

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

**Магазева Алексея Анатольевича**

«Интегрирование классических и квантовых уравнений движения на группах Ли и однородных пространствах во внешних полях»,  
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика

В диссертационной работе **Магазева Алексея Анатольевича** предлагаются новые методы и подходы к интегрированию двух классов дифференциальных уравнений на однородных пространствах – конечномерных гамильтоновых систем и линейных дифференциальных уравнений, частными случаями которых являются релятивистские волновые уравнения Клейна-Гордона и Дирака. Отдельное внимание в диссертации уделяется исследованию алгебр симметрии указанных уравнений, а также влиянию на эти алгебры процедуры "включения" внешнего поля.

### Актуальность темы диссертации.

Безусловно, задача нахождения точных решений уравнений математической физики является одной из центральных задач современной физической науки. Для многих моделей точные решения служат как приближения к более реалистичным концепциям, а также используются для сравнения с результатами численных расчетов. В квантовой теории поля знание точных решений уравнений Клейна-Гордона и Дирака с классическим внешним полем является необходимым при исследовании процессов в сильных электромагнитных полях, где стандартные методы теории возмущений не применимы.

Настоящая диссертационная работа направлена на развитие общих подходов к интегрированию классических уравнений движения и квантовых полевых уравнений с внешними полями на однородных пространствах. Стоит отметить, что предложенные в диссертации методы интегрирования отличны от традиционных схем, основанных на технике разделения переменных, и опираются на идеи метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений, разработанного в 90-х годах прошлого века, а также на идеи метода орбит А.А. Кириллова, являющегося важным инструментом построения неприводимых представлений групп Ли. При этом развитый в диссертационной работе формализм оказывается весьма плодотворным при интегрировании уравнений математической физики на однородных многообразиях, где многие важные результаты удается получить в замкнутой алгебраической форме, без явного интегрирования дифференциальных уравнений. Диссертация также содержит ряд

иллюстрирующих примеров, для которых удастся построить точные решения соответствующих уравнений, не допускающих разделения переменных, что, безусловно, указывает на широкую область применимости разработанных методов интегрирования. Все сказанное позволяет сделать вывод об актуальности диссертационной работы и о ее несомненной практической значимости.

**Диссертация** состоит из введения, семи глав, заключения и двух приложений, изложенных на 296 страницах машинописного текста. Диссертация содержит 2 рисунка, 4 таблицы и список литературы из 237 наименований.

Во введении обсуждается актуальность темы, формулируются цели и задачи исследования, приводятся положения, выносимые на защиту, а также излагается информация об апробации работы и структуре диссертации.

Первая глава посвящена проблеме реализации алгебр Ли векторными полями и дифференциальными операторами первого порядка, а также задаче построения локальных действий групп Ли на соответствующих однородных пространствах. Обсуждается связь этих задач с когомологиями групп и алгебр Ли.

Во второй главе предложена конструкция канонического преобразования в кокасательном расслоении группы Ли, названного в работе *специальным* и сводящегося к переходу к координатам Дарбу на соответствующих орбитах коприсодиненного представления. С помощью этого преобразования решается задача интегрирования гамильтоновых систем на группах Ли с инвариантными гамильтонианами, а также связанная с ней задача о построении полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби. Обсуждается применение полученных результатов к задаче интегрирования геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях с просто-транзитивными группами изометрии.

В третьей главе рассматривается класс линейных дифференциальных уравнений на группах Ли, инвариантных относительно левого или правого действия группы. Для интегрирования этих уравнений предлагается использовать разложение общего решения по ортонормированному базису обобщенных матричных элементов унитарных неприводимых представлений группы, сконструированных с помощью специального канонического преобразования из главы 2.

Четвертая глава посвящена проблеме интегрирования в квадратурах геодезических потоков на однородных пространствах. К основным результатам здесь можно отнести алгебраические условия интегрируемости геодезических потоков, выраженные через инвариантные характеристики однородного пространства, а также описание явного

алгоритма построения решений указанных гамильтоновых систем путем перехода к новым каноническим координатам, обобщающим известные переменные "действие-угол".

В пятой главе исследуется интегрируемость вариаций гамильтоновых систем, в частности, интегрируемость уравнения Якоби на однородных пространствах.

В шестой главе рассматривается класс гамильтоновых систем с деформированной канонической скобкой Пуассона, учитывающей влияние внешнего электромагнитного поля (в диссертации такие гамильтоновы системы называются *магнитными геодезическими потоками*). В терминах когомологий алгебр Ли описана структура алгебры интегралов движения таких систем, имеющих первый порядок по импульсу. Решается задача об интегрировании в квадратурах магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах с инвариантными псевдоримановыми метриками. Отдельно рассмотрена задача о некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга – уравнений, описывающих динамику классической частицы во внешнем калибровочном поле.

В седьмой главе рассматриваются релятивистские полевые уравнения Клейна-Гордона и Дирака во внешних гравитационном и электромагнитном полях. Исследуется алгебра операторов симметрии первого порядка этих уравнений, с помощью которой описывается общая схема построения их базиса решений. Более углубленно изучается проблема интегрирования уравнений Клейна-Гордона и Дирака на группах Ли и однородных пространствах.

В заключении приводятся основные результаты и выводы по работе, а также перспективы их дальнейшего использования.

#### **Новизна выполненных исследований и полученных результатов.**

Все основные результаты работы являются новыми. К наиболее значимым результатам, полученным в ходе проведенного Магазевым А.А. диссертационного исследования, следует отнести:

– Установлена и исследована связь между матричными элементами неприводимых унитарных представлений групп Ли и производящей функцией специального канонического преобразования в кокасательном расслоении группы.

– Полностью решена проблема интегрируемости в квадратурах геодезических потоков на однородных пространствах для двух типов метрик – метрик субмерсии и инвариантных метрик.

– Решена задача об интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

– В терминах когомологий алгебр Ли описана симметрия классических и квантовых уравнений движения во внешнем электромагнитном поле. Разработаны конструктивные процедуры их решения на однородных пространствах и группах Ли. Исчерпывающим образом исследована интегрируемость указанных уравнений на трех- и четырехмерных однородных пространствах.

#### **Достоверность полученных результатов**

основана на применении современных методов теоретической и математической физики, включающих в себя методы теории групп и алгебр Ли, их представлений, методы дифференциальной геометрии и теории динамических систем. Полученные результаты в частных случаях согласуются с результатами других авторов.

#### **Научная значимость полученных в работе результатов.**

Полученные результаты исследования представляют значительный интерес, в первую очередь, в общей теории относительности и квантовой теории поля. Методы и подходы, развитые в диссертационной работе, будут полезны при исследовании квантовых эффектов, которые не могут быть описаны в рамках непертурбативных теорий. Полученные автором критерии интегрируемости классических и квантовых уравнений также могут быть полезны при выборе математических моделей в теориях гравитации, в рамках которых будет возможно их подробное аналитическое исследование.

#### **Заключение.**

В диссертации последовательно излагаются все основные результаты, что позволяет сделать вывод об обоснованности положений, выносимых на защиту. Все задачи, поставленные в исследовании, успешно решены. Однако по диссертации можно сделать некоторые замечания.

1. В § 3.4 диссертации устанавливается связь матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы Ли со специальным каноническим преобразованием в ее кокасательном расслоении. Данная связь дается интегральным преобразованием (3.43), где интегрирование проводится по некоторой мере, существование которой не совсем очевидно.

2. В § 6.1 приведена классификация стационарных электромагнитных полей в трехмерном евклидовом пространстве, допускающих интегралы движения магнитного геодезического потока, имеющих первый порядок по импульсу. В работах Бейкерса, Паттера и Винтерница получена классификация стационарных электромагнитных полей, допускающих оператор симметрии первого порядка для стационарного уравнения Шредингера. В диссертации желательно было бы привести сравнение этих результатов и указать соответствующие ссылки в списке литературы.

Тем не менее, отмеченные недостатки не влияют на общую **положительную оценку работы**, которая является законченным научным исследованием, выполненном на высоком уровне и вносящем весомый вклад в теоретическую и математическую физику. Считаю, что рассматриваемая диссертационная работа по своему содержанию, объему выполненных исследований, новизне и научной и практической значимости соответствует требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки РФ к докторским диссертациям согласно п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор Магазев Алексей Анатольевич заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика.

Официальный оппонент

профессор кафедры прикладной математики и информатики

Сибирского государственного индустриального университета,

доктор физико-математических наук (01.04.02 – Теоретическая физика)

Варламов Вадим Валентинович,

тел.: +7 (384) 346 35 29,

e-mail: [vadim.varlamov@mail.ru](mailto:vadim.varlamov@mail.ru)

25 сентября 2017 г.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный индустриальный университет» (654007, г. Новокузнецк, ул. Кирова, д. 42, тел.: +7 (384) 346-19-00, e-mail: [rector@sibsiu.ru](mailto:rector@sibsiu.ru), [www.sibsiu.ru](http://www.sibsiu.ru))

Подпись профессора кафедры

прикладной математики и информатики,

доктора физико-математических наук

Вадима Валентиновича Варламова подтверждаю:

Ученый секретарь Ученого совета СибГИУ



М.В. Ляховец