

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

**Магазева Алексея Анатольевича**

«Интегрирование классических и квантовых уравнений движения на группах Ли и однородных пространствах во внешних полях»,  
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика

Основной прогресс в классической механике начиная с XVIII в. был связан прежде всего с отысканием точных решений уравнений движения различных механических систем. В трудах классиков были не только найдены точные решения множества конкретных задач, но и развиты общие подходы к такого рода деятельности, составившие основу аналитической механики в том виде, в котором мы ее сегодня знаем. Параллельное развитие приближенных методов вроде теории возмущений, а позднее развитие вычислительной техники, обогатили арсенал исследователей, но не снизили ценности точных решений: они по-прежнему стоят особняком, давая наиболее полную картину эволюции физических систем. В квантовой теории, где уравнения динамики представляют собой уравнения в частных производных, задача отыскания аналитических решений стала, пожалуй, даже еще более насущной, учитывая их роль как при построении рядов теории возмущений, так и в описании непертурбативных эффектов. Тема диссертационного исследования А. А. Магазева, посвященного развитию методов точного интегрирования фундаментальных дифференциальных уравнений теоретической физики, таким образом, хотя и лежит в традиционном русле, является весьма **актуальной**.

Основными объектами исследования в рассматриваемой диссертации являются конечномерные гамильтоновы системы, в частности, геодезические и магнитные геодезические потоки на однородных пространствах групп Ли, а также их квантовые аналоги, среди которых в первую очередь следует выделить полевые уравнения Дирака и Клейна – Гордона. Отметим, что точные решения таких уравнений представляют несомненный интерес с точки зрения возможных приложений в квантовой теории поля, теории гравитации и космологии. Особо следует отметить, что при рассмотрении как классических, так и квантовых уравнений автор концентрирует внимание на развитии методов интегрирования, существенно использующих некоммутативные алгебры Ли интегралов движения (операторов симметрии в квантовом случае). Важность подобного подхода обусловлена определенным истощением возможностей метода разделения переменных, связанного с коммутативными алгебрами, вследствие довольно длительной истории его применения. В рамках же некоммутативного подхода удастся получить большое число довольно общих результатов и конкретных решений.

**Достоверность, степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации** не вызывает сомнений, что подтверждается математической корректностью поставленных задач, внутренней согласованностью и согласием полученных в диссертации

результатов с известными результатами других авторов. Кроме того, автор рассматривает множество конкретных примеров применения развиваемой теории, проводя все вычисления подробно и до конца.

**Новизна полученных результатов.** Все результаты, сформулированные в защищаемых положениях, являются новыми, докладывались на многочисленных представительных конференциях и семинарах и своевременно опубликованы в ведущих рецензируемых журналах.

**Общая оценка диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы и двух приложений.

**Глава 1** содержит изложение необходимых в дальнейшем сведений из теории групп и алгебр Ли и их представлений, а так же оригинальный общий результат – конструктивный метод нахождения в квадратурах функций композиции произвольной группы Ли в канонических координатах первого и второго рода.

**Глава 2** посвящена интегрируемости лево- и правоинвариантных гамильтоновых систем на группах Ли. С этой целью вводится специальное каноническое преобразование, посредством которого исходная система редуцируется к гамильтонову потоку на орбите коприсоединенного представления данной группы. Существенно, что для отыскания необходимого канонического преобразования используются в общем случае некоммутативные алгебры интегралов движения. Вопрос об интегрируемости в рамках данного подхода инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли решен полностью: получены алгебраические условия интегрируемости, описан конструктивный алгоритм построения канонического преобразования и соответствующего полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби. Эти результаты, ценные сами по себе, являются в то же время отправной точкой для реализации программы исследования более общих классических и квантовых уравнений, проводимой в последующих главах.

**В главе 3** вводится понятие квантового уравнения на группе Ли, которое в определенном смысле можно рассматривать как результат квантования гамильтоновых систем, рассмотренных в предыдущей главе. При этом аналогом редуцирующего канонического преобразования выступает разложение решения по матричным элементам специального неприводимого унитарного представления рассматриваемой группы. Как и в классическом случае, получены условия интегрируемости и описана процедура нахождения базиса пространств решений, допускающая использование некоммутативных алгебр симметрии. Кроме того, получено явное выражение матричных элементов через производящую функцию канонического преобразования из главы 2.

**В главе 4** исследуется интегрируемость геодезических потоков на однородных (псевдо)римановых пространствах, что является следующим естественным шагом после изучения более простого случая инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли. При помощи обобщения подхода, примененного в главе 2, автору удалось получить критерии интегрируемости геодезических потоков для двух типов метрик на однородных пространствах: инвариантных метрик и метрик субмерсии.

Далее, в **главе 5** рассматривается вопрос об интегрируемости уравнения Якоби для геодезического потока на произвольном (псевдо)римановом многообразии. Показано, что интегрируемость уравнения Якоби следует из интегрируемости соответствующего геодезического потока, подробно рассмотрены случаи однородного пространства с инвариантной метрикой и метрикой субмерсии.

В **главе 6** исследована структура алгебр интегралов движения магнитных геодезических потоков на однородных пространствах и уравнений Вонга, описывающих движение классической частицы на фоне неабелева калибровочного поля. Эти алгебры оказываются центральными расширениями определенных подалгебр пространственно-временных симметрий, что позволяет использовать для их описания и классификации теорию когомологий алгебр Ли.

Наконец, **глава 7** содержит обсуждение интегрируемости релятивистских волновых уравнений для частиц во внешних классических гравитационных и электромагнитных полях, и, таким образом, представляет собой логическое завершение всего диссертационного исследования. Описана общая схема некоммутативной редукции таких уравнений и рассмотрены конкретные примеры для нештеккелевых пространств.

В целом диссертация создает впечатление законченного научного исследования. Каждая глава содержит решение отдельной четко обозначенной научной задачи, изложение материала связное, последовательное. Автор свободно владеет методами теории представлений групп и алгебр Ли, дифференциальной геометрии, теории когомологий, теории гамильтоновых систем, квантовой теории в искривленном пространстве – времени и в целом современным математическим аппаратом теоретической физики.

Отдельно хочется отметить продуманную и логичную систему обозначений, выдержанную на протяжении всей работы, что облегчает чтение диссертации.

По итогам рассмотрения диссертации можно сделать следующие **замечания**.

Автор, концентрируясь на достижении целей, заявленных в теме диссертации, не уделяет должного внимания обсуждению физического содержания полученных решений. Между тем подобное обсуждение было бы уместно, по крайней мере, в контексте использования некоммутативных алгебр симметрии, коль скоро именно они занимают центральное место во многих построениях. Известно, что в квантовой механике решения с разделенными переменными соответствуют чистым состояниям, а полные наборы коммутирующих операторов, для которых данные состояния являются собственными, определяют совокупности одновременно измеримых наблюдаемых. Некоммутативные наборы операторов не допускают подобной прозрачной трактовки, и возникающий любопытный вопрос о роли построенных с их помощью базисов решений, таким образом, остается открытым.

Определение 3.1 (стр. 114) квантового уравнения на группе Ли представляется излишне общим и потому выглядит несколько искусственно, допуская отнесение к данному классу уравнений, физическое наполнение которых может весьма мало пересекаться с интуитивным пониманием прилагательного «квантовый».

Кроме того, в диссертации имеется небольшое число пунктуационных ошибок и несколько случаев использования не вполне точных или не общепринятых терминов, как-то “уравнение Дирака в электромагнитном поле” вместо “уравнение Дирака для частиц в электромагнитном поле” на стр. 13 или “коприсоединенные орбиты” вместо “орбиты коприсоединенного представления” на стр. 141, что, по всей видимости, оправдано целью сокращения громоздких формулировок и нигде не приводит к недоразумениям.

Тем не менее, перечисленные недостатки носят не принципиальный, а скорее технический характер, и несколько не умаляют качества и ценности полученных в диссертации оригинальных научных результатов.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям п. 9 "Положения о присуждении ученых степеней" ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор Алексей Анатольевич Магазев заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика.

**Официальный оппонент:**

профессор кафедры теоретической физики  
федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования  
«Томский государственный педагогический университет»,  
доктор физико-математических наук  
(специальность 01.04.02 – Теоретическая физика)



Крыхтин Владимир Александрович

Адрес: 634061, г. Томск, ул. Киевская, д. 60;  
Тел.: +7 (3822) 52-17-95;  
Факс: +7 (3822) 31-14-64;  
E-mail: [rector@tspu.edu.ru](mailto:rector@tspu.edu.ru);  
<http://www.tspu.edu.ru>

Подпись В.А. Крыхтина заверяю:

Ученый секретарь Ученого совета ТГПУ

Подпись удостоверяю  
ученый секретарь  
Ученого совета ТГПУ

Н.И. Медюха

Н.И. Медюха

Дата: 05.10.2017 г.

