ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Магазева Алексея Анатольевича

Интегрирование классических и квантовых уравнений движения на группах Ли и однородных пространствах во внешних полях

представленную на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертационная работа А. А. Магазева посвящена проблеме интегрирования классических и квантовых уравнений движения частиц во внешних электромагнитных и калибровочных полях на однородных пространствах.

Актуальность задач интегрирования уравнений движения классических частиц во внешних полях, а также соответствующих им квантовых релятивистских уравнений, является одной из важных и актуальных проблем современной теоретической физики, вызывающей постоянный интерес исследователей. Несмотря на то, что указанная проблема является классической, список точно решаемых задач, являющийся к настоящему моменту уже достаточно обширным, продолжает интенсивно пополняться, представляя новые классы внешних гравитационных и калибровочных полей, в которых возможно построение точных решений. В определенной степени прогресс в этой области связан с проникновением в нее современных методов дифференциальной и алгебраической геометрии, теории представлений групп и алгебр Ли, теории операторов и т. д. В соответствие с этим расширяется и класс модельных конфигурационных многообразий, на которых возможно построение интегрируемых гамильтоновых систем и соответствующих им квантовых аналогов. В частности, отметим особый статус однородных пространств групп Ли, которые в последнее время все чаще играют роль своеобразных полигонов при исследовании различных квантово-полевых эффектов (поляризация вакуума, рождение частиц), а также используются при конструировании ряда космологических моделей в общей теории относительности. Все сказанное позволяет сделать вывод об актуальности диссертации, направленной на развитие новых методов и подходов к задаче точного интегрирования классических и квантовых уравнений движения во внешних полях на однородных пространствах групп Ли.

Степень обоснованности. Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, сформулированных в диссертационной работе, подтверждается строгими доказательствами, а также использованием современных математических методов, в частности, методов теории представлений групп и алгебр Ли, дифференциальной геометрии и теории когомологий алгебр Ли.

Достоверность и новизна исследования. Полученные результаты и выводы, сформулированные в диссертации подтверждаются корректным использованием соответствующих математических моделей, рассмотрением нетривиальных примеров и сравнением отдельных частных результатов с результатами, полученными другими авторами. Новизна полученных результатов заключается в разработке новых методов и подходов к интегрированию классических уравнений движения и соответствующих им релятивистских волновых уравнений на однородных пространствах. В частности, решена проблема интегрируемости геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии, исследована интегрируемость уравнения Якоби, а также предложен оригинальный метод «включения» внешнего электромагнитного поля в классические и квантовые уравнения движения, позволяющий описывать алгебры симметрии этих уравнений в терминах когомологий алгебр Ли.

Рекомендации по выводам. Критерии интегрируемости квантовых релятивистских уравнений, полученные в диссертации, могут быть полезны при выборе новых математических моделей, в рамках которых возможно подробное аналитическое исследование различных квантово-полевых эффектов. Имеются также классификационные перспективы, в частности, метод когомологического «включения» внешних полей может быть использован для классификации электромагнитных и неабелевых калибровочных полей на римановых пространствах, допускающих интегрируемость уравнений Клейна–Гордона и Дирака.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и двух приложений. Во введении формулируются цели и задачи исследования, обосновывается его актуальность и новизна, дается оценка степени разработанности темы исследования, формулируются положения, выносимые на защиту. Первая глава носит, в основном, обзорный характер и посвящена изложению основ теории групп и алгебр Ли. Вместе с тем в ней решается задача о координатной реализации транзитивных действий групп Ли. Вторая глава посвящена задаче интегрирования инвариантных конечномерных гамильтоновых систем на многообразиях групп Ли. Ключевым механизмом решения указанной задачи служит специфическая конструкция — специальное каноническое преобразование, сводящееся к переходу к каноническим координатам на орбитах коприсоединенного действия групп Ли.

В конце второй главы диссертант также решает задачу интегрирования уравнения Гамильтона — Якоби на группах Ли, приводя общую формулу для вычисления его полного интеграла в терминах соответствующего уравнения на орбитах коприсоединенного представления. В 3-й главе рассматривается класс линейных дифференциальных уравнений на группах Ли, инвариантных относительно соответствующих левых или правых регулярных представлений. К подобным уравнениям относится, например, уравнение Шредингера для свободного ассиметрического волчка. Излагается метод нахождения базиса решений этих уравнений, основанный на применении метода орбит Кириллова, и состоящий в построении и использовании неприводимых унитарных представлений групп Ли. Очень интересным является установление и обсуждение связи между производящей функцией канонических преобразований (описано в главе 2) и матрицами унитарных (неприводимых) представлений, которые часто можно рассматривать, как имеющие квантовую природу.

Четвертая глава содержит решение проблемы интегрируемости геодезических потоков на произвольных однородных пространствах с двумя типами метрик на них — инвариантными метриками и метриками субмерсии. В частности, получены соответствующие алгебраические критерии интегрируемости указанных фазовых потоков, а также приводится алгоритм построения их интегральных траекторий в квадратурах. Отдельное внимание уделяется ситуации, когда динамическая система допускает существование интегралов движения, множество поверхностей уровня которых является нехаусдорфовым топологическим пространством. Показано, что в отличие от традиционных подходов использование таких интегралов в рамках предложенного метода не приводит к принципиальным трудностям.

В пятой главе исследуется задача интегрируемости уравнения Якоби (в теории гравитации данное уравнение также известно как уравнение геодезического отклонения). Основной результат заключается в доказательстве того факта, что интегрируемость уравнения Якоби является следствием интегрируемости соответствующего уравнения геодезических. Кроме того, приводится метод интегрирования в квадратурах уравнения Якоби на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии.

Шестая и седьмая главы диссертации посвящены проблеме построения точных решений классических и квантовых уравнений во внешних полях. Основной объект исследования шестой главы — это гамильтоновы динамические системы, описывающие движение заряженной частицы во внешних гравитационном и электромагнитных полях. В частности, исследована алгебра линейных по импульсам интегралов движения таких систем, а также решена проблема их интегрирования на группах Ли и однородных пространствах. Кроме того, предложен метод классификации электромагнитных полей на римановых пространствах в терминах когомологий алгебр Ли групп движений. Все эти результаты обобщаются в седьмой главе на случай интегрирования соответствующих квантовых уравнений — релятивистских волновых уравнений Клейна–Гордона и Дирака.

Очень интересным является установление структуры алгебры интегралов ур-й Вонга, хотя структура интегралов искалась через специальный линейный анзац. Примечательно, что интегралы перемешивают спиновые и пространственные переменные, что, как факт, не очевидно и наверняка имеет физические следствия. Автор также замечает, что общий подход не ограничивает калибровочную группу; она, в общем, может быть произвольной компактной группой Ли.

Критические замечания. Замечания разделим на три группы: 1) *общеформальные*, 2) *неясности* и 3) *существенные*. На недочеты, связанные со стилистикой и опечатками, внимания не обращаем.

Общеформальные. Первое замечание относится к почти дословной дупликации автореферата во вводной части диссертации; в этом нет необходимости. Начало диссертации посвящено стандартным математическим сведениям из теории групп и алгебр Ли, что на мой взгляд излишне. Их можно было перенести в приложения.

Автор нечетко выделяет в тексте свои результаты от других; в тоже время, ссылки на литературу вполне исчерпывающие. Это же относится и к изложениям идеологии во вводных частях глав. Введения к ним мало содержательны и имеют некоторый уклон в математическую физику. Вообще, в диссертации уделено недостаточно места развернутым физическим мотивировкам.

Обозначения, включая иногда и в примерах, слишком математизированы (повсеместные и однородные латинские $x_1, x_2, \ldots$) и отягощены индексами, в то время как им вполне можно было придавать привычные формы, используемые в теоретической физике. Сами примеры следовало бы оформлять в отдельные параграфы или цельные абзацы. Не ясно, где заканчивается пример и начинается дальнейший текст (Пример 1.2 на стр. 43).

Приводимые в диссертации примеры, являясь довольно интересными, в тоже время часто не доводятся до *замкнутых* формул, свободных как от «строительных лесов» теории, так и от ненужных обозначенческих нагромождений. Этот недостаток имеет более общий характер и является источником путаниц в понимании/восприятии и лишних вопросов.

Упорядочение списка литературы не по авторам усложняет ориентацию; даже если это и соответствует ГОСТу. Тексты статей и диссертаций редко читаются слева направо. Поэтому нумерация по мере возникновения в тексте очень неудобна.

Неясности. Акцент на понятии смешанных многообразий не ясен даже математически. Подавляющее количество многообразий изначально возникают как факторизации и расслоения, а вещественная база и комплексные слоевые надстройки — совершенно стандартная ситуация в теоретической физике. Поэтому отбрасывание структур слоев и отход в низкоуровневую конструкцию формального смешанного многообразия плохо мотивирован.

Пример на стр. 70 подвисает в воздухе, так как задача интегрирования сводится к неавтономной и нелинейной системе. Таким образом пример может (ошибочно) восприниматься как контрпример, т. е. редукция к системе, заведомо более неудобной для разрешения, чем исходная система.

Скобка (6.96) выглядит нетривиальной и совершенно не ясно из каких соображений она была получена. Не исключено, что способ ее нахождения сам по себе может представлять интерес как метод.

Разбор неоднозначности интегралов Казимира в гл. 4, включая приведенные там примеры, выглядит искусственным. В частности, не ясна все-таки роль и мотивы их существенной/несущественной многозначности. Формальные спрямления есть у чего угодно и при этом нет разницы между «хорошими/плохими» интегралами/«казимирами». Требование аналитичности интегралов, как показывает опыт, является иногда формальным, не влияя на конечный результат (локальной) решаемости. Но когда возникают патологии типа существенной неоднозначности задача требует детального анализа, поскольку аналитические свойства интегралов «ничего не знают» про их скобочную алгебру и аналитическая нерешаемость может формально «игнорировать» их алгебраическую полноту. То есть задача может оказаться не решаема *формально* и *неформально* или, наоборот, допускать формальное игнорирование таких патологий. В любом случае ПРИМЕР 4.2 (стр. 146–148) требует исчерпывающего разбора. Окончательное разрешение дают дальнейшие процедуры обращения, которые в диссертации не рассматриваются. Эти процедуры для лиувиллевской интегрируемости объявляются по определению алгебраическими операциями, но именно они и могут оказаться решающими при окончательной *физической* (а не в рамках теории представлений) оценке полезности/бесполезности рассматриваемых «патологий». Нехаусдорфовость может оказаться лишь свойством промежуточных конструкций метода.

Выход в комплексную область или вещественность интегралов, положительная определенность римановых метрик и т. д. может оказаться не столь критичной для окончательной решаемости. В том числе и при рассмотрении, как ни странно, квантовых задач. Контрпример, законченный с точки зрения постановки задачи нелинейной динамики, ее квантования и конечного доведения даже до спектров имеет место уже для несложной алгебры $\mathfrak{e}(1,1)$ и приведен в работе [Yu. Brezhnev. SIGMA (2015) **11** 035(11)]. Эта алгебра присутствует в таблицах приложения А к диссертации и не исключено, что более подробный разбор функций Казимира мог бы увеличить подобные примеры, обогатив диссертацию.

Существенные. Появление квантовых задач и константы Планка (гл. 3) во многом достаточно формальны, а примеры с нулевым квантовым сдвигом выглядят как элементарные. Определение и утверждения на стр. 137 об интегрируемости квантового уравнения как сведенного к ОДУ неудачны.

Не ясно, что дает Утверждение 1.1 для групп преобразований, хотя оно и выглядит как решение задачи восстановления локальных групп по алгебрам. Уравнения Ли в общем случае заведомо не интегрируемы и не ясно где восстребуется локальная восстановимость абстрактной группы. Приводимые примеры, могут выглядеть как излишне оптимистичными.

Термин интегрируемость/интегрируемое трактуется в работе слишком широко и, соответственно, исчезает во многом конструктивная содержательность. Под квадратурами могут пониматься где лиувиллевские, где определенные, а где вообще просто знак интеграла. В работе не дооценивается сложность перехода и не упоминается получение переменных действие-угол через методы $[L, A]$-пар, которые уже давно не ограничиваются стандартным координатным разделением переменных. В конечном счете, задачи часто сводятся к потокам на якобианах алгебраических кривых, поэтому факт интегрируемости так или иначе не зависит от метода его получения. Если один метод дает рецептуру, а другой нет, то надо просто искать точки их соприкосновения. Автор приводит, порой интересные и нетривиальные, примеры — эллиптические квадратуры —, которые только подтверждают это «подозрение». Нельзя также игнорировать и тот факт, что система может быть «удовлетворительно» интегрируема алгебраически и в квадратурах, но не интегрируема по Лиувиллю.

Утверждение на стр. 128 относительно интегрируемости системы (3.25–26) и, в противовес, неинтегрируемости для коммутирующих операторов ("всегда может быть решена в квадратурах") вообще является, фактически, эквивалентом «всегда-интегрируемости» линейных уравнений с переменными коэффициентами. В тоже время в методах теории солитонов имеется давнее наблюдение, что сводимость интегрируемости нелинейных автономных уравнений к линейным с переменными коэффициентами есть задачи равной сложности. Более того, известная и точная формализация интегрируемости осуществляется через разрешимые/неразрешимые алгебраические группы Ли в рамках именно *линейной* теории Лиувилля (теория Пикара–Вессио). В диссертации об этом нет упоминаний, а в формальной теории нелинейного интегрирования имеются общие сложности с переносом и распространением этого понятия на другие задачи (уравнения Пенлеве и т. д.). Интегрируемость нельзя трактовать слишком свободно. В этой связи утверждения типа "… для практического применения …" требуют, вообще говоря, далеко нетривиальную дополнительную проработку и эффективизацию. Аналогично, "построения единого метода интегрирования классических и квантовых уравнений движения на группах Ли" — слишком широкое утверждение об интегрируемости всего. Примеры, приводимые в диссертации (уравнения Хойна) как раз сводятся к уравнениям, дифференциальная группа Галуа которых принципиально неразрешима. Налицо столкновение двух определений.

Нетривиальный пример решенной задачи на стр. 102–3 вполне можно было довести до конечных формул и даже проанализировать физически свойства, коль скоро все выражается в эллиптических функциях. Тоже самое — к решению (2.110) и примерам 3.5–7. Как показывает анализ формул, квадратуры нетривиальны и интересны, поскольку обращаются неголоморфные интегралы; это соответствует непрямолинейным обмоткам на якобианах.

Не понятно почему отсутствует упоминание об исследовании линеаризующих вариаций гамильтоновых систем (Morales-Ruiz; 1990–2000-е годы). Хотя в нем варьируются только канонические скобки — диссертация имеет дело с более общим случаем —, там есть (жесткие) результаты об неинтегрируемости, а те, что по интегрируемости, часто доводятся до линейной интегрируемости по Лиувиллю в строго определяемом (см. выше) конструктивном смысле. Там же описываются связи с алгоритмическими методами типа знаменитого алгоритма Ковачика.

Пример с монопольными решениями уравнений Янга–Милса лучше было бы проиллюстрировать на примере монополя Полякова, а не Янга. В частности возникает вопрос о перепутываемости спиновых и пространственных переменных именно для этого физически более содержательного примера вместо аналогичной перепутываемости для другого примера (приводится в диссертации), где напряженности полей не убывают на бесконечности.

Заключение. Наиболее существенные результаты диссертации вполне уместны для публикации в более престижных журналах. Это пробел частично восполняется монографией [67], но интересные результаты все же предпочтительнее распространять в более широком научном сообществе.

Замеченные недостатки, однако, нисколько не влияют на общую положительную характеристику работы, а часть из них следует рассматривать скорее как предложения к дальнейшим исследованиям.

Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Диссертация является законченной научной работой, в которой разработаны теоретические положения, расширяющее и обобщающее современный математический аппарат теоретической физики. Это соответствует требованиям п. 9 “Положения о присуждении ученых степеней”, утвержденного постановлением №842 Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г., предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук. Автор диссертации, Магазев Алексей Анатольевич, заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Официальный оппонент:
Брежнев Юрий Владимирович,
доктор физ.-мат. наук по специальности
01.04.02 — теоретическая физика,
профессор кафедры квантовой теории поля

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Томский государственный университет»
634050, г. Томск, пр. Ленина 36, (3822) 529–852
www.tsu.ru, e-mail: rector@tsu.ru

10 октября 2017

Подпись Ю. В. Брежнева удостоверяю
Ученый секретарь Ученого совета ТГУ Н. А. Сазонтова