

«УТВЕРЖДАЮ»  
Проректор федерального  
государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего  
образования «Московский  
государственный университет имени  
М.В. Ломоносова»,  
доктор физико-математических наук



А.А. Федянин

" 25 " сентября 2017 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации Магазева Алексея Анатольевича  
«Интегрирование классических и квантовых уравнений движения на группах Ли и  
однородных пространствах во внешних полях»,  
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по  
специальности 01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертационная работа Магазева А.А. «Интегрирование классических и квантовых уравнений движения на группах Ли и однородных пространствах во внешних полях» посвящена разработке новых теоретико-групповых методов интегрирования уравнений движения классических частиц и релятивистских волновых уравнений во внешних полях на римановых пространствах с транзитивными группами изометрии.

**Актуальность темы.** При описании фундаментальных физических процессов важную роль играют линейные дифференциальные уравнения, описывающие динамику полей различных спинов: уравнение Клейна - Гордона, Дирака, Прока и т.д. Особенно интересен поиск точных решений волновых уравнений для заряженных частиц во внешних электромагнитных полях, что создает основу непертурбативного описания электромагнитного взаимодействия. Получение интенсивных полей с помощью лазеров открыло возможность новых экспериментов по проверке квантовой электродинамики в существенно непертурбативной области. Аналогичные задачи актуальны и в гравитации, где существование сверхсильных гравитационных полей недавно было доказано с помощью гравитационно-волновых экспериментов. В частности, аналитические решения уравнения геодезических, а также геодезических девиаций, предоставляют полезную информацию о свойствах гравитационных полей различных объектов таких, например, как черные дыры. Кроме этого, точные решения уравнений геодезических представляют интерес в проблеме излучения волн различной природы частицами, движущимися по геодезическим траекториям. Таким образом, дальнейшая разработка методов решения уравнений математической физики является актуальной задачей современных теоретических исследований.

В рамках данного направления особый статус имеет задача построения базиса решений полевых уравнений, который, в частности, необходим для расчета вакуумных квантовых эффектов в интенсивных внешних полях. Традиционно, для построения точных решений релятивистских волновых уравнений используют метод разделения переменных. Применимость этого метода тесно связана с существованием у исследуемого уравнения абелевой алгебры операторов симметрии, которые чаще всего ассоциированы с геометрическими симметриями пространства-времени. Отметим, что методом разделения переменных была проведена систематизация практически всех известных точных решений уравнений квантовой механики с внешними полями, а также найдены широкие классы новых полей и соответствующих точных решений. Однако не все представляющие

полученных критериев интегрируемости исследуется интегрируемость геодезических на трех- и четырехмерных римановых пространствах.

Развитый в четвертой главе формализм обобщается в главе 5 на случай интегрирования уравнения геодезических девиаций. Доказывается, что интегрируемость уравнения геодезических девиаций является следствием интегрируемости уравнения геодезических. Также приводится метод построения точных решений уравнения геодезических девиаций на римановых пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии.

В главе 6 рассматриваются гамильтоновы системы, описывающие динамику заряженной классической частицы на римановом пространстве во внешнем электромагнитном, а затем и во внешнем калибровочном поле. Приводится метод построения интегралов движения этих систем, линейных по импульсным переменным, а также исследуется структура пуассоновой алгебры, которую они образуют. В терминах этой алгебры формулируются соответствующие условия интегрируемости. Для случая риманова пространства, допускающего транзитивную группу движений, приводится конструктивный алгоритм интегрирования в квадратурах гамильтоновых систем, описывающих динамику частицы в электромагнитном поле. Исчерпывающим образом исследована проблема интегрируемости таких систем на трех- и четырехмерных римановых пространствах.

Глава 7 непосредственно обобщает результаты шестой главы, фокусируясь на проблеме построения точных решений релятивистских волновых уравнений Клейна-Гордона и Дирака во внешних гравитационном и электромагнитном полях. По аналогии с классическим случаем здесь также исследуется алгебра операторов симметрии указанных полевых уравнений, принадлежащих классу дифференциальных операторов первого порядка. Для римановых пространств с транзитивными группами изометрий формулируются алгебраические условия интегрируемости и описывается метод построения базиса решений, основанный на использовании обобщенного преобразования Фурье. Также приводится общая схема построения точных решений рассматриваемых уравнений на произвольных римановых пространствах с неабелевыми алгебрами векторов Киллинга. Полученные в этой главе результаты иллюстрируются несколькими примерами, в которых строятся точные решения уравнений Клейна-Гордона и Дирака во внешних электромагнитных полях, не допускающих разделения переменных.

**Достоверность и обоснованность результатов работы.** Достоверность результатов, полученных в диссертации, контролируется их внутренней согласованностью и совпадением в ряде частных случаев с результатами других авторов. Результаты получены на основе строгих методов теоретической физики, а также методов теории групп и алгебр Ли, теории представлений и дифференциальной геометрии. Диссертация отличается большим объемом выполненных математических вычислений и характеризуется высокой степенью обоснованности научных положений и выводов.

**Теоретическая и практическая значимость диссертации и использование полученных результатов.** Диссертация представляет собой завершенную научно-исследовательскую работу на актуальную тему. Полученные в ней результаты и сделанные выводы являются новыми, принадлежат автору и имеют существенное значение для науки и практики. Список публикаций автора, количество конференций, в которых автор участвовал с докладами, говорят о достаточной апробации работы. Результаты работы можно рекомендовать для использования в научных и учебных организациях, в которых ведутся исследования по квантовой теории поля и теории гравитации: в Московском, Томском, Санкт-Петербургском и Казанском университетах, в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна) и других. Их также можно рекомендовать к использованию в специальных курсах для магистров и аспирантов.

**Замечания по диссертационной работе.** При рассмотрении диссертации были замечены следующие недостатки:

интерес уравнения могут быть решены в рамках этой схемы. Поэтому приобретает интерес разработка новых методов интегрирования, отличающихся от методов разделения переменных. Именно этому и посвящена данная диссертационная работа, направленная на развитие общих подходов к интегрированию классических и квантовых уравнений на римановых пространствах и во внешних полях, существенно использующих неабелевы алгебры симметрии.

**Общая характеристика структуры и содержания диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, двух приложений и списка литературы из 237 наименований. Она основана на материалах 24 научных статей, из которых более половины опубликовано в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Во Введении дана общая характеристика диссертационной работы, обоснована актуальность темы диссертации и дан анализ степени ее разработанности. Определены цели исследования и методы их достижения. Описана научная новизна полученных результатов, степень их достоверности, теоретическая и практическая значимость. Приведены положения, выносимые на защиту.

Глава 1 частично носит вводный характер. В ней даются основные сведения из теории групп Ли и алгебр Ли и, в частности, подробно обсуждается проблема реализации алгебр Ли дифференциальными операторами на гладких многообразиях. В качестве оригинального результата приводится алгоритм построения в квадратурах транзитивных действий групп Ли в локальных координатах.

Глава 2 посвящена проблеме интегрирования гамильтоновых систем с функциями Гамильтона, допускающими просто-транзитивную группу симметрии. Фактически диссертант рассматривает задачу интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли. С помощью метода канонических преобразований автор явным образом сводит исходную задачу к задаче интегрирования гамильтоновой системы с меньшим числом фазовых переменных и, при выполнении некоторых условий, дает ее решение в квадратурах. В качестве примера, иллюстрирующего предложенный метод, автор находит решения уравнения геодезических для метрики МакЛеннона-Тарига-Гаппера, которая допускает просто-транзитивную группу изометрий. В заключение главы решается задача о построении полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби на группах Ли.

В главе 3 рассматриваются линейные дифференциальные уравнения на группах Ли, определяемые лево- или правоинвариантными дифференциальными операторами. Излагается метод построения точных решений этих уравнений, основанный на применении гармонического анализа на группах Ли. При этом, в отличие от традиционных подходов, обобщенное преобразование Фурье строится не с помощью собственных функций коммутативного набора из обертывающей алгебры лево- и правоинвариантных дифференциальных операторов, а с помощью матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы Ли. К основным результатам данной главы также можно отнести установление связи между упомянутыми матричными элементами неприводимых представлений и производящей функцией канонического преобразования, использованного в главе 2 для интегрирования инвариантных гамильтоновых систем. По видимому, указанная связь отмечена впервые.

В четвертой главе исследуется проблема интегрирования геодезических на римановых пространствах с транзитивными группами преобразований. Автор рассматривает два широких класса римановых метрик – метрики, инвариантные относительно группы преобразований, и так называемые метрики субмерсии, которые имеют скрытые симметрии, не сводящиеся к геометрическим симметриям пространства-времени. Для построения решений уравнений геодезических с данными метриками автор использует специальное каноническое преобразование, сводящееся к переходу к новым фазовым переменным, обобщающим известные переменные "действие-угол". Также приводятся соответствующие критерии интегрируемости, выраженные в терминах инвариантных алгебраических характеристик риманова пространства. С использованием

1. В качестве иллюстрации результатов главы 4 автор находит точные решения уравнения геодезических для двух римановых метрик, допускающих пятимерные группы преобразований. При этом свойства этих метрик никак не исследованы, в частности, не ясно, удовлетворяют ли они уравнению Эйнштейна, какой имеют тип по Петрову и т.д.
2. В разделе 6.1 приведена классификация магнитных полей, в которых уравнения движения классической заряженной частицы допускают сохраняющиеся величины, линейные по импульсам. Однако физическая интерпретация построенных классов полей отсутствует. В особенности интересно было бы обсудить свойства магнитных полей, полученных в пунктах 6 – 8 указанной классификации.
3. В целом диссертация написана четким математическим языком и стилистически хорошо оформлена. Все же отдельные опечатки имеются – например, пропущен множитель  $1/2$  в выражении для символов Кристоффеля на стр. 96.

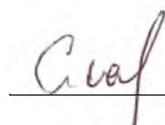
Тем не менее, отмеченные недостатки не снижают общей высокой оценки работы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

**Заключение.** Изложенное выше позволяет сделать вывод о том, что работа Магазева Алексея Анатольевича «Интегрирование классических и квантовых уравнений движения на группах Ли и однородных пространствах во внешних полях» соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.04.02 – теоретическая физика, а ее автор, Магазев Алексей Анатольевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук (01.04.02 – теоретическая физика), профессором кафедры теоретической физики физического факультета МГУ Дмитрием Владимировичем Гальцовым.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры теоретической физики физического факультета МГУ, протокол № 1 от 13 сентября 2017 г.

Заведующий кафедрой теоретической физики физического факультета МГУ,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, академик РАН



Андрей Алексеевич Славнов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ), 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1; Тел: (495) 939-10-00, Факс: (495) 939-01-26  
<http://www.msu.ru> E-mail: [info@rector.msu.ru](mailto:info@rector.msu.ru)