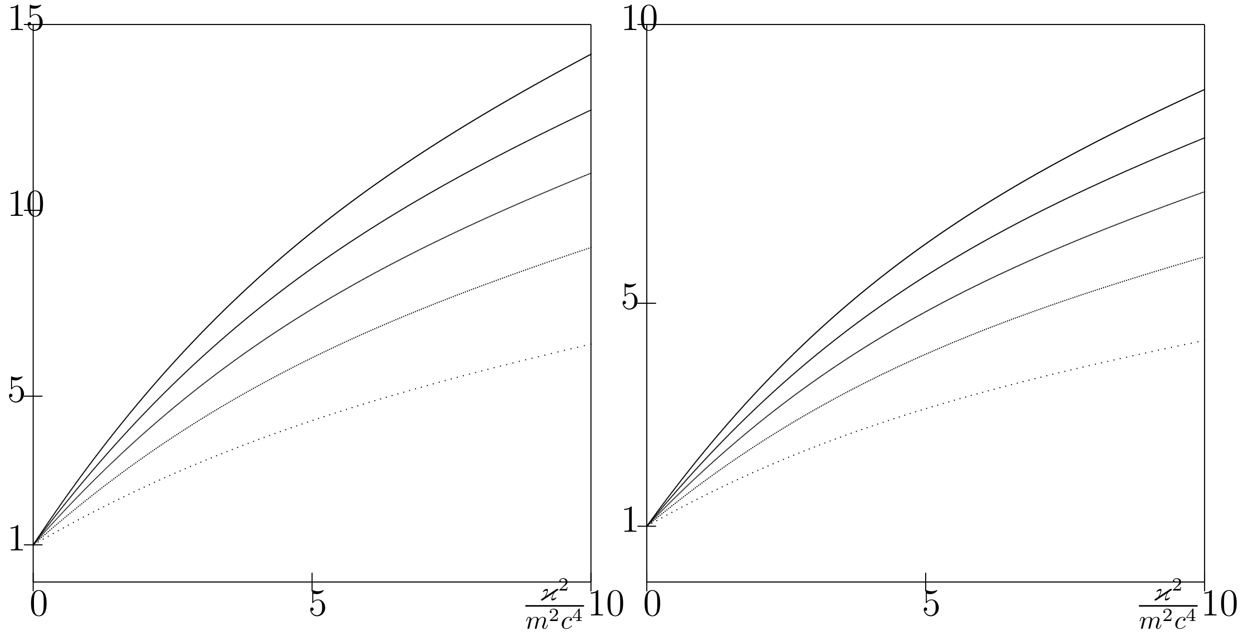


Рис. 6. Графики зависимости энергии p_0/mc^2 первых уровней $N = 1, 2, 3, 4, 5$ от безразмерного параметра $\varkappa^2/(mc^2)^2$ для значения спина $s = 1/2$. График решения для конечнокомпонентного случая – слева, для бесконечнокомпонентного – справа.

Как и выше (для $N = 2$), раскладывая последний множитель в ряд, получим

$$\frac{p_0}{mc^2} \approx x + (1+x)\left(1 + 2(N-1)\frac{x}{(1+x)^2}\right) =$$
$$1 + 2x + 2(N-1)\frac{(x+1)^2 - x + 1}{(x+1)^2} \approx 1 + \Omega\hbar + (N-1)(2 - 4(\hbar\Omega)^{-1}). \tag{3.101}$$

Из полученной асимптотической формулы видно, что спектр становится эквидистантным – разница между двумя соседними уровнями стремится к 2 при $\frac{\varkappa}{mc^2} \to \infty$ и не зависит от номера уровня N. С ростом параметра $\frac{\varkappa}{mc^2}$ решения будут приближаться к параллельным прямым с коэффициентом наклона 2.

В дальнейшем представляет интерес как сравнение решений,

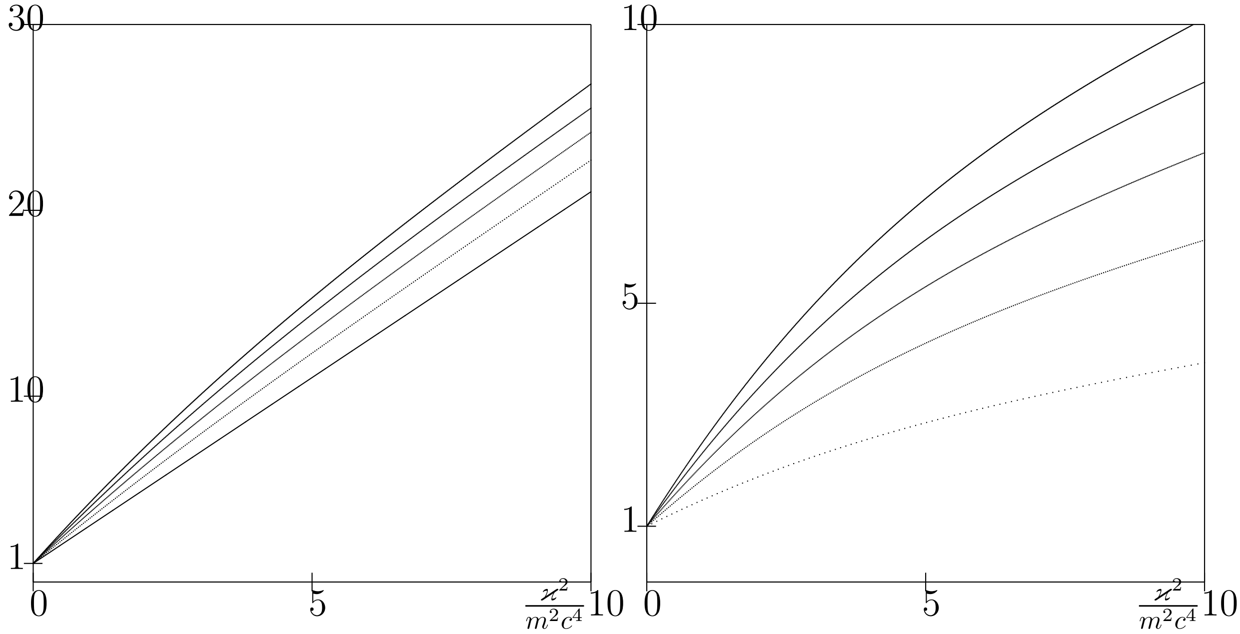


Рис. 7. Графики зависимости энергии p_0/mc^2 первых уровней $N = 1, 2, 3, 4, 5$ от безразмерного параметра $\varkappa^2/(mc^2)^2$ для значения спина $s = 1$. График решения для конечнокомпонентного случая – слева, для бесконечнокомпонентного – справа.

даваемых для спинов 1/2 и 1 конечно-и бесконечнокомпонентными уравнениями для случая других внешних полей, так и перенос результатов работы на 3+1-мерный случай. Разработанная в настоящей работе методика нахождения решений РВУ, основанная на связанной с симметрией задачи возможностью записи гамильтониана через генераторы групп, может быть непосредственно перенесена на 3+1 мерный случай.

В пространстве 2+1 измерений операторы (матрицы) линейных по p_μ уравнений являются генераторами группы Лоренца $SO(2,1) \sim SU(1,1)$, а сами уравнения в свободном случае – это уравнения на собственные значения для оператора Казимира группы Пуанкаре $M(2,1)$. В пространстве 3+1 измерений ситуация отличается – линейные по p_μ уравнения Любаньского-Бхабба (в том числе уравнения Дирака и Даффина-Кеммера) и Майораны, в отличие от 2+1, не связаны с операторами Казимира группы Пуанкаре. Операторы Γ^μ, входящие в уравнения, не являются генераторами группы группы Лоренца $SO(3,1)$. Однако, вместе с генераторами группы Лоренца операторы Γ^μ удовлетворяют коммутационнным соотношениям алгебры Ли группы $SO(3,2)$, и мы также можем записать гамильтониан через генераторы.

3.5. Уравнение Майораны: нерелятивистский предел и разложение по степеням 1/c

В пространстве 2+1 измерений (два пространственных, одно временное) для описания частиц спина s имеются две альтернативные возможности, связанные с использованием различных представлений 2+1 группы Лоренца $SO(3,1) \sim SU(1,1)$. Для описания целых и полуцелых спинов могут быть использованы как конечномерные представления размерности $2s+1$, так и бесконечномерные унитарные представления $SU(1,1)$ (последние также могут использоваться также для описания дробных спинов, возможных в пространстве 2+1 измерений). Наличие двух альтернативных описаний требует анализа решений соответствующих релятивистских волновых уравнений. Для спина 1/2 – это 2+1-мерные уравнения Дирака и Майораны. Если решения свободного уравнения Майораны хорошо известны (см. [84] и приведенные там ссылки), то решения при наличии электромагнитного поля до последнего времени не были получены; сложность решения обусловлена бесконечным числом компонент волновой функции, входящей в уравнения. Для постоянного магнитного поля точное решение было рассмотрено нами в предыдущем пункте на основе использования симметрии задачи. Здесь мы рассматриваем уравнения Майораны и Дирака в приближенной форме, учитывая члены порядка не выше $(1/c)^2$ подобно тому, как это делается для уравнения Дирака в пространстве 3+1 измерений. Изложение в основном следует работам [87, 90].

Уравнения, в случае свободной частицы связанные с оператором Казимира $\hat{p}_\mu J^\mu = \hat{p}_\mu S^\mu$ 2+1-мерной группы Пуанкаре и фиксирующие произведение массы m на спин s, имеют вид

$$\hat{p}_\mu S^\mu \psi = smc\psi, \tag{3.102}$$

где S^μ - операторы спина в рассматриваемом представлении. При введении минимального взаимодействия для спина $\pm 1/2$ уравнение принимает вид:

$$\begin{gathered}\left(\hat{\pi}_0 S^0 - c\hat{\pi}_1 S^1 - c\hat{\pi}_2 S^2\right)\psi = \pm\frac{1}{2}mc^2\psi, \\ \hat{\pi}_0 = (\hat{E} - e\Phi), \quad \hat{\pi}_k = \hat{p}_k - \frac{e}{c}A_k.\end{gathered} \tag{3.103}$$

Как было показано выше, знак правой части равенства (3.103) равен знаку произведения $s\,\mathrm{sgn}\,p_0$. Следует рассмотреть два случая: ψ может преобразовываться по конечномерному или бесконечномерному НП группы Лоренца.

В конечномерном случае, мы рассматриваем двумерное представление T^0_S, $S = 1/2$ группы $SU(1,1)$. Матрицы S_μ определены в (3.28). Подставив их в уравнение (3.103), получим уравнение Дирака в $2+1$ измерениях для двухкомпонентного спинора

$\psi(x,t) = (\psi_1(x)\,\psi_2(x))^T$:

$$\hat{S}^0\psi_1(x,t) = \frac{1}{2}\psi_1(x,t),\ \hat{S}^0\psi_2(x,t) = -\frac{1}{2}\psi_2(x,t),$$
$$(\hat{\pi}_0 \mp mc^2)\psi_1(x,t) - c(\hat{\pi}_1 + i\hat{\pi}_2)\psi_2(x,t) = 0,$$
$$(-\hat{\pi}_0 \mp mc^2)\psi_2(x,t) + c(\hat{\pi}_1 - i\hat{\pi}_2)\psi_1(x,t) = 0. \qquad (3.104)$$

Рассмотрим стационарные состояния:

$$\psi(x,t) = \exp\left[-i(E + mc^2)t\right]\psi(x). \qquad (3.105)$$

Для случае $s\,\mathrm{sgn}\,p_0 = +1/2$ имеем

$$(E - e\Phi)\psi_1(x) - c(\hat{\pi}_1 + i\hat{\pi}_2)\psi_2(x) = 0, \qquad (3.106)$$

$$(-(E - e\Phi) - 2mc^2)\psi_2(x) + c(\hat{\pi}_1 - i\hat{\pi}_2)\psi_1(x) = 0, \qquad (3.107)$$

а в случае $s\,\mathrm{sgn}\,p_0 = -1/2$:

$$((E - e\Phi) + 2mc^2)\psi_1(x) - c(\hat{\pi}_1 + i\hat{\pi}_2)\psi_2(x) = 0, \qquad (3.108)$$

$$-(E - e\Phi)\psi_2(x) + c(\hat{\pi}_1 - i\hat{\pi}_2)\psi_1(x) = 0. \qquad (3.109)$$

В первом случае, ψ_1 - большая компонента, соответствующая спину $+1/2$. Во втором же большой компонентой является ψ_2. Этот соответствует спину $-1/2$.

При рассмотрении членов порядка $1/c$ мы получим для большой компоненты ψ_1 уравнение Паули. Действительно, как следует из уравнения (3.107), в таком приближении $\psi_2 \simeq \frac{1}{2mc}(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_1$. Подставляя компоненту ψ_2 в уравнение (3.106), получим следующее выражение для большой компоненты:

$$(E - e\Phi)\psi_1 = \frac{1}{2m}(-i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_1 = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - i[\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2])\psi_1. \quad (3.110)$$

Отметим, что $i[\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2] = \frac{1}{c}eB$. Используя это соотношение, мы приходим к уравнению Паули:

$$E\psi = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{esB}{mc} + e\Phi\right)\psi, \quad s = 1/2, \tag{3.111}$$

для спина 1/2. Уравнение для спина $-1/2$ можно легко получить аналогичным образом из уравнений (3.108) и (3.109). Оно имеет форму (3.111) при $s = -1/2$.

Найдём уравнение для большой компоненты ψ_1 в следующем приближении. Будем сохранять члены порядка $1/c^2$. Из уравнения (3.107) следует, что малая компонента ψ_2 выражается через большую ψ_1 следующим образом:

$$\psi_2 = \frac{1}{2mc}\left(1 + \frac{E - e\Phi}{2mc^2}\right)^{-1}(\widehat{\pi}_1 - i\widehat{\pi}_2)\psi_1 \approx \frac{1}{2mc}\left(1 - \frac{E - e\Phi}{2mc^2}\right)(\widehat{\pi}_1 - i\widehat{\pi}_2)\psi_1. \tag{3.112}$$

Т.о., в рассматриваемом приближении частица спина 1/2 описывается одной компонентой ψ_1. Введем новую нормированную функцию Ψ, $\psi_1 = N\Psi$, $\Psi\Psi^* = 1$. Надо определить нормировочный множитель N. Мы ищем множитель с точностью до $1/c^2$, а значит, можно ограничиться двумя первыми компонентами и в выражении для (3.112) ψ_2 отбросить члены порядка $1/c^2$ и выше:

$$\psi_2 \approx \frac{1}{2mc}(\widehat{\pi}_1 - i\widehat{\pi}_2)\psi_1, \tag{3.113}$$

откуда

$$\psi_2\psi_2^* \approx \frac{\hat{p}^2}{4m^2c^2}\psi_1\psi_1^*. \tag{3.114}$$

Тогда полная вероятность пропорциональна $\psi_1\psi_1^\dagger$:

$$\psi\psi^\dagger = \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* \approx \psi_1\psi_1^*\left(1 + \frac{p^2}{4m^2c^2}\right) = 1. \tag{3.115}$$

Отсюда получим нормализующий множитель:

$$N = \left(1 + \frac{p^2}{4m^2c^2}\right)^{-1/2}. \tag{3.116}$$

Воспользуемся разложением (3.116) в ряд Тейлора; с требуемой точностью

$$N = \left(1 - \frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right). \tag{3.117}$$

Подставляя ψ_2 из уравнения (3.112) в (3.106), получим

$$\begin{gathered}(E - e\Phi)\left(1 - \frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right)\Psi = \\ \frac{\hat{\pi}_1 + i\hat{\pi}_2}{2m}\left(1 + \frac{E - e\Phi}{2mc^2}\right)^{-1}(\hat{\pi}_1 - i\hat{\pi}_2)\left(1 - \frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right)\Psi \simeq \\ \left[\frac{(i\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2)(E - e\Phi)(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)}{4mc^2} + \frac{\hat{p}^2}{2m} - \left(\frac{eB}{2mc}\right) - \frac{\hat{p}^4}{16m^3c^2}\right]\Psi.\end{gathered} \tag{3.118}$$

Для дальнейших преобразований используем соотношение

$$\begin{gathered}(-i\hat{p}_1 + \hat{p}_2)(E - e\Phi)(i\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = (E - e\Phi)\hat{p}^2 - ei(\mathcal{E}_1p_1 + \mathcal{E}_2p_2) \\ + e(-\mathcal{E}_1p_2 + \mathcal{E}_2p_1) = (E - e\Phi)\hat{p}^2 - ie(\mathcal{E}, \hat{p}) + e[\mathcal{E}, \hat{p}],\end{gathered} \tag{3.119}$$

где $\mathcal{E} = -\nabla\Phi$ – вектор напряжённости электрического поля. Подействуем оператором $\hat{p}^2$ на соотношение

$$\left(\hat{p}^2/2m\right)\psi = (E - e\Phi)\psi, \tag{3.120}$$

справедливое с точностью до $1/c$, и получим

$$\begin{gathered}\hat{p}^4/2m = \hat{p}^2(E - e\Phi) = (E - e\Phi)\hat{p}^2 - 2ie(\mathcal{E}, \hat{p}) + e\nabla^2\Phi \\ \Longrightarrow (E - e\Phi)\hat{p}^2 = \hat{p}^4/2m + 2ie(\mathcal{E}, \hat{p}) - e\nabla^2\Phi.\end{gathered} \tag{3.121}$$

Подставляем соотношение (3.121) в (3.118):

$$\frac{(E-e\Phi)\hat{p}^2}{8m^2c^2}-\frac{(E-e\Phi)\hat{p}^2-ie(\mathcal{E},\hat{p})+e[\mathcal{E},\hat{p}]}{4m^2c^2}=$$
$$-\frac{\hat{p}^4/2m+ie(\mathcal{E},\hat{p})+e[\mathcal{E},\hat{p}]-e\nabla^2\Phi}{4m^2c^2}+\frac{\hat{p}^4/2m+2ie(\mathcal{E},\hat{p})-e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2}=$$
$$\frac{-\hat{p}^4/2m-2e[\mathcal{E},\hat{p}]+e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2}. \qquad (3.122)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении частица со спином 1/2 описывается однокомпонентной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\hat{p}^2/2m+e\Phi-\frac{seB}{mc}-E\right)\Psi=\left(\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2}+\frac{se[\mathcal{E},\hat{p}]}{2m^2c^2}-\frac{e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2}\right)\Psi \qquad (3.123)$$

при $s = +1/2$. Из уравнений (3.108) и (3.109) следует, что в рассматриваемом приближении частица со спином $-1/2$ описывается однокомпонентной функцией, удовлетворяющей уравнению (3.123) при $s = -1/2$. При $s = \pm 1/2$ уравнение (3.123) представляет собой обобщение уравнения Паули с точки зрения теории Дирака. Первый член в правой части равенства (3.123) даёт релятивистскую поправку к нерелятивистскому выражению энергии частицы. Действительно,

$$E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}\approx mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{p^4}{8m^3c^2}.$$

Второй член в центрально-симметричном поле пропорционален $s[\mathbf{r},\hat{p}] = s\hat{L}$. Он описывает спин-орбитальное взаимодействие. Третий член отвечает контакному взаимодействию.

Рассмотрим теперь **уравнение Майораны**. Оно соответствует бесконечнокомпонентному унитарному НП группы $SU(1,1)$. В случае дискретной серии T_S^+, $S=1/2$, матрицы S_μ (3.29) приобретают вид:

$$
\begin{aligned}
S^0{}_{nm} &= \delta_{nm}\frac{1}{2}(2n-1),\\
S^1{}_{nm} &= -\frac{i}{2}(\delta_{n\,m+1}(n-1)-\delta_{n+1,m}n),\\
S^2{}_{nm} &= \frac{1}{2}(\delta_{n\,m+1}(n-1)+\delta_{n+1,m}n).
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

Для собственных векторов ψ_n оператора $\hat{S}^0$,

$$\hat{S}^0\psi_n = (n-1/2)\psi_n,\ \ n=1,2,...,$$

уравнение (3.103)) приводит к следующему набору уравнений (он соответствует знаку $+$ в (3.103))

$$[(2n-1)\hat{\pi}_0 - mc^2]\psi_n - cn(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_{n+1} - c(n-1)(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_{n-1} = 0. \tag{3.125}$$

Рассмотрим стационарные состояния в бесконечнокомпонентном случае:

$$\psi(x,t) = \exp\left(-i(E+mc^2)t\right)\psi(x). \tag{3.126}$$

Из соотношения $\psi_{k+1} \sim \frac{1}{mc}\psi_k$ следует, что ψ_1 является большой компонентой.

Следует отметить, что полагая $\psi(x,t)$

$$\psi(x,t) = \exp\left(-i(E+mc^2/(2n-1))t\right)\psi(x),$$

мы выбираем ψ_n – в качестве большой компоненты. В нерелятивистском приближении $|E| \ll mc^2$ эта компонента описывает частицы со спинами $s_n = (2n-1)/2$, $n=1,2,\ldots$, и мы имеем спектр спинов и масс $m_n = m/(2n-1)$ в согласии с общей теорией.

Компоненты ψ_n стационарных состояний (3.126) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(E-e\Phi)\psi_1 - c(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2 = 0, \tag{3.127}$$

$$(3(E-e\Phi)+2mc^2)\psi_2 - 2c(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3 - c(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_1 = 0, \tag{3.128}$$

$$(5(E-e\Phi)+4mc^2)\psi_3 - 3c(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_4 - 2c(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2 = 0, \tag{3.129}$$

$$\ldots$$

Заметим, что после замены $\hat{\pi}_1 \leftrightarrow \hat{\pi}_2$ уравнение (3.127) совпадёт с уравнением (3.106) для конечнокомпонентного случая.

Сохраняя только члены порядка $1/c$, мы получим уравнение Паули для большой компоненты ψ_1. Действительно, из уравнения (3.128) следует, что в этом приближении

$$\psi_2 \simeq \frac{1}{2mc}(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_1 \tag{3.130}$$

(т.к. $\psi_3 \sim \frac{1}{m^2c^2}\psi_1$). Подставим компоненту ψ_2 в уравнение (3.127) для большой компоненты и снова получим равенство (3.110), а следом и уравнение Паули (3.111) при $s=1/2$. Таким образом, оба уравнения: и Дирака, и Майораны – сводятся к уравнению Паули в нерелятивистском пределе.

Но разница между уравнениями Дирака и Майораны появляется уже в следующем приближении – при сохранении членов порядка $1/c^2$. Чтобы получить уравнение на большую компоненту ψ_1 в этом приближении, достаточно использовать только первые три уравнения(3.127)-(3.129). Сначала выразим ψ_2 из уравнения (3.128):

$$\psi_2 = \frac{1}{2mc}\left(1+\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)^{-1}(2(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3 + (i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_1). \tag{3.131}$$

Мы собираемся подставить (3.131) в (3.127). Следовательно, следует оставить в правой части (3.131) все члены порядка не выше $1/c^3$ (т.к. ψ_2 умножается на c в уравнении (3.127)). Далее выразим $\psi_3 \sim \frac{1}{m^2c^2}\psi_1$ из уравнения (3.129):

$$\psi_3 = \frac{1}{4mc}\left(1+\frac{5(E-e\Phi)}{4mc^2}\right)^{-1}\left(3(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_4 + 2(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2\right). \quad (3.132)$$

В последнем выражении оставляем только члены порядка не выше $1/c^2$. Т.к. $\psi_4 \sim \frac{1}{m^2c^2}\psi_2$, а уравнение (3.132) умножается на величину порядка $\sim \frac{1}{c}$, членами с ψ_4 можно пренебречь. Таким образом, в указанном приближении

$$\psi_3 = \frac{1}{2mc}(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2.$$

Принимая во внимание то, что величина $2(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3$ войдёт в правую часть равенства (3.131), мы должны отбросить коммутатор $[\hat{\pi}_1,\hat{\pi}_2] \sim \frac{1}{c^3}$ и использовать уравнение (3.127),

$$\begin{gathered}2(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3 = 2(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\frac{1}{2mc}(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2 \approx \\ \frac{1}{mc}(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2 = \frac{1}{mc^2}\left(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2\right)(E-e\Phi)\psi_1.\end{gathered}$$

Итак, окончательное выражение для ψ_2:

$$\psi_2 = \frac{1}{2mc}\left(1+\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)^{-1}\left(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2\right)\left(1+\frac{E-e\Phi}{mc^2}\right)\psi_1. \quad (3.133)$$

Как и в случае уравнения Дирака, в рассматриваемом приближении для описания частицы требуется только однокомпонентная функция Ψ. Мы определяем её из соотношения $\psi_1 = N\Psi$, где N - нормировочный множитель, $\psi^\dagger\psi = \Psi^*\Psi$. В приближении по $1/c^2$ множитель N дается соотношением (3.117). Затем, подставив ψ_2 в уравнение (3.127) и учитывая нормировочный множитель, получим

$$(E-e\Phi)\left(1-\frac{p^2}{8m^2c^2}\right)\Psi =$$
$$\frac{(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)}{2m}\left(1-\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\left(1+\frac{E-e\Phi}{mc^2}\right)\left(1-\frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right)\Psi.$$

В приближении по $1/c^2$ правую часть этого равенства можно переписать следующим образом

$$\left[\frac{(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)}{2m}\left(1-\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)+\hat{p}^2\frac{(E-e\Phi)}{2m^2c^2}-\frac{\hat{p}^4}{16m^3c^2}\right]\Psi =$$
$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}-\frac{eB}{2mc}-\frac{3}{4m^2c^2}(-i\hat{p}_1+\hat{p}_2)(E-e\Phi)(i\hat{p}_1+\hat{p}_2)-\frac{\hat{p}^4}{16m^3c^2}+\hat{p}^2\frac{E-e\Phi}{2m^2c^2}\right]\Psi. \tag{3.134}$$

Используя равенство (3.121), преобразуем последний член в (3.134) к виду:

$$\hat{p}^2\frac{E-e\Phi}{2m^2c^2}=\frac{\hat{p}^4}{4m^3c^2},$$

а третий следующим образом:

$$\begin{aligned}
&-\frac{3}{4m^2c^2}(-i\hat{p}_1+\hat{p}_2)(E-e\Phi)(i\hat{p}_1+\hat{p}_2)\\
&-\frac{3}{4m^2c^2}\left[(E-e\Phi)\hat{p}^2-ei(\mathcal{E},\hat{p})+e[\mathcal{E},\hat{p}]\right]+\frac{(E-e\Phi)\hat{p}^2}{8m^2c^2}\\
&=-\frac{5}{8m^2c^2}\left(\hat{p}^4/2m+2ie(\mathcal{E},\hat{p})-e\nabla^2\Phi\right)-\frac{3e\left[[\mathcal{E},\hat{p}]-i(\mathcal{E},\hat{p})\right]}{4m^2c^2}\\
&=\frac{1}{8m^2c^2}\left[-5\hat{p}^4/2m-4ie(\mathcal{E},\hat{p})-6e[\mathcal{E},\hat{p}]+5e\nabla^2\Phi\right].
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Т.о., в приближении $1/c^2$ частица со спином $1/2$ описывается однокомпонентной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\hat{p}^2/2m+e\Phi-\frac{eB}{2mc}-E\right)\Psi=\left(\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2}+\frac{3e[\mathcal{E},\hat{p}]}{4m^2c^2}-\frac{5e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2}+\frac{ie(\mathcal{E},\hat{p})}{2m^2c^2}\right)\Psi. \tag{3.136}$$

Аналогично рассмотрим НП дискретной отрицательной серии. В случае дискретной серии T^-_S, $S = 1/2$, матрицы S_μ (3.29) приобретают вид:

$$\begin{aligned} S^0{}_{nm} &= -\delta_{nm}\frac{1}{2}(2n-1), \\ S^1{}_{nm} &= -\frac{i}{2}(\delta_{n\,m+1}(n-1) - \delta_{n+1,m}n), \\ S^2{}_{nm} &= -\frac{1}{2}(\delta_{n\,m+1}(n-1) + \delta_{n+1,m}n). \end{aligned} \tag{3.137}$$

Собственные векторы ψ_n оператора $\hat{S}^0$,

$$\hat{S}^0\psi_n = -(n-1/2)\psi_n, \;\; n = 1, 2, ...,$$

также удовлетворяют следующему набору уравнений (он соответствует знаку “$-$” в уравнениях (3.103))

$$[(2n-1)\hat{\pi}_0 - mc^2]\psi_n - cn(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_{n+1} - c(n-1)(-i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_{n-1} = 0. \tag{3.138}$$

Отличие от (3.125) состоит в знаках перед i.

Рассмотрим стационарные состояния в бесконечнокомпонентном случае:

$$\psi(x,t) = \exp\left(-i(E + mc^2)t\right)\psi(x). \tag{3.139}$$

Из соотношения $\psi_{k+1} \sim \frac{1}{mc}\psi_k$ следует, что ψ_1 является большой компонентой.

Следует отметить, что представляя $\psi(x,t)$, как

$$\psi(x,t) = \exp\left(-i(E + mc^2/(2n-1))t\right)\psi(x),$$

мы уже автоматически получаем, что ψ_n - большая компонента. В нерелятивистском приближении $|E| \ll mc^2$ эта компонента описывает частицы со спинами $s_n = (2n-1)/2$, $n = 1, 2, \ldots$. И мы получаем спектр спинов и масс $m_n = m/(2n-1)$ в согласии с общей теорией.

Компоненты ψ_n стационарных состояний (3.126) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(E - e\Phi)\psi_1 - c(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_2 = 0, \tag{3.140}$$

$$(3(E - e\Phi) + 2mc^2)\psi_2 - 2c(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_3 - c(-i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_1 = 0, \tag{3.141}$$

$$(5(E - e\Phi) + 4mc^2)\psi_3 - 3c(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_4 - 2c(-i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_2 = 0, \tag{3.142}$$

$$\ldots$$

Полученные уравнения отличаются от (3.127), (3.128) и (3.129) знаками перед членами, содержащими множитель i.

Сохраняя только члены порядка $1/c$, для большой компоненты ψ_1 из уравнения (3.141) получим, что в используемом приближении

$$\psi_2 \simeq \frac{1}{2mc}(-i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_1 \tag{3.143}$$

(т.к. $\psi_3 \sim \frac{1}{m^2c^2}\psi_1$). Подставим компоненту ψ_2 в уравнение (3.140) для большой компоненты и получим аналог равенства (3.110).

$$(E - e\Phi)\psi_1 = \frac{1}{2m}(i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)(-i\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2)\psi_1 = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + i[\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2])\psi_1. \tag{3.144}$$

Сразу отсюда следует уравнение Паули (3.111) при $s = -1/2$. Таким образом, и для случая $s = -1/2$ мы пришли к уравнению Паули в нерелятивистском пределе.

Теперь необходимо рассмотреть разницу между уравнениями Дирака и Майораны в следующем приближении - при сохранении членов порядка $1/c^2$. Чтобы получить уравнение на большую компоненту ψ_1 в этом приближении, достаточно использовать только первые три уравнения(3.140)-(3.142). Сначала выразим ψ_2 из уравнения (3.141):

$$\psi_2 = \frac{1}{2mc}\left(1+\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)^{-1}(2(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3+(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_1). \quad (3.145)$$

Аналогично случаю $s=+1/2$ в правой части (3.145) следует сохранить все члены порядка не выше $1/c^3$ (т.к. ψ_2 умножается на c в уравнении (3.140)). Далее выразим $\psi_3 \sim \frac{1}{m^2c^2}\psi_1$ из уравнения (3.142):

$$\psi_3 = \frac{1}{4mc}\left(1+\frac{5(E-e\Phi)}{4mc^2}\right)^{-1}(3(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_4+2(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2)\,. \quad (3.146)$$

В последнем выражении оставляем только члены порядка не выше $1/c^2$. Т.к. $\psi_4 \sim \frac{1}{m^2c^2}\psi_2$, а уравнение (3.146) умножается на величину порядка $\sim \frac{1}{c}$, членами с ψ_4 можно пренебречь. Таким образом, в указанном приближении

$$\psi_3 = \frac{1}{2mc}(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2.$$

Принимая во внимание то, что величина $2(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3$ войдёт в правую часть равенства (3.145), мы должны отбросить коммутатор $[\hat{\pi}_1,\hat{\pi}_2]\sim\frac{1}{c^3}$ и использовать уравнение (3.140),

$$\begin{aligned}&2(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_3 = 2(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\frac{1}{2mc}(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2 \approx\\ &\frac{1}{mc}(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\psi_2 = \frac{1}{mc^2}\left(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2\right)(E-e\Phi)\psi_1.\end{aligned}$$

Итак, окончательное выражение для ψ_2:

$$\psi_2 = \frac{1}{2mc}\left(1+\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)^{-1}(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\left(1+\frac{E-e\Phi}{mc^2}\right)\psi_1. \quad (3.147)$$

В приближении по $1/c^2$ с использованием нормировочного множителя N из соотношения (3.117) получим

$$\begin{aligned}&(E-e\Phi)\left(1-\frac{p^2}{8m^2c^2}\right)\Psi =\\ &\frac{(i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)}{2m}\left(1-\frac{3(E-e\Phi)}{2mc^2}\right)(-i\hat{\pi}_1+\hat{\pi}_2)\left(1+\frac{E-e\Phi}{mc^2}\right)\left(1-\frac{\hat{p}^2}{8m^2c^2}\right)\Psi.\end{aligned}$$

В итоге, в приближении по $1/c^2$ частица со спином $-1/2$ описывается только однокомпонентной функцией, которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\hat{p}^2/2m + e\Phi + \frac{eB}{2mc} - E\right)\Psi = \left(\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{3e[\mathcal{E},\hat{p}]}{4m^2c^2} - \frac{5e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2} + \frac{ie(\mathcal{E},\hat{p})}{2m^2c^2}\right)\Psi, \tag{3.148}$$

Случаи $s = \pm 1/2$ можно свести к одному соотношению:

$$\left(\hat{p}^2/2m + e\Phi - \frac{seB}{mc} - E\right)\Psi = \left(\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{3se[\mathcal{E},\hat{p}]}{2m^2c^2} - \frac{5e\nabla^2\Phi}{8m^2c^2} + \frac{ie(\mathcal{E},\hat{p})}{2m^2c^2}\right)\Psi. \tag{3.149}$$

При $s = \pm 1/2$ уравнение (3.149) представляет собой обобщение уравнения Паули с точки зрения теории Майораны. Мы видим, что правая часть этого равенства отличается от соответствующего равенства (3.123), полученного согласно теории Дирака. Первый член в правой части (3.149) – релятивистская поправка для кинетической энергии частицы – одинаков в обоих выражениях. Второй и третий члены имеют ту же структуру, что и в конечнокомпонентном уравнении, но отличаются значениями численных коэффициентов. Т.о., первые три члена в правой части равенства (3.149) имеют сходную с конечнокомпонентным случаем физическую интерпретацию. Однако, кроме них, появляется и четвёртый член, пропорциональный скалярному произведению $(\mathcal{E},\hat{p})$, отсутствующий в конечнокомпонентном случае.

Заключение

Сформулируем основные результаты и выводы настоящей работы.

1. Построена система КС квантового ротатора $|juv\rangle$, обладающих минимальной неопределённостью. Они имеют определённую проекцию j на подвижную ось, жёстко связанную с ротатором (она задается параметром v), и на неподвижную ось (задается параметром u).

2. Для построенных КС рассмотрена эволюция во времени в системах с квадратичным по генераторам группы $SO(3)$ гамильтонианом. Показано, что КС со временем, в общем случае, “расплывается”. Однако, для аксиально-симметричного ротатора такого расплывания нет. Показано, что квантовые уравнения на параметры КС переходят в классические уравнения Эйлера при больших значениях углового момента j, при малых j правая часть уравнений отличается численным множителем, что соответствует замедлению прецессии.

3. Предложена методика построения точных решений конечно- и бесконечнокомпонентных релятивистских волновых уравнений во внешнем поле, основанная на их записи через генераторы групп Ли и разделении пространственных и ориентационных переменных. Получены точные решения 2+1-мерных аналогов уравнений Майораны и Бхаббы в постоянном однородном магнитном поле.

4. Проведен анализ полученных решений. Для уравнений Майораны, описывающих произвольные спины, как и для

конечнокомпонентных уравнений спинов 1/2 и 1 (уравнения Дирака и Даффина-Кеммера), решения существуют при любых значениях напряженности магнитного поля, и их спектры обладают сходным поведением. Отличие состоит в том, что энергии уровней в случае бесконечнокомпонентных уравнений растут с ростом поля несколько медленнее, чем в случае конечнокомпонентных. Так, для случая спина 1/2 при максимальном создаваемом в лаборатории поле 10^6Гс отношение разности энергий уровней, отвечающих решениям уравнений Майораны и Дирака, к расстоянию между соседними уровнями составляет примерно 10^{-7}. Для конечнокомпонентных уравнений для высших спинов ($s>1$) уровни энергии при больших напряженностях поля становятся комплексными.

5. Для 2+1-мерных уравнений Дирака и Майораны (спин 1/2) во внешнем электромагнитном поле проведено разложение по степеням $1/c$. В первом приближении ($1/c$) разложения совпадают (уравнение Паули). Различия возникают во втором приближении (учитываются члены до $1/c^2$): у двух членов не совпадают численные коэффициенты, кроме того, в случае уравнения Майораны появляется дополнительный член, отсутствующий в разложении уравнения Дирака.

Приложения

1. Группа Пуанкаре в $2+1$ измерении

Классификация и явное построение НП 2+1 мерной группы Пуанкаре проводились ранее в работах [86, 84]. Здесь мы рассматриваем некоторые вопросы теории представлений 2+1 мерной группы Пуанкаре $M(2,1)$ и даем вывод ряда формул, используемых при построении и решении РВУ. В частности, это различная параметризация, выражения для генераторов в пространстве функций, зависящих от ориентации, явный вид спиновых матриц для случаев для конечно- и бесконечномерных НП группы Лоренца.

1.1. Параметризация

Группа $M(2,1)$ – 6-параметрическая группа движения 2+1-мерного псевдоевклидова пространства. Она сохраняет интервал:

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1), \tag{3.150}$$

где $x = (x^{\mu}), \mu = 0,1,2$ – координаты, $\eta_{\mu\nu}$ – тензор Минковского. Под действием этой группы вектор x преобразуются по формуле:

$$x^{'} = gx, g \in M(2,1), x^{\prime\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}x^{\mu} + a^{\nu}. \tag{3.151}$$

a^{μ} представляет собой вектор трансляций. Матрица Λ имеет размеры 3×3 – это матрица вращения группы Лоренца $O(2,1)$ в $2+1$ измерении.

Преобразования можно представить в однородных координатах:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & a^0 \\ & \Lambda(\alpha) & & a^1 \\ & & & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.152}$$

Матрица 3×3 $\Lambda \in SO(2,1)$ зависит от угла поворота α. Закон композиции:

$$(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) = (a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1). \tag{3.153}$$

Следовательно, группа $M(2,1)$ представляет собой полупрямое произведение $2+1$-мерной группы трансляций $T(3)$ и группы Лоренца $O(2,1)$:

$$M(2,1) = T(3) \times) O(2,1). \tag{3.154}$$

Известно, что группа $O(2,1)$ содержит 4 несвязанных подмножества:

1. $O_+^\uparrow : \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 > 0;$

2. $O_+^\downarrow : \det \Lambda = +1, \Lambda_0^0 < 0;$

3. $O_-^\uparrow : \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 > 0;$

4. $O_-^\downarrow : \det \Lambda = +-1, \Lambda_0^0 < 0.$

Подмножество $O_+^\uparrow$, содержащее единичный элемент, является группой, которую мы обозначим как $SO_0(2,1)$. Её однопараметрические подгруппы (вращения вокруг осей x^0, x^1 и x^2) задаются матрицами:

$$\Lambda_{x^0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 \\ 0 & \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 \end{pmatrix}, \tag{3.155}$$

$$\Lambda_{x^1} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha_1 & 0 & \operatorname{sh}\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha_1 & 0 & \operatorname{ch}\alpha_1 \end{pmatrix}, \tag{3.156}$$

$$\Lambda_{x^2} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha_2 & -\operatorname{sh}\alpha_2 & 0 \\ -\operatorname{sh}\alpha_2 & \operatorname{ch}\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.157}$$

Общее преобразование можно выразить через генераторы J^μ:

$$\Lambda_{x^\mu} = \exp(-i\alpha J^\mu), J^\mu = i\frac{d}{d\alpha_\mu}\Lambda_{x^\mu}|_{\alpha=0}. \tag{3.158}$$

В матричном виде J^μ выглядят следующим образом:

$$J^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.159}$$

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.160}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.161}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J^\mu, J^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\eta}J_\eta. \tag{3.162}$$

Здесь $\epsilon^{\mu\nu\eta}$ – это полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты, $\epsilon^{012} = 1$.

Группа $SO_0(2,1)$ эквивалентна $SU(1,1)/Z_2$, $Z_2 = I, -I$. Z_2 – мультипликативная группа, содержащая два элемента (I – это единичная матрица). По этой причине, можно перейти к исследованию группы $\tilde{M}(2,1) = T(3)\times)SU(1,1)$.

Между векторами x^μ в 2+1 измерении и матрицами X размером 2×2 существует взаимнооднозначное соответствие. Связь между матрицами X и векторами x^μ представляется в виде:

$$X = x^\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 \end{pmatrix}, \tag{3.163}$$

где σ^μ - матрицы Паули. Матрицы X обладают свойствами:

$$\begin{aligned} \det X &= X^2 = x_\mu x^\mu, \\ x^\mu &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X\sigma^\mu). \end{aligned} \tag{3.164}$$

Преобразование (3.151) в таком случае приобретает вид:

$$X^{'} = UXU^\dagger + A, \tag{3.165}$$

матрицы X', X и A соответствуют векторам x'^μ, x^μ и a^μ. Матрица U принадлежит группе $SU(1,1)$:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \bar{u}_2 & \bar{u}_1 \end{pmatrix}, \\ U^\dagger &= \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & u_2 \\ \bar{u}_2 & u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.166}$$

Параметры u_1, u_2 удовлетворяют условию

$$|u_1|^2 - |u_2|^2 = 1. \tag{3.167}$$

Их можно выразить с помощью 3 действительных чисел – углов Эйлера:

$$u_1 = \operatorname{ch}\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\phi+\omega}{2}\right),$$
$$u_2 = -\operatorname{sh}\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\phi-\omega}{2}\right), \tag{3.168}$$

которые изменяются в диапазонах

$$0 \le \theta < \infty,\ -2\pi \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \omega < 2\pi. \tag{3.169}$$

Матрица A, ответственная за смещения, имеет вид, аналогичный (3.163):

$$A = \begin{pmatrix} a^0 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 \end{pmatrix}. \tag{3.170}$$

Матрица U отвечает за вращения. Связь между матрицами Λ и U можно представить в виде соотношения:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 & 2Re(u_1\bar{u}_2) & 2Im(u_1\bar{u}_2) \\ 2Re(u_1u_2) & Re(u_1^2+u_2^2) & Im(u_1^2-u_2^2) \\ -2Im(u_1u_2) & -Im(u_1^2+u_2^2) & Re(u_1^2-u_2^2) \end{pmatrix}. \tag{3.171}$$

Можно заметить, что U и $-U$ отвечает одна и та же матрица Λ, следовательно, для параметризации вращений достаточно использовать ϕ в диапазоне $[0, 2\pi]$.

Параметры u_1, u_2 в (3.168) и (3.171) – это аналоги параметров Кэли-Клейна. Поворот $U = U(\phi, \theta, \omega)$ можно разложить на вращения вокруг осей x^0, x^1, x^2:

$$U(\phi, \theta, \omega) = U(\phi, 0, 0)U(0, \theta, 0)U(0, 0, \omega). \tag{3.172}$$

А именно: на поворот вокруг оси x^0 на угол ω, вокруг оси x^2 – на угол θ и ещё один поворот вокруг оси x^0 на ϕ. Поворот $(\alpha_0, 0, 0)$ соответствует однопараметрической подгруппе $\Lambda_{x^0}(\alpha_0)$, $(-\pi/2, \alpha_2, \pi/2)$ соответствует $\Lambda_{x^1}(\alpha_1)$ и $(0, \alpha_1, 0) - \Lambda_{x^2}(\alpha_2)$. При использовании углов Эйлера в качестве параметров матрицу Λ можно представить в виде произведения:

$$\Lambda(\phi, \theta, \omega) = \Lambda_{x^0}(\phi)\Lambda_{x^2}(\theta)\Lambda_{x^0}(\omega). \tag{3.173}$$

Элемент $g \in \tilde{M}(2,1)$ будем параметризовать с помощью матрицы $A \in SU(1,1)$, ответственной за смещения, и $U \in SU(1,1)$, $g = (A, U)$. В таком представлении закон композиции выглядит следующим образом:

$$g = (A, U) = (A_2, U_2)(A_1, U_1) = (U_2 A_1 U_2^\dagger + A_2, U_2 U_1), \tag{3.174}$$

а обратный элемент имеет вид:

$$g^{-1} = (-U^{-1}A(U^{-1})^\dagger, U^{-1}). \tag{3.175}$$

1.2. Обобщённое регулярное представление и спин в $2+1$ измерении

Обобщённое регулярное представление (ОРП) действует в пространстве функций $f(g)$, $g \in G$ на группе G. Левое $T_L(g)$ и правое $T_R(g)$ ОРП определяются следующим образом:

$$T_L(g)f(g_0) = f(g^{-1}g_0), \quad g_0 \in G, \tag{3.176}$$

$$T_R(g)f(g_0) = f(g_0 g). \tag{3.177}$$

Известно, что все (с точностью до эквивалентности) НП группы G содержатся в разложении ОРП. Можно построить ОРП группы $\tilde{M}(2,1)$ с использованием параметров (3.163) – (3.170). В этом случае:

$$g_0 \leftrightarrow (x, z) \leftrightarrow (X, Z), \tag{3.178}$$

$$g \leftrightarrow (x,z) \leftrightarrow (A,U). \tag{3.179}$$

В дополнение к (3.163) – (3.170) мы вводим матрицу $Z \in SU(1,1)$, соответствующую элементу z:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}. \tag{3.180}$$

Используя закон композиции (3.174), для левого ОРП получим:

$$\begin{aligned} &T_L(g)f(x,z) = f(g^{-1}x, g^{-1}z), \\ &g^{-1} \leftrightarrow U^{-1}(X-A)(U^{-1})^{\dagger}, \\ &g^{-1}Z \leftrightarrow U^{-1}Z, \end{aligned} \tag{3.181}$$

а для правого:

$$\begin{aligned} &T_R(g)f(x,z) = f(xg, zg)), \\ &g^{-1} \leftrightarrow X + ZAZ^{\dagger}, \\ &zg \leftrightarrow ZU. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Из (3.181) следует, что X преобразуется по векторному представлению, Z – по спинорному представлению группы $SU(1,1)$. Z инвариантно относительно трансляций. Если ограничиться независимыми от Z функциями (на однородном пространстве $\tilde{M}(2,1)/SU(1,1)$), (3.181) переходит в квазирегулярное представление, отвечающее обычному скалярному полю (подробнее см. [84]).

Генераторы, соответствующие параметрам a^{μ} (3.151) и $-\alpha_{\mu}$ (3.155 – 3.157), в левом ОРП (3.181) – это операторы импульса $\hat{p}_{\mu}$ и полного момента $\hat{J}^{\mu}$:

$$\begin{aligned} &\hat{p}_{\mu} = i\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \\ &\hat{J}^{\mu} = \hat{L}^{\mu} + \hat{S}^{\mu}. \end{aligned} \tag{3.183}$$

Операторы полного углового момента распадаются на сумму операторов орбитального углового момента $\hat{L}^\mu$:

$$\hat{L}^\mu = \epsilon^{\mu\eta\nu}\hat{x}_\eta \hat{p}_\nu = i\epsilon^{\mu\eta\nu} x_\eta \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{3.184}$$

и операторов спина $\hat{S}^\mu$:

$$\begin{aligned} \hat{S}^0 &= -\frac{1}{2}(V\sigma^3\frac{\partial}{\partial V} - \bar{V}\sigma^3\frac{\partial}{\partial \bar{V}}), \\ \hat{S}^1 &= \frac{i}{2}(V\sigma^2\frac{\partial}{\partial V} - \bar{V}\sigma^2\frac{\partial}{\partial \bar{V}}), \\ \hat{S}^2 &= \frac{i}{2}(V\sigma^1\frac{\partial}{\partial V} + \bar{V}\sigma^1\frac{\partial}{\partial \bar{V}}), \end{aligned} \tag{3.185}$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[\hat{S}^\mu, \hat{S}^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\eta}\hat{S}^\eta, \\ &[\hat{S}^\mu, \hat{p}_\nu] = 0. \end{aligned} \tag{3.186}$$

Здесь V и $\bar{V}$ – это векторы $V = (z_1 \bar{z}_2)$, $\bar{V} = (\bar{z}_1 z_2)$. Коммутационные соотношения генераторов (3.183):

$$\begin{aligned} &[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \\ &[\hat{p}^\mu, \hat{J}^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\eta}\hat{p}_\eta, \\ &[\hat{J}^\mu, \hat{J}^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\eta}\hat{J}_\eta. \end{aligned} \tag{3.187}$$

Обозначим аналогичные операторы правого ОРП теми же с символами, с подчёркиванием. Генераторы $\underline{\hat{J}}^\mu$ зависят только от z, но не от x. Операторы спина $\underline{\hat{S}}^\mu$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{S}}^0 &= \frac{1}{2}(\chi\sigma^3\frac{\partial}{\partial \chi} - \bar{\chi}\sigma^3\frac{\partial}{\partial \bar{\chi}}), \\ \underline{\hat{S}}^1 &= \frac{i}{2}(\chi\sigma^2\frac{\partial}{\partial \chi} - \bar{\chi}\sigma^2\frac{\partial}{\partial \bar{\chi}}), \\ \underline{\hat{S}}^2 &= -\frac{i}{2}(\chi\sigma^1\frac{\partial}{\partial \chi} + \bar{\chi}\sigma^1\frac{\partial}{\partial \bar{\chi}}), \end{aligned} \tag{3.188}$$

где $\chi = (z_1 z_2)$, $\bar{\chi} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

Оператор импульса:

$$\underline{\hat{p}}_\mu = -(\Lambda^{-1})^\nu_\mu \hat{p}_\nu, \tag{3.189}$$

который также можно представить в матричной форме:

$$\underline{\hat{P}} = -Z^{-1}\hat{P}(Z^{-1})^\dagger. \tag{3.190}$$

Генераторы $\underline{\hat{J}}^\mu$ совпадают с операторами спина $\underline{\hat{S}}^\mu$:

$$\underline{\hat{J}}^\mu = \underline{\hat{S}}^\mu. \tag{3.191}$$

Правые и левые генераторы коммутируют. Правые генераторы удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и левые (3.187). Операторы Казимира: $\hat{\mathbf{p}}^2 = \underline{\hat{\mathbf{p}}}^2$ и скаляр Паули-Любаньского $\hat{W} = \hat{p}\hat{J} = \underline{\hat{p}}\underline{\hat{J}}$. НП группы $\tilde{M}(2,1)$ можно классифицировать по собственным значениям этих операторов.

Из (3.184) следует, что $\hat{p}\hat{L} = 0$, поэтому $\hat{W} = \hat{p}\hat{S}$. Оператор $\hat{W}$ коммутирует с операторами полного углового момента $\hat{J}^\mu$, но не с операторами орбитального момента $\hat{L}^\mu$ и спина $\hat{S}^\mu$ в отдельности. Оператор квадрата Лоренцева спина $\hat{\mathbf{S}}^2 = \underline{\hat{\mathbf{J}}}^2$ коммутирует со всеми генераторами левого ОРП. Следовательно, объекты, трансформирующиеся по левому ОРП или по входящим в него представлениям, могут быть классифицированы по собственному значению этого оператора. Однако $\hat{\mathbf{S}}^2$ не коммутирует с генераторами $\underline{\hat{p}}^\mu$ правого ОРП.

Следует отметить, что левое и правое ОРП эквивалентны:

$$\hat{C}T_R(g) = T_L(g)\hat{C},\ \hat{C}f(g_0) = f({g_0}^{-1}), \tag{3.192}$$

поэтому для формального построения НП достаточно рассматривать только левые или только правые ОРП. Удобнее использовать левые ОРП для описания полей. Однако, левые и правые преобразования имеют различный физический смысл как преобразования лабораторной и локальной систем отсчета соответственно.

Рассмотрим левое ОРП, действующее на пространстве функций $f(x,z)$:

$$T_L(g)f(x,z) = f(g^{-1}x, g^{-1}z). \tag{3.193}$$

Следует отметить, что

$$f'(x',z') = f(x,z) \tag{3.194}$$

при

$$\begin{aligned} x' &= gx = \Lambda x + a \leftrightarrow U(X+A)U^\dagger, \\ z' &= gz \leftrightarrow UZ. \end{aligned} \tag{3.195}$$

Таким образом, задача классификации левых ОРП сводится к аналогичной задаче для скалярных функций на группе (3.194) – (3.195) (см. [84] и цитируемую там литературу).

Для классификации функций $f(x,z)$ удобно использовать, кроме операторов Казимира $\hat{\mathbf{p}}^2$, $\hat{W}$, оператор квадрата спина $\hat{\mathbf{S}}^2$. Он коммутирует со всеми генераторами левого ОРП. С его помощью можно выбрать НП из набора эквивалентных представлений. Кроме того, он маркирует НП группы $M(3,1)$ в особом случае нулевых собственных значений операторов Казимира (в этом случае функции (3.194) не зависят от x).

Рассмотрим дискретный базис $\bar{R}_{S\zeta}(z)$ представления группы

Лоренца $T_S(g)$:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 \bar{R}_{S\zeta}(z) = S(S+1)\bar{R}_{S\zeta}(z),$$
$$\hat{\mathbf{S}}^2 \bar{R}_{S\zeta}(z) = \zeta \bar{R}_{S\zeta}(z),$$
$$\bar{R}'_S(z) = T_S(g)\bar{R}_S(z) = \bar{R}_S(g^{-1}, z), \tag{3.196}$$

где $\bar{R}_S(z)$ – столбец с компонентами $\bar{R}_{S\zeta}(z)$. Число S задаёт НП группы Лоренца. Назовём его "*лоренцевым спином*". Возможные значения S и соответствующий спектр значений ζ зависит от типа представления. Собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$ представим в виде:

$$f(x, z) = \sum_{\zeta} \bar{\psi}_\zeta(x)\bar{R}_{S\zeta}(z) = \bar{\psi}(x)\bar{R}_S(z), \tag{3.197}$$

где $\bar{\psi}(x)$ – строка с компонентами $\bar{\psi}_\zeta(x)$. Базис $\bar{R}_{S\zeta}(z)$ можно представить в контраградиентном $T_S(g)$ представлении. В нём функция разложение $f(x, z)$ имеет вид:

$$f(x, z) = \sum_{\zeta} \psi_\zeta(x)R_{S\zeta}(z) = \psi(x)R_S(z), R'_S(z) = R'_S(z)T_S(g^{-1}), \tag{3.198}$$

здесь $R_S(z)$ – строка с компонентами $R_{S\zeta}(z)$, а $\psi(x)$ – столбец, состоящий из $\psi_\zeta(x)$. В этом случае $T_S(g)$ и его контраградиентное представление эквивалентны. Это выполняется для конечнокомпонентных НП группы Лоренца: одна функция имеет оба представления (3.197) и (3.198). Из этих соотношений следует:

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)T_S(g),$$
$$\psi'(x') = T_S(g^{-1})\psi(x). \tag{3.199}$$

Произведение $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ Пуанкаре-инвариантно.

Собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$ можно описать с помощью столбцов $\psi(x)$ (строк $\bar{\psi}(x)$) с компонентами $\psi_\zeta(x)$ ($\bar{\psi}_\zeta(x)$). Будем считать $\psi(x)$ волновой функцией в S-представлении: все спиновые операторы становятся матрицами. Любое НП группы Лоренца можно построить на элементах первого столбца матрицы Z (3.181) (см. [84]), поэтому можно ограничиться функциями $f(x,z)$ только на векторе вида $z = (z_1 \bar{z}_2)$. Тогда собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$ – это однородные многочлены переменных z_1 и $\bar{z}_2$ степени $2S$, а дискретный базис имеет вид:

$$R_{S\zeta}(z) = N_{S\zeta} z_1^{S-\zeta} \bar{z}_2^{S+\zeta}. \tag{3.200}$$

НП группы Лоренца с целым положительным $2S$ неунитарны и конечномерны. Унитарные бесконечномерные НП соответствуют случаю $S < 0$ (дополнительная серия) и $S = \frac{i\lambda - 1}{2}$ (основная серия).

Рассмотрим случай, при котором $2S$ - целое положительное число. Сначала положим $S = 1/2$. Разложение (3.198) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} &f(x,z) = \bar{\psi}_{-1/2}(x) z_1 + \bar{\psi}_{1/2}(x) \bar{z}_2, \\ &\hat{\mathbf{S}}^2 f = \frac{3}{4} f. \end{aligned} \tag{3.201}$$

Применяя преобразование (3.181) к функции (3.201), получим:

$$\begin{aligned} f'(x,z) &= (\bar{\psi}'_{-1/2}(x) \bar{\psi}'_{1/2}(x)) \begin{pmatrix} z_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\bar{\psi}_{-1/2}(g^{-1}x) \bar{\psi}_{1/2}(g^{-1}x)) U^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.202}$$

Отсюда следует, что строка $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_{-1/2}(x) \bar{\psi}_{1/2}(x)$ преобразуется по спинорному представлению группы Лоренца:

$$\bar{\psi}^{'}(x^{'}) = \bar{\psi}(x) U^{-1}. \tag{3.203}$$

Для матриц группы $SU(1,1)$ справедливо соотношение

$$U^{-1} = \sigma^3 U^\dagger \sigma^3, \tag{3.204}$$

поэтому закон преобразования столбцов $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x) = (\psi_{1/2}(x)\psi_{-1/2}(x))^T = \sigma^3 \bar{\psi}^\dagger \tag{3.205}$$

и

$$\psi^{'}(x^{'}) = U\psi(x). \tag{3.206}$$

Тот же спинор ψ можно получить при рассмотрении разложения

$$\begin{aligned} &f(x,z) = \psi_{1/2}(x)\bar{z}_2 - \psi_{-1/2}z_1 = (\bar{z}_2 \ \ -z_1) \begin{pmatrix} \psi_{1/2}(x) \\ \psi_{-1/2}(x) \end{pmatrix} \\ &\hat{\mathbf{S}}^2 f = \frac{3}{4} f. \end{aligned} \tag{3.207}$$

Таким образом, при $S = -1/2$ в наличии два эквивалентных описания: в терминах функций (3.194) и в терминах строк $\bar{\psi}(x)$ или столбцов $\psi(x)$. Если мы пойдём по второму пути, в этом представлении действие операторов $\hat{S}^\mu$ можно описать с помощью набора матриц γ^μ:

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu = (\sigma^3, i\sigma^2, -i\sigma^1), \\ &[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \\ &[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\epsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda, \\ &\hat{S}^\mu \psi(x) = \frac{1}{2}\gamma^\mu \psi(x), \end{aligned} \tag{3.208}$$

где $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$ – это антикоммутатор. γ^μ – матрицы с размерами 2×2 в $2+1$ измерении. Собственные функции оператора $\hat{S}^0$: $\psi = (\psi_{1/2} 0)$ с собственным значением $1/2$ и $\psi = (0 \psi_{-1/2})$ с собственным значением $-1/2$. Произведение $\bar{\psi}(x)\psi(x) = \bar{\psi}'(x')\psi'(x')$ не является положительно определённым.

Запишем полиномы степени $2S$ в виде:

$$f(x,z) = \sum\nolimits_{n=0}^{2S} \bar{\psi}_{n-S}(x)\sqrt{C_{2S}^n} z_1^{2S-n} \bar{z}_2^n = \bar{\psi}(x)\bar{R}_S(z), \tag{3.209}$$

где $\bar{\psi}(x)$ – строка с $2S+1$ компонентами, $\bar{R}_S(z)$ – столбец с элементами $\sqrt{C_{2S}^n} z_1^{2S-n} \bar{z}_2^n$, $n = -, 1, ..., 2S$. Он преобразуется по конечномерному НП $T_S(g^{-1})$ группы Лоренца:

$$\bar{R}_S'(z) = T_S(g^{-1})\bar{R}_S(z). \tag{3.210}$$

Наряду с (3.209), можно использовать функции вида:

$$\begin{aligned} &f(x,z) = \sum\nolimits_{n=0}^{2S} \psi_{S-n}(x)\sqrt{C_{2S}^n}(-z_1)^n \bar{z}_2^{2S-n} = R_S(z)\psi(x), \\ &\hat{\mathbf{S}}^2 f = S(S+1)f. \end{aligned} \tag{3.211}$$

Здесь $\psi(x)$ – $2S+1$-компонентный столбец,

$$\begin{aligned} &\psi(x) = \Gamma\bar{\psi}^\dagger, \\ &\Gamma_{nn'} = (-1)^n \delta_{nn'}. \end{aligned} \tag{3.212}$$

По аналогии со случаем $S = 1/2$:

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)T_S(g), \\ &\psi'(x') = T_S(g^{-1})\psi(x). \end{aligned} \tag{3.213}$$

Плотность вероятности определяется по формуле:

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = \psi^\dagger(x)\Gamma\psi(x). \tag{3.214}$$

Операторы $\hat{S}^\mu$ представляются в виде спиновых матриц S^μ размером $(2S+1)\times(2S+1)$ в пространстве столбцов $\psi(x)$. Они являются генераторами группы $SU(1,1)$ в представлении T_S:

$$\begin{aligned}
&{S^0}_{nn'} = \delta_{nn'}(S-n),\\
&{S^1}_{nn'} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\sqrt{(2S-n+1)n} - \delta_{n+1,n'}\sqrt{(2S-n)(n+1)}\right),\\
&{S^2}_{nn'} = -\frac{i}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\sqrt{(2S-n+1)n} + \delta_{n+1,n'}\sqrt{(2S-n)(n+1)}\right),\\
&n = 0, 1, ..., 2S. \qquad (3.215)
\end{aligned}$$

Для бесконечномерных унитарных НП группы $SU(1,1)$ значения S могут быть не целыми:

1. $S < -1/2$ для дискретных серий;

2. $-1/2 < S < 0$ для дополнительных серий;

3. $S = -1/2 + i\lambda/2$ для основной серии.

Рассмотрим представления дискретных серий, ограниченных старшим и младшим весом. Они включают все представления дискретных серий $T_S^{\pm}$ и два представления основной серии $T_{S,\epsilon}$ с $S = -1/2$ и $\epsilon = 1/2$, которые соответствуют полуцелым проекциям спина. Собственные функции оператора $\hat{\mathbf{S}}^2$ в представлениях $T_S^{\pm}$ – квазиполиномы отрицательной степени S:

$$\begin{aligned}
&f^+(x,z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\psi_n^+(x)\sqrt{C_{2S}^n}(-z_1)^{2S-n}\bar{z}_2^n,\\
&f^-(x,z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\psi_n^-(x)\sqrt{C_{2S}^n}(-z_1)^{n}\bar{z}_2^{2S-n},\\
&{\psi^{\pm}}'(x') = T_S^{\pm}(g^{-1})\psi^{\pm}(x),\\
&C_{2S}^n = \sqrt{\frac{(-1)^n\Gamma(n-2S)}{n!\Gamma(-2S)}}. \qquad (3.216)
\end{aligned}$$

Представления положительных и отрицательных серий комплексно-сопряжённые:

$$
\begin{aligned}
&(T_S^+(g))^\dagger = T_S^-(g),\\
&(\psi^{\pm'}(x'))^\dagger = (\psi^\pm(x))^\dagger T_S^\mp(g).
\end{aligned}
\tag{3.217}
$$

Плотность вероятности положительно определена:

$$
\begin{aligned}
(\psi^+(x))^\dagger\psi^+(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}|\psi^+_{-S+n}(x)|^2,\\
(\psi^-(x))^\dagger\psi^-(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}|\psi^-_{S-n}(x)|^2.
\end{aligned}
\tag{3.218}
$$

Собственные значения ζ оператора $\hat{S}_0$ удовлетворяют неравенству

$$
|\zeta| \geq |S| > 1/2 \tag{3.219}
$$

в случае НП дискретных серий. Проекция спина ζ может принимать только положительные значения для представлений T_S^+:

$$
\zeta = -S + n, \tag{3.220}
$$

а для представлений T_S^- – только отрицательные:

$$
\zeta = S - n. \tag{3.221}
$$

Для представлений T_S^+ спиновые матрицы S^μ выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&{S^0}_{nn'} = \delta_{nn'}(-S+n),\\
&{S^1}_{nn'} = -\frac{i}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\sqrt{(n-2S-1)n} - \delta_{n+1,n'}\sqrt{(n-2S)(n+1)}\right),\\
&{S^2}_{nn'} = \frac{1}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\sqrt{(n-2S-1)n} + \delta_{n+1,n'}\sqrt{(n-2S)(n+1)}\right),\\
&n = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
\tag{3.222}
$$

Для представлений T_S^- матрица S^1 остаётся той же, что и в (ref-Poin.SpinMatrices2), а S^0 и S^2 меняют знак:

$$\begin{aligned}
&{S^0}_{nn'} = \delta_{nn'}(S-n),\\
&{S^1}_{nn'} = -\frac{i}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\sqrt{(n-2S-1)n} - \delta_{n+1,n'}\sqrt{(n-2S)(n+1)}\right),\\
&{S^2}_{nn'} = -\frac{1}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\sqrt{(n-2S-1)n} + \delta_{n+1,n'}\sqrt{(n-2S)(n+1)}\right),\\
&n = 0, 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{3.223}$$

В случае унитарных представлений основной серии ($S = -1/2 + i\lambda/2$), функции $f(x,z)$ представляются в виде бесконечных сумм:

$$\begin{aligned}
&f(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_{\epsilon+n}(x) i^n (-z_1)^{-1/2-i\lambda/2-(\epsilon+n)} \bar{z}_2^{-1/2-i\lambda/2+(\epsilon+n)},\\
&\hat{\mathbf{S}}^2 f = -\frac{1+\lambda^2}{4} f.
\end{aligned} \tag{3.224}$$

Проекция спина ζ принимает значения

$$\zeta = \epsilon + n, \tag{3.225}$$

$\epsilon \in [-1/2, 1/2]$, $n = 0, \pm 1, ...$ В пространстве бесконечнокомпонентных столбцов ψ с элементами $\psi_{\epsilon+n}(x)$ действие операторов $\hat{S}^\mu$ выражается матрицами S^μ бесконечного размера

$$\begin{aligned}
&{S^0}_{nn'} = \delta_{nn'}(\epsilon+n),\\
&{S^1}_{nn'} = -\frac{i}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\left(-\frac{1+i\lambda}{2}+\epsilon+n\right) - \delta_{n+1,n'}\left(\frac{1+i\lambda}{2}+\epsilon+n\right)\right),\\
&{S^2}_{nn'} = \frac{1}{2}\left(\delta_{n,n'+1}\left(-\frac{1+i\lambda}{2}+\epsilon+n\right) + \delta_{n+1,n'}\left(\frac{1+i\lambda}{2}+\epsilon+n\right)\right),\\
&n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned} \tag{3.226}$$

Плотность вероятности положительно определена:

$$\psi^\dagger(x)\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_{\epsilon+n}(x)|^2. \tag{3.227}$$

В случае унитарных бесконечномерных представлений основной и дискретной серии матрицы S^1 и S^2 эрмитовы, а в случае конечномерных неунитарных представлений – антиэрмитовы. В пространстве столбцов с элементами ψ_ζ они имеют ненулевые элементы только на побочных диагоналях (см. [84]).

Подробнее поля на группе Пуанкаре в $2+1$ измерении рассмотрены в работах [84], [85] и цитируемой в них литературе.

2. Когерентные состояния групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$

2.1. Группы $SU(2)$ и $SU(1,1)$ как единая система

Решение задач, рассматриваемых в представленной работе, в значительной степени основано на теории представлений групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$, поэтому есть смысл уделить им время здесь.

Следуя [61], мы при построении НП $SU(2)$ и $SU(1,1)$ воспользуемся коммутационными соотношениями для генераторов унитарных групп $U(2)$ и $U(1,1)$:

$$\begin{aligned}&[\hat{n}_1, \hat{n}_2] = 0, \quad [\hat{n}_1, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm,\\ &[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \hat{n}_1 - \hat{n}_2, \quad [\hat{n}_2, \hat{J}_\pm] = \mp\hat{J}_\pm.\end{aligned} \tag{3.228}$$

Лестничные операторы $\hat{J}_+$, $\hat{J}_-$, выражаются через операторы $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$, $\hat{J}_- = \hat{J}_x - \hat{J}_y$, $\hat{J}_z = \hat{n}_1 - \hat{n}_2$. Алгебра распадается на две: $U(1)$ ($\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ коммутирует со всеми остальными операторами) и $SU(2)$ или $SU(1,1)$ ($\hat{J}_\pm, \hat{n}_1 - \hat{n}_2$). Отметим, что можно выразить рассматриваемые генераторы через генераторы группы Гейзенберга $\hat{a}_+$, $\hat{a}_-$:

$$\hat{J}_\pm = \hat{a}_{1\pm}\hat{a}_{2\mp}, \quad \hat{n}_1 = \hat{a}_{1+}\hat{a}_{1-}, \quad \hat{n}_2 = \hat{a}_{2+}\hat{a}_{2-}. \tag{3.229}$$

Рассмотрим базис из собственных функций $\hat{n}_1$ и $\hat{n}_2$:

$$\hat{n}_1|n_1n_2\rangle = n_1|n_1n_2\rangle, \quad \hat{n}_2|n_1n_2\rangle = n_2|n_1n_2\rangle. \tag{3.230}$$

В этом базисе лестничные операторы действуют следующим образом:

$$\begin{aligned}&\hat{J}_+|n_1n_2\rangle = \sqrt{n_1(n_2+1)}|n_1-1, n_2+1\rangle,\\ &\hat{J}_-|n_1n_2\rangle = \sqrt{n_2(n_1+1)}|n_1+1, n_2-1\rangle.\end{aligned} \tag{3.231}$$

Заметим, что лестничные операторы не изменяют n_1+n_2, а значит, $2j = n_1+n_2$ может служить для маркировки неприводимых представлений $D(j)$.

Связь с состояниями $|jm\rangle$ определяется соотношениями:

$$n_1+n_2=2j, \quad n_1-n_2=2m. \tag{3.232}$$

Для унитарных НП оператор $J_z=(n_1-n_2)/2$ – эрмитов, поэтому для унитарных представлений n_1-n_2 – действительное число, так что $Imn_1 = Imn_2$. Из условия эрмитовости генераторов получаем условия на числа n_1, n_2:

$$SU(2):\ \hat{J}_-^+=\hat{J}_+, \quad n_1(n_2+1)\geq 0, \quad n_2(n_1+1)\geq 0. \tag{3.233}$$

$$SU(1,1)\ :\hat{J}_-^+=-\hat{J}_+, \quad n_1(n_2+1)\leq 0, \quad n_2(n_1+1)\leq 0. \tag{3.234}$$

На рис. 8, 9 на плоскости допустимых значений вещественных частей $\Re n_1$ и $\Re n_2$ отмечены области унитарности для групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$, которые определяются из неравенств (3.233) и (3.234) соответственно. Веса НП располагаются на прямых $2j=n_1+n_2=const$, параллельных оси абсцисс. Для унитарности НП необходимо, чтобы веса на прямой не заходили в неунитарную область. При достижении старшего или младшего веса множитель в (3.231) становится равным нулю, представление обрывается. На мнимую часть величин n_1 и n_2 операторы $\hat{J}_\pm$ не действуют, следовательно, весовая диаграмма в плоскости $\Im n_1, \Im n_2$ – это точка.

В результате классификация и весовой состав представлений алгебры (3.228) предстают в следующем виде:

1. n_1, n_2 - целые. Представление $D(j)$ приводимо и распадается на три:

$D^-(j)$ со старшим весом; конечномерное $D^0(j), dim D^0(j) = 2j+1$; $D^+(j)$ с младшим весом.

2. n_1 - целое, n_2 - не целое (или наоборот). Получим два типа представлений со старшим, либо с младшим весом: $D^-(j)$ и $D^{0-}(j)$, либо $D^+(j)$ и $D^{0+}(j)$.

3. n_1, n_2 - не целые. Представление $D(j)$ неприводимо, нет ни младшего, ни старшего веса.

Рассмотрим область унитарности группы $SU(2)$. При наличии мнимых частей у величин n_1, n_2 не выполняется (3.233), и представления неунитарны. Если n_1, n_2 – действительные числа, то, чтобы выйти из области унитарности, старший и младший веса должны быть целыми. В таком случае представления конечномерны. Есть две серии, симметрично расположенные относительно прямой $n_1 + n_2 = 2j = -1$.

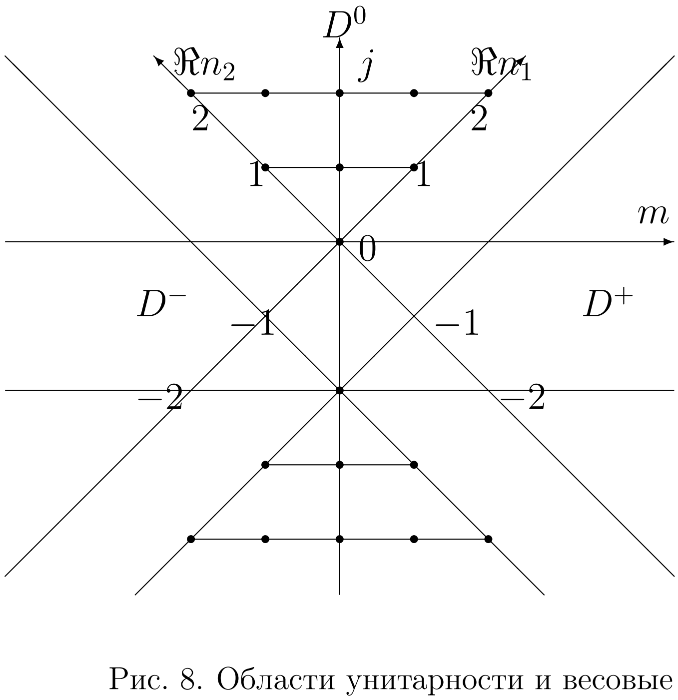


Рис. 8. Области унитарности и весовые диаграммы для группы $SU(2)$

Рассмотрим область унитарности группы $SU(1,1)$.

1. Если n_1, n_2 – действительные числа, веса представлений $D^+(j)$ и $D^-(j), -\infty < j < \infty$, расположены в зоне унитарности и образуют дискретную серию унитарных представлений. В интервале $-2 < 2j < 0$ к дискретной добавляется дополнительная серия – можно "перешагнуть"область неунитарности при действии лестничных операторов.

2. При наличии у n_1 и n_2 мнимых частей. Из (3.234) следует:

$$\Re n_1 + \Re n_2 = -1, \quad \Im n_1 = \Im n_2. \tag{3.235}$$

Это представления основной серии $D(-\frac{1}{2} + \frac{i\rho}{2}), \rho$ – действительное число. Представления $D(-\frac{1}{2} - \frac{i\rho}{2})$ им эквивалентны.

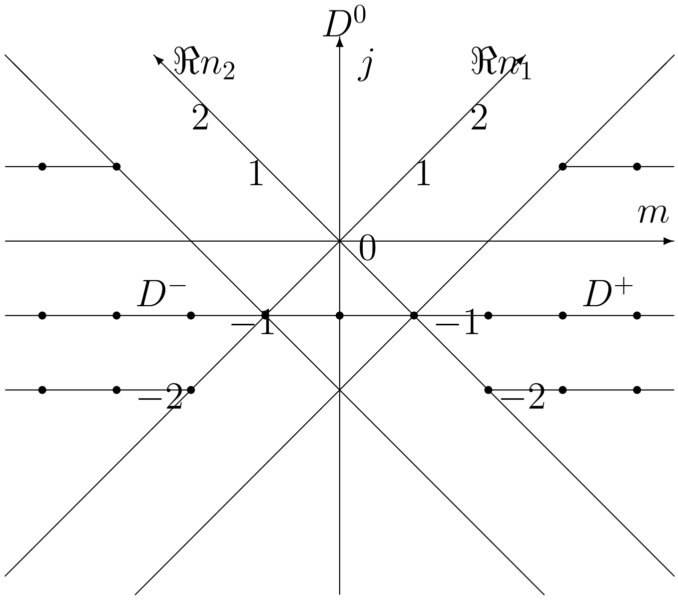


Рис. 9. Области унитарности и весовые диаграммы для группы $SU(1,1)$

Подводя итог, следует подчеркнуть, что унитарные НП компактной группы $SU(2)$ имеют конечное число базисных векторов (весов), присутствуют старший и младший вес. Для некомпактной группы $SU(1,1)$ есть 3 серии унитарных НП, содержащих бесконечное число базисных векторов. Они ограничены только с одной стороны старшим или младшим весом, в случае дискретной серии; или не ограничены с обеих сторон – в случае основной и дополнительной серий. Подробнее см. [61], [63], [58].

2.2. Когерентные состояния углового момента

Когерентные состояния углового момента обычно строятся как КС группы $SU(2)$; впервые они были изучены в работе [42], см. также [36, 61]. С помощью параметров Кэли-Клейна z_i элемент группы $SU(2)$ выражается в виде матрицы 2×2:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1. \tag{3.236}$$

Параметры Кэли-Клейна можно выразить через углы Эйлера ψ, θ, ω,

$$\begin{aligned} & z_1 = \cos(\theta/2) e^{-i(\phi+\omega)/2}, \\ & z_2 = \sin(\theta/2) e^{i(\phi+\omega)/2}, \\ & |j, \theta\phi\rangle = |j, z_1, z_2\rangle e^{-i\omega j}, \\ & 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi. \end{aligned} \tag{3.237}$$

Переменные z_1 и z_2, $|z_1|^2+|z_2|^2 = 1$, характеризуют КС группы $U(2)$. КС углового момента – это когерентное состояние группы $SU(2)$. Оно задаётся точкой на сфере радиуса j, поэтому удобнее от переменных z_1 и z_2 перейти к угловым переменным θ, ϕ: они задают направление из начала координат. Состояния $|j, \theta, \phi\rangle$ можно представить в виде разложения по состояниям дискретного базиса $|jm\rangle$:

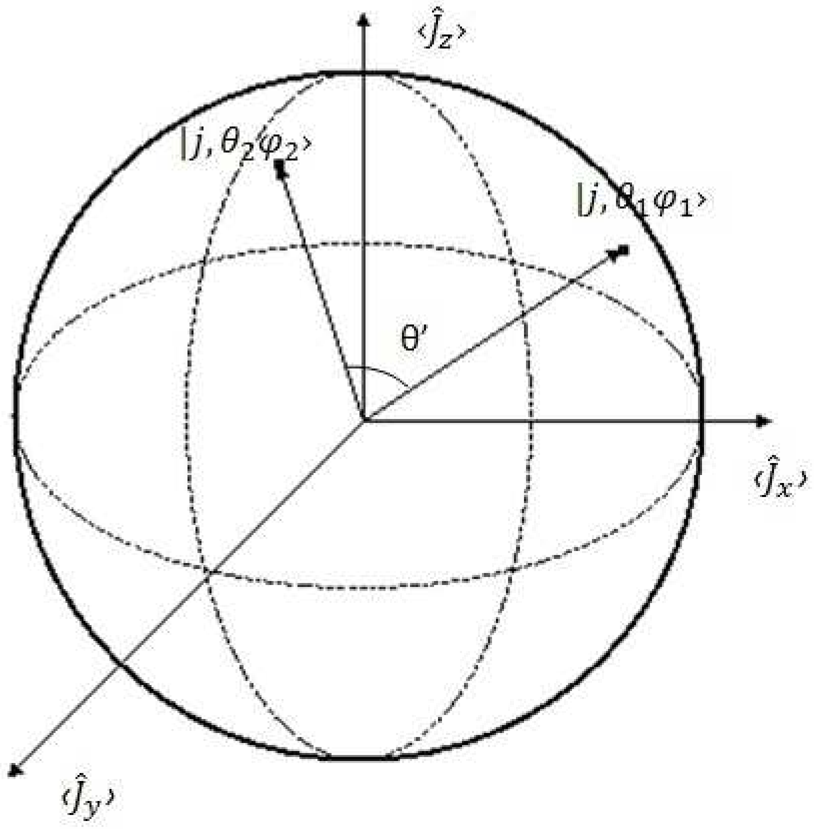


Рис. 10. Когерентные состояния углового момента $|j, \theta\phi\rangle$

$$|j, \theta\phi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \left(\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right)^{1/2} \left(\cos\frac{\theta}{2} \right)^{j+m} \left(\sin\frac{\theta}{2} \right)^{j-m} \exp(-im\phi)|jm\rangle, \tag{3.238}$$

где $|jm\rangle$ – состояния дискретного базиса НП группы $SU(2)$ с определёнными значениями момента импульса j и его проекции m на фиксированную ось, $m = -j, -j+1, \ldots j-1, j$.

Ковариантные символы операторов углового момента $\mathbf{J}_k(\theta, \phi) =$

$\langle j, \theta\phi | \hat{J}_k | j, \theta\phi \rangle$:

$$J_x(\theta, \phi) = j\hbar(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1) = j\hbar \sin\theta \cos\phi,$$
$$J_y(\theta, \phi) = j\hbar(\bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_2 z_1)/i = j\hbar \sin\theta \sin\phi,$$
$$J_z(\theta, \phi) = j\hbar(|z_1|^2 - |z_2|^2) = j\hbar \cos\theta. \quad (3.239)$$

Они совпадают с выражениями для классических компонент классического вектора углового момента, направление которого задано углами θ, ϕ. Перекрытие КС:

$$\langle j, \theta_1\phi_1 | j, \theta_2\phi_2 \rangle = \left(\cos\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} + i \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^{2j},$$
$$|\langle j, \theta_1\phi_1 | j, \theta_2\phi_2 \rangle| = \left(\cos\frac{\theta'}{2} \right)^{2j}. \quad (3.240)$$

Здесь и на рисунке 10 θ' – угол между векторами $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{j} = j\mathbf{n} = j(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Из выражения (3.240) видно, что различные когерентные состояния становятся ортогональными только в классическом пределе $j \to \infty$. При конечных j ортогональны только пары состояний, характеризующиеся противоположно направленными векторами $\mathbf{j}$.

Обобщённые когерентные состояния $|j, |m|; \theta\phi\rangle$ получаются под действием конечных преобразований из состояний $|jm\rangle$ – это состояния с определённой проекцией момента на направление $\mathbf{n}$. А волновыми функциями состояний являются соответствующие сферические функции $Y_{jm}(\theta'', \phi'')$ (подробнее см., например, [3]). Здесь углы θ'', ϕ'' зависят от сферических координат θ, ϕ и переменных состояния θ', ϕ'.

Состояния $|j, \theta\phi\rangle$ при больших значениях момента j можно считать классическими. Углы θ и ϕ в таком случае задают направление вектора углового момента в сферических координатах. В [53] было показано, что в качестве определения КС углового момента можно использовать соотношение неопределённостей

$$(\Delta J)^2 = (\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 = j\hbar^2 = min. \tag{3.241}$$

Для более подробного рассмотрения КС углового момента следует обратиться к работам [58], [63], [61].

По аналогии с КС группы $SU(2)$ строятся когерентные состояния группы $SU(1,1)$. КС представлений дискретных серий определяются точкой на верхней $D^+(j)$ или $D^-(j)$ полости двухполостного гиперболоида, см. рис. 11, где точкам на оси $\langle \hat{J}_z \rangle$ соответствуют состояния дискретного базиса $|jm\rangle$.

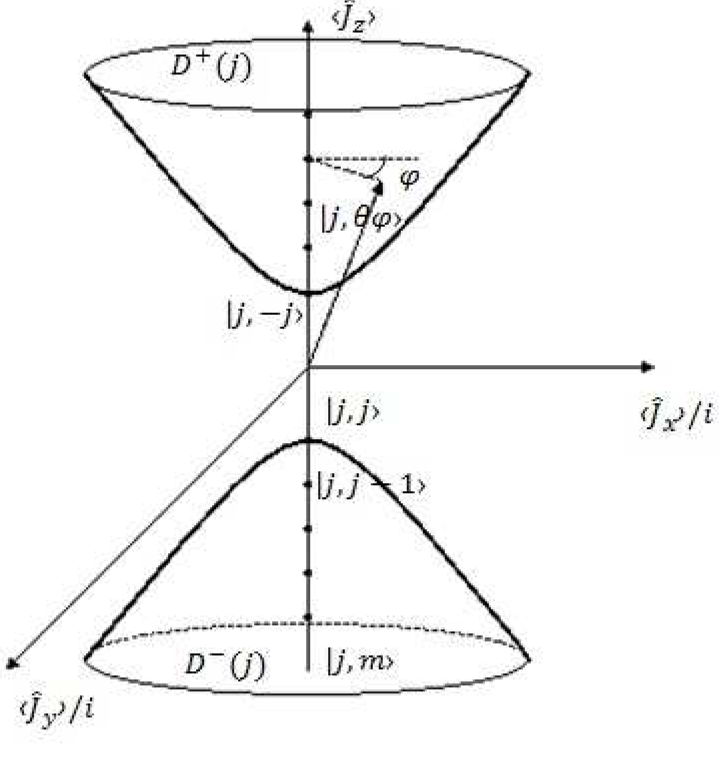


Рис. 11. Когерентные состояния представлений дискретных серий группы $SU(1,1)$.

Список литературы

1. Gitman D.M. Fields on the Poincaré Group and Quantum description of Orientable Objects / D.M. Gitman, A.L. Shelepin//Eur. Phys. J. C. – 2009. – Vol. 61, no. 1. – P. 111–139. – arXiv:hep-th/0901.2537.
2. Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Физматлит, 2004.
3. Ландау Л.Д. Квантовая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1989.
4. Biedenharn L. Angular Momentum in Quantum Physics / L. Biedenharn, J. Louck. – Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1981.
5. Ballentine L. E. Quantum Mechanics. A Modern Development / L.E. Ballentine. – Singapore: World Sci. Publish., 1998.
6. Зар Р. Теория углового момента. О пространственных эффектах в физике и химии / Р. Зар. – Москва: Мир, 1993.
7. Зелевинский В. Методические указания к курсу "Квантовая механика". Вып.2. Вращение квантовой системы / В. Зелевинский. – НГУ, 1986.
8. Павличенков И. Квантовая теория несимметричного волчка / И. Павличенков // Ядерная физика. – 1981. – Т. 33, №. 1. – С. 98–111.
9. Janssen D. Coherent states of the quantum-mechanical top / D. Janssen // Sov. J. Nucl. Phys.. – 1977. – Vol. 25, no. 4. – P. 479.
10. Morales J. On rotational coherent states in molecular quantum dynamics / J. Morales, E. Deumens, Y. Öhrm // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40. – P. 766–786.

11. Irac-Astaud M. Molecular-coherent-states and molecular-fundamental-states / M. Irac-Astaud // Reviews in Mathematical Physics. – 2001. – Vol. 13, no. 11. – P. 1437–1457.
12. Гинзбург В.Л. К теории спина / В.Л. Гинзбург, И.Е. Тамм // ЖЭТФ. – 1947. – Т. 17. – С. 227–237.
13. Bargmann V. Group theoretical discussion of relativistic wave equations / V. Bargmann, E. Wigner // Proc. Nat. Acad. USA. – 1948. – Vol. 34. – P. 211–223.
14. Yukawa H. Quantum theory of non-local fields. I. Free fields / H. Yukawa//Phys. Rev. – 1950. – Vol. 77, no. 2. – P. 219–226.
15. Широков Ю.М. Релятивистская теория спина / Ю.М. Широков // ЖЭТФ. – 1951. – Т. 21, № 6. – С. 748–760.
16. Finkelstein D. Internal Structure of Spinning Particles / D. Finkelstein //Phys. Rev. – 1955. – Vol. 100, no. 3. – P. 924–931.
17. Lurçat F. Quantum field theory and the dinamical role of spin / F. Lurçat //Physics. – 1964. – Vol. 1. – P. 95.
18. Bacry H. Wavefunctions on Homogeneous Spaces / H. Bacry, A. Kihlberg // J. Math. Phys. – 1969. – Vol. 10, no. 12. – P. 2132–2141.
19. Kihlberg A. Fields on a homogeneous space of the Poincare group / A. Kihlberg // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1970. – Vol. 13, no. 1. – P. 57–76.
20. Boyer C. Quantum field theory on a seven-dimensional homogeneous space of the Poincaré group / C. Boyer, G. Fleming// J. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15, no. 7. – P. 1007–1024.
21. Arodź H. Metric tensors, Lagrangian formalism and Abelian gauge field on the Poincaré group / H. Arodź // Acta Phys. Pol., Ser. B. – 1976. –

Vol. 7, no. 3. – P. 177–190.

22. Toller M. Classical Field Theory in the Space of Reference Frames / M. Toller // Nuovo Cimento B. – 1978. – Vol. 44, no. 1. – P. 67–98.
23. Toller M. Free quantum fields on the Poincaré group / M. Toller // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37, no. 6. – P. 2694–2730.
24. Drechsler W. Geometro-stohastically quantized fields with internal spin variables / W. Drechsler // J. Math. Phys. – 1997. – Vol. 38, no. 11. – P. 5531–5558.
25. Hannibal L. Relativistic spin on the Poincaré group / L. Hannibal // Found. Phys. – 1997. – Vol. 27, no. 1. – P. 43–56.
26. Kuzenko S.M. A geometric model of the arbitrary spin massive particle / S.M. Kuzenko, S.L. Lyakhovich, A.Yu. Segal // Int. J. Mod. Phys. A. – 1995. – Vol. 10, no. 10. – P. 1529–1552.
27. Lyakhovich S.L. Universal model of a $D = 4$ spining particle / S.L. Lyakhovich, A.Yu. Segal, A.A. Sharapov // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 54, no. 8. – P. 5223–5238.
28. Gitman D.M. Fields on the Poincaré Group: Arbitrary Spin Description and Relativistic Wave Equations / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // Int. J. Theor. Phys. – 2001. – Vol. 40. – P. 603–684. – arXiv:hep-th/0003146.
29. Buchbinder I.L. Discrete symmetries as automorphisms of the proper Poincaré group / I.L. Buchbinder, D.M. Gitman, A.L. Shelepin // Int. J. Theor. Phys. – 2002. – Vol. 41, no. 4. – P. 753–790. – arXiv:hep-th/0010035.
30. Gitman D.M. Interaction of orientable object fields with gauge fields / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // Phys. Scr. – 2011. – Vol. 84. – P.055101.
31. Bagrov V.G. Exact Solutions of Relativistic Wave Equations /

V.G. Bagrov, D.M. Gitman. – Dordrecht: Kluwer Acad. Pub., 1990.

32. Wightman A. Vol. 73 of Lecture Notes in Physics. Invariant wave equations: general theory and applications to the external field problem / Ed. by G. Velo, A. Wightman. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – P. 1–101.
33. Klauder J., Sudarshan E. Fundamentals of Quantum Optics / J. Klauder, E. Sudarshan. – New York: Benjamin, 1968.
34. Малкин И.А. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем / И.А. Малкин, В.И. Манько – Москва: Наука, 1979.
35. Klauder J. Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics / J. Klauder, B.-S. Skagerstam. – Singapore: World Scientific, 1985.
36. Perelomov A.M. Generalized Coherent States and Their Applications / A.M. Perelomov. – Berlin: Springer, 1986.
37. Gazeau J. Coherent States in Quantum Physics / J. Gazeau. – Berlin: Wiley-VCH, 2009.
38. Nielsen M. Quantum Computation and Quantum Information / M. Nielsen, I. Chuang. – Cambridge, England: Cambridge University Press, 2000.
39. Schrodinger E. Collected papers on wave mechanics. The Continuous Transition from Micro- to Macro-Mechanics / E. Schrodinger. – 1928 – P. 41–44.
40. Glauber R. The quantum theory of optical coherence / R. Glauber // Phys. Rev. – 1963. – Vol. 130. – P. 2529–2539.
41. Glauber R. Coherence and coherent states of the radiation field / R. Glauber // Phys. Rev. – 1963. – Vol. 131. – P. 2766–2788.

42. Radcliff J. Some properties of coherent spin states / J. Radcliff // J. Phys. A. – 1971. – Vol. 4. – P. 313–323.
43. Perelomov A. Coherent states for arbitrary Lie group / A. Perelomov // Commun. Math. Phys. – 1972. – Vol. 26. – P. 222–236.
44. Малкин И.А. Когерентные состояния заряженной частицы в магнитном поле / И.А. Малкин, В.И. Манько // ЖЭТФ. – 1968. – Т. 55. – С. 1014–1025.
45. Додонов В.В. Инварианты и коррелированные состояния нестационарных квантовых систем / В.В. Додонов, В.И. Манько // Труды ФИАН. – 1971. – Т. 183. – С. 71–181.
46. Ali S.T. Coherent States, Wavelets and Their Generalizations / S.T. Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau. – New York, Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, 2000.
47. Gazeau J., Klauder J. Coherent States for Systems with Discrete and Continuous Spectrum / J. Gazeau, J. Klauder // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – Vol. 32. – P. 123–132.
48. Bloch F. Nuclear Induction / F. Bloch // Phys. Rev. – 1946. – Vol. 70. – P. 460–474.
49. Bloch F. The nuclear induction experiment / F. Bloch, W.W. Hansen, M. Packard // Phys. Rev. – 1946. – Vol. 70. – P. 474–485.
50. Arecchi F. Atomic coherent states in quantum optics / F. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmor, H. Thomas // Phys. Rev. A. – 1972. – Vol. 6. – P. 2211–2237.
51. Lieb E. The classical limit of quantum spin systems / E. Lieb // Commun. Math. Phys. – 1973. – Vol. 31. – P. 327–340.
52. Bellissard J. Composition of the coherent spin states / J. Bellissard,

R. Holtz // J. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15, no. 9. – P. 1275–1276.

53. Delbourgo R. Minimal uncertainty states for the rotation and allied groups / R. Delbourgo // J. Phys. A. – 1977. – Vol. 10, no. 11. – P. 1837–1846.
54. Delbourgo R. Maximal weight vectors possess minimal uncertainty / R. Delbourgo, J. Fox // J. Phys. A. – 1977. – Vol. 10, no. 12. – P. L233–L235.
55. Shelepin A.L. Clebsch-Gordan coefficients in coherent and mixed bases / A.L. Shelepin, L.A. Shelepin // Phys. At. Nucl. – 1994. – Vol. 56, no. 10. – P. 1442–1446.
56. Arecchi F. Coherent states for r-level atoms / F. Arecchi, R. Gilmor, D. Kim // Lettere al Nuovo Cimento. – 1973. – Vol. 6, no. 6. – P. 219–223.
57. Gitman D.M. Coherent states of $SU(N)$ groups / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // J. Phys. A. – 1993. – Vol. 26. – P. 313–327. – arXiv: hep-th/9208017.
58. Гитман Д.М. Когерентные состояния групп $SU(N)$ и $SU(N,1)$ и их приложения в релятивистской квантовой теории / Д.М. Гитман, С.М. Харчев, А.Л. Шелепин// Труды ФИАН. – 1990. – Т. 201. – С. 95–138.
59. Gitman D.M. Coherent states of $SU(l,1)$ groups / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // J. Phys. A. – 1993. – Vol. 26. – P. 7003–7018. – arXiv: hep-th/9308157.
60. Gitman D.M. On the definition of the coherent states / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // Proc. XVIII Intern. Coll. Group Theoretical Methods in Physics. – New York: Nova Science, 1991. – P. 251–254.

61. Смородинский Я.А. Групповые и вероятностные основы квантовой теории / Я.А. Смородинский, А.Л. Шелепин А.Л., Л.А. Шелепин // УФН. – 1992. – Т. 162, № 12. – С. 1–95.

62. D'Ariano G. Stability of coherent states / G. D'Ariano, M. Rasetti, M. Vadacchino // J. Phys. A. – 1985. – Vol. 18, no. 5. – P. 1295–1307.

63. Шелепин А.Л. Метод производящих инвариантов в теории групп Ли / А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин // Труды ФИАН. – 1989. – Т. 191. – С. 46–86.

64. Варшалович Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград: Наука, 1975.

65. Гитман Д.М. Представления групп $SU(N)$ на полиномах от антикоммутирующих переменных / Д.М. Гитман, А.Л. Шелепин // Кратк.сообщ.по физ. ФИАН. – 1998. – № 11. – С. 21–30.

66. Gitman D.M. Semiclassical description of quantum rotator in terms of SU(2) coherent states / D.M. Gitman, D.A. Petrusevich, A.L. Shelepin// Physica Scripta. – 2013. – Vol. 88. – P.045005.

67. Петрусевич Д.А. Когерентные состояния квантового ротатора / Д.А. Петрусевич, А.Л. Шелепин // 60-я научно-техническая конференция МИРЭА: сборник трудов. Москва, 13–25 мая 2011 г. – Москва : МИРЭА (ТУ), 2011. – Ч. 2. – С. 34–38.

68. Majorana E. Teoria Relativistica Di Particelle con Momento Intrinseco Arbitrario / E. Majorana // Nuovo Cimento. – 1932. – Vol. 9. – P. 335–344.

69. Гельфанд И.М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд,

А.М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, № 8. – С. 703–733.

70. Гинзбург В.Л. Релятивистские волновые уравнения с внутренними степенями свободы и партоны / В.Л. Гинзбург, В.И. Манько // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1976. – Т. 7, № 1. – С. 3–20.
71. Casalbuoni R. Majorana and the Infinite Component Wave Equations / R. Casalbuoni// PoS. – 2006. – Vol. EMC2006. – P. 004. – arXiv:hep-th/0610252.
72. Marsch E. The Two-Component Majorana Equation-Novel Derivations and Known Symmetries / E. Marsch // Journal of Modern Physics. – 2011. – Vol. 2. – P. 1109–1114.
73. Pal P.B. Dirac, Majorana and Weyl fermions / P.B. Pal // Am. J. Phys. – 2011. – Vol. 79. – P. 485–498.
74. Aste A. A direct road to Majorana fields / A. Aste // Symmetry 2. – 2010. – P. 1776–1809.
75. Marsch E. A New Route to the Majorana Equation / E. Marsch // Symmetry. – 2013. – Vol. 5. – P. 271–286.
76. Wilczek F. Majorana returns / F. Wilczek // Nature Physics. – 2009. – Vol. 5. – P. 614–618.
77. Sivaguru A. Majorana Fermions / A. Sivaguru. – London, England: Imperial College, 2012.
78. Lubanski J. Sur la théorie des particules élémentaires de spin quelconque / J. Lubanski // Physica. – 1942. – Vol. 9, no. 3. – P. 310–338.
79. Bhabha H. Relativistic wave equations for the elementary particles / H. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17. – P. 200–216.
80. Krajcik R. Bhabha first-order wave equations. VII. Summary and conclu-

sions / R. Krajcik, M. Nieto // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15, no. 2. – P. 445–452.

81. Jackiw R. Relativistic wave equation for anyons / R. Jackiw, V. Nair // Phys. Rev. D. – 1991. – Vol. 43, no. 6. – P. 1933–1942.
82. Plyushchay M. The model of a relativistic particle with torsion / M. Plyushchay // Nucl. Phys. B. – 1991. – Vol. 362, no. 28. – P. 54–72.
83. Plyushchay M. The model of a relativistic particle with fractional spin / M. Plyushchay // Int. J. Mod. Phys. A. – 1992. – Vol. 7, no. 28. – P. 7045–7064.
84. Gitman D.M. Poincaré group and relativistic wave equations in 2+1 dimensions / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // J. Phys. A. – 1997. – Vol. 30. – P. 6093–6121.
85. Gitman D.M.. Classification of quantum relativistic Orientable Objects / D.M. Gitman, A.L. Shelepin // Phys. Scr. – 2011. – Vol. 83. – P.015103. – arXiv:1001.5290.
86. Binegar B. Relativistic field theories in three dimensions / B. Binegar // J. Math. Phys. – 1982. – Vol. 23, no. 8. – P. 1511–1517.
87. Gitman D.M. Majorana equation and some of its solutions in $2+1$ dimensions / D.M. Gitman, D.A. Petrusevich, A.L. Shelepin // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – Vol.47 – P.275401.
88. Петрусевич Д.А. Решение уравнений типа Майорана в постоянном магнитном поле / Д.А. Петрусевич, А.Л. Шелепин // 61-я научно-техническая конференция МИРЭА: сборник трудов. Москва, 16–25 мая 2012 г. – Москва: МГТУ МИРЭА, 2012. – Ч. 2. – С. 88–93.
89. Гитман Д.М. Точные решения уравнения Майораны в постоянном

однородном магнитном поле / Д.М. Гитман, Д.А. Петрусевич, А.Л. Шелепин // Вестник МГТУ МИРЭА. – 2013. – N1. – С. 149 – 163.

90. Петрусевич Д.А. Уравнения Майораны: нерелятивистский предел и разложение по степеням $1/c$ / Д.А. Петрусевич, А.Л. Шелепин // 62-я научно-техническая конференция МИРЭА: сборник трудов. Москва, 15–24 мая 2013 г. – Москва: МГТУ МИРЭА, 2013. – Ч. 2. – С. 17–24.