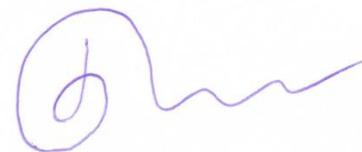


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»



На правах рукописи

Батуев Станислав Павлович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ  
ПРИ УДАРНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук  
Радченко Павел Андреевич

Томск – 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>1. ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ</b> .....	10
<b>2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА</b> .....	20
2.1. Основные уравнения математической модели .....	20
2.1.1. Упругопластическая модель поведения изотропных материалов .....	21
2.1.2. Моделирование разрушения изотропных материалов.....	23
2.1.3. Моделирование деформирования анизотропных материалов .	23
2.1.4. Моделирование разрушения анизотропных материалов.....	25
2.2. Трехмерная постановка задачи.....	30
2.3. Численный метод расчета .....	32
2.3.1. Уравнения движения конечного элемента .....	33
2.3.2. Методика расчета.....	37
2.4. Тестовые исследования .....	53
<b>3. ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОРАЖАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ С РАЗНЕСЕННЫМИ ПРЕГРАДАМИ И КУМУЛЯТИВНЫМИ БОЕПРИПАСАМИ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ</b> .....	56
3.1. Исследование разрушения разнесенных преград при ударе .....	56

3.2. Моделирование взаимодействия поражающих элементов различной формы с кумулятивными боеприпасами .....	68
3.2.1. Постановка задачи .....	70
<b>4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ БЕТОННЫХ И ФИБРОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, УСИЛЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ АРМАТУРОЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ .....</b>	<b>82</b>
4.1. Исследования разрушения балок из бетона и фибробетона.....	82
4.2. Исследование разрушение защитной оболочки атомной станции при импульсном воздействии .....	95
4.3. Исследования поведение балок с неметаллической арматурой.....	108
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>116</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>118</b>
Приложение А. Свидетельство о регистрации программы EFES.....	136
Приложение Б. Акт внедрения результатов исследования.....	137
Приложение В. Золотая медаль международной выставки.....	138
Приложение Г. Блок-схема программы .....	139

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие современных технологий создания перспективных материалов, возрастающие требования к конструкциям, эксплуатирующимся в условиях интенсивных динамических нагрузок, требуют постоянного развития методов исследования и прогнозирования поведения материалов и конструкций при различных режимах внешних воздействий. Экспериментальные (особенно натурные) исследования весьма трудоемки и дороги, к тому же, они не позволяют, как правило, получить временную развертку процессов, возникающих в материалах и конструкциях при ударных и импульсных воздействиях. Поэтому, с учетом развития вычислительной техники, важную роль, особенно при прогнозировании, играет численное моделирование. При этом, используемые модели и алгоритмы должны максимально учитывать реальные свойства материалов, геометрические особенности конструкций и условия нагружения.

Существующие вычислительные комплексы (ANSYS, ABAQUS, LS-DYNA) ориентированы на широкий круг задач и поэтому не всегда эффективны при решении динамических многоконтактных задач, в которых надо учитывать разрушение и фрагментацию материалов. К тому же, так как эти комплексы — коммерческие, они имеют массу ограничений.

Поэтому, с учетом ориентации России в области высоких технологий на импортозамещение, актуальность работы обусловлена потребностью в создании высокопроизводительного вычислительного комплекса, позволяющего исследовать и прогнозировать поведение перспективных материалов и конструкций, получении новых знаний о свойствах материалов при динамических нагрузках.

**Цель работы** — разработка численных моделей и алгоритмов для решения динамических контактных задач механики деформируемого твердого тела, исследование поведения и свойств перспективных материалов (в том

числе анизотропных) и конструкций при динамических нагрузках методами численного моделирования.

Согласно поставленной цели были сформулированы следующие **задачи исследования**:

1. Получить напряженно-деформируемое состояние защитной оболочки атомной станции при ее взаимодействии с самолетом Боинг-747 и оценить прочность такой конструкции.

2. Исследовать механизмы взаимодействия металлических ударников в разнесенные преграды и оценить их проникающую способность.

3. Создать математические модели исследуемых материалов.

4. Реализовать численный алгоритм, позволяющий решить поставленные задачи.

#### **Методология и методы диссертационного исследования.**

В диссертационной работе применялись методы механики деформируемого твердого тела, методы численного моделирования, метод конечных элементов.

#### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Модель и алгоритм расчета поведения композитов на основе бетона и конструкций из них при динамических нагрузках.

2. Результаты исследования напряженно-деформированного состояния и разрушения бетонных и фибробетонных балок с металлическим и композитным армированием при динамических нагрузках.

3. Закономерности развития разрушения защитной оболочки атомной станции при импульсном воздействии.

4. Комплекс результатов исследования проникания ударников в разнесенные преграды и влияния формы поражающих элементов на их проникающую способность.

### **Новизна полученных результатов**

1. Предложена модель поведения композитов на основе бетона при динамических нагрузках, учитывающая их специфические свойства – разномодульность упругих и прочностных характеристик, пластичность, зависимость прочности от скорости деформирования.

2. На базе метода конечных элементов создан алгоритм численного расчета для исследования свойства и закономерностей поведения широкого класса материалов и конструкций при динамических нагрузках в трехмерной постановке.

3. Исследовано влияние металлического и неметаллического армирования, наличия фиброволокна на прочностные характеристики бетонных балок при кратковременных нагрузках. Выявлены схемы зарождения и развития разрушения. Установлено, что при рассмотренных условиях нагружения возникновение трещин начинается с тыльной поверхности балок в результате действия растягивающих напряжений.

4. Исследована динамика напряженно-деформированного состояния и поведение защитной оболочки атомной станции (АС) при импульсном воздействии. Установлено, что при рассмотренных условиях нагружения, разрушение оболочки инициируется на свободных поверхностях сотовой конструкции под действием волн разгрузки, в дальнейшем разрушение развивается за счет растягивающих напряжений.

5. Исследовано влияние анизотропной стеклопластиковой арматуры на несущую способность изгибаемых элементов конструкций. Установлено, что при динамических воздействиях использование стеклопластиковой арматуры в бетонных балках позволяет увеличить несущую способность и деформативность балки.

6. В трехмерной постановке исследовано одновременное взаимодействие нескольких ударников различной формы с кумулятивным снарядом. Изучено влияние скорости удара и формы поражающих элементов на проникающую

способность. Установлено, что форма поражающих элементов оказывает значительное влияние на их проникающую способность. Установлено, что при скоростях взаимодействия порядка 800 м/с происходит потеря устойчивости и вращение удлинённых ударников после пробития первой преграды, что отрицательно сказывается на их дальнейшей проникающей способности, при скоростях порядка 2000 м/с происходит активное разрушение ударников и снижение их проникающей способности. Для рассмотренных поражающих элементов их максимальная проникающая способность достигается при скорости 1400 м/с.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается использованием корректной математической постановки задач, сравнением полученных расчетных данных с данными экспериментальными и с результатами других авторов.

### **Практическая и теоретическая ценность работы**

Работа выполнялась в очной аспирантуре Томского государственного архитектурно-строительного университета в соответствии с планом работ по госбюджетному финансированию Минобрнауки, также работа получила поддержку Российского фонда фундаментальных исследований грант мол\_а №16-38-00256 «Экспериментальные и численные исследования разрушения конструкций из бетона и фибробетона, усиленных композитной арматурой при динамических нагрузках», грант мол\_а №16-31-00125 «Создание программного комплекса для расчетов перспективных материалов и конструкций». Результаты, представленные в диссертации, в рамках договора №474хд/13 «Разработка и экспериментальное обоснование защитных железобетонных конструкций с повышенной отказоустойчивостью» используются в проектных организациях Росатома. В рамках лицензионного договора № 57180н от 19.11.2015 г. программный комплекс EFES (прил. А), разработанный на основе представленной в диссертации методики, передан для использования на АО НПК «Конструкторское бюро машиностроения» г. Коломна (прил. Б).

**Апробация работы и публикации.**

Результаты диссертации представлены в 48 работах, опубликованных в российских и зарубежных научных журналах и сборниках, в том числе в 12 работах, опубликованных в научных журналах и изданиях, входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus, в 7 работах из перечня ВАК, а также материалах всероссийских и международных конференций, и докладывались на 54 Международной конференции “Актуальные проблемы прочности” (Екатеринбург, 11–15 ноября 2013г.), International conference XV Khariton's topical scientific readings (Sarov, March 18–22, 2013.), XXIX International Conference on Equations of State for Matter (Elbrus, March 1–6, 2014), International Conference of Students and Young Scientists “Prospects of Fundamental Sciences Development” (Tomsk, April 22–25 2014), XII Международной конференции “Забабахинские научные чтения” (Снежинск, 2–6 июня 2014г.), XXX International Conference on Interaction of Intense Energy Fluxes with Matter (Elbrus, March 1–6, 2015), International Conference “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics” (Novosibirsk, Russia. September 7–11 2015), International Conference “Advanced Materials with Hierarchical Structure for New Technologies and Reliable Structures” (Tomsk, 21–25 September 2015), XXXI International Conference on Equations of State for Matter (Elbrus, March 1–6, 2016), I International Young Researchers Conference “ Youth, Science, Solutions: Ideas and Prospects” (Tomsk, 10–14 November 2014г.), Международной научной конференция молодых ученых “Перспективные материалы в строительстве и технике”, (Томск, 15–17 октября 2014 г.), VIII Международной конференции "Микромеханизмы пластичности, разрушения и сопутствующих явлений" (MPFP–2016) (Тамбов, 27 июня – 1 июля 2016г.), International Conference “Advanced Materials with Hierarchical Structure for New Technologies and Reliable Structures” (Tomsk, 19–23 September 2016), XIII Всероссийская конференция молодых ученых по матмоделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 15–17 октября 2012г.), XIV Всероссийской конференции

молодых ученых по матмоделированию и информационным технологиям (Томск, 15–17 октября 2013г.), XXIII Всероссийской конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Россия, Барнаул, 26–28 июня 2013г.), Всероссийской конференции “Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение” (Новосибирск, 18–22 апреля 2014г.), III Всероссийской конференции “Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций” (Новосибирск, 26–30 мая 2014г.), XVI всероссийской конференции молодых ученых по матмоделированию и информационным технологиям (Красноярск, 28–30 октября 2015г.), 24 Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Омск, 2–4 июня 2015г.), IX всероссийской конференции “Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики” (Томск, 21–25 сентября 2016г.), VI Всероссийской конференции молодых ученых “МТЭ” (Томск, 11–13 мая 2016г.), а также на научных семинарах кафедры геоинформатики и кадастра ТГАСУ.

### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, четырех разделов и заключения, в котором приведены основные результаты и выводы. Общий объем диссертации 141 страницы, включая 46 рисунков, 6 таблиц, 144 библиографических ссылки и 4 приложения.

Автор выражает благодарность д.т.н. В.С. Плевкову, К.Л. Кудякову, к.т.н. Д.Г. Уткину, А.М. Тукаеву за предоставленные экспериментальные данные.

## **1. ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ**

Поведение твердых тел при динамическом взаимодействии представляет собой сложную задачу механики деформируемого твердого тела. Протекание процесса высокоскоростного соударения твердых тел зависит от их геометрических размеров, физико-механических свойств, скорости удара и многих других факторов. При изучении аналитическими методами процессов динамического деформирования и разрушения материалов приходится вводить упрощающие предположения, которые приводят к существенным искажениям реальной картины. Поэтому твердые тела при высоких скоростях взаимодействия преимущественно исследуются экспериментально и численно.

Активное экспериментальное и теоретическое исследования прочностных свойств материалов при высокоскоростном ударно-волновом нагружении начались в нашей стране в конце 50-х годов. Первые исследования, проведенные Л.В. Альтшулером, С.А. Новиковым, А.Г. Ивановым во ВНИИЭФ, продолжили в своих работах Г.В. Степанов с коллегами в Киеве, Н.А. Златин в Санкт-Петербурге, Т.М. Платова, И.Е. Хорев в Томске. Теоретические основы физики ударных волн сформулировали Я.Б. Зельдович, Ф.А. Баум, Л.П. Орленко с коллегами. Труды по исследованию откольного разрушения и разработке широкодиапазонных уравнений состояния принадлежат В.Е. Фортову, Г.И. Канелю, А.М. Молодцу, С.В. Разоренову (Черноголовка), Ю.И. Мещерякову с коллегами (Санкт-Петербург).

В исследованиях повреждения материалов при ударных нагрузках было показано, что при изменении условия взаимодействия — происходит изменение механизмов разрушения. Экспериментальные исследования показали, что, зачастую, комбинация нескольких механизмов определяет итоговое разрушение. Но экспериментальные исследования не позволяют определить влияние каждого из механизмов разрушения. Притом, разрушения, которые были получены на начальной стадии ударного взаимодействия, не всегда

можно идентифицировать при итоговом рассмотрении процесса. В связи с этим, экспериментальное изучение динамического взаимодействия необходимо дополнить численным моделированием. Вычислительный эксперимент имеет ряд преимуществ перед экспериментом физическим: возможность получения информации о полях напряжений, волнах сжатия и разгрузки, скоростях, переходе в пластическую стадию материала или его разрушения в любой момент эксперимента. Однако численный эксперимент не может полностью заменить эксперимент физический, поэтому целесообразно их использование в паре. Численные исследования имеют ряд трудностей, связанных с разработкой адекватной модели, корректно описывающей поведение материалов при динамических нагрузках, и с созданием методики расчета, максимально учитывающей заданные условия нагружения. Труды по численному моделированию поведения материалов при ударно-волновом нагружении принадлежат Н.Х. Ахмадееву [1, 2, 3], В.Н. Аптукову [4, 5], А.И. Глушко [6], В.Н. Куропатенко, Н.Н. Яненко, В.М. Фомину, А.И. Гулидову [7, 8, 9, 10, 11], В.А. Гридневой, А.И. Корнееву [12], Н.Н. Белову, А.П. Николаеву, Н.Т. Югову, М.В. Хабибуллину [13, 14, 15, 16], В.А. Горельскому с коллегами [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26], А.В. Радченко, П.А. Радченко [27, 28, 29].

За рубежом труды по изучению поведения материалов при ударном и импульсном нагружении принадлежат D. Curran, L. Seaman, L. Chhabildas, A. Rajendran, D. Grady, D. Shockey, J. Asay, M. Wilkins, G. Johnson и другим.

На решение динамических задач, а также на методы их решения, оказал значимое влияние Gordon R. Johnson. Начиная с 1970-х годов, опираясь на труды Зенкевича [30] и Уилкинса [31] он создавал и совершенствовал программный продукт EPIC (Elastic-Plastic Impact Computations). Первая статья с использованием EPIC появилась в 1976 [32], где в качестве конечных элементов были использованы треугольники, и было обосновано их преимущество перед прямоугольниками, тем, что обладают большей жесткостью и устойчивостью при больших искажениях сетки и деформациях.

Узлы сетки из прямоугольников могут легко пересекать противоположные стороны, что приводит к отрицательным объемам элементов, такая проблема у сетки, состоящей из треугольников, отсутствует. А также, преимущество в том, что любой прямоугольник можно представить двумя треугольниками простым делением напополам. Чуть позже Гордон Джонсон создает трехмерную методику расчета, вместе с препроцессором и постпроцессором. В 1981 году выходит в печать первое исследование в трехмерной постановке [33]. Заслуга в разработке алгоритма «эрозии» в трехмерной постановке также принадлежит Джонсону Г.Р. В работе 1987 года [34] было рассмотрено взаимодействия медного удлиненного ударника со стальной преградой, и для реализации этого расчета был использован алгоритм эрозии — с контактной поверхности удалялись разрушенные элементы, а его поверхность присваивалась его соседним внутренним элементам, массы сохранялись. Такой подход эффективно используется и по сей день в Лагранжевых методах. Также Г.Р. Джонсоном с коллегами были разработаны алгоритм роста трещины, описывающий распространение трещин в материале и реализацию перестроения сетки возле трещины и абразивный алгоритм, позволяющий в определенных условиях терять массу элементам (истираться, срабатываться). И в 2001 году был представлен алгоритм контактного взаимодействия [35], не позволяющий двум взаимодействующим поверхностям пересекаться, сохраняющий импульс, не уменьшающий шаг по времени, автоматически определяющий контактные пары. Также, Г. Р. Джонсоном с коллегами был создан подход, который получил название GPA (Generalized Particle Algorithm) [36]. Этот подход является “улучшенным” методом SPH. В этом методе все переменные (координаты, скорости, напряжения и другие) находятся в узлах, также этот подход решал некоторые проблемы, связанные с согласованностью частиц, потерей устойчивости на растяжение и другие. Но методы частиц имеет ряд недостатков, таких как меньшая точность и меньшая производительность по сравнению с конечно-элементным подходом, а тот в свою очередь проблемы

с большими деформациями. Поэтому Джонсон с коллегами объединили эти два подхода, используя преимущества каждого [37]. Получилось, что геометрия тела разбивается на конечные элементы, а в случае, если элементы на поверхности воспринимают большие деформации, то далее они начинают рассматриваться как безсеточные частицы и все переменные из элементов переносятся в частицу, а частица остается соединенной с поверхностью соседнего элемента. Две не разрушенные соседние частицы продолжают взаимодействовать как друг с другом, так и с остальными элементами, имея возможность воспринимать сдвиг, сжатие и растяжение. В то время, как одна частица сопротивляется только сжатию. В то же время не только сами подходы требуют внимания, но и модели, корректно описывающие поведение материалов. Джонсоном с коллегами были созданы такие модели, как: математическая модель для описания поведения металлов, которая получила название “модель Джонсона-Кука” [38], “модель разрушения Джонсона-Кука” [39], которая нашла широкое применения в качестве критерия разрушения для металлов, модели для керамики “Джонсона-Холмквиста” [40], модель для бетона “Холмквист-Джонсон-Кук” [41] и для ткани “Джонсон-Бейсель-Каниф” [42] и другие.

Динамический расчет поведения конструкционных материалов, таких как бетон и железобетон, будет всегда актуален, так как позволяет предсказать поведение материала, здания или сооружения воспринимающего динамические нагрузки природного или техногенного характера.

Железобетонные конструкции зданий и сооружений при численном моделировании динамического воздействия природного или техногенного характера требуют создания корректных расчетных схем и моделей, адекватно описывающих поведение заданных материалов. Практический интерес представляют результаты математического моделирования, отражающие остаточные перемещения и характер разрушения и трещинообразования в

конструкциях. Такие результаты позволяют предсказать поведение здания под воздействием нестационарной нагрузки.

На сегодняшний день процессы ударного взаимодействия твердых тел хорошо исследованы при помощи математического моделирования, но задача расчета бетонных и железобетонных конструкций при динамических нагрузках остается не решенной в полной мере. В связи с этим, разработка достоверных методов, позволяющих производить расчеты железобетонных конструкций и элементов на ударные нагрузки, является актуальной задачей.

А.А. Гвоздев [43] был первым, кто провел расчет действия кратковременной динамической нагрузки на железобетонную конструкцию, используя жесткопластический метод. Исследования упругопластического метода в задачах динамического нагружения железобетонных конструкций в своих работах отразили И.М. Рабинович [44], Попов Н.Н. [45], В.М. Бондаренко [46], А.В. Забегаев [47], В.А. Котляревский [48], О.Г. Кумпяк, Д.Г. Копаница [49], В.С. Плевков [50], Г.И. Попов [51], Б.С. Расторгуев [52], А.П. Синицин, О.В. Лужин, Б.М. Теренин [53], А.Е. Саргсян [54], Е.С. Сорокин [55] и др.

Работы по исследованию бетонных конструкций со стальным армированием при кратковременных импульсных нагрузках с учетом пластического поведения материалов принадлежат В.П. Агапову [56], Г.А. Гениеву [57], А.В. Забегаеву [58], А.А. Пичугину [59], И.Х. Костину, Г.Э. Шаблинскому, В.Б. Затееву [60], Л.Б. Мальцевой, Б.Х. Курбанову [61], В.С. Плевкову [50], А.И. Плотникову [121], В.А. Ржевскому, Р.С. Ибрагимову, В.Л. Харланову [62], Г.В. Рыкову, В.П. Обледову, В.И. Майорову, В.Т. Абрамкиной [63], А.Г. Тамрязяну [64], А. Усманову [65], А.В. Педикову [66], А.А. Югову [67], З.Р. Галяутдинову [68], В.В. Родевичу [69], Н.Н. Трекину [70], А.Н. Хорошиловой [71] и др.

В связи с возможностью упрочнения бетона неметаллической арматурой, такой как углепластик или стеклопластик, которые имеют различные пределы

прочности вдоль осей симметрии, возникает необходимость исследования поведения анизотропных материалов при динамических нагрузках.

Систематическое изучению анизотропии материалов начал Фохт в конце 19 века. Он определял упругие постоянные монокристалла каменной соли. Развитие самолетостроения в начале XX века стало следующим импульсом по изучению анизотропных материалов, т.к. именно древесина являлась основным конструкционным материалом. И, следовательно, изучение её прочности становится важной задачей. Одним из первых исследовал прочность анизотропных тел А.Н. Флаксерман [72]. Следующим шагом в развитии исследований анизотропных материалов стала возможность создания и применения в технике армированных композитов. Здесь, анизотропия свойств закладывается конструкционно, исходя из условий будущей эксплуатации. Исследования характера разрушения и трещинообразования и формулировку критериев разрушения анизотропных материалов в своих работах отразили Е.К. Ашкенази [73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82], А.К. Малмейстер [83, 84], Э.М. Ву и С. Цай [85, 86], Г.П. Черепанов [87, 88, 89]. Формулировка общей теории анизотропных материалов и решение некоторых задач представлены С.Г. Лехницким [90], А.Л. Рабиновичем [91], Б.Е. Победря [92], Р.М. Кристенсеном [93]. Теоретические аспекты распространения волн в анизотропных средах исследованы Ф.И. Федоровым [94] и Г.И. Петрашеным [95].

Описание поведения материалов с ярко выраженными свойствами анизотропии, даже при статических нагрузках, отличается своей сложностью и трудоемкостью. С материалом изотропным их различает сложная внутренняя структура, зависящая от ориентации волокон в материале, различные прочностные характеристики вдоль каждой оси, число упругих постоянных (в анизотропном материале до двадцати одной, тогда как в изотропном только три). В зависимости от вида напряженного состояния, ориентации нагрузки по отношению к расположению волокон в анизотропном материале, может

различаться физическая природа разрушений — в одном направлении материал будет разрушаться пластично, а в другом — хрупко. Также, при описании процесса разрушения материала с анизотропией свойств необходимо учитывать гидростатическое давление. Но, не смотря на ряд особенностей, требующих внимания, анизотропные материалы имеют главное достоинство — возможность рационального создания материала, под заданные условия его работы с учетом всех свойств.

В настоящее время анизотропные материалы нашли широкое применение, но уровень знаний об их свойствах, особенно при интенсивном динамическом нагружении, является неполным. В России и за её пределами анизотропные материалы в основном исследованы при статических нагрузках, причем, это касается как экспериментов, так и численных расчетов. И это задачи, основанные на приближениях теории тонких оболочек [96, 97]. Волновые явления, возникающие в анизотропных материалах, существенно влияют на динамику и итоговую картину разрушения, увы, современные инженерные методики, базирующиеся на упрощенных подходах, не дают возможности показать их эволюцию при динамических нагрузках. Исходя из этого, существуют потребности в получении знаний о свойствах анизотропных материалов и в возможности прогнозирования их поведения при динамических нагрузках. Одними из первых результаты поведения материалов с высокой степенью анизотропии при импульсном нагружении получили А.В. Радченко [27], С.В. Кобенко и П.А. Радченко.

Механика контактного взаимодействия является актуальной задачей механики деформируемого твердого тела. В основном, эта область развивается из-за запросов машиностроительной, добывающей и перерабатывающей отраслей промышленности, а также военных нужд. По причине высоких экономических потерь от трения, износа и разрушения контактирующих элементов, становится актуальной задача изучения процессов взаимодействия контактных тел.

Первым, достаточно полно проанализировал напряжения при контакте двух упругих тел Г. Герц (1881 год). Изучая ньютоновские кольца, он предположил, что область контакта линз имеет эллиптическую форму и сформулировал метод решения задач соприкосновения упругих тел. Но, его метод имел ряд допущений: соприкасающиеся тела однородны и изотропны, размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами кривизны взаимодействующих тел и размерами самих тел, отсутствие контактного трения.

Кроме этого, Г. Герцом был исследован квазистатический удар упругих шаров (без учета сил трения), волновое движение в телах рассмотрено не было, а было предположение, что в любой момент тело движется со скоростью его центра масс.

Теория Герца получает развитие в начале 20-го века благодаря техническим достижениям, а точнее разработке подшипников качения и судовых редукторов. Во второй половине 20-го века происходит отказ от принятых Герцом допущений, что служит прогрессом в механике контактного взаимодействия. Учет поверхностных сил трения позволил (в рамках теории упругости) адекватно описать контактное взаимодействие со скольжением и качением. Рассмотрение контакта тел в рамках теорий пластичности и линейной вязкоупругости позволило проанализировать напряженно-деформированное состояние неупругих взаимодействующих тел.

Стационарную динамическую задачу контактного взаимодействия абсолютно жесткого штампа, движущегося с постоянной скоростью, с упругой полуплоскостью впервые исследовал Л.А. Галин [98]. Также, им было определено напряженно-деформированное состояние упругого тела, в которое внедрялись с постоянной скоростью один или несколько штампов произвольной формы [99].

Большое количество авторов занималось исследованием нестационарных задач в динамике. А.И. Гулидов и В.М. Фомин [100] рассматривают

контактную задачу взаимодействия цилиндрического стержня и усеченного конического стержня с абсолютно жесткой преградой в двухмерном пространстве. Использование модифицированного метода Уилкинса позволило математически смоделировать процесс отскока упругопластического удлиненного ударника. Была получена картина распространения упругопластических волн и проанализировано явление отскока.

В большинстве случаев взаимодействие жестких ударников с деформируемыми преградами проходят с возникновением ярко выраженного волнового процесса и большими деформациями преграды. Задача динамического проникания очень популярна и ей посвящено много экспериментальных работ, но детальную картину процессов взаимодействия тел можно получить, лишь используя численное решение подобных задач, затем сравнивая с результатом эксперимента для уточнения математической модели.

Сложность таких задач заключается в строгих требованиях к выбору численного метода их решения, определению независимых переменных. В своей работе [101] В.И. Кондауров, И.Б. Петров и А.С. Холодов рассматривают осесимметричную задачу взаимодействия абсолютно жесткого цилиндрического вращающегося тела с конической головной частью с упругопластической преградой конечной толщины. Описывается поведение деформируемой преграды при динамических нагрузках при помощи уравнений движения и уравнения Прандтля - Рейса, для упругопластического материала, удовлетворяющему условию пластичности Мизеса, а также начальных и граничных условий. В численных расчетах учтены конечные деформации среды, использованы подвижная система координат и сеточно-характеристический метод сквозного счета. Ударники принимались абсолютно жесткими, а преграды имели возможность деформироваться. Показано, что существенное влияние на полученный результат оказывают радиальные волны разгрузки. В некоторых случаях наблюдался отскок ударника, в других потеря

контакта еще до возвращения от тыльной поверхности преграды волны растяжения. Было выяснено, что сдвиговое разрушение наиболее вероятно у острия и краев конуса, а разрушения, обусловленное растягивающими напряжениями, может потенциально локализоваться у тыльной поверхности преграды, под действием ударной волны сжатия.

Также поведение материалов при ударно-волновом нагружении изучают Е.И. Краус и А.Е. Бузюркин. Основываясь на основных уравнениях механики сплошной среды Е.И. Краусом и И.И. Шабалиным был создан 2D численный инструментарий, позволяющий проводить динамические расчеты в широком диапазоне скоростей взаимодействия. Так Е.И. Краус и И.И. Шабалин в своей статье [102] проводят двухмерные расчеты удара реактора о поверхность Земли и показывают влияние структуры земной поверхности на итоговое разрушение реактора. А в статье [103] ими рассмотрено столкновение реактора с водой, поверхностью песчаника и космическим мусором. В статье [104] А.Е. Бузюркиным, Е.И. Краусом и И.Л. Гладким численно исследовано разрушение корпуса вентилятора газотурбинного авиадвигателя при взаимодействии с оторвавшейся лопаткой вентилятора, а также показано влияние толщины, материала корпуса и скорости взаимодействия с лопаткой на итоговое разрушение.

## 2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Во всех решаемых задачах численное моделирование проводится в полной трехмерной динамической постановке в рамках феноменологического подхода механики сплошной среды. Численные исследования реализовывались при помощи метода конечных элементов [105], в формулировке применяемой для задач в динамической постановке. Для расчетов используется авторский программный комплекс EFES (прил. А) и алгоритм, позволяющий проводить параллельные вычисления с высокой производительностью на геометрических объектах любой сложности [106]. Программный комплекс [106] позволяет рассчитать значения всех деформаций, схемы образования трещин и процессы разрушения в исследуемых материалах и конструкциях в различные моменты времени.

По сравнению с ANSYS, ABAQUS, LS-DYNA, используемый в работе авторский комплекс EFES имеет ряд существенных преимуществ (прил. В):

- для корректировки перекрытия контактных границ в данном комплексе применяется авторский, высокооптимизированный алгоритм, в полной мере использующий возможности параллельных вычислений;
- комплекс позволяет использовать все доступные вычислительные ядра рабочей станции; для решений сложных и масштабных задач количество используемых конечных элементов не имеет ограничений.

### 2.1. Основные уравнения математической модели

Система уравнений, описывающих нестационарные адиабатные движения сжимаемой среды в произвольной системе координат ( $i = 1, 2, 3$ ) включает следующие уравнения [107, 108]:

— уравнение сплошности среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla_i v^i = 0; \quad (2.1)$$

— уравнения движения

$$\rho a^k = \nabla_i \sigma^{ik} + F^k, \quad (2.2)$$

$$\text{где } a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \nabla_i v^k, \quad \nabla_i \sigma^{ik} = \sigma^{ik}_{,i} + \Gamma_{im}^k \sigma^{im} + \Gamma_{im}^m \sigma^{ik};$$

— уравнение энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} e_{ij}. \quad (2.3)$$

Здесь  $F^k$  — компоненты вектора массовых сил;  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля;  $\sigma^{ij}$  — контравариантные компоненты симметричного тензора напряжений;  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $\rho$  — плотность среды;  $v^i$  — компоненты вектора скорости;  $e_{ij}$  — компоненты симметричного тензора скоростей деформаций:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i). \quad (2.4)$$

При описании поведения сталей и сплавов была использована модель, учитывающая возможную пластичность и разрушение материала [109].

### 2.1.1. Упругопластическая модель поведения изотропных материалов

Стали и сплавы были описаны упругопластической моделью поведения [23, 109]. Тензор напряжений разделялся на шаровую составляющую (давление)  $P$  и девиатор  $S^{ij}$ :

$$\sigma^{ij} = -P g^{ij} + S^{ij}, \quad (2.5)$$

где  $g^{ij}$  — метрический тензор.

Для расчета давления использовалось уравнение состояния Ми-Грюнайзена, записанное как функция, учитывающая удельную внутреннюю энергию  $E$  и плотность  $\rho$  [22, 23, 109]:

$$P = \sum_{n=1}^3 K_n \left( \frac{V}{V_0} - 1 \right)^n + K_0 \rho E, \quad (2.6)$$

где  $K_0, K_1, K_2, K_3$  — коэффициенты Грюнайзена,  $V_0$  и  $V$  — начальный и текущий объемы конечного элемента.

Учитывается, что для среды справедлив принцип минимума работы истинных напряжений на приращениях пластических деформаций. Поэтому можно выразить взаимосвязь тензоров скоростей деформаций и девиаторной составляющей в следующей форме:

$$2G \left( g^{im} g^{jk} e_{mk} - \frac{1}{3} g^{mk} e_{mk} g^{ij} \right) = \frac{DS^{ij}}{Dt} + \lambda S^{ij}, \quad (\lambda \geq 0). \quad (2.7)$$

Поправка конечного элемента на поворот определяется с помощью коротационной производной Яуманна:

$$\frac{DS^{ij}}{Dt} = \frac{dS^{ij}}{dt} - g^{im} \omega_{mk} S^{kj} - g^{jm} \omega_{mk} S^{ik},$$

где  $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)$ ,  $G$  — модуль сдвига.

Для области упругого поведения материала  $\lambda = 0$ . Тогда как для области пластического поведения ( $\lambda > 0$ ). Коэффициент  $\lambda$  находится из условия Мизеса:

$$S^{ij} S_{ij} \leq \frac{2}{3} \sigma_d^2, \quad (2.8)$$

где  $\sigma_d$  — предел текучести материала, зависящий от начального предела текучести в условиях статического нагружения, компонент тензора скоростей деформации, а также температуры, давления и прочих параметров. Если (2.8) нарушается, то компонент девиатора напряжений приводится к кругу текучести. Для выполнения этого, компоненты тензора  $S^{ij}$  корректируются нормирующим множителем для согласования с теорией Прандтля-Рейса.

### 2.1.2. Моделирование разрушения изотропных материалов

Разрушение сталей и сплавов может происходить только в условиях растяжения ( $V_0 < V$ ). Для реализации этого в модель был включен критерий разрушения, обусловленный максимальным значением интенсивности пластической деформации [110]:

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_2 - T_1^2}, \quad (2.9)$$

где  $T_1, T_2$  — первый и второй инварианты тензора деформаций,  $e_u$  — параметр полученный из эксперимента.

### 2.1.3. Моделирование деформирования анизотропных материалов

Композиционные материалы с высокой степенью анизотропии описывались упруго-хрупкой моделью поведения [111, 112, 113] и полагались следующие утверждения:

1. Выполняется условие сплошности среды.
2. До разрушения материал работает в области чистой упругости.

Для определения напряжений в материале использовался обобщенный закон Гука [82, 90, 111, 114, 115, 116]. Закон Гука, учитывающий текущие скорости деформации, записывался в следующем виде:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad (2.10)$$

где  $C_{ijkl}$  — упругие константы материала.

Учитывая симметрию тензоров напряжений и деформаций, компоненты данного тензора  $C_{ijkl}$  обладают следующими свойствами [90, 114]:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij}.$$

Общий случай анизотропии материала предполагает наличие двадцати одной независимой компоненты ( $C_{ijkl}$ ), симметричную матрицу которых можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1113} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2213} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3313} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1213} \\ & & & & C_{2323} & C_{2313} \\ & & & & & C_{1313} \end{bmatrix}$$

Переходя к ортогональной системе координат необходимо произвести преобразование упругих постоянных по следующим формулам:

$$C'_{abcd} = C_{ijkl} q_{ia} q_{jb} q_{kc} q_{ld},$$

здесь  $q_{ij}$  — направляющий косинус угла между осями  $i$  и  $j$ .

В случае ортотропии материала и при учете того, что совпадают координатные плоскости с ортогональными плоскостями упругой симметрии, число упругих постоянных примет значение девять. Тогда данные девять постоянных выражаются через упругие константы материала [117]:

$$C_{1111} = \frac{1}{E_2 A} \left( \frac{1}{E_3} - \frac{\nu_{23}^2}{E_2} \right), \quad C_{1122} = \frac{1}{E_3 A} \left( \frac{\nu_{31} \nu_{23}}{E_2} + \frac{\nu_{12}}{E_1} \right),$$

$$C_{2222} = \frac{1}{E_3 A} \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{31}^2}{E_3} \right), \quad C_{1133} = \frac{1}{E_2 A} \left( \frac{\nu_{12} \nu_{23}}{E_1} + \frac{\nu_{31}}{E_3} \right),$$

$$C_{3333} = \frac{1}{E_1 A} \left( \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_1} \right), \quad C_{2233} = \frac{1}{E_1 A} \left( \frac{\nu_{12} \nu_{31}}{E_3} + \frac{\nu_{23}}{E_2} \right),$$

$$C_{1212} = G_{12}, \quad C_{2323} = G_{23}, \quad C_{1313} = G_{13};$$

$$A = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \left( \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} - \frac{E_1}{E_3} \nu_{31}^2 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2 - \frac{E_3}{E_2} \nu_{23}^2 \right).$$

#### 2.1.4. Моделирование разрушения анизотропных материалов

Для описания процесса разрушения материала, с учетом анизотропии его свойств, применялся феноменологический подход. С учетом данного подхода, к критерию прочности предъявляются следующие требования [86]:

- 1) Критерий разрушения не может зависеть от выбора системы координат.
- 2) Необходимо отсутствие ограничений, накладываемых на механизм разрушения материала. Это значительно увеличивает гибкость критерия.
- 3) Пересечение каждой выбранной траектории нагружения с данной поверхностью прочности должно быть единственным.
- 4) Упрощение критерия должно позволять при расчете достигнуть желаемой точности.
- 5) Необходимо иметь однозначное соответствие между формулировками критерия прочности в пространствах напряжений и деформаций.
- 6) Критерий должен позволять рассчитывать не только отдельные элементы, но и конструкции в целом.
- 7) Главные оси прочности материала должны однозначно определяться.

Геометрическая интерпретация критерий разрушения выглядит следующим образом: в пространстве напряжений существует поверхность прочности. Разрушение происходит в момент пересечения заданного вектора напряжений с этой поверхностью.

Обобщенный критерий разрушения для материалов у которых прочностные характеристики зависят от направления был предложен Цаем и Ву [86, 85]. Критерий представлен функцией, аргументами которой являются компоненты тензора напряжений:

$$f(\sigma_{ij}) = F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \dots \geq 1, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

$F_{ij}$  и  $F_{ijkl}$  представляют собой компоненты тензора второго и четвертого ранга соответственно и определяются следующим образом:

$$F'_{ab} = F_{ij} q_{ia} q_{jb},$$

$$F'_{abcd} = F_{ijkl} q_{ia} q_{jb} q_{kc} q_{ld},$$

здесь  $q_{ij}$  — косинус угла между соответствующими осями  $i$  и  $j$ .

Здесь компоненты тензора второго ранга определяются, используя следующие зависимости:

$$F_{ii} = \frac{1}{X_{ii}} - \frac{1}{X'_{ii}}, \quad F_{iii} = \frac{1}{X_{ii} X'_{ii}},$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_{ij}} - \frac{1}{X'_{ij}} \right), \quad F_{ijj} = \frac{1}{4X_{ij} X'_{ij}}, \text{ при } i \neq j,$$

где  $X_{ii}$  — предел прочности на сжатие, а  $X'_{ii}$  — предел прочности на растяжении в направлении  $i$ ;  $X_{ij}$ ,  $X'_{ij}$  — пределы прочности при сдвиге при  $i \neq j$ .

Определение коэффициентов  $F_{1122}$ ,  $F_{2233}$ ,  $F_{3311}$  происходит во время экспериментов на одновременное растяжение по двум соответствующим осям в плоскостях 1–2, 2–3, 1–3. Остальные коэффициенты определяются аналогичным образом при одновременном растяжении по соответствующим осям.

Из тензорно-полиномиальной формулировки (2.11) критерия разрушения для материалов у которых прочностные характеристики зависят от направления, получили распространение более частные и ограниченные критерии.

О. Хоффман предложил следующий критерий разрушения:

$$C_1(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + C_2(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + C_3(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ + C_4\sigma_{11} + C_5\sigma_{22} + C_6\sigma_{33} + C_7\sigma_{12}^2 + C_8\sigma_{23}^2 + C_9\sigma_{31}^2 \geq 1, \quad (2.12)$$

здесь  $C_i$  — константы материала.

Присутствие линейных слагаемых существенно увеличивают гибкость критерия Хоффмана, но, сравнивая его с критерием Цая-Ву, можно выделить следующие недостатки:

1) критерий может применяться лишь для материалов с ортотропией свойств, поскольку изначально полагается, что коэффициенты, отвечающие за взаимодействие тангенциальных напряжений, равны нулю.

2) коэффициенты  $F_{1122}$ ,  $F_{2233}$ ,  $F_{3311}$  характеризуют влияние нормальных напряжений друг на друга, не могут являться независимыми константами, что снижает гибкость выбранного критерия.

В отличие от вышеуказанных критериев, критерий Ашкенази [82, 80], включает тензор напряжений не только 2-й, но и 4-й степени при сложных напряженных состояниях. Увеличение порядка полинома до 4-го позволило лучше аппроксимировать данные, получаемые из эксперимента. Также данный критерий более эффективен для материалов с высокой степенью анизотропии, поскольку для таких материалов поверхность прочности имеет сложный характер, то есть содержит как выпуклые, так и вогнутые участки. Полиномиальный критерий 4-й степени в упрощенной тензорной форме записывается следующим образом:

$$\alpha_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} - \left[ \frac{(\sigma_{ik}\delta_{ik})^2 + \sigma_{ik}\sigma_{ik}}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0. \quad (2.13)$$

Слагаемое  $(\alpha_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm})$  является комплексным инвариантом тензора напряжений и тензора прочности. Второй член критерия показывает влияние

первого и второго инвариантов тензора напряжений на прочность анизотропного тела. Развернув первый член данного уравнения можно получить "пластический потенциал". Инвариантное уравнение равноопасных состояний (2.13) можно в физическом аспекте рассматривать как обобщение "пластического потенциала" Мизеса для анизотропных тел, но только в случае наличия явной зависимости предела прочности от гидростатического давления  $J_1$ . В полностью развернутом виде критерий (2.13) имеет вид полинома четвертой степени, зависящего от 6 компонент действующих напряжений. Именно поэтому выражение (2.13) носит название полиномиального критерия четвертой степени. Параметры  $\alpha_{iklm}$  представляют собой в выражении (2.13) компоненты симметричного тензора четвертого ранга — тензора прочности, а величины  $\sigma_{ik}$  и  $\sigma_{lm}$  — компоненты тензора напряжений. Считается, что коэффициенты в данном критерии симметричны, поскольку отвечают ортогональной симметрии материала, что было изложено в работе [78]. Для выявления значений коэффициентов  $\alpha_{iklm}$ , нужно рассмотреть все варианты возможных частных случаев напряженного состояния для компонент  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  в критерии (2.13). Для случая одноосного растяжения или сжатия значения принимают следующий вид:  $\sigma_{zz} - \sigma_{bz}$  — предел прочности при растяжении или сжатии вдоль оси  $z$ , а все остальные компоненты тензора напряжений полагаются равными нулю ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ ). Учитывая это, можно получить:

$$\alpha_{1111} = \frac{1}{\sigma_{bz}}.$$

Аналогично выясняется и смысл остальных коэффициентов. Компоненты  $\alpha_{iklm}$  определяются следующим образом:

$$\alpha_{ikik} = \frac{1}{\tau_{bik}},$$

где  $\tau_{bik}$  — предел прочности при чистом сдвиге, для которого осуществляется отклонение первоначального прямого угла между осями симметрии  $i$  и  $k$ , и так далее.

Тензорно-полиномиальный критерий четвертой степени Ашкенази для материала с ортотропией свойств в декартовой системе координат  $XYZ$  записывается следующим образом:

$$\frac{\sigma_{xx}^2 + c\sigma_{yy}^2 + b\sigma_{zz}^2 + d\sigma_{xy}^2 + p\sigma_{yz}^2 + r\sigma_{xz}^2 + s\sigma_{xx}\sigma_{yy} + t\sigma_{yy}\sigma_{zz} + f\sigma_{xx}\sigma_{zz}}{\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}}} \geq [\sigma_0], \quad (2.14)$$

где

$$[\sigma_0] = \frac{\sigma_{bx}}{k_b}, \quad c = \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{by}}, \quad b = \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bz}}, \quad d = \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bxy}}, \quad p = \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{byz}}, \quad r = \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bzx}},$$

$$s = \frac{4\sigma_{bx}}{\sigma_{bxy}^{(45)}} - c - d - 1, \quad t = \frac{4\sigma_{bx}}{\sigma_{byz}^{(45)}} - c - b - p, \quad f = \frac{4\sigma_{bx}}{\sigma_{bzx}^{(45)}} - b - r - 1.$$

Здесь  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$  — компоненты тензора напряжений. Буква  $\sigma$  с нижним индексом  $b$  обозначает величину предела прочности при растяжении или сжатии в направлении той оси, на которую указывает второй нижний индекс, а также чистый сдвиг между осями, на которые указывает индекс. Наличие верхнего индекса (45) у буквы  $\sigma$  обозначает предел прочности в диагональном направлении, лежащем в плоскости, на которую указывают нижние индексы. Здесь  $k_b$  — коэффициент запаса, он считается равным для всех направлений, в данном случае  $k_b = 1$ . Большинство исследуемых материалов имеют различные пределы прочности на сжатие и растяжение и использование данного критерия дает возможность это учитывать.

При выполнении критерия разрушения в дальнейшем среда считается поврежденной и происходит изменение её прочностных свойств. В конечных элементах, где происходит разрушение в условиях сжатия ( $e_{kk} \leq 0$ ), полагается, что для описания материала используется модель фрагментированной среды, которая оказывает сопротивление при объемном сжатии и не оказывает при сдвиге и растяжении. Давление в таком случае определяется формулой [111]

$$P = \left[ \exp\left(4\beta \frac{V_0 - V}{V_0}\right) - 1 \right] \frac{\rho_0 \alpha^2}{4\beta}, \quad (2.15)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность,  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты ударной адиабаты  $D = \alpha + \beta u_m$ ,  $u_m$  — массовая скорость,  $V_0$  и  $V$  — начальный и текущий удельные объемы.

В конечных элементах, где происходит разрушение в условиях растяжения ( $e_{kk} > 0$ ), полагается, что происходит полное разрушение материала, и компоненты тензора напряжений считаются нулевыми [111, 112, 113].

## 2.2. Трехмерная постановка задачи

Рассмотрим взаимодействие  $k$  тел в общей трехмерной постановке в декартовой системе координат  $XYZ$  (рис. 2.1) [118]. Форма каждого тела и занимаемая им область  $D_k, (k=1,2,3,\dots)$ , ограниченная поверхностью  $\Sigma_k$ , определены изначально. Поверхность  $\Sigma_k$  каждого тела разделяются на свободные  $\Sigma_k^{своб}$  и контактные  $\Sigma_k^{конт}$ . Вектор скорости ударника в начальный момент времени имеет величину  $U_0$ . Косинусы углов между вектором скорости и осями координат соответственно принимают значения  $l_v, m_v, n_v$ .

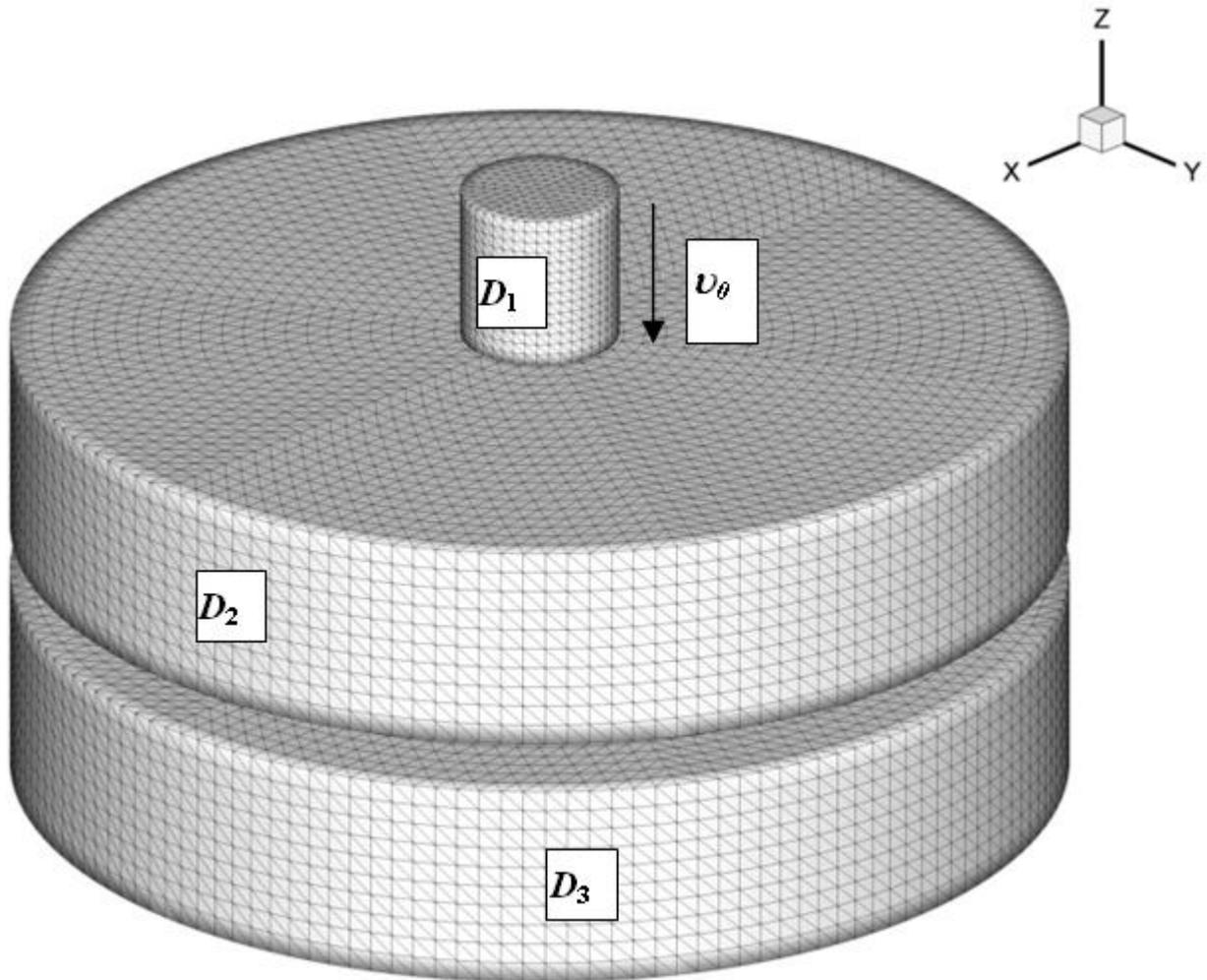


Рисунок 2.1 – Постановка задачи.

В задаче, описанной уравнениями (2.1–2.15) применяется ряд начальных ( $t=0$ ) и граничных условий.

Начальные условия ( $t=0$ ):

$$\sigma_{ij} = P = E = 0 \text{ при } (x, y, z) \in D_k; i, j = x, y, z; k = 1, 2, \dots, n; \quad (2.16)$$

$$u = v_0 l_v, v = v_0 m_v, w = v_0 n_v \text{ при } (x, y, z) \in D_1; \quad (2.17)$$

$$u = v = w = 0 \text{ при } (x, y, z) \in D_2 \cup D_3 \dots \cup D_n; \quad (2.18)$$

$$\rho = \rho_k \text{ при } (x, y, z) \in D_k; k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.19)$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости по соответствующим осям  $X, Y, Z$ .

Граничные условия задаются следующим образом:

на свободных поверхностях  $\Sigma_k^{своб}$  применяется условие отсутствия напряжений:

$$T_{nn} = T_{ns} = T_{n\tau} = 0 \text{ при } (x, y, z) \in \Sigma_k^{своб}, \quad (2.20)$$

на контактных поверхностях используется условие идеального скольжения:

$$T_{nn}^+ = T_{nn}^-, T_{n\tau}^+ = T_{n\tau}^- = T_{ns}^+ = T_{ns}^- = 0, v_n^+ = v_n^-, \quad (2.21)$$

при  $(x, y, z) \in \Sigma_k^{конт}$ .

Тут  $n$  — единичный вектор нормали к поверхности в произвольной точке поверхности,  $\tau$  и  $s$  — единичные векторы, касательные к поверхности в этой точке,  $T_n$  — вектор силы на площадке с нормалью  $n$ ,  $v$  — вектор скорости.

Нижние индексы у векторов  $T_n$  и  $v$  означают проекции на соответствующие вектора базиса; знак плюс (+) указывает, что значение параметра в материале относится к верхней границе контактной поверхности, знак минус (−) — к нижней.

Добавляя к исходной системе уравнений (2.1–2.15) начальные и граничные условия (2.16)–(2.21), мы можем полностью определить краевую задачу.

### 2.3. Численный метод расчета

В данной работе моделирование динамического взаимодействия проводится в трехмерном случае методом конечных элементов [111, 112, 113, 105, 119, 120]. В качестве конечного элемента выступает тетраэдр (рис. 2.2).

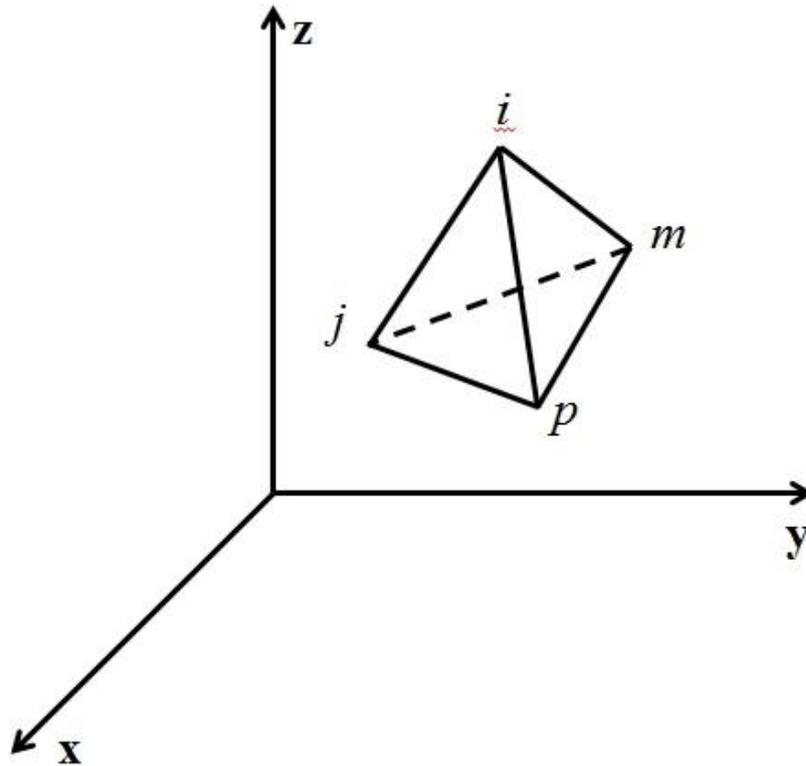


Рисунок 2.2 – Тетраэдральный элемент  $ijpm$  в системе координат  $x, y, z$ .

### 2.3.1. Уравнения движения конечного элемента

Для получения уравнений движений произвольного конечного элемента воспользуемся принципом возможных скоростей. Рассмотрим тело объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ . Тело находится под действием массовых  $F$  и поверхностных  $f_s$  сил. Для кинематически возможных скоростей  $\delta v_i$ , используя уравнение движения, получим уравнение:

$$\nabla_i \sigma^{ki} \delta v_k + (F^k - \rho a^k) \delta v_k = 0 \quad (2.22)$$

интегрируя по объему тела:

$$\int_V \nabla_i \sigma^{ki} \delta v_k dV + \int_V (F^k - \rho a^k) \delta v_k dV = 0, \quad (2.23)$$

с учетом:

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \delta v_j + \nabla_j \delta v_i), \quad \delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \delta v_j - \nabla_j \delta v_i) \quad (2.24)$$

и воспользовавшись преобразованием:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \sigma^{ki} \delta v_k dV &= \int_S \sigma^{ki} n_i \delta v_k dS - \int_V \sigma^{ki} \delta e_{ki} dV - \int_V \sigma^{ki} \delta \omega_{ki} dV = \\ &= \int_S \sigma^{ki} n_i \delta v_k dS - \int_V \sigma^{ki} \delta e_{ki} dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

( $\sigma^{ki} \delta \omega_{ki} = 0$  в силу симметрии  $\sigma^{ki}$  и антисимметрии  $\delta \omega_{ki}$ ), получаем уравнение:

$$\int_V \sigma^{ki} \delta e_{ki} dV = \int_V (F^k - \rho a^k) \delta v_k dV + \int_S \sigma^{ki} n_i \delta v_k dS, \quad (2.26)$$

представляющее принцип возможных скоростей.

Используя принцип возможных скоростей, можно получить общие уравнения движения для характерного конечного элемента расчетной области.

Рассмотрим характерный конечный элемент  $r_1$ , занимающий объем  $V_1$ , ограниченный поверхностью  $S_1$ . Локальные поля, выраженные через узловые значения, имеют вид

$$\begin{aligned} v^i &= v^{in} \psi_n(\bar{x}), \quad v_i = v_i^n \psi_n(\bar{x}), \\ a^i &= a^{in} \psi_n(\bar{x}), \quad a_i = a_i^n \psi_n(\bar{x}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где  $\psi_n(\bar{x})$  — локальные интерполяционные функции для конечного элемента  $r_1$ ,  $v^{in}$  и  $a^{in}$  — зависящие от времени компоненты скорости и ускорения в узле  $N$  элемента  $r_1$ .

Учитывая введенные аппроксимации (2.27) запишем принцип возможных скоростей (2.26) для текущего элемента

$$\begin{aligned} \int_{V_\ell} \sigma^{ji} \delta_j^k \psi_{n,j} \delta v_i^n dV &= \int_{V_\ell} F^k \psi_n \delta v_i^n dV + \int_{S_\ell} \sigma^{ki} n_i \psi_n \delta v_i^n dS - \\ &= \int_{V_\ell} \rho a^{km} \psi_n \psi_m \delta v_i^n dV \end{aligned} \quad (2.28)$$

Каждый член в (2.28) содержит вариации узловой скорости, зависящей исключительно от времени. Поэтому (2.28) можно записать так:

$$\left[ m_{nm} a^{km} + \int_{V_\ell} \sigma^{ji} \delta_j^k \psi_{n,j} dV - p_n^k \right] \delta v_i^n = 0. \quad (2.29)$$

Величина  $p_n^k$  является  $k$ -ой компонентой обобщенной силы в узле  $N$  конечного элемента  $r_1$

$$p_n^k = \int_{V_\ell} F^k \psi_n dV + \int_{S_\ell} \sigma^{ki} n_i \psi_n dS, \quad (2.30)$$

а  $m_{nm}$  — симметричная матрица размера  $N_\ell \times N_\ell$ , называемая согласованной матрицей масс элемента, и определяется выражением:

$$m_{nm} = \int_{V_\ell} \rho \psi_n \psi_m dV. \quad (2.31)$$

Суммирование производится по повторяющимся индексам по всем допустимым для них значениям:  $n, m = (1, 2, \dots, N_\ell)$ ;  $k, i, j = (1, 2, 3)$ .  $N_\ell$  — количество узлов элемента  $r_\ell$ .

Поскольку принцип возможных скоростей справедлив при произвольных движениях элемента, он должен быть справедлив и при любых значениях вариации узловых скоростей  $\delta v_i^n$ . "Разворачивая" в (2.29) суммирование по повторяющимся индексам и рассматривая каждый член, убеждаемся, что если (2.29) выполняется при произвольных  $\delta v_i^n$ , то член, находящийся внутри скобок, обращается в нуль следующим образом:

$$m_{nm} a^{km} + \int_{V_\ell} \sigma^{ji} \delta_j^k \psi_{n,j} dV = p_n^k. \quad (2.32)$$

Уравнение (2.32) является общим уравнением движения конечного элемента сплошной среды. Это система  $3 \times N_\ell$  уравнений относительно узловых скоростей и их производных по времени.

Выражение (2.32) представляет собой уравнение движения характерного конечного элемента. Для того, чтобы получить общее уравнение движения всех конечных элементов расчетной сетки обозначим как  $U^{i\Delta}$  и  $A^{i\Delta}$  глобальные значения компонент скорости и ускорения узла  $\Delta$  связанной модели. Тогда получим:

$$v^{in} = \alpha_j^i \Omega_{\Delta}^{(\ell)} U^{j\Delta}, \quad a^{in} = \alpha_j^i \Omega_{\Delta}^{(\ell)} A^{j\Delta}. \quad (2.33)$$

Глобальные значения обобщенной силы в узле  $\Delta$  связанной модели можно представить в следующем виде:

$$\wp_{\Delta}^i = \sum_{\ell} \Omega_{\Delta}^{(\ell)} \alpha_j^i p_n^j, \quad (2.34)$$

Глобальную согласованную матрицу масс всех конечных элементов можно определить из выражения:

$$M_{r\Delta} = \sum_{\ell} \Omega_r^{(\ell)} m_{nm} \Omega_{\Delta}^{(\ell)}. \quad (2.35)$$

Здесь  $\alpha_j^i = \partial \xi^i / \partial \eta^j$ , где  $\xi^i$  и  $\eta^j$  локальные и глобальные координаты, если  $\xi^i$  и  $\eta^j$  параллельны, то  $\alpha_j^i = \delta_j^i$ ; массив  $\Omega_{\Delta}^{(\ell)}$  определяется следующим образом

$$\Omega_{\Delta}^{(\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{если узел } N \text{ элемента } r_{\ell} \text{ совпадает} \\ & \text{с узлом } D \text{ связанной модели,} \\ 0, & \text{если узел } N \text{ элемента } r_{\ell} \text{ не совпадает.} \end{cases}$$

Принимая во внимание (2.34)–(2.35) можно составить глобальные уравнения движения всех конечных элементов

$$M_{r\Delta} A^{k\Delta} + R_r^k = \wp_r^k, \quad (2.36)$$

где

$$R_r^k = \sum_{\ell} \Omega_r^n \int_{V_{\ell}} \sigma^{ji} (\delta_j^k \psi_{n,j} - \psi_n \Gamma_{ij}^k) dV. \quad (2.37)$$

В выражениях (2.34)–(2.35), (2.37)  $\sum_{\ell}$  обозначает сумму по всем элементам связной модели.

### 2.3.2. Методика расчета

До блока интегрирования выполняются следующие процедуры (прил. Г):

1. Создание трехмерной геометрии каждого тела.
2. Разбиение каждого тела на конечно-элементную сетку в сеточном генераторе NETGEN [121].
3. Загрузка всех данных о сетке в программу.
4. Задание свойств материалов (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, пределы прочности на сжатие и растяжение, скорость звука, плотность и других) каждого из тел.
5. Определение начальных и граничных условий для каждого тела в расчетной области.
6. Вычисление начальной скорости для каждого из тел по каждой из осей  $X, Y, Z$ .
7. Определение начальных объёмов и масс.
8. Вычисление нулевого шага по времени.
9. Определение номеров поверхностей и нахождение смежных граней элементов.

После выполнения вышеперечисленных процедур начинает работать блок интегрирования в следующем порядке (прил. Г):

1. Определяются текущие объёмы элементов и осуществляется проверка на наличие отрицательных значений объёмов.
2. Вычисляются скорости деформаций.
3. Вычисляется динамический предел текучести.

4. Определяются напряжения и давления.
5. Происходит корректировка напряжений при выявлении пластического течения или разрушения.
6. Вычисляется предстоящий шаг по времени с применением условия Куранта.
7. Корректировка расчетной сетки после работы алгоритма удаления разрушенных элементов.
8. Определяются компоненты сосредоточенных сил в расчетных узлах, из них новые компоненты узловых скоростей, новые узловые координаты.
9. После проверки перекрытия расчетных сеток происходит корректировка скоростей и координат поверхностных узлов.

Выполнение цикла продолжается либо до наступления заранее заданного момента времени, либо до достижения заданного шага интегрирования.

### **Построение сетки**

Для построения численной сетки был использован сеточный генератор NETGEN [121].

Нет ограничений на сложность геометрии тел. Ограничение на количество конечных элементов накладываются возможностями ЭВМ, а именно ОЗУ, а не программой.

В качестве конечного элемента выступает тетраэдр, нумерация узлов осуществляется против часовой стрелки (рис. 2.2). Масса элемента равномерно распределяется между всеми его узлами. Полная масса узла  $M_i$  определяется как 0,25 от значения массы всех элементов, имеющих данный общий узел. Что позволяет правильно распределить массу конечных элементов по всем узлам расчетной сетки.

### **Начальный и текущий объемы**

Объем тетраэдра в любой момент времени определяется из координат его узла:

$$V = \frac{1}{6} \left[ \begin{aligned} & (x_j - x_i) \left[ (y_m - y_i)(z_p - z_i) - (y_p - y_i)(z_m - z_i) \right] + \\ & + (x_m - x_i) \left[ (y_p - y_i)(z_j - z_i) - (y_j - y_i)(z_p - z_i) \right] + \\ & + (x_p - x_i) \left[ (y_j - y_i)(z_m - z_i) - (y_m - y_i)(z_j - z_i) \right] \end{aligned} \right].$$

### Скорости деформаций

Скорости деформаций определяются внутренней геометрией элемента и скоростями его узлов. При симплексной модели скорости внутри каждого элемента аппроксимируются линейно относительно координат [122]. Тогда скорости элемента определяются выражениями:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z, \quad (2.38)$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z, \quad (2.39)$$

$$w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z, \quad (2.40)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$  — константы, которые определяются геометрией и узловыми скоростями. Коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$  можно найти, подставив в (2.38-2.40) соответствующую составляющую скорости и координаты узлов  $i, j, m, p$ .

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \quad u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j,$$

$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 z_m, \quad u_p = \alpha_1 + \alpha_2 x_p + \alpha_3 y_p + \alpha_4 z_p,$$

$$v_i = \alpha_5 + \alpha_6 x_i + \alpha_7 y_i + \alpha_8 z_i, \quad v_j = \alpha_5 + \alpha_6 x_j + \alpha_7 y_j + \alpha_8 z_j,$$

$$v_m = \alpha_5 + \alpha_6 x_m + \alpha_7 y_m + \alpha_8 z_m, \quad v_p = \alpha_5 + \alpha_6 x_p + \alpha_7 y_p + \alpha_8 z_p,$$

$$w_i = \alpha_9 + \alpha_{10} x_i + \alpha_{11} y_i + \alpha_{12} z_i, \quad w_j = \alpha_9 + \alpha_{10} x_j + \alpha_{11} y_j + \alpha_{12} z_j,$$

$$w_m = \alpha_9 + \alpha_{10} x_m + \alpha_{11} y_m + \alpha_{12} z_m, \quad w_p = \alpha_9 + \alpha_{10} x_p + \alpha_{11} y_p + \alpha_{12} z_p.$$

В результате чего получается двенадцать неизвестных и двенадцать уравнений. И уравнения (2.38–2.40) выражаются при помощи геометрии элемента и узловой скорости:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j + \\
& (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p] , \\
v &= \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)v_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)v_j + \\
& + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)v_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)v_p] , \\
w &= \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)w_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)w_j + \\
& (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)w_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)w_p] ,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

где

$$\begin{aligned}
a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_p & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = - \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix}, \\
V &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Циклическая перестановка индексов позволяет получить остальные константы  $(a_j, b_j, c_j, d_j, a_m, b_m, c_m, d_m, a_p, b_p, c_p, d_p)$ .

Когда скорости в элементе известны, далее определяются скорости деформаций по представленным ниже формулам:

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\
e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & e_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right);
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m + b_p u_p)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m + c_p v_p)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$e_{zz}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} (d_i w_i + d_j w_j + d_m w_m + d_p w_p)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$e_{xy}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m + c_p u_p + b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m + b_p v_p)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$e_{yz}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} (d_i v_i + d_j v_j + d_m v_m + d_p v_p + c_i w_i + c_j w_j + c_m w_m + c_p w_p)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$e_{zx}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6V^{n+\frac{1}{2}}} (b_i w_i + b_j w_j + b_m w_m + b_p w_p + d_i u_i + d_j u_j + d_m u_m + d_p u_p)^{n+\frac{1}{2}},$$

где  $V^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V^{n+1} + V^n)$ .

Выражения (2.42) являются производными линейных функций и поэтому скорости деформаций постоянны внутри каждого элемента.

### **Предел текучести**

Известно, что предел текучести конструкционных материалов зависит от скорости деформирования. С ее увеличением сопротивление большинства металлов деформированию возрастает, особенно при скоростях деформации свыше  $10^3 \dots 10^5 \text{ с}^{-1}$ . Для аппроксимации существующих в литературе экспериментальных данных по ударному нагружению [123] использовался полином шестой степени. Он описывает влияние скорости деформации материала на предел текучести  $\sigma_d$  вплоть до  $10^6 \text{ с}^{-1}$  (рис. 2.3).

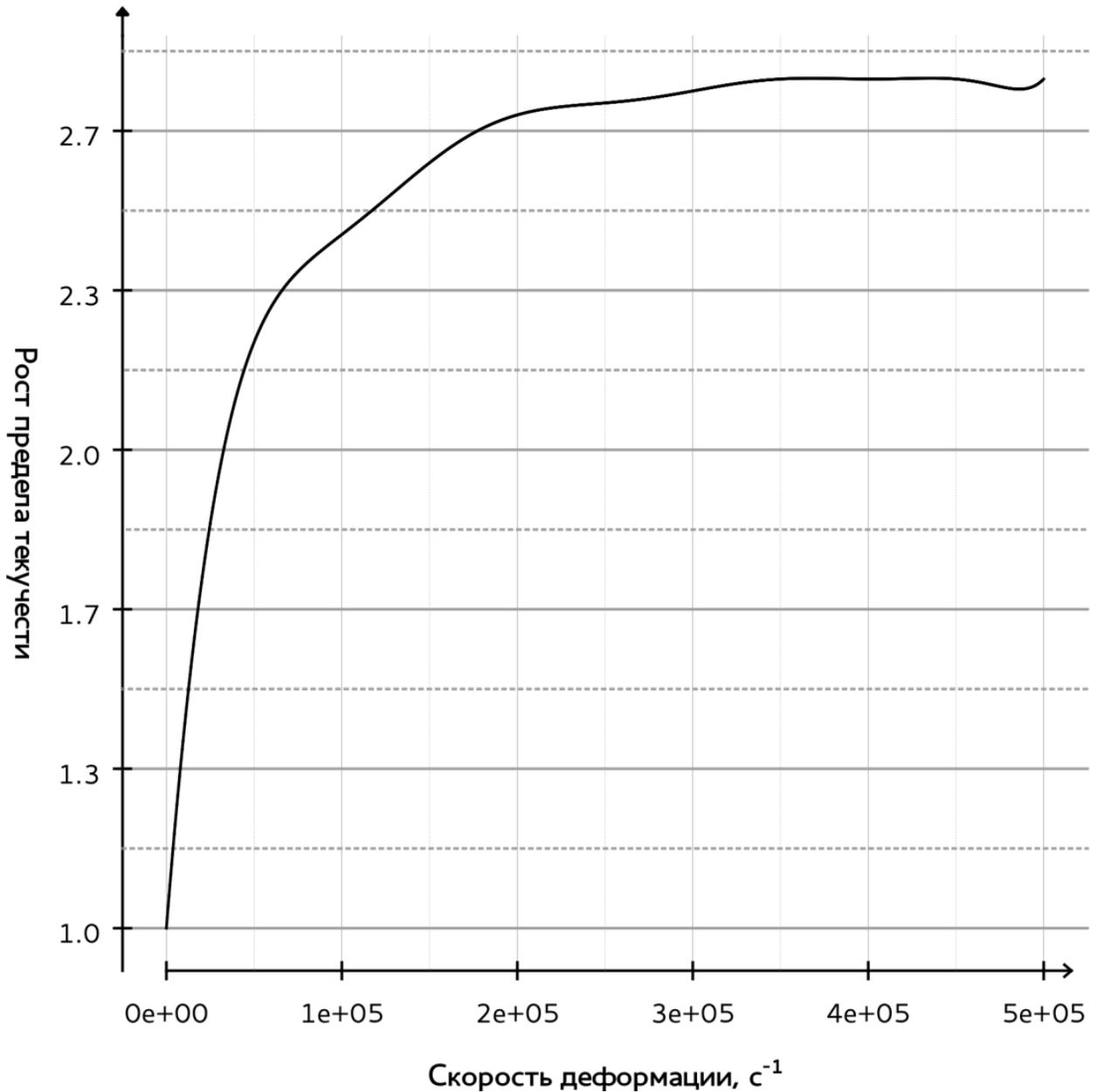


Рисунок 2.3 – Влияние скорости деформации на предел текучести материала

### Напряжения и давления

На значение напряжений в конечных оказывают влияние величины скорости деформаций, внутренней энергии, а также свойства материала [122].

Стали и сплавы были описаны упругопластической моделью поведения. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}^{n+1}$ ,  $\sigma_{yy}^{n+1}$ ,  $\sigma_{zz}^{n+1}$ ,  $\sigma_{xy}^{n+1}$ ,  $\sigma_{yz}^{n+1}$ ,  $\sigma_{zx}^{n+1}$  выражаются через девиатор напряжений  $S_{xx}^{n+1}$ ,  $S_{yy}^{n+1}$ ,  $S_{zz}^{n+1}$ ,  $S_{xy}^{n+1}$ ,  $S_{yz}^{n+1}$ ,  $S_{zx}^{n+1}$  гидростатическое

давление  $P^{n+1}$ , тензорную вязкость  $Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $Q_{yy}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $Q_{zz}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $Q_{xy}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $Q_{yz}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $Q_{zx}^{n+\frac{1}{2}}$  и искусственную вязкость  $Q^{n+\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{n+1} &= S_{xx}^{n+1} + Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}} - \left( P^{n+1} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 \sigma_{yy}^{n+1} &= S_{yy}^{n+1} + Q_{yy}^{n+\frac{1}{2}} - \left( P^{n+1} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 \sigma_{zz}^{n+1} &= S_{zz}^{n+1} + Q_{zz}^{n+\frac{1}{2}} - \left( P^{n+1} + Q^{n+\frac{1}{2}} \right), \\
 \sigma_{xy}^{n+1} &= S_{xy}^{n+1} + Q_{xy}^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \sigma_{yz}^{n+1} &= S_{yz}^{n+1} + Q_{yz}^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \sigma_{zx}^{n+1} &= S_{zx}^{n+1} + Q_{zx}^{n+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Значения составляющих девиатора напряжений записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_{xx}^{n+1} &= S_{xx}^n + 2G \left( e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{xx}^n, \\
 S_{yy}^{n+1} &= S_{yy}^n + 2G \left( e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{yy}^n, \\
 S_{zz}^{n+1} &= S_{zz}^n + 2G \left( e_{zz}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) + \Delta_{zz}^n.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Значение сдвиговых напряжений определяется аналогичным образом:

$$\begin{aligned}
S_{xy}^{n+1} &= S_{xy}^n + Ge_{xy}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{xy}^n, \\
S_{yz}^{n+1} &= S_{yz}^n + Ge_{yz}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{yz}^n, \\
S_{zx}^{n+1} &= S_{zx}^n + Ge_{zx}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{zx}^n,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Здесь  $G$  — сдвиговой модуль упругости, первый член  $S_{ii}^n$  — напряжение в предыдущий момент времени, второй член — приращение напряжения, вызванное приращением деформаций на данном временном интервале, остальные члены выражения ( $\Delta_{xx}^n$ ,  $\Delta_{yy}^n$ ,  $\Delta_{zz}^n$ ) являются поправкой на поворот элемента, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\Delta_{xx}^n &= -\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left( \begin{aligned} &S_{xy}^n [c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m + c_p u_p - b_i v_i - b_j v_j - b_m v_m - b_p v_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{zx}^n [d_i u_i + d_j u_j + d_m u_m + d_p u_p - b_i w_i - b_j w_j - b_m w_m - b_p w_p]^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right), \\
\Delta_{yy}^n &= -\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left( \begin{aligned} &S_{xy}^n [b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m + b_p v_p - c_i u_i - c_j u_j - c_m u_m - c_p u_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{yz}^n [d_i v_i + d_j v_j + d_m v_m + d_p v_p - c_i w_i - c_j w_j - c_m w_m - c_p w_p]^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right), \\
\Delta_{zz}^n &= -\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \left( \begin{aligned} &S_{zx}^n [b_i w_i + b_j w_j + b_m w_m + b_p w_p - d_i u_i - d_j u_j - d_m u_m - d_p u_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{yz}^n [c_i w_i + c_j w_j + c_m w_m + c_p w_p - d_i v_i - d_j v_j - d_m v_m - d_p v_p]^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right), \\
\Delta_{xy}^n &= -\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2} \left( \begin{aligned} &S_{xx}^n [b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m + b_p v_p - c_i u_i - c_j u_j - c_m u_m - c_p u_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{zx}^n [d_i v_i + d_j v_j + d_m v_m + d_p v_p - c_i w_i - c_j w_j - c_m w_m - c_p w_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{yy}^n [c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m + c_p u_p - b_i v_i - b_j v_j - b_m v_m - b_p v_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ &+ S_{yz}^n [d_i u_i + d_j u_j + d_m u_m + d_p u_p - b_i w_i - b_j w_j - b_m w_m - b_p w_p]^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right),
\end{aligned}$$

$$\Delta_{yz}^n = -\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2} \left( \begin{array}{l} S_{xy}^n [b_i w_i + b_j w_j + b_m w_m + b_p w_p - d_i u_i - d_j u_j - d_m u_m - d_p u_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ + S_{yy}^n [c_i w_i + c_j w_j + c_m w_m + c_p w_p - d_i v_i - d_j v_j - d_m v_m - d_p v_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ + S_{zx}^n [b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m + b_p v_p - c_i u_i - c_j u_j - c_m u_m - c_p u_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ + S_{zz}^n [d_i v_i + d_j v_j + d_m v_m + d_p v_p - c_i w_i - c_j w_j - c_m w_m - c_p w_p]^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right),$$

$$\Delta_{zx}^n = -\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2} \left( \begin{array}{l} S_{xx}^n [b_i w_i + b_j w_j + b_m w_m + b_p w_p - d_i u_i - d_j u_j - d_m u_m - d_p u_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ + S_{xy}^n [c_i w_i + c_j w_j + c_m w_m + c_p w_p - d_i v_i - d_j v_j - d_m v_m - d_p v_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ + S_{yz}^n [c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m + c_p u_p - b_i v_i - b_j v_j - b_m v_m - b_p v_p]^{n+\frac{1}{2}} + \\ + S_{zz}^n [d_i u_i + d_j u_j + d_m u_m + d_p u_p - b_i w_i - b_j w_j - b_m w_m - b_p w_p]^{n+\frac{1}{2}} \end{array} \right).$$

Выражения (2.43)–(2.44) задают величины напряжений и корректируются при нарушении критерия Мизеса, касающегося текучести. Эквивалентная формула для напряжений имеет вид:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}(S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2) + 3(S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{xz}^2)}. \quad (2.46)$$

Если  $\bar{\sigma} > \sigma_d$ , то величины напряжений из (2.44)–(2.45) корректируются умножением на  $\sigma_d/\bar{\sigma}$ . Гидростатическое давление  $P$  определяется уравнением состояния Ми-Грюнайзена (2.6).

В случае анизотропного тела задача решается в полных напряжениях, которые находятся из следующих соотношений

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + C_{ijkl} e_{kl}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \text{ где } i, j, k, l = x, y, z.$$

В методике заложена схемная вязкость, но может быть использована искусственная вязкость (2.47) и тензорная вязкость (2.48):

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = c_L \rho_0 c_s h^{n+\frac{1}{2}} |\dot{\varepsilon}_v| + c_0^2 \rho \left( h^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 (\dot{\varepsilon}_v)^2 \quad \text{при } \dot{\varepsilon}_v < 0 \quad (2.47)$$

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{при } \dot{\varepsilon}_v \geq 0$$

Здесь  $c_s$  и  $\rho$  — скорость звука и плотность материала соответственно,  $h$  — минимальная высота в тетраэдре,  $\dot{\varepsilon}_v = \dot{V}/V$ , а  $c_L$  и  $c_0$  — безразмерные коэффициенты.

$$\begin{aligned} Q_{xx}^{n+\frac{1}{2}} &= 2\nu \left[ e_{xx}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right], & Q_{xy}^{n+\frac{1}{2}} &= \nu e_{xy}^{n+\frac{1}{2}}, \\ Q_{yy}^{n+\frac{1}{2}} &= 2\nu \left[ e_{yy}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right], & Q_{yz}^{n+\frac{1}{2}} &= \nu e_{yz}^{n+\frac{1}{2}}, \\ Q_{zz}^{n+\frac{1}{2}} &= 2\nu \left[ e_{zz}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right], & Q_{zx}^{n+\frac{1}{2}} &= \nu e_{zx}^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где  $\nu = c_H \rho c_s h_{\min}$ .

### Разрушение элемента

Считается, что разрушение материалов при интенсивном динамическом нагружении выполняется согласно следующим правилам [124]:

— В конечных элементах, где критерий разрушения выполняется в условиях отрицательной объемной деформации ( $e_{kk} \leq 0$ ), считается, что материал становится фрагментированной средой и описывается гидродинамической моделью, при этом  $\sigma_{ii} = -P$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

— В конечных элементах, где критерий разрушения выполняется в условиях положительной объемной деформации ( $e_{kk} > 0$ ), материал полагается полностью разрушенным и компоненты тензора напряжений становятся равными нулю.

Для описания разрушения металлов используется критерий, учитывающий предельную величину интенсивности пластических деформаций (2.9).

### Сосредоточенные силы

Сосредоточенные силы, оказывающие воздействие на сосредоточенные массы в расчетных узлах, вычисляются определением сил, статически эквивалентных распределенным напряжениям в элементах. Соотношения для их нахождения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{xi}^n &= -\frac{1}{6} \left( b_i \sigma_{xx} + c_i \sigma_{xy} + d_i \sigma_{xz} \right)^n, \\ F_{yi}^n &= -\frac{1}{6} \left( c_i \sigma_{yy} + b_i \sigma_{xy} + d_i \sigma_{yz} \right)^n, \\ F_{zi}^n &= -\frac{1}{6} \left( d_i \sigma_{zz} + c_i \sigma_{yz} + b_i \sigma_{xz} \right)^n. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Искомый вектор сил в  $i$ -м узле  $\bar{F}_{xi}^n$ ,  $\bar{F}_{yi}^n$ ,  $\bar{F}_{zi}^n$  определяется сложением всех сил, действующих со стороны каждого элемента, включающего данный узел, в  $n$ -й шаг по времени.

### Уравнения движения

Уравнения движения интегрируются в предположении, что скорость постоянна на каждом временном интервале [122]. Ускорение  $i$ -го узла по каждому из направлений имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^n &= \bar{F}_{xi}^n / \bar{M}_i, \\ \dot{v}_i^n &= \bar{F}_{yi}^n / \bar{M}_i, \\ \dot{w}_i^n &= \bar{F}_{zi}^n / \bar{M}_i. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Новое значение скорости на следующем шаге по времени:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n + \dot{u}_i^{n+1} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\
v_i^{n+1} &= v_i^n + \dot{v}_i^{n+1} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\
w_i^{n+1} &= w_i^n + \dot{w}_i^{n+1} \Delta t^{n+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{2.51}$$

где  $u_i^n, v_i^n, w_i^n$  — скорость в предыдущем временном интервале, а  $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$  — среднее значение двух интервалов интегрирования в точке  $t$ . Новое местоположение узла по осям  $x, y, z$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_i^{n+1} &= x_i^n + u_i^{n+1} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\
y_i^{n+1} &= y_i^n + v_i^{n+1} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}, \\
z_i^{n+1} &= z_i^n + w_i^{n+1} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.52}$$

Новый шаг по времени определяется из условия устойчивости Куранта:

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}} = \alpha \frac{h^{n+1}}{\sqrt{g^2} + \sqrt{g^2 + c_s^2}},
\tag{2.53}$$

где  $g^2 = \frac{c_0^2 Q^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_0}$ ,  $c_s = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho}$ , коэффициент  $\alpha$  определяется исходя из возможных скоростей взаимодействий тел, а также из начальных и граничных условий задачи ( $0,1 < \alpha < 1$ ).

### **Расчет контактных границ**

Как правило, существующие программные комплексы используют алгоритмы «элемент - узел» и «узел - узел» для определения возможного проникания одного тела в другое. В данной работе предлагается отличающийся скоростью работы и надежностью алгоритм типа «элемент - элемент» (рис. 2.4.) в полной трехмерной постановке.

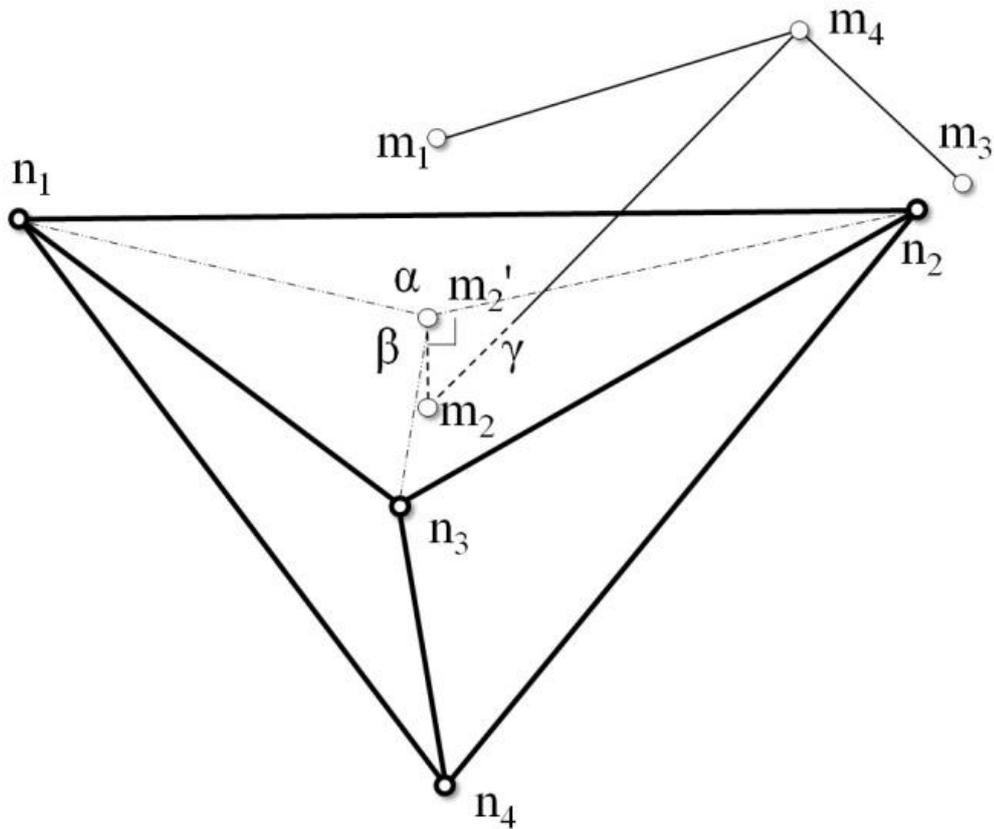


Рисунок 2.4 – Общая схема контактного взаимодействия «элемент-элемент»

Проверка проникания поверхностного элемента одного тела в поверхностный элемент другого сводится к задаче проверки пересечения трех ребер тетраэдра с треугольной поверхностной гранью тетраэдра другого тела:

$$\mu_i = \frac{Ax_4 + By_4 + Cz_4}{A(x_4 - x_i) + B(y_4 - y_i) + C(z_4 - z_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.54)$$

где

$$A = y_1 \cdot (z_2 - z_3) + y_2 \cdot (z_3 - z_1) + y_3 \cdot (z_1 - z_2),$$

$$B = z_1 \cdot (x_2 - x_3) + z_2 \cdot (x_3 - x_1) + z_3 \cdot (x_1 - x_2),$$

$$C = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2),$$

$$D = x_1 \cdot (y_3 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_3) + y_1 \cdot (z_3 \cdot x_2 - z_2 \cdot x_3) + z_1 \cdot (x_3 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_3).$$

Здесь  $A, B, C, D$  — коэффициенты уравнения  $Ax + By + Cz + D = 0$ , описывающего в пространстве плоскость каждой поверхностной грани конечного элемента, образуемую узлами  $n_1, n_2, n_3$  (рис. 2.3.),  $x_4, y_4, z_4$  —

координаты внутреннего узла рассматриваемого тетраэдра,  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — координаты поверхностных узлов  $m_1, m_2, m_3$  соответственно.

Если коэффициент  $0 < \mu_i < 1$ , то соответствующее ребро проникло сквозь поверхностную грань конечного элемента.

Поскольку точка пересечения ребра тетраэдра с плоскостью может находиться и вне грани  $n_1 n_2 n_3$ , происходит проверка принадлежности точки пересечения соответствующему треугольнику:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi. \quad (2.55)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные отрезками  $m'_2 n_1$  и  $m'_2 n_2, m'_2 n_2$  и  $m'_2 n_3, m'_2 n_3$  и  $m'_2 n_1$  соответственно. При равенстве суммы углов  $2\pi$  точка лежит внутри грани данного тетраэдра. Так как через одну плоскость могут проникнуть несколько ребер тетраэдра, но само ребро может попасть не более чем в один треугольник в пространстве, то организовывая цикл перебора всех возможных взаимодействий по узлам  $m_1, m_2, m_3$  каждого тела, можно применять параллельные вычисления.

Для устранения пересечений производится изменение значений компонент векторов скоростей и координат граничных узлов с использованием следующей схемы. Рассмотрим узел  $s$  в последовательные моменты времени (рис. 2.5). За шаг  $\Delta t$  узел  $s$  перемещается из положения  $A$  в положение  $B$  в соответствии с обычными уравнениями движения. Поскольку скорость для каждого шага по времени  $\Delta t$  постоянна, то узел движется по прямой. Перемещаясь в положение  $B$ , узел пересекает элемент граничной поверхности, образованный узлами  $i, j, m$ . В соответствии с моделью скольжения поверхностей без трения, узел  $s$  сносится на граничную поверхность по нормали (положение  $C$ ) [122].

Изменение количества движения узла  $s$  в нормальном направлении определяется соотношением:

$$J_s = m_s \Delta \mathcal{G}_s^n, \quad (2.56)$$

где  $m_s$  — масса узла  $s$ ,  $\Delta \mathcal{G}_s^n$  — нормальное изменение скорости данного узла.

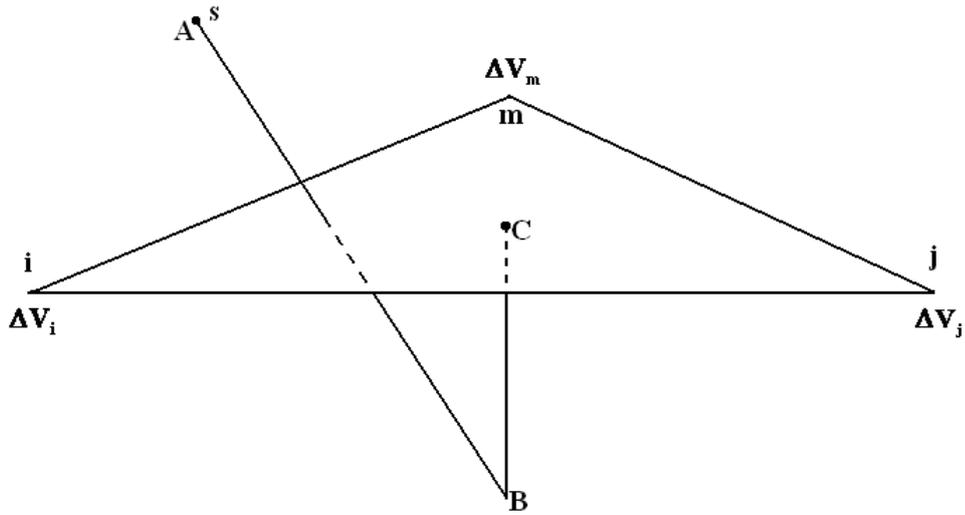


Рисунок 2.5 – Корректировка узла.

Импульс  $J_s$  передается трем узлам элемента  $i, j, m$ . Доли импульса, передаваемые узлам треугольного элемента, обозначим  $R_i = J_i/J_s$ ,  $R_j = J_j/J_s$ ,  $R_m = J_m/J_s$ , где  $J_i = m_i \Delta \mathcal{G}_i^n$ ,  $J_j = m_j \Delta \mathcal{G}_j^n$ ,  $J_m = m_m \Delta \mathcal{G}_m^n$ ,  $m_i, m_j, m_m, \Delta \mathcal{G}_i^n, \Delta \mathcal{G}_j^n, \Delta \mathcal{G}_m^n$  — изменение импульса, масса и изменение нормальных скоростей узлов  $i, j$  и  $m$ , соответственно.

Тогда для определения  $\Delta \mathcal{G}_i^n, \Delta \mathcal{G}_j^n, \Delta \mathcal{G}_m^n$  имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}_i^n &= R_i m_s \Delta \mathcal{G}_s^n / m_i, \\ \Delta \mathcal{G}_j^n &= R_j m_s \Delta \mathcal{G}_s^n / m_j, \\ \Delta \mathcal{G}_m^n &= R_m m_s \Delta \mathcal{G}_s^n / m_m. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Для определения  $\Delta \mathcal{G}_i^n, \Delta \mathcal{G}_j^n, \Delta \mathcal{G}_m^n$  необходимо определить доли момента  $R_i, R_j, R_m$  и изменение скорости узла  $s$  —  $\Delta \mathcal{G}_s^n$ . Доли импульса  $R_i, R_j, R_m$  находятся из условий сохранения количества движения и момента количества движения.

Изменение скорости узла  $s$  определяется из условия равенства нормальных скоростей данного узла и поверхности элемента в точке  $C$ .

Для определения скорости поверхности элемента в положении  $C$  используется линейная аппроксимация. Тогда выражение для скорости поверхности элемента в направлении  $x$  имеет вид:

$$u_c = q_i u_i + q_j u_j + q_m u_m, \quad (2.58)$$

где  $q_i = A_{ims} / A_{ijm}$ .

В данной формуле  $A_{ijm}$  является площадью треугольного элемента,  $A_{ims}$  — площадью треугольного элемента состоящего из узлов  $i$ ,  $m$ ,  $s$  (в положении  $C$ ). Аналогично определяются константы  $q_i$  и  $q_m$ . Другие компоненты скорости ( $v_c$  и  $w_c$ ) определяются из выражения, аналогичного (2.58).

Приравнявая нормальные скорости узла  $s$  и поверхности элемента в положении  $C$ , и используя (2.57), находим

$$\Delta \mathcal{G}_s^n = \frac{\mathcal{G}_c^n - \mathcal{G}_s^n}{1 + q_i R_i m_s / m_i + q_j R_j m_s / m_j + q_m R_m m_s / m_m}, \quad (2.59)$$

где  $\mathcal{G}_c^n$  и  $\mathcal{G}_s^n$  — нормальная скорость поверхности элемента и скорость узла  $s$ , нормальная к поверхности элемента.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s^n &= Au_s + Bv_s + Cw_s, \\ \mathcal{G}_c^n &= Au_c + Bv_c + Cw_c. \end{aligned} \quad (2.60)$$

В уравнениях (2.60)  $A$ ,  $B$  и  $C$  — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности элемента.

Таким образом, из (2.59), учитывая (2.58) и (2.60), определяются  $\Delta \mathcal{G}_s^n$ . Затем по (2.57) вычисляются  $\Delta \mathcal{G}_i^n$ ,  $\Delta \mathcal{G}_j^n$  и  $\Delta \mathcal{G}_m^n$ .

## 2.4. Тестовые исследования

Для проверки адекватности модели и численной методики при моделировании задач ударного взаимодействия были проведены численные эксперименты и сравнение результатов с экспериментальными данными.

В связи с большим количеством работ по проблеме удара по жесткой преграде, были проведены численные эксперименты для проверки численной методики. Рассмотрим задачу о нормальном ударе цилиндрического стержня длины  $L_0 = 23,47$  мм и диаметра  $D_0 = 7,62$  мм по абсолютно твердой преграде со скоростью  $v_0$ . Материал стержня — сталь марки Ст3.

В табл. 2.1 приведены полученные результаты расчетов в сравнение с экспериментом и данными расчетов из работ М.Л. Уилкинса [124] по остаточной длине ударника при различных скоростях удара.

Таблица 2.1 – Сравнение экспериментальных и численных результатов по тесту Тейлора

$v_0$ , м/с	Эксперимент , $L/L_0$	Уилкинс М.Л., $L/L_0$	Кобенко С.В. [117], $L/L_0$	EFES, $L/L_0$	Погрешность, $\delta$ , %
175	0,911	0,911	0.915	0,908	0,3
252	0,842	0,842	0.839	0,831	1,3
311	0,766	0,766	0.760	0,767	0,1
402	0,635	0,667	0.619	0,665	4,7

В таблице  $\delta$  является относительной погрешностью проведенных расчетов в сравнение с экспериментами. Относительная погрешность рассчитывалась по следующей формуле

$$\delta = \frac{X_{\text{экс}} - X_{\text{расч}}}{X_{\text{экс}}}, \quad (2.61)$$

где  $X$  — сравниваемый параметр.

Сопоставление проведенного численного расчета, эксперимента и численного расчета, проделанного Уилкинсом М.Л., показывает хорошее совпадение при данных условиях соударения, где  $\delta$  не превышает 5%. На рис. 2.6 представлена расчетная объемная конфигурация ударника при начальной скорости удара 402м/с в момент времени 27мкс.

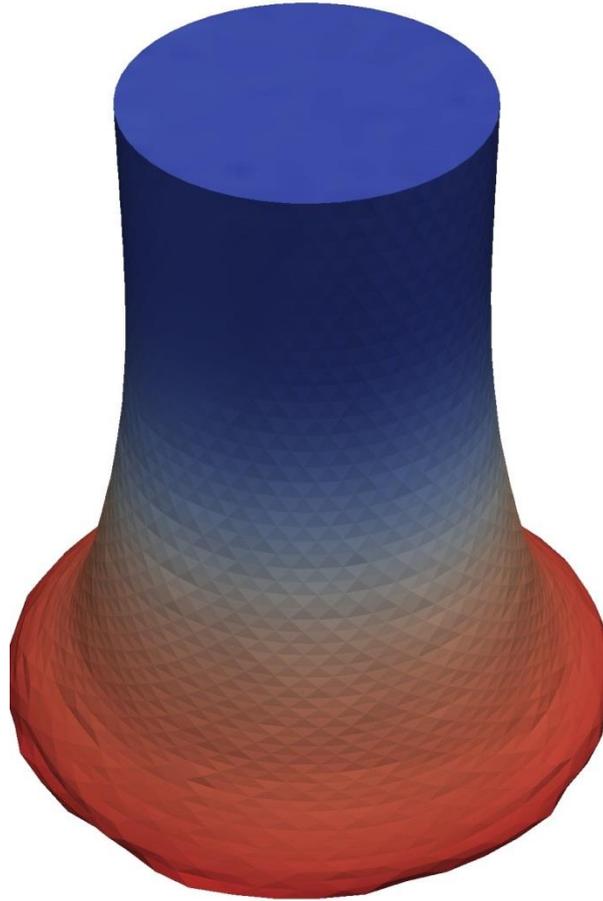


Рисунок 2.6 – Объемная конфигурация.  $v_0 = 402\text{м/с}$ ,  $t = 27\text{мкс}$ .

В рамках тестирования методики и моделей поведения было рассмотрено нормальное ( $\alpha = 0^\circ$ ) взаимодействие стальных компактных цилиндров (диаметр цилиндра  $d_0$  равен его высоте  $h_0$ ) массой  $m = 10$  г ( $d_0 = h_0 = 11.8$  мм) и  $m = 20$  г ( $d_0 = h_0 = 14.8$  мм) с анизотропными пластинами.

Материал цилиндров имеет следующие физико-механические характеристики: плотность  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>, модуль сдвига  $G = 79$  ГПа,

динамический предел текучести  $\sigma_d = 1$  ГПа, константы уравнения состояния  $K_0 = 1.91$ ,  $K_1 = 153$  ГПа,  $K_2 = 176$  ГПа,  $K_3 = 53.1$  ГПа. В качестве преград использовались транстропные пластины из органопластика  $\rho = 1350$  кг/м<sup>3</sup>. В расчетах моделировались условия экспериментов, проведенных в ФНПЦ “Алтай”, г. Бийск.

В табл. 2.2 приведены результаты экспериментов и расчетов при взаимодействии ударника массой 20 г с транстропной преградой. В таблицах и далее по тексту введены следующие обозначения:  $h$  — толщина преграды,  $v_0$  — начальная скорость ударника,  $v_1$  — запреградная скорость ударника,  $\delta_v$  — относительное расхождение по запреградной скорости в эксперименте и расчете.

Таблица 2.2 – Сравнение численных и экспериментальных данных по пробитию транстропной преграды

$h$ , мм	$v_0$ , м/с	Эксперимент	А.В. Радченко [118]	EFES	$\delta_v$ , %
		$v_1$ , м/с	$v_1$ , м/с	$v_1$ , м/с	
26	1054	698	640	643	7.9
26	1077	695	638	641	7.8
18	1012	897	836	844	5.9
18	956	838	792	788	6.0

Сравнение численных и экспериментальных результатов позволяет сделать вывод, что предложенная модель интегрально удовлетворительно описывает процесс пробития транстропных пластин. Отклонения расчетных значений запреградных скоростей от экспериментальных значений не превышает 8%.

### **3. ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОРАЖАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ С РАЗНЕСЕННЫМИ ПРЕГРАДАМИ И КУМУЛЯТИВНЫМИ БОЕПРИПАСАМИ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ**

В первом подразделе раздела 3 представлены результаты экспериментальных и численных исследований взаимодействия металлических ударников из стали и алюминия с разнесенными преградами. Проведено сравнение расчетных данных и данных эксперимента. Это сделано, чтобы показать, что разработанная методика расчета и предложенная математическая модель позволяют проводить расчеты подобных задач.

Во втором подразделе данного раздела рассмотрено взаимодействие стальных ударников различной формы, но одинаковой массы с ручной противотанковой гранатой. Показано влияние формы ударника на его проникающую способность.

#### **3.1. Исследование разрушения разнесенных преград при ударе**

В подразделе приведены результаты численного моделирования ударного взаимодействия металлических ударников с разнесенными стальными преградами и их сопоставление с данными, полученными из эксперимента. Получены данные о деформации и разрушении металлов при скоростях взаимодействия 50–3000 м/с. [125]. Произведено сопоставление расчетных данных с полученными экспериментальными результатами [126]. Модель поведения металлических материалов описана в разделе 2.

В эксперименте было исследовано взаимодействие ударника в форме шара с двумя пластинами разнесенной преграды. Форма ударника — шар, материал — сталь ШХ15, начальная скорость — 616 м/с. Расстояние между

преградами составляло 400 мм, материал преград — сталь марки 08, толщина — 6мм, закрепление — по периметру. Датчиками регистрировалась запреградная скорость ударника после выхода из первой преграды. После взаимодействия ударника со второй преградой в ней был образован кратер. Сквозное пробитие преграды зарегистрировано не было. На рис. 3.1 показан общий вид тыльной поверхности первой преграды после проникания ударника, а на рис. 3.2 — кратер, образовавшийся после взаимодействия ударника с последней преградой.



Рисунок 3.1 – Тыльная поверхность первой преграды после взаимодействия.

При численном моделировании размерность сетки составила  $2,5 \cdot 10^6$  тетраэдров. Был использован алгоритм удаления разрушенных элементов из расчетной сетки описанный в разделе 2. При разрушении взаимодействующих тел, их массы сохранялись. Общий вид тыльной поверхности первой преграды после взаимодействия с ударником при численном моделировании представлен на рис. 3.3, а второй преграды — на рис. 3.4. В расчете запреградная скорость

ударника составила 270м/с, в эксперименте 285м/с., расхождение составило 5,3%.



Рисунок 3.2 – Внешний вид кратера на лицевой поверхности второй преграды.

Было проведено сравнение по такому интегральному показателю как диаметр отверстия в первой преграде, при экспериментальных исследованиях было получено значение 13,0 мм, а при численном моделировании в программном комплексе EFES — 13,6 мм, относительное расхождение составило 4,6%. Сравнение глубин кратеров во второй преграде в эксперименте — 2,4мм и расчете — 3,0мм показало расхождение 25%.



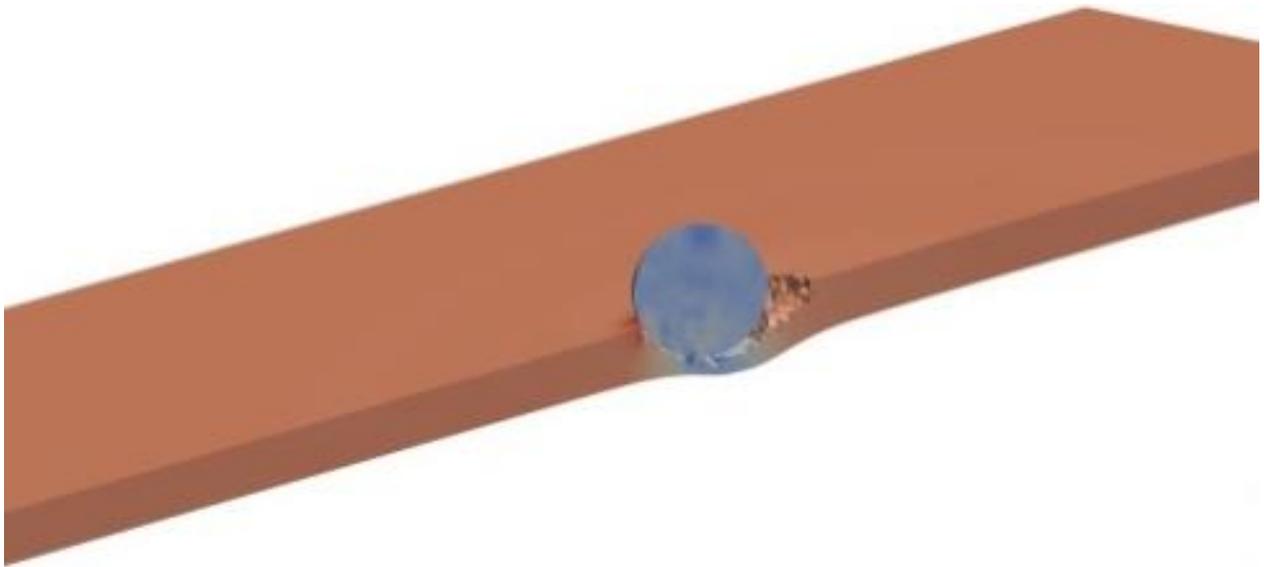
Рисунок 3.3 – Численные результаты внешнего вида тыльной поверхности первой преграды после пробития.



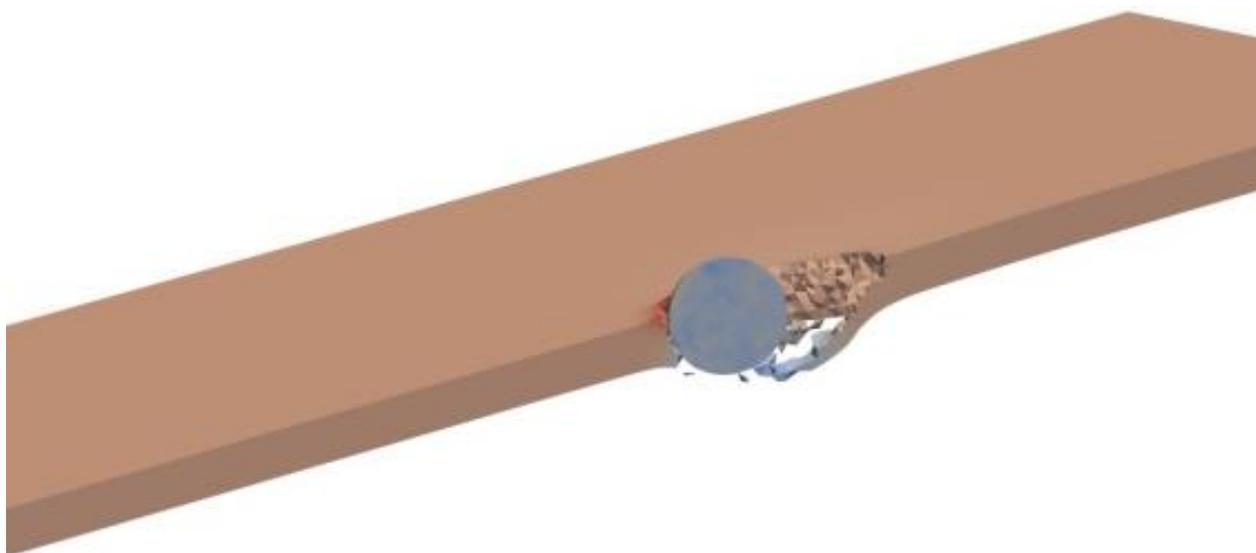
Рисунок 3.4 – Внешний вид кратера на лицевой поверхности второй преграды при численном моделировании.

Было проведено исследование взаимодействия сферического ударника из стали ШХ15 диаметром 12,7 мм с преградой из алюминия Д16Т толщиной 4,9 мм. Начальная скорость ударника 1001 м/с, угол взаимодействия с преградой — 60 градусов. На рис. 3.5 в сечении, в последовательные моменты времени представлен процесс взаимодействия ударника с преградой. Результаты численного эксперимента наглядно иллюстрируют динамику разрушения преграды и формирование осколочного поля на тыльной поверхности преграды.

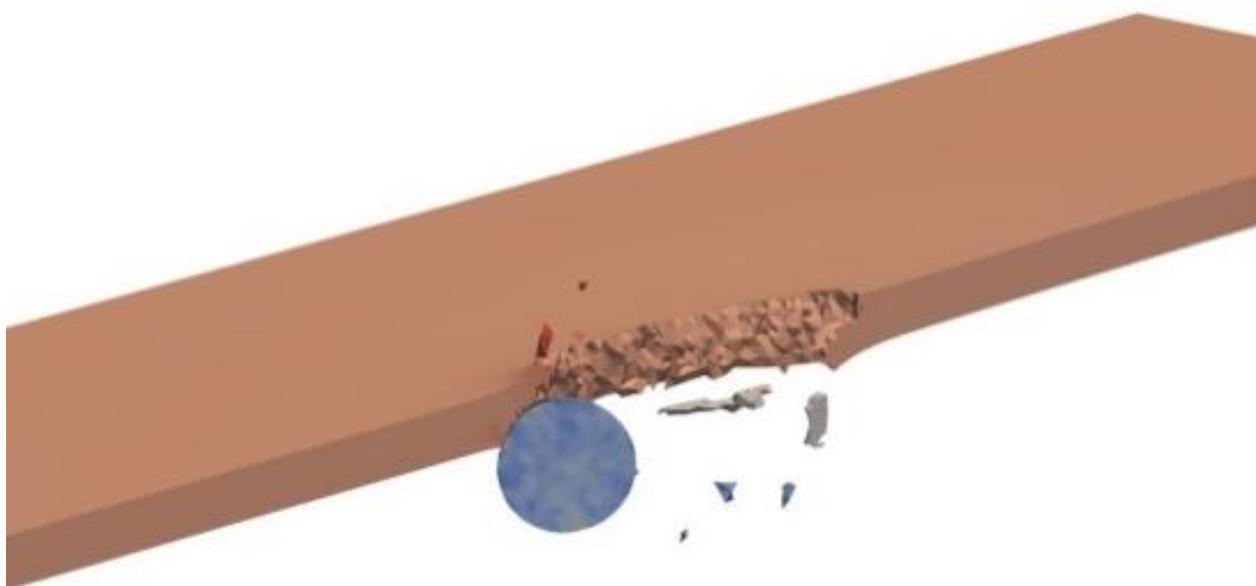
Рис. 3.6 показывает внешний вид отверстия, возникающего в результате взаимодействия преграды с ударником в эксперименте и численном расчете. Было проведено сравнение интегральных показателей, таких как диаметр отверстия в преграде (эксперимент — 26,6 мм, расчет — 26,9 мм), относительное расхождение  $\delta=1,1\%$  и значения запреградной скорости ударника (эксперимент — 843 м/с, расчет — 846 м/с), относительное расхождение  $\delta=0,4\%$ . Было получено отличное качественное и количественное соответствие экспериментальных и численных результатов.



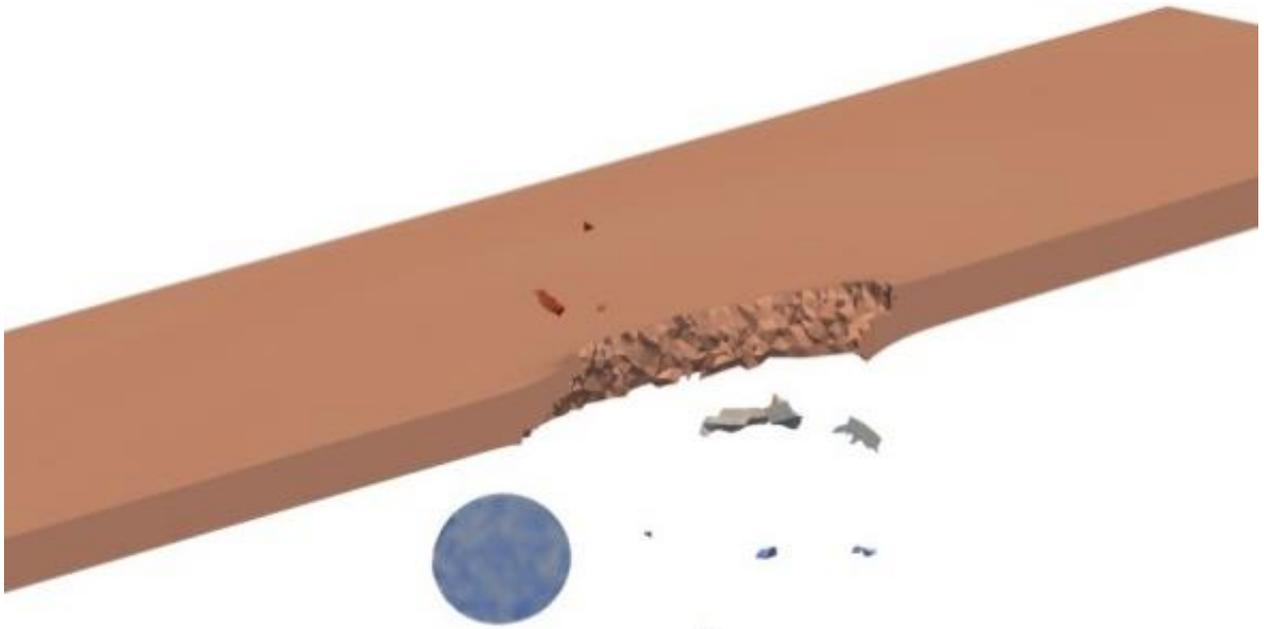
10 мкс



20 мкс



40 мкс



60мкс

Рисунок 3.5 – Расположение ударника и преграды в последовательные моменты времени.



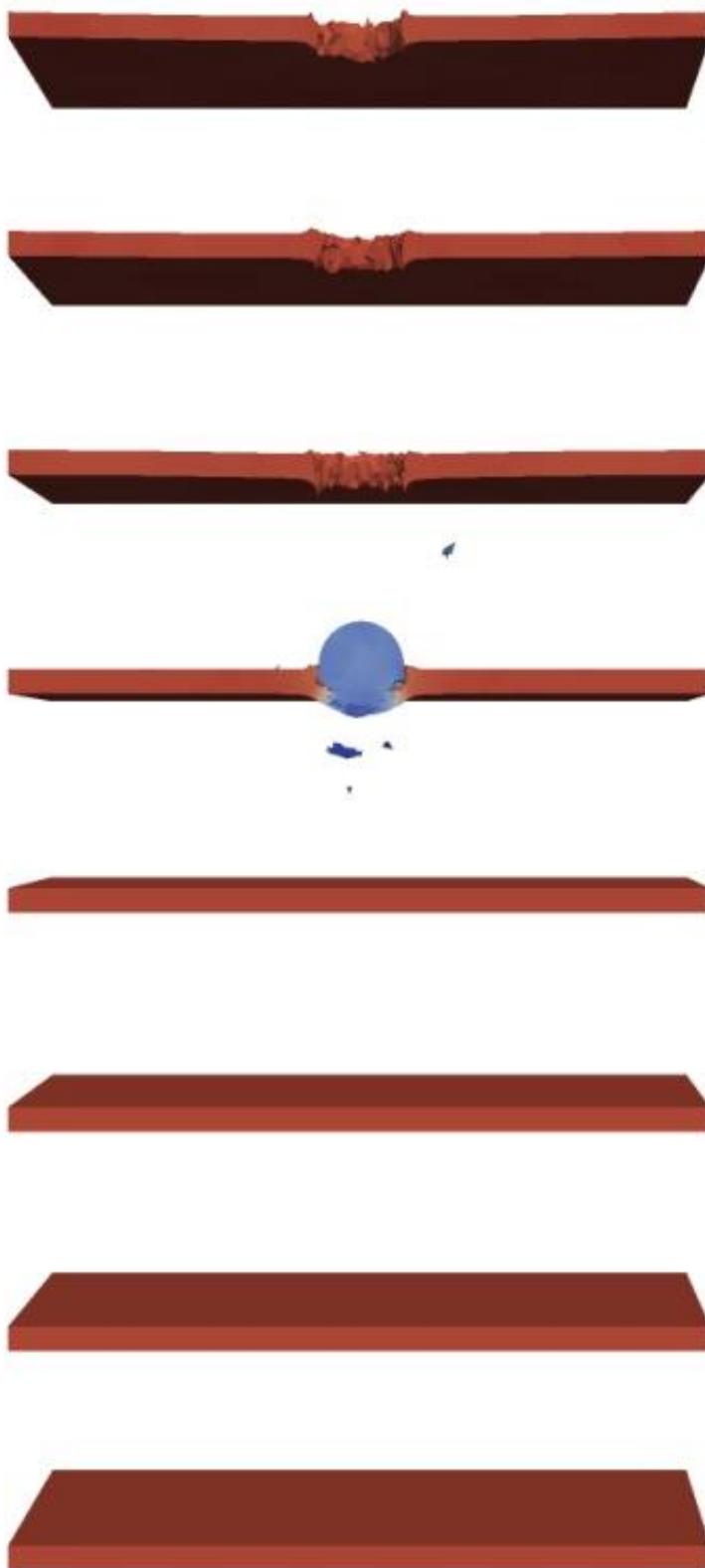
a)



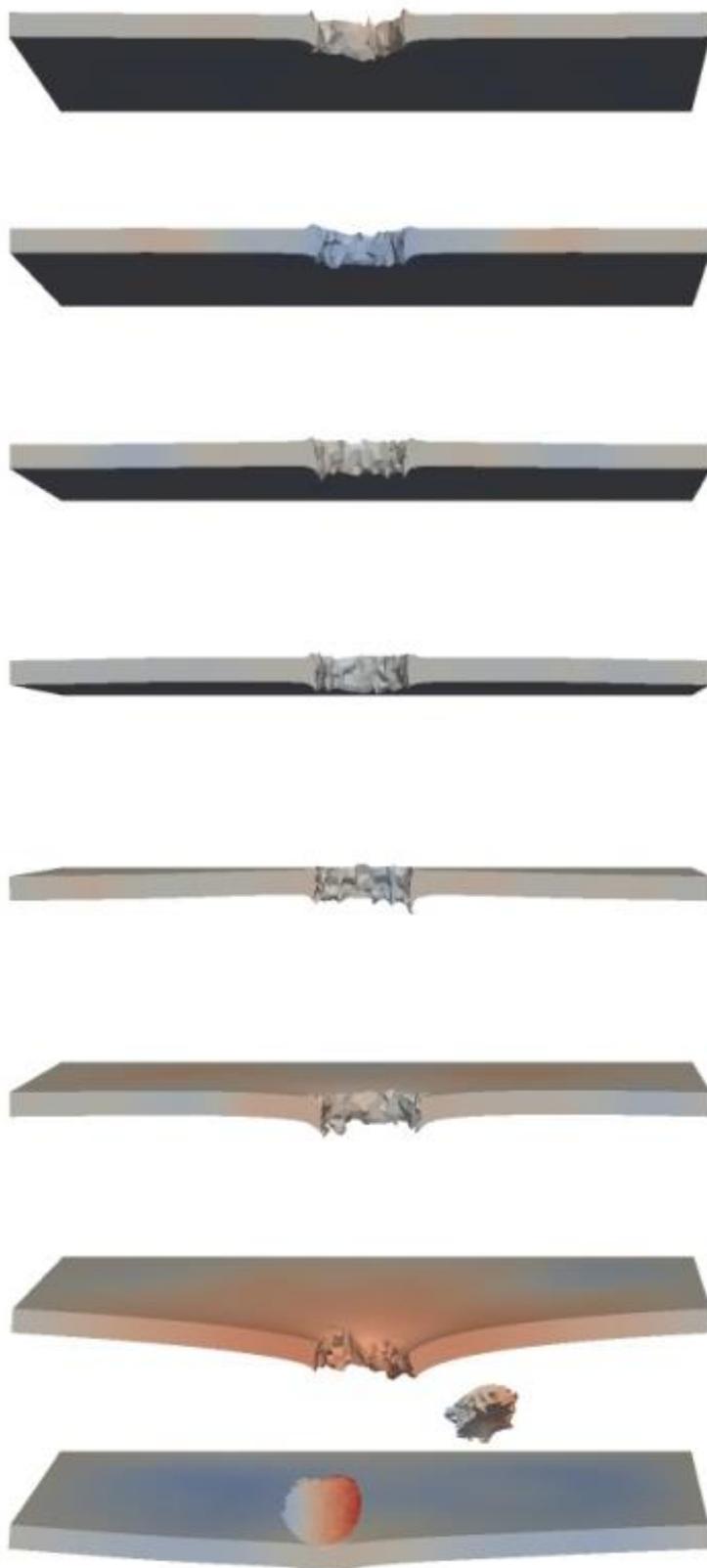
б)

Рисунок 3.6 – Внешний вид преграды после взаимодействия с ударником: а) — эксперимент, б) — расчет.

На рис. 3.7 представлены результаты численного исследования высокоскоростного взаимодействия сферического ударника диаметром 9,5мм из стали ШХ15 с восьмью пластинами разнесенной преграды из сплава алюминия Д16Т. Толщина каждой пластины составляет 2,8 мм. Начальная скорость взаимодействия 1010 м/с. Как в эксперименте, так и в численном моделировании наблюдается пробитие ударником семи преград и остановка с образованием кратера в восьмой преграде. Сравнение диаметра кратера в эксперименте — 8мм. и в расчете — 7.2мм показало относительное расхождение  $\delta=10\%$ , а скорости ударника после пробития первой преграды в эксперименте (925 м/с) и при численном расчете (912 м/с) имеют относительное расхождение  $\delta=10\%$ . Диаметр отверстия в первой преграде в эксперименте 9,4 мм, в расчете - 9,5 мм ( $\delta=1\%$ ).



100 мкс



500 мкс

Рисунок 3.7 – Процесс взаимодействия ударника и пластин разнесенной преграды.

Из результатов численного эксперимента было получено изменение скорости центра масс ударника с течением времени (рис. 3.8). Оно имеет характерный ступенчатый вид, что определяется взаимодействием ударника с пластинами разнесенной преграды и позволяет оценить динамику торможения.

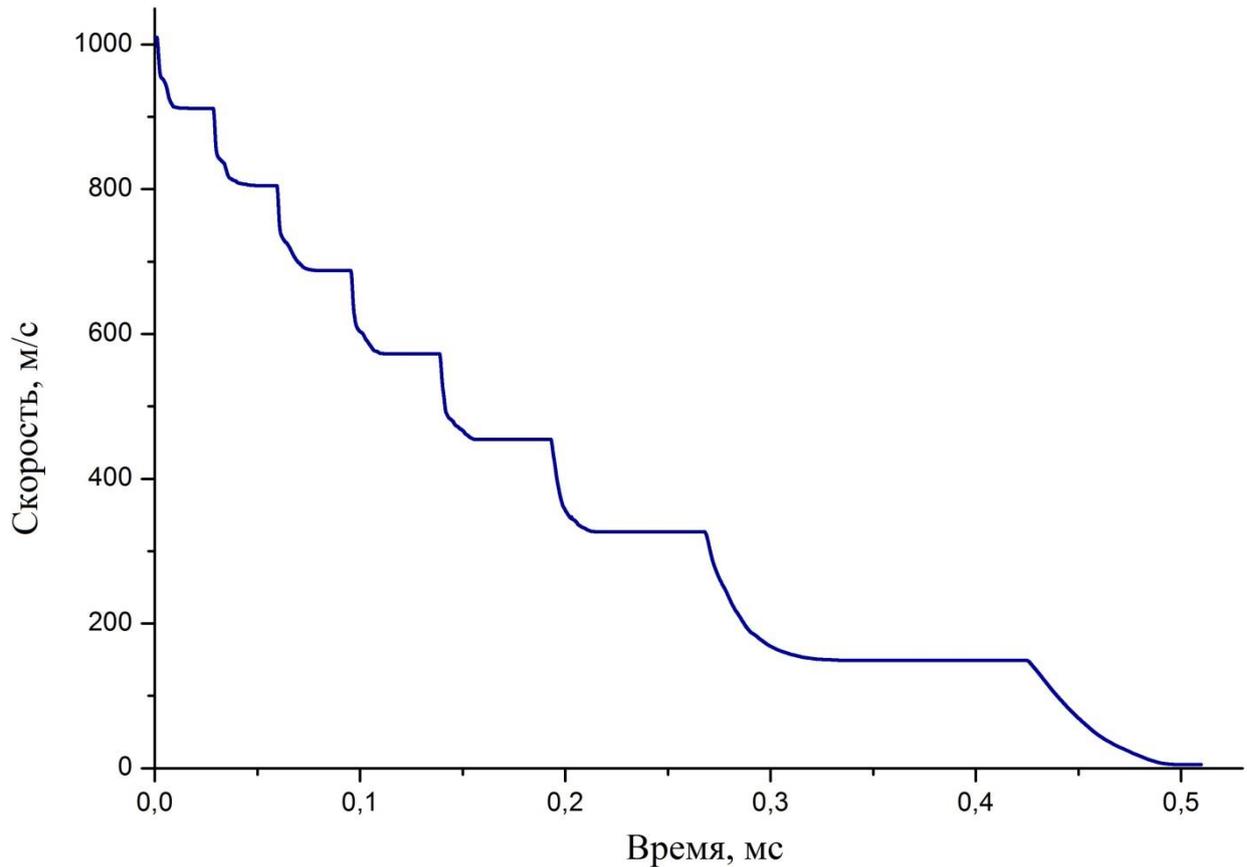


Рисунок 3.8 – График скорости центра масс ударника.

Также было исследовано численно и экспериментально взаимодействие сферического ударника диаметром 12,7 мм из стали ШХ15 с разнесенной преградой из стали 8. Разнесенная преграда состоит из четырех пластин толщиной 3,9 мм. Начальная скорость взаимодействия 1600 м/с, угол 0 градусов к нормали. На рис. 3.9 в сечении проиллюстрирован процесс взаимодействия ударника с пластинами разнесенной преграды. Результаты исследования показали пробитие ударником трех пластин и остановка в последней пластине, с образованием в ней кратера. Диаметр отверстия в первой пластине в эксперименте составил 17,7 мм, в расчете — 18,6 мм ( $\delta=5,1\%$ ),

глубина кратера в четвертой пластине в эксперименте — 2 мм, в расчете — 2,3 мм ( $\delta=15\%$ ).

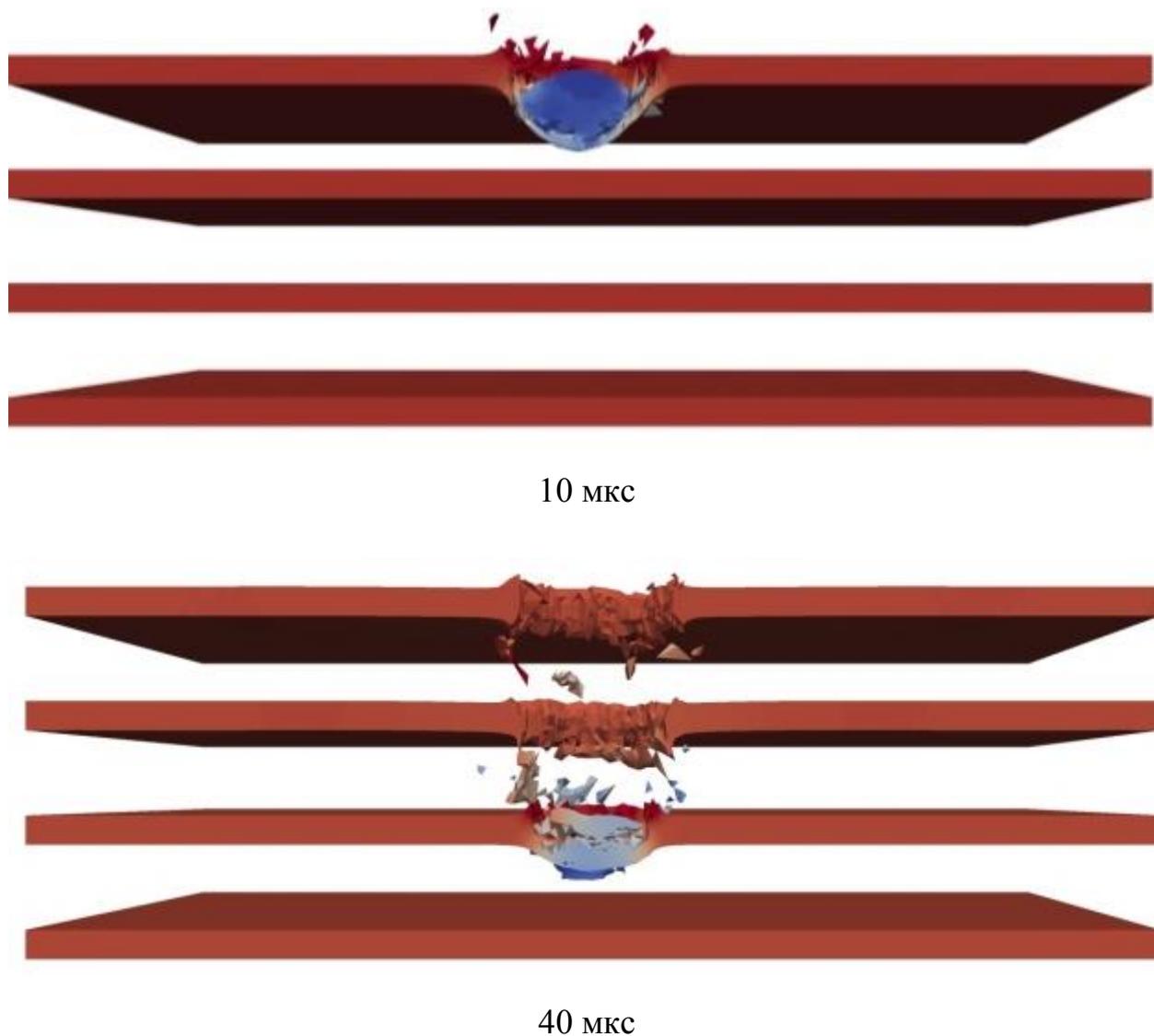


Рисунок 3.9 – Процесс взаимодействия ударника и преграды.

На рис. 3.10 приведена зависимость скорости центра масс от времени, участки падения скорости соответствуют периоду взаимодействия ударника с разнесенной преградой.

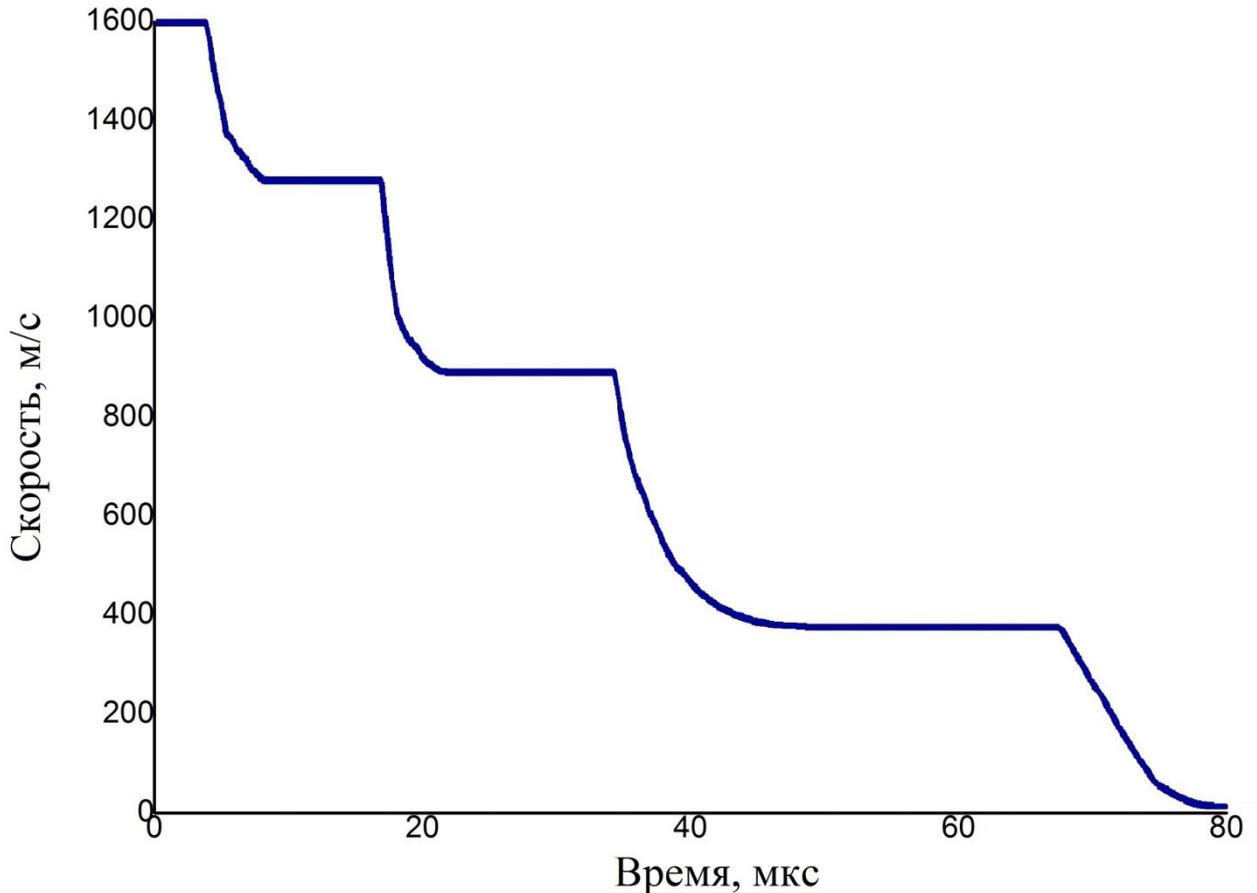


Рисунок 3.10 – График скорости центра масс ударника.

Подводя итог, можно отметить, что проведенные эксперименты показали адекватность предложенных моделей, учитывающих изменение предела текучести от скорости деформации, и методики расчета. Программный комплекс EFES (прил. А) может использоваться для исследования поведения материалов и конструкций, подверженных высокоскоростному нагружению.

### **3.2. Моделирование взаимодействия поражающих элементов различной формы с кумулятивными боеприпасами**

Цель исследования — изучение влияния формы ударника (поражающего элемента) на его проникающую способность. В качестве поражающих элементов рассматривались стальные ударники различной формы: шар, правильный тетраэдр, куб, цилиндр и пластина. Масса ударников при этом была одинаковой. Мишенью являлась противотанковая граната. Метод

исследования — численное моделирование методом конечных элементов. Моделирование проводится в полной трехмерной постановке. Поведение материалов описывается упругопластической моделью с учетом разрушения и фрагментации взаимодействующих тел. Рассмотрен диапазон скоростей взаимодействия от 800 до 2000 м/с. В результате исследования выявлено существенное влияние формы ударника на его проникающую способность. Наибольшую проникающую способность при рассмотренных условиях взаимодействия продемонстрировал ударник в форме удлиненного цилиндра. Для рассмотренной массы поражающих элементов их максимальная проникающая способность (за исключением шара и пластины) достигается при скорости 1400 м/с. При увеличении скорости взаимодействия наблюдается интенсивное разрушение поражающих элементов и их проникающая способность уменьшается.

Современный уровень развития противотанковых средств (ПТС) делает малоэффективной защиту практически любого объекта бронетанковой техники, не оснащенного дополнительными системами защиты (динамической, активной и др.). В настоящее время во многих наиболее развитых странах (Израиль, Республика Корея, РФ, США, Франция, ФРГ, Чехия, Швеция и др., а также в Украине) ведутся работы по разработке комплексов активной защиты (КАЗ) и их элементов. КАЗ предназначены для защиты объектов бронетанковой техники (танков, БМП, БТР и т.д.) от атакующих ПТС (противотанковых реактивных гранат, противотанковых управляемых ракет, артиллерийских кумулятивных снарядов).

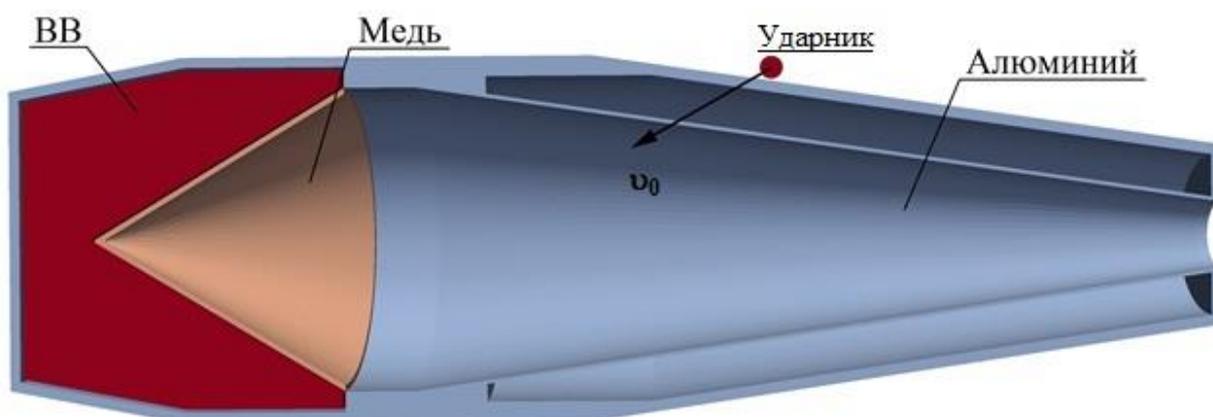
Широко распространенным противотанковым оружием поля боя являются противотанковые гранатометы (ПГ). Легкие и тяжелые ПГ стоят на вооружении практически всех стран мира. Ручные противотанковые гранатометы активно использовались во всех вооруженных конфликтах и локальных войнах в последние более чем 50 лет. Простота, надежность, высокая мобильность, скрытность применения, могущество действия по цели (бронепробитие 600 мм и более) делают ПГ грозным и опасным оружием. Так,

например, ручной противотанковый гранатомет марки РПГ-7 используется более чем в ста странах мира [127]. В перечне пораженных данным комплексом такие цели как БМП Брэдли, танки Abrams M1A1 и др. Таким образом, исследование процессов взаимодействия средств поражения комплекса активной защиты с атакующей противотанковой гранатой является актуальной задачей [128].

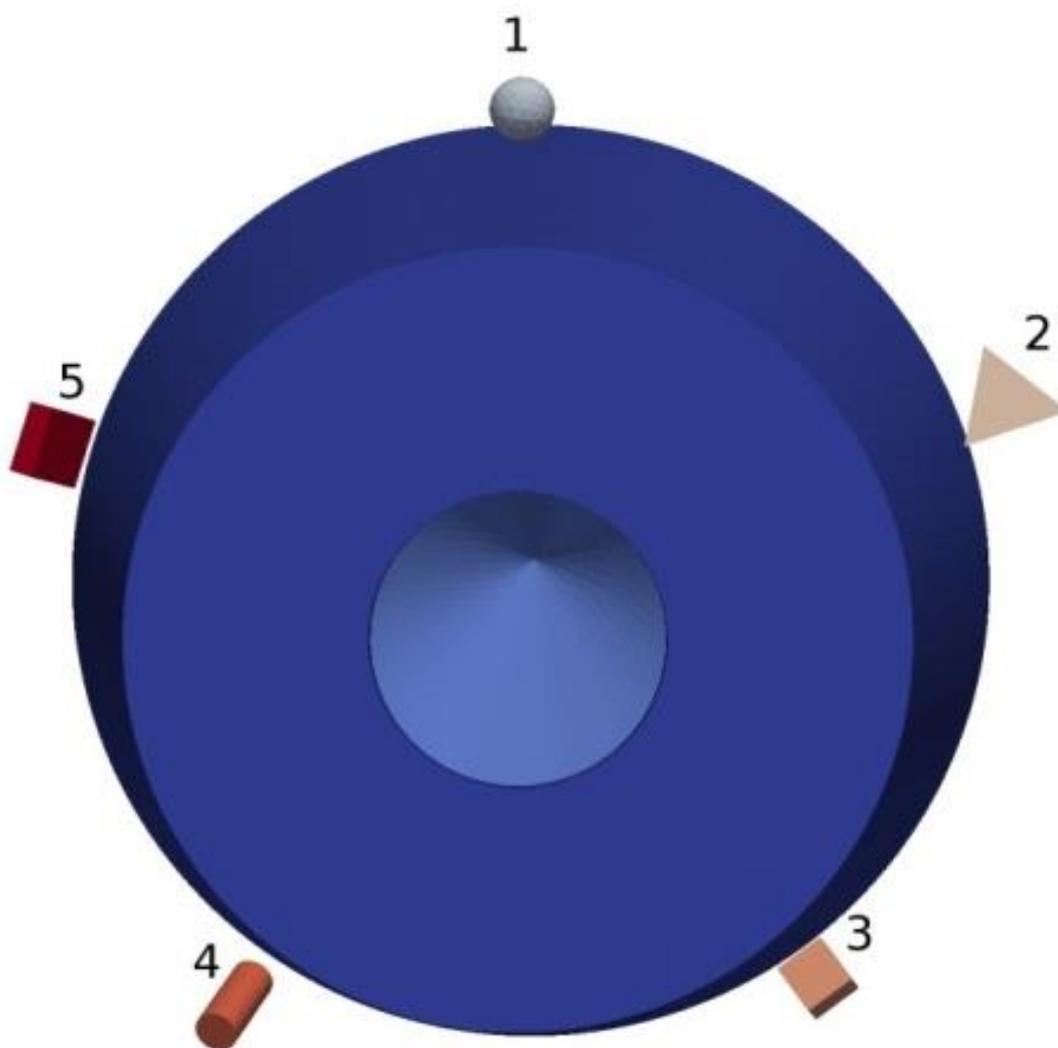
Важным вопросом при решении подобных задач является выбор метода исследования. В этом случае весьма эффективным и информативным является численное моделирование. [129].

### 3.2.1. Постановка задачи

Рассматривается одновременное ударное взаимодействие пяти стальных осколочных элементов одинаковой массы, различной формы, метаемых разрывным зарядом защитного боеприпаса КАЗ, с моделью противотанковой кумулятивной гранаты РПГ-7. На рис. 3.11а представлено продольное сечение кумулятивной гранаты. Граната состоит из оболочки, изготовленной из алюминиевого сплава Д16Т, взрывчатого вещества (ВВ) и медной кумулятивной воронки. Поперечное сечение гранаты приведено на рис. 3.11б и иллюстрирует схему взаимодействия ударников с кумулятивным боеприпасом. В конической части оболочка гранаты является двухслойной. Внешний слой имеет толщину 2 мм, внутренний — 1 мм. Материал ударников — сталь ШХ15, масса ударников была одинакова и составляла 0,39 г. Толщина медной облицовки (воронки) 1 мм. Исследовалось взаимодействие с гранатой ударников различной формы: 1 — шар диаметром 4,54 мм; 2 — правильный тетраэдр, с ребром 7,48 мм; 3 — куб с ребром 3,67 мм; 4 — цилиндр диаметром 3 мм, высотой 7 мм; 5 — пластина высотой 2 мм, шириной 4,95 мм, длиной 5 мм (рис. 3.11б). Исследовался диапазон скоростей удара от 800 до 2000 м/с. В начальный момент времени вектор скорости ударников составлял с продольной осью гранаты угол 30 градусов.



а)

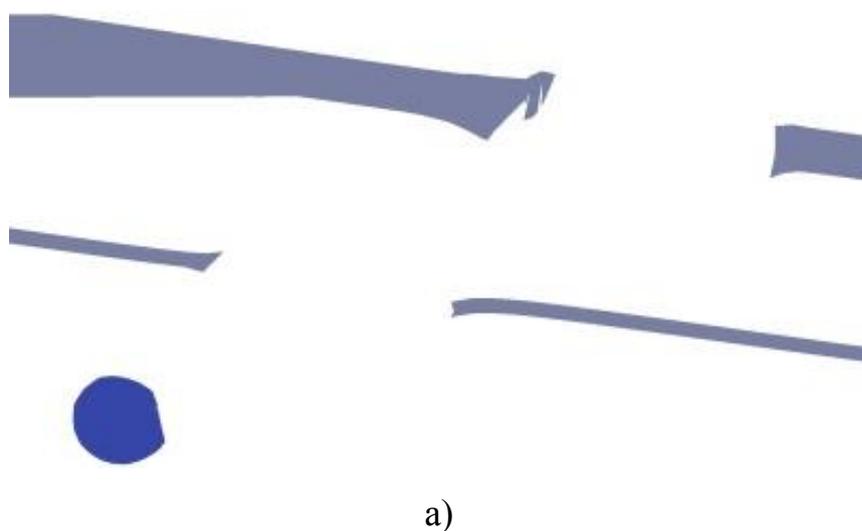


б)

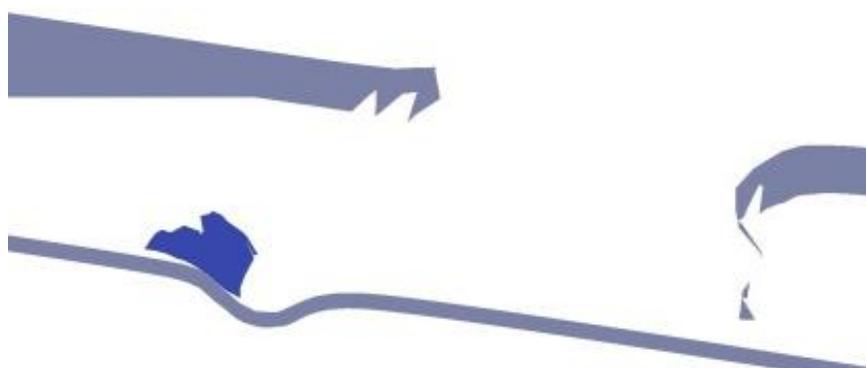
Рисунок 3.11 – Постановка задачи. а) — продольное сечение, б) — поперечное сечение.

Поведение материалов описывается упругопластической моделью [107, 108, 130, 126]. Для определения перехода в зону разрушения был использован критерий, учитывающий предельное значение интенсивности пластических деформаций [126].

На рис. 3.12 для начальной скорости 800 м/с приведены в сечении области взаимодействия ударников с оболочкой после ее пробития. Как видно из рисунков, наблюдается деформирование и частичное разрушение поражающих элементов. Причем для ударника в форме тетраэдра не происходит сквозного пробития оболочки. В данном случае происходит рикошет ударника от второго слоя алюминиевой оболочки.



а)



б)

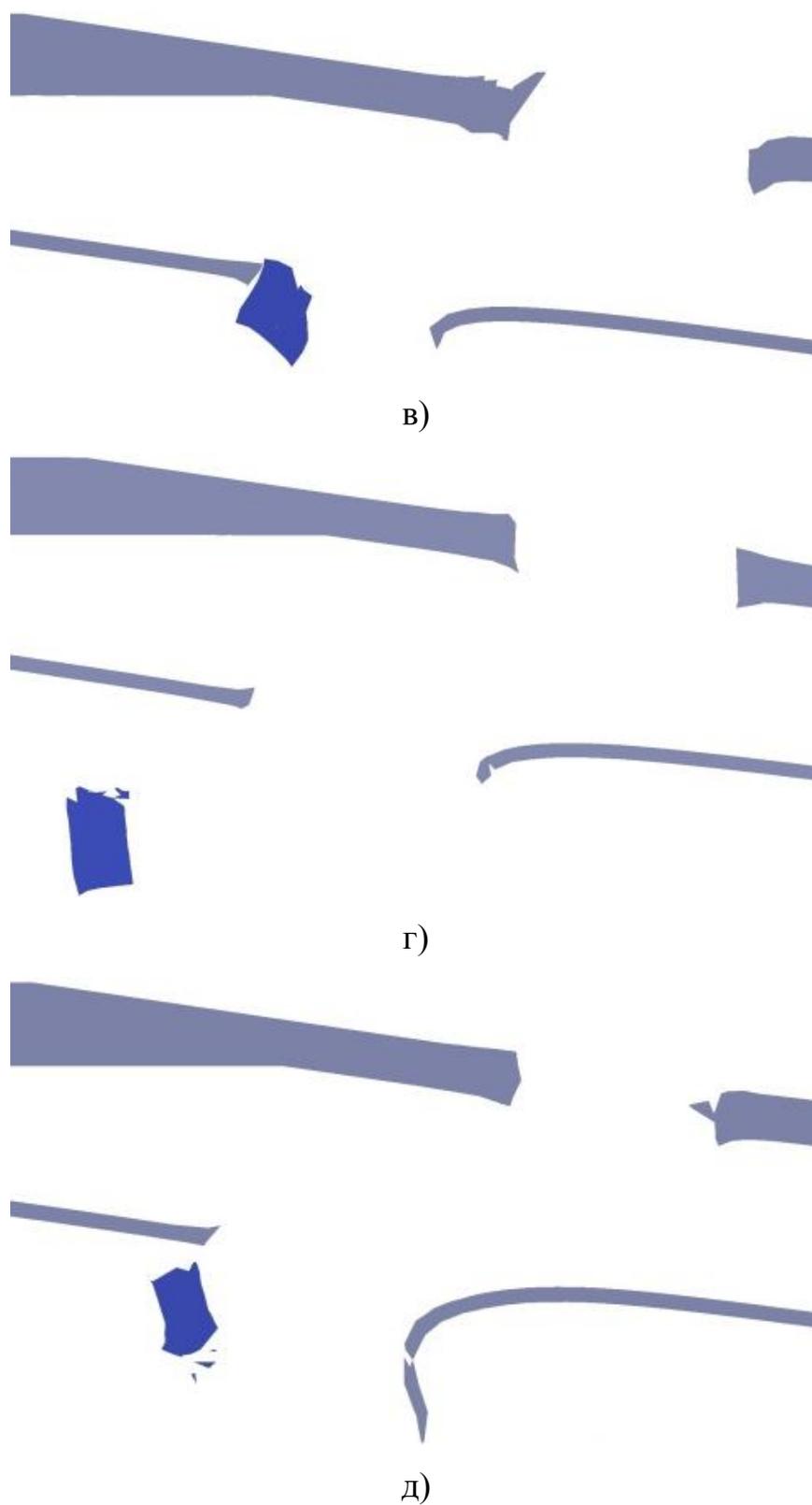
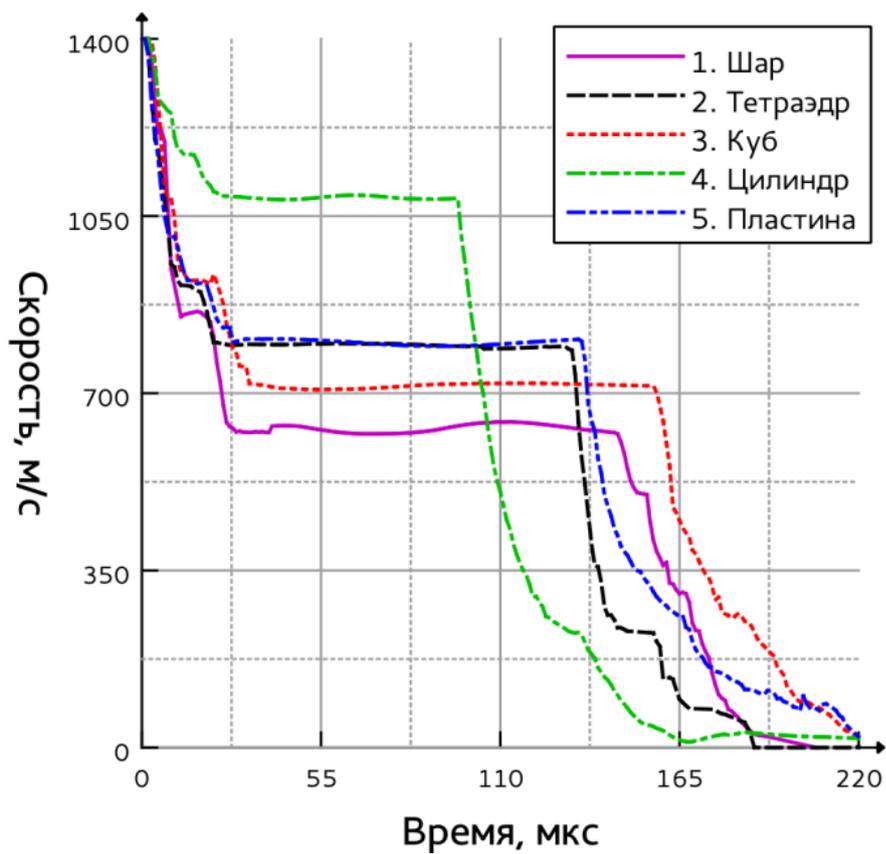


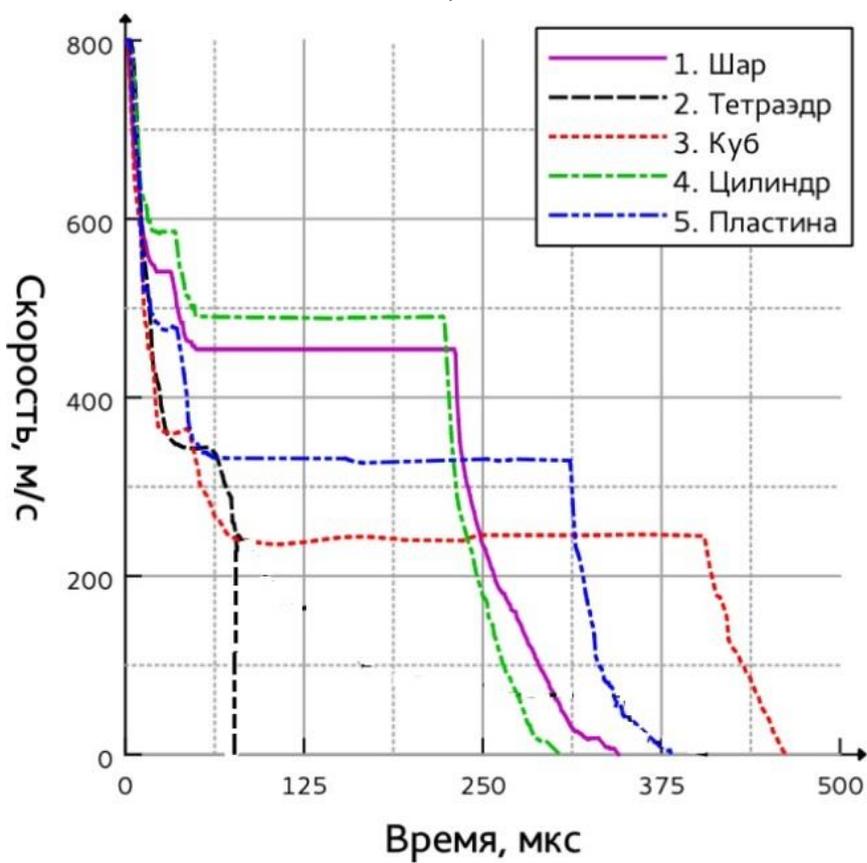
Рисунок 3.12 – Конфигурации ударников и двухслойной оболочки после ее пробития. Начальная скорость 800 м/с. а) — шар, б) — тетраэдр, в) — куб, г) — цилиндр, д) — пластина.

Для остальных ударников (шар, куб, цилиндр, пластина) наблюдается сквозное пробитие двухслойной оболочки. При этом после взаимодействия с оболочкой ударники начинают вращаться, это хорошо заметно для цилиндра (рис. 3.12г) и пластины (рис. 3.12д) — в начальный момент времени продольная ось цилиндра совпадала с вектором скорости и составляла угол 30 градусов с продольной осью гранаты. После взаимодействия с оболочкой цилиндр и пластину развернуло на 60 градусов. При увеличении скорости удара (1400 м/с и 2000 м/с) для всех ударников наблюдается сквозное пробитие оболочки, но при этом интенсифицируется процесс разрушения ударников. Так же с увеличением скорости уменьшается отклонение цилиндра от исходной ориентации в пространстве.

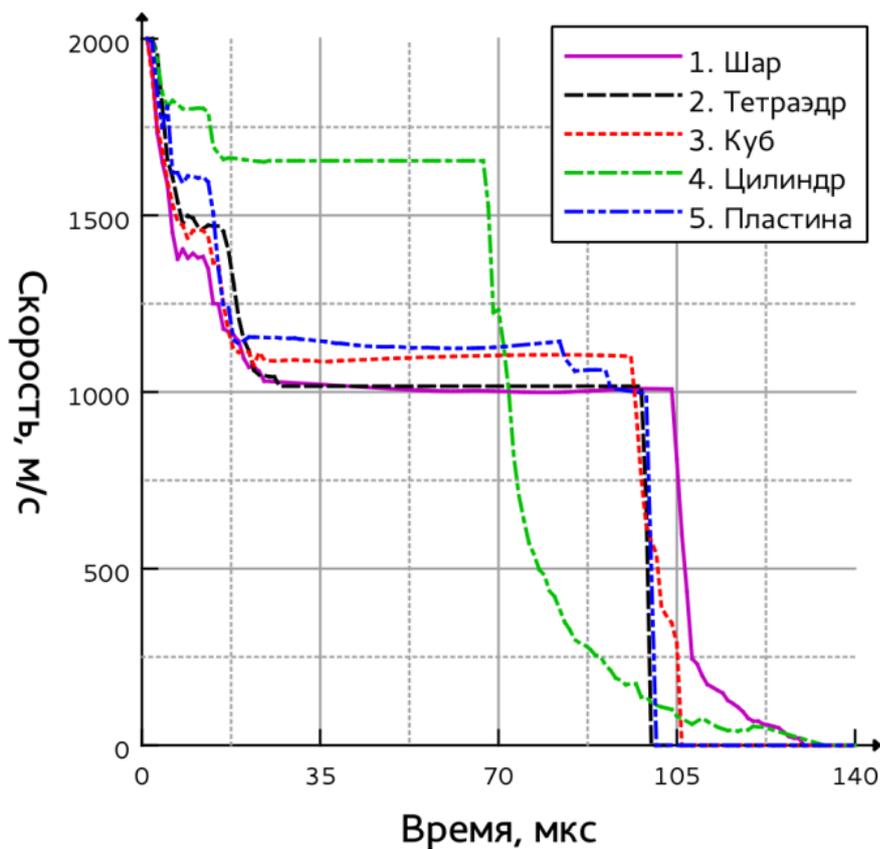
Проникающую способность ударников можно оценить по рис. 3.13, где представлены зависимости от времени скорости центра масс ударников. Все кривые на рисунках имеют характерный ступенчатый вид. Участки интенсивного падения скорости соответствуют периоду взаимодействия ударников с оболочкой и медной облицовкой, прилегающей к ВВ. Причем, т.к. оболочка двухслойная, первые два участка интенсивного падения скорости ударников соответствуют периодам взаимодействия ударников с первым и вторым слоем алюминиевой оболочки. После пробития оболочки скорость ударников не меняется до момента взаимодействия с медной облицовкой и ВВ. В процессе взаимодействия с медной облицовкой наблюдается интенсивное разрушение ударников и падение скорости центра масс. Для всех рассмотренных скоростей взаимодействия наибольшей проникающей способностью обладает ударник в форме цилиндра, причем с увеличением скорости взаимодействия разница в проникающей способности цилиндра по сравнению с другими ударниками возрастает. Так, если для скорости удара 800 м/с (рис. 3.13а) разница в скорости между цилиндром и шаром, имеющим второе по величине значение скорости, составляла 8%, то для 1400 м/с (рис. 3.13б) разница со второй по значению скоростью (пластина, тетраэдр) — 25%, для 2000 м/с — 33%. В то же время с увеличением скорости взаимодействия различие в проникающей способности шара, тетраэдра, куба и пластины уменьшаются.



а)



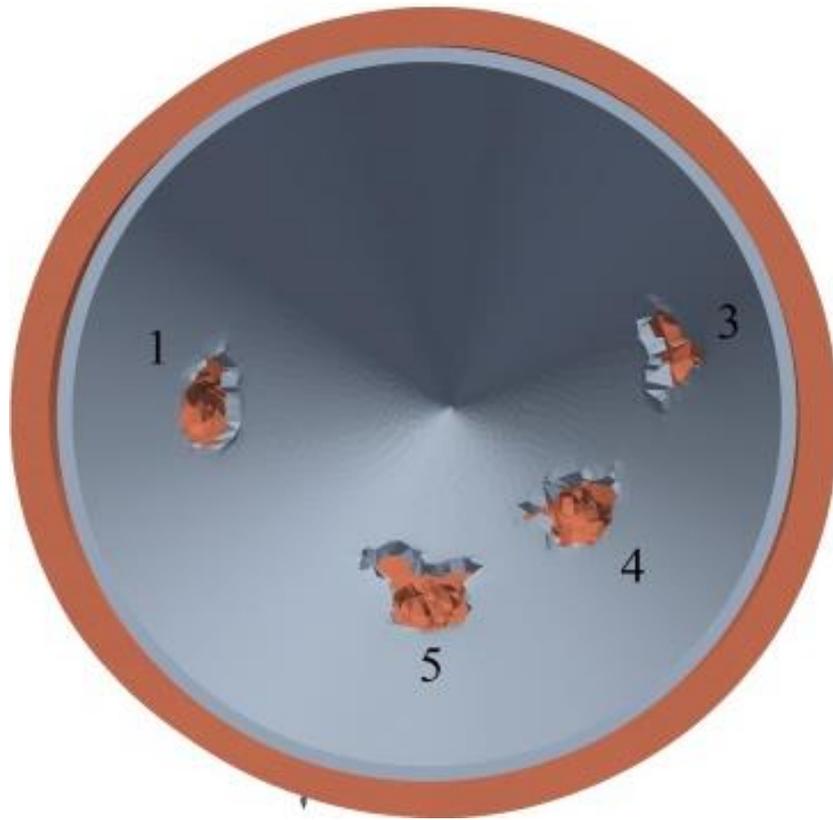
б)



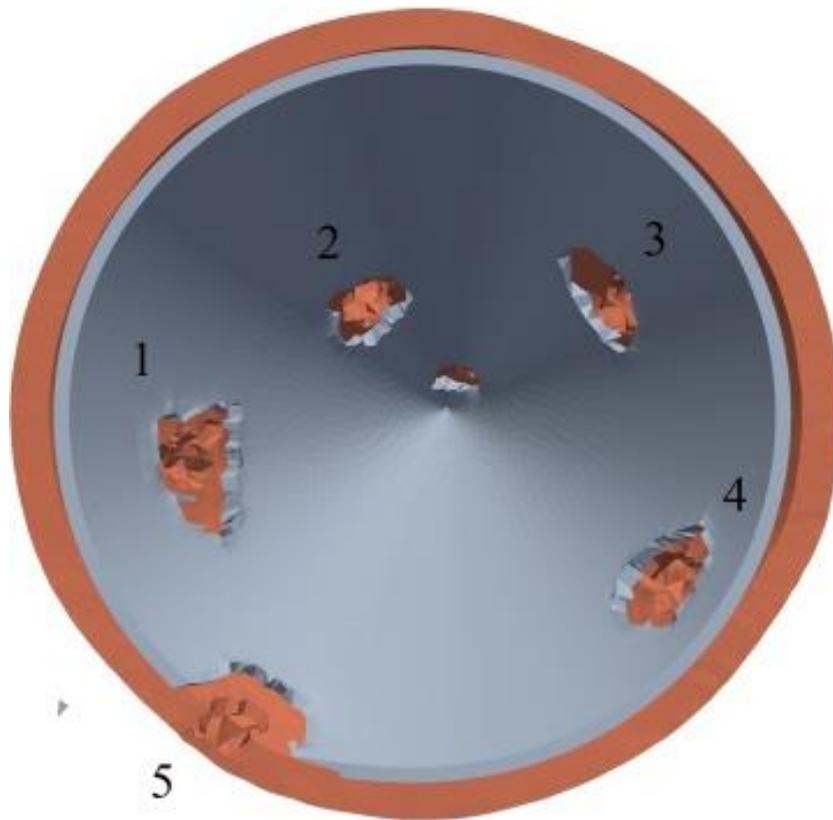
в)

Рисунок 3.13 – График скорости центра масс ударников. а) - 800м/с, б) - 1400м/с, в) - 2000м/с.

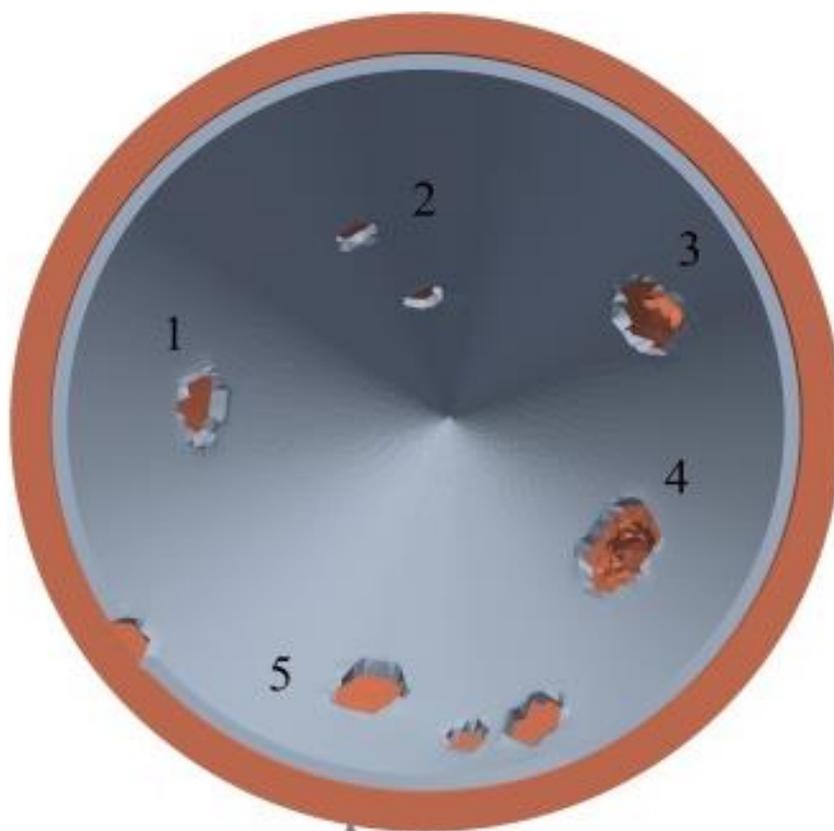
Необходимо отметить, что для всех типов ударников не наблюдается сквозного пробития гранаты — ударники разрушаются и останавливаются в медной оболочке или ВВ. Это иллюстрирует рис. 3.14, где приведены итоговые картины разрушения в медной облицовке и ВВ (рис. 3.14а, рис. 3.14б, рис. 3.14в) для различных скоростей удара и повреждения в конической части оболочки после взаимодействия с поражающими элементами (рис. 3.14г).



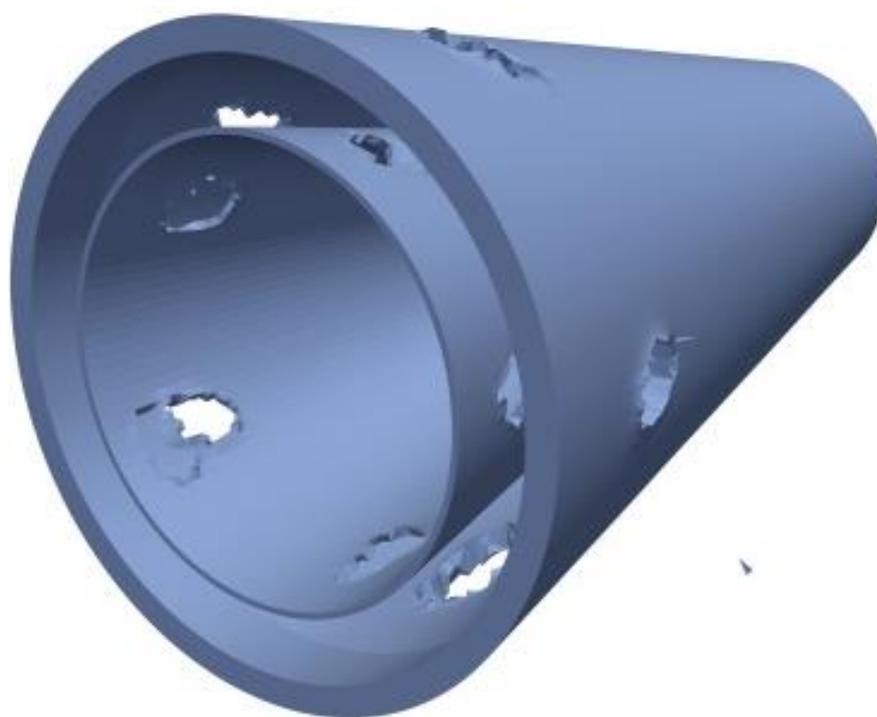
a)



б)



в)



г)

Рисунок 3.14 – Итоговые картины повреждения элементов кумулятивной гранаты: а), б), в) — медной облицовки и ВВ, а) — 800 м/с, б) — 1400 м/с, в) — 2000 м/с; г) — конической части, 800 м/с.

Цифрами на рис. 3.14а, рис. 3.14б, рис. 3.14в обозначены повреждения от соответствующего ударника: 1 — шар, 2 — тетраэдр, 3 — куб, 4 — цилиндр, 5 — пластина. Для скорости 800 м/с наблюдается повреждения от внедрения в облицовку и ВВ шара, куба, цилиндра и пластины. Тетраэдр при этой начальной скорости не пробил второй слой оболочки (рис. 3.12б). Для скорости взаимодействия 1400 м/с наблюдаются повреждения от всех типов ударников. При скорости 2000 м/с возникают дополнительные зоны разрушений в медной облицовке, как результат воздействия фрагментов, образующихся при разрушении ударников.

В табл. 3.1 представлены значения глубин кратеров в ВВ для рассмотренных типов ударников. Как показывают результаты, не все рассмотренные ударники проникают в слой ВВ. На проникающую способность ударников оказывает существенное влияние их форма. Так, для шара проникающая способность с увеличением скорости падает, и при скорости удара 2000 м/с он не проникает в слой ВВ, образуя кратер только в медной облицовке. Тетраэдр проникает в ВВ только при скорости 1400 м/с. При 800 м/с тетраэдр рикошетирует от второго слоя алюминиевой оболочки, а при 2000 м/с он разрушается на фрагменты, которые образуют два небольших кратера в медной облицовке. Для ударника в форме куба максимальная глубина кратера в ВВ наблюдается при скорости 1400 м/с. На проникающую способность цилиндра существенное влияние оказывает его ориентация в пространстве. Так, например, при скорости 800 м/с цилиндр разворачивается после пробития алюминиевой оболочки и его последующее взаимодействие с медной облицовкой и ВВ происходит по боковой поверхности. Образованный при этом кратер существенно меньше, чем кратер от шара. С увеличением скорости удара ориентация цилиндра в пространстве стабилизируется и он взаимодействует с медной облицовкой и ВВ торцевой частью, что приводит к образованию больших кратеров в ВВ по сравнению с другими типами

ударников. Пластина с ростом скорости интенсивно разрушается и обладает наименьшей проникающей способностью.

Таблица 3.1 – Глубины кратеров, образованных в ВВ, для различных скоростей удара

Тип ударника	800 м/с	1400 м/с	2000 м/с
1. Шар	11,88 мм	7,79 мм	-
2. Тетраэдр	-	8,95 мм	-
3. Куб	2,48 мм	14,44 мм	3,96 мм
4. Цилиндр	6,81 мм	14,62 мм	13,38 мм
5. Пластина	4,28 мм	1,66 мм	-

Проведенные исследования показали, что для рассмотренных условий взаимодействия форма поражающих элементов оказывает значительное влияние на их проникающую способность. Для удлиненных ударников (цилиндр) существенное значение имеет их пространственная ориентация. Наибольшую проникающую способность при рассмотренных условиях взаимодействия продемонстрировал ударник в форме удлиненного цилиндра. Для рассмотренной массы поражающих элементов их максимальная проникающая способность (за исключением шара и пластины) достигается при скорости 1400 м/с. При скоростях порядка 800 м/с происходит потеря устойчивости удлиненных ударников и их проникающая способность падает. При увеличении скорости взаимодействия наблюдается интенсивное разрушение поражающих элементов и их проникающая способность уменьшается.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Реализованный алгоритм и методика расчета позволяют исследовать поведение разнесенных преград и конструкций в целом в полной трехмерной динамической постановке. Предложенная модель поведения адекватно описывает динамику напряженно-деформированное состояние и процессы разрушения в металлических преградах и ударниках.

2. В трехмерной постановке исследовано влияние скорости и формы поражающих элементов на проникающую способность при взаимодействии с кумулятивным снарядом. Установлено, что форма поражающих элементов оказывает значительное влияние на их проникающую способность и на механизмы разрушения как ударника, так и преграды. Показано, что наибольшую проникающую способность имеет ударник в форме удлиненного цилиндра. Установлено, что при скоростях взаимодействия порядка 800 м/с происходит потеря устойчивости и вращение удлиненных ударников после пробития первой преграды, что отрицательно сказывается на их дальнейшей проникающей способности. Показано, что при скоростях порядка 2000 м/с происходит активное разрушение ударников и снижение их проникающей способности. Для рассмотренных поражающих элементов максимальная проникающая способность достигается при скорости 1400 м/с.

#### **4. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ БЕТОННЫХ И ФИБРОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, УСИЛЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ АРМАТУРОЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ**

В этом разделе представлены результаты экспериментальных и численных исследования бетонных и фибробетонных элементов и конструкций при динамических нагрузках. Все экспериментальные исследования проводились на кафедре ЖБК ТГАСУ.

В первом подразделе раздела 4 представлены результаты комплексного экспериментально-численного исследования разрушения армированной балки из бетона и фибробетона при кратковременном динамическом воздействии, а во втором подразделе — результаты численного моделирования разрушения защитной оболочкой атомной станции (АС) при импульсном воздействии. Представлено именно в такой последовательности, потому что данная трехслойная балка является элементом крышки АС.

В последнее время особое внимание стало уделяться неметаллической композитной арматуре, поэтому в третьем подразделе данного раздела рассмотрены экспериментальные и численные исследования характера разрушения и трещинообразования в изгибаемых бетонных элементах со стержневым композитным армированием. Проведено сравнение экспериментальных и численных результатов, получены схемы деформирования и трещинообразования.

##### **4.1. Исследования разрушения балок из бетона и фибробетона**

В работе представлены результаты комплексного экспериментально-численного исследования разрушения армированной балки из бетона и фибробетона при кратковременном динамическом воздействии [131]. Экспериментальные исследования были осуществлены на кафедре ЖБК ТГАСУ следующим научным коллективом: В.С. Плевковым и Д.Г. Уткиным.

Экспериментальные исследования проводились на копровой установке [132]. При помощи бомбосбрасывателя на исследуемый образец происходило падение груза весом 0.45 т. с высоты 0.7 м. В экспериментах величина динамической нагрузки определялась с помощью датчика силоизмерителя, для вычисления линейных перемещений использовались датчики линейных перемещений. В численных расчетах воздействие груза на балку заменялось импульсом. Зависимость импульса от времени определялась из эксперимента. В работе был проведен анализ влияния арматурного упрочнения на схемы деформирования и разрушения балки. Также были сопоставлены полученные экспериментальные и численные результаты.

С целью определения схем трещинообразования и исследования особенностей деформирования слоистых бетонных элементов были проведены их испытания при кратковременном динамическом воздействии. Балки, применяемые в эксперименте, включали три различных армированных слоя по поперечному сечению: фибробетон — бетон — фибробетон. Испытания экспериментальных образцов проводились на копровой установке [132], при помощи которой задавалась кратковременная импульсная нагрузка.

Длина экспериментальных балок — 2,2 метра, расстояние между центрами опор балки — 2 метра, размер поперечного сечения — 0,22×0,15 м. В поперечном сечении каждый испытуемый образец состоял из трех различных слоев: верхний и нижний имели толщину по 20 мм и были армированы углеродной фиброй, а средний слой был железобетонным и имел толщину 110 мм. Объем углеродной фибры, использованной в верхнем и нижних слоях составил 0,2 %.

Схема армирования представляет собой продольную рабочую арматуру 8Ø10 А400, которая располагается в среднем слое образца. Данная арматура скрепляется хомутами из проволоки Ø4 класса В500.

Слои из фибробетона были армированы вязаной сеткой — проволока Ø4 класса В500, с шагом сетки 66 мм.

Для получения информации о работе экспериментальных слоистых балок в процессе их нагружения использовался комплекс первичных преобразователей измерительной информации.

При кратковременном динамическом испытании величина динамической нагрузки определялась с помощью датчика силоизмерителя. Также для вычисления линейных перемещений использовались датчики линейных перемещений. Для измерения ускорений при кратковременном динамическом испытании использовались акселерометры.

Для измерения деформаций растянутой и сжатой арматуры экспериментальных балок, на середины стержней арматурных каркасов - были установлены тензорезисторы типа ПКБ-10 с сопротивлением  $R=201,6$  Ом. Для определения деформаций бетона и фибробетона на поверхности экспериментальных балок также устанавливались тензорезисторы типа ПКБ-20 и ПКБ-50.

Для определения величины опорных реакций применялись динамометры, закрепленные на опорах балки. При помощи бомбосбрасывателя на исследуемый образец происходило падение груза весом 0.45 т. с высоты 0.7 м.

В ходе проведенных исследований было выявлено, что разрушение балки происходит по сечению, нормальному к продольной оси с образованием трещин в пределах зоны чистого изгиба (рис. 4.1). Нагрузка, приводящая к разрушению бетонного элемента была зафиксирована на уровне  $F_{u,d}=120$  кН.

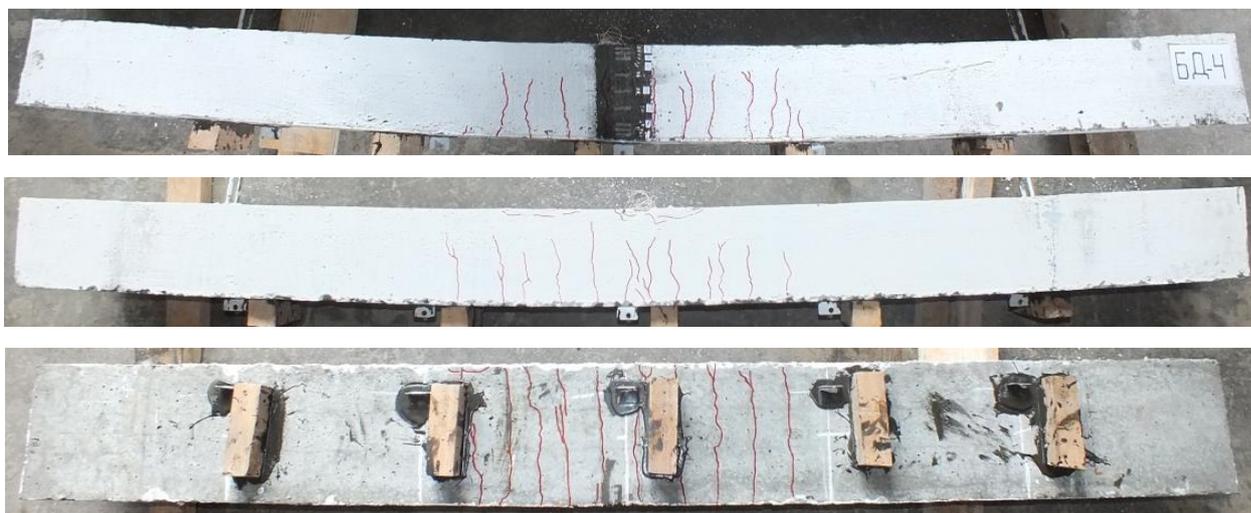


Рисунок 4.1 – Схема разрушения и трещинообразования слоистой балки, при экспериментальном исследовании

В численных расчетах воздействие груза на балку заменялось импульсом, размер и схема армирования аналогичны экспериментальным (рис. 4.2).

Зависимость импульса нагружения от времени определялась из эксперимента (рис. 4.3).

Численное моделирование проводится с явным выделением армирующих элементов.

Поведение бетона и фибробетона описывается в рамках модели [27] с использованием критерия прочности Хоффмана [86].

Поведение стальной арматуры описывается в рамках упругопластической модели, описанной в разделе 2. Механические и прочностные свойства используемых материалов даны в табл. 4.1.

Таблица 4.1 – Физико-механические характеристики исследуемых материалов

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Скорость звука $C_s$ , м/с	Коэффициент Пуассона	Прочность на			Модуль Юнга $E$ , ГПа
				растяжение, МПа	сжатие, МПа	сдвиг, МПа	
Бетон	2450	4500	0,2	1,75	22	3,4	26
Фибро- бетон	2450	4500	0,2	3,4	41	6,5	41
Сталь, А400	7850	5930	0,3	400	400	400	204

На рис. 4.2 показан общий вид исследуемого образца. Слои фибробетона расположены снизу и сверху, посередине — слой бетона. На лицевой поверхности выделены зоны приложения импульсной нагрузки, места закрепления на тыльной поверхности обозначены черным цветом. В местах закрепления балки ограничивались перемещения в отрицательном направлении вдоль оси  $Z$ .

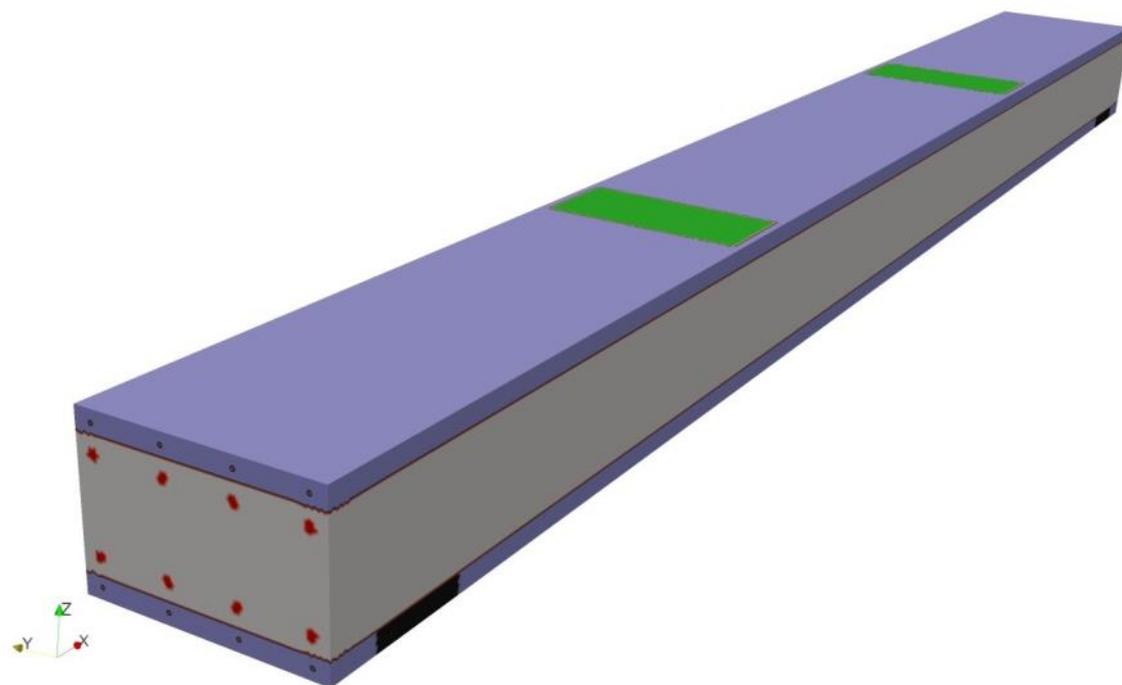


Рисунок 4.2 – Постановка задачи.

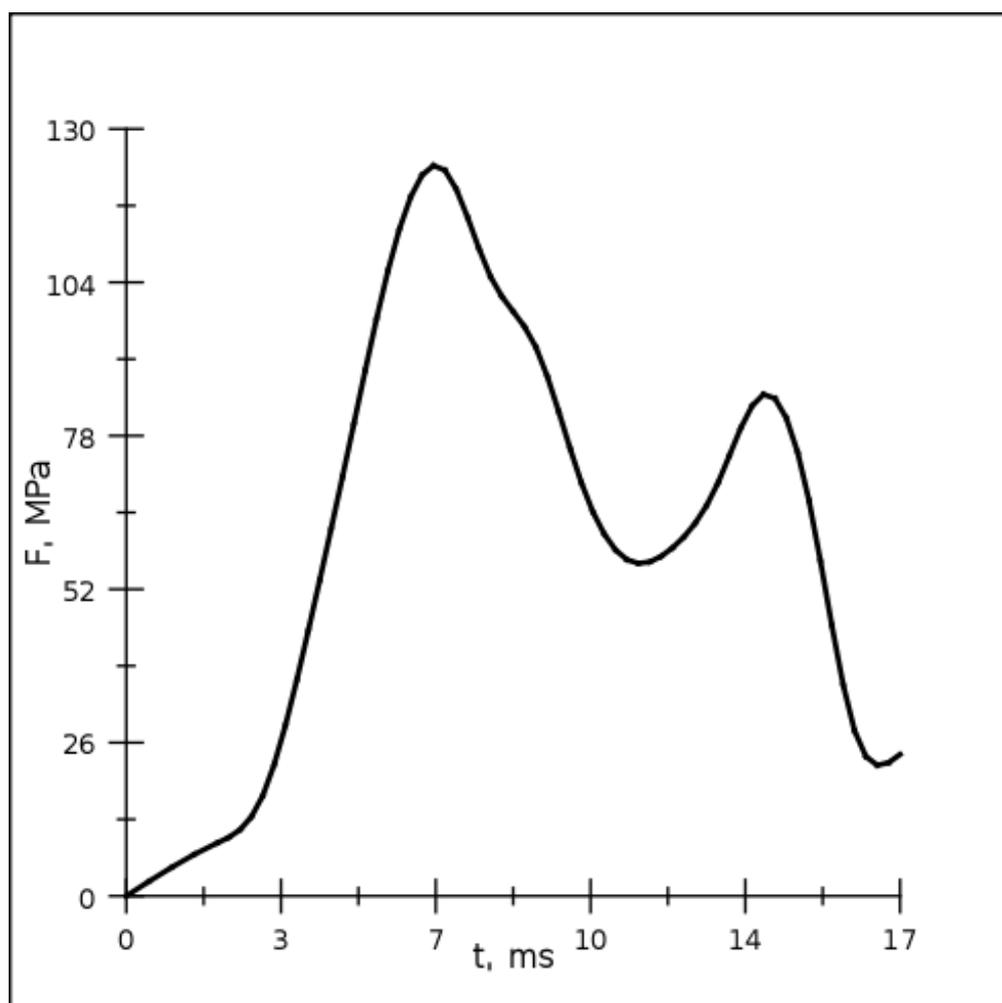


Рисунок 4.3 – Зависимость нагрузки от времени.

Расчетная схема армирования бетонного элемента, полностью аналогичная экспериментальной, приведена на рис. 4.4. Балка разбивалась на тетраэдрические конечные элементы. Общее количество конечных элементов в расчетах составляло  $1,8 \cdot 10^7$ . Расчетная сетка представлена на рис. 4.5.

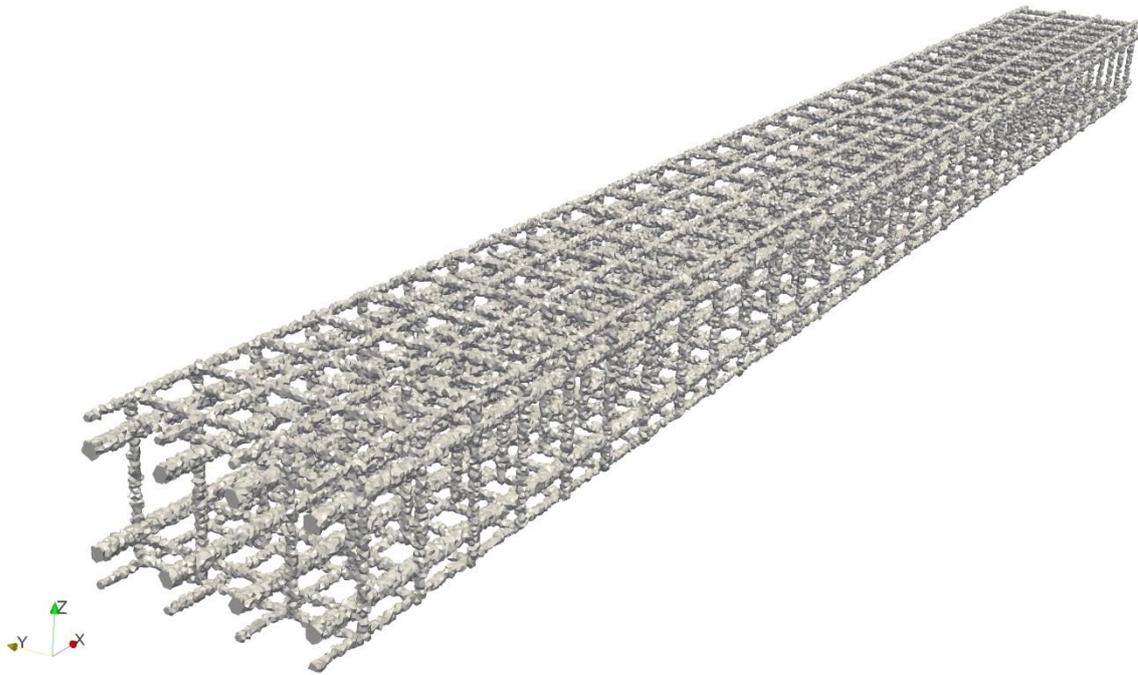


Рисунок 4.4 – Расчетная схема армирования балки.

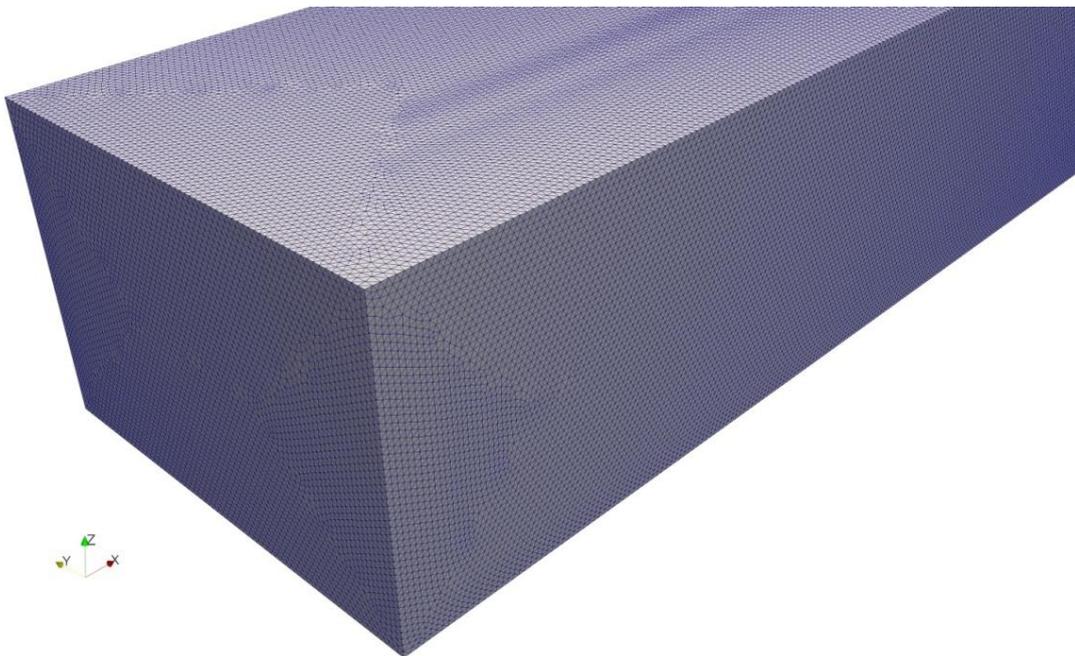
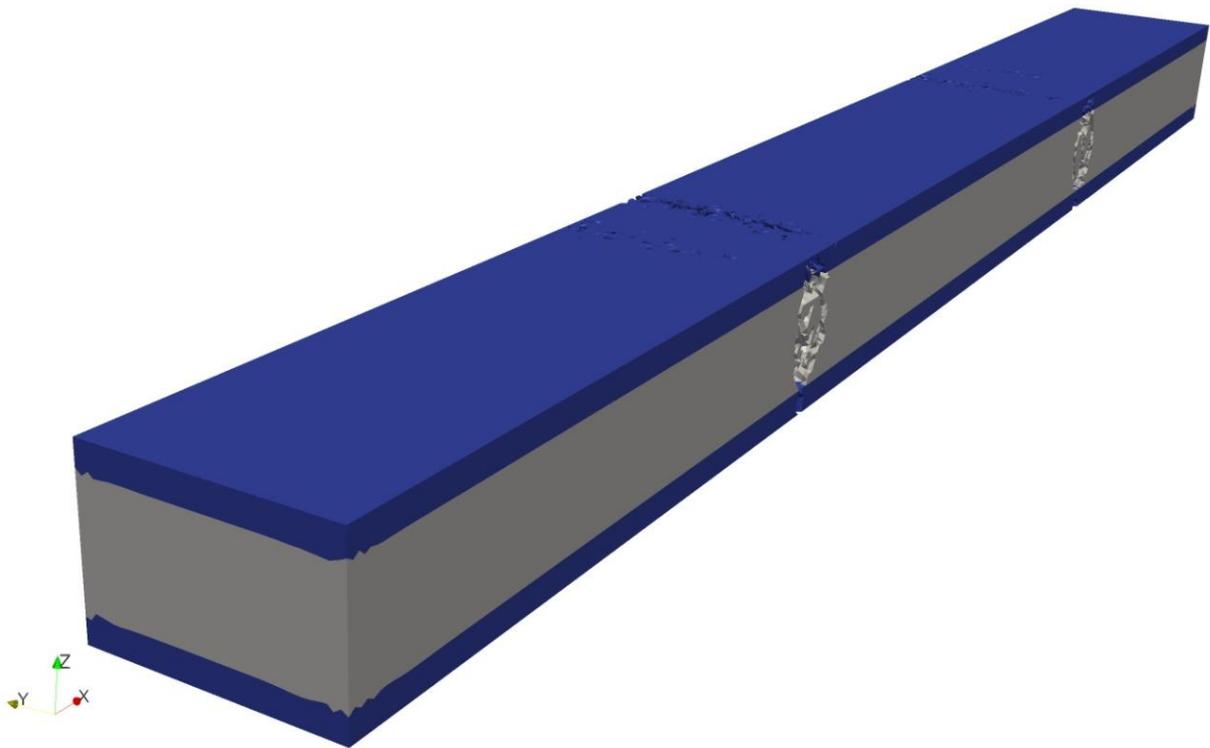


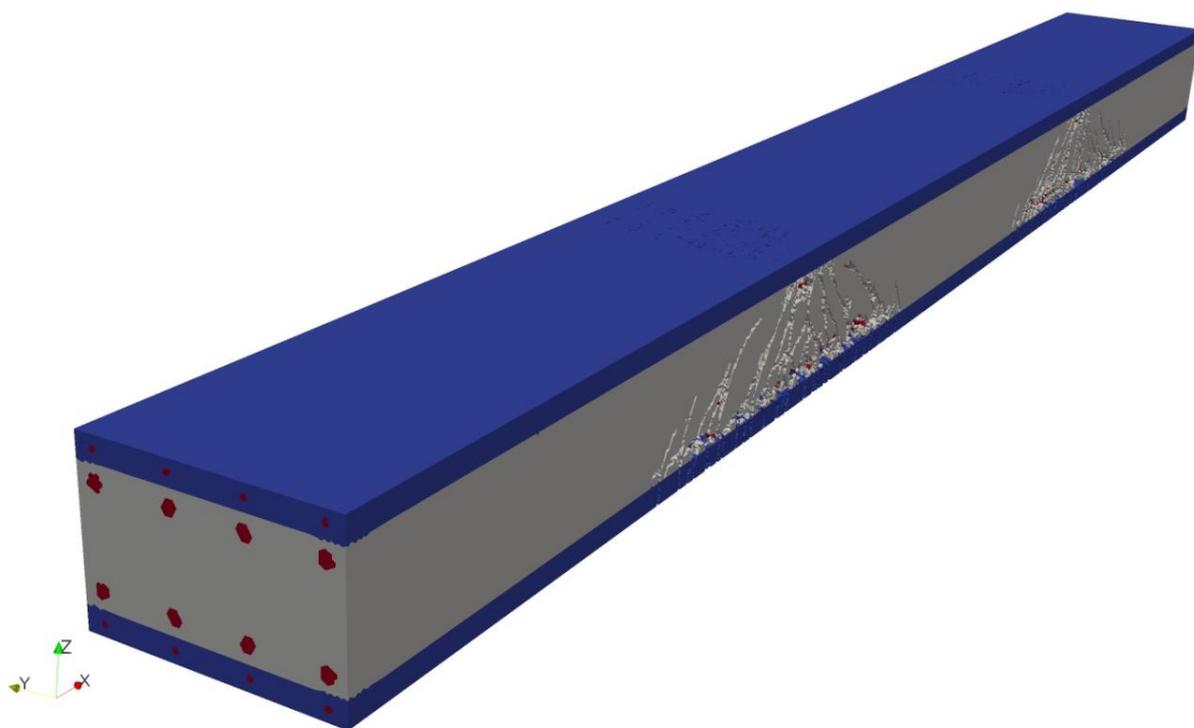
Рисунок 4.5 – Конечно - элементная расчетная сетка.

Чтобы оценить влияние арматурной сетки на процесс трещинообразования и разрушения был проведен численный расчет слоистой балки без армирования, также на ней была отработана расчетная схема. Схемы нагружения исследуемых образцов с армированием и без армирования полностью совпадали (рис. 4.2).

На рис. 4.6 — рис. 4.7 представлен внешний вид бетонных элементов без арматуры (а) и с арматурой (б) под воздействием динамической нагрузки. Очевидно, что процессы трещинообразования в этих балках существенно отличается, как и распределение зон разрушения. В балке без армирования в зонах приложения нагрузки с тыльной стороны начинают возникать магистральные трещины, которые приводят к разделению балки на три фрагмента (рис. 4.7а). В балке с армированием наблюдается распределение трещин вдоль всей балки и заметно меньший объем разрушений. Но, из-за существенного отличия механических свойств материалов бетон-сталь происходит локализация разрушающих напряжений в областях, прилегающих к арматурной сетке.

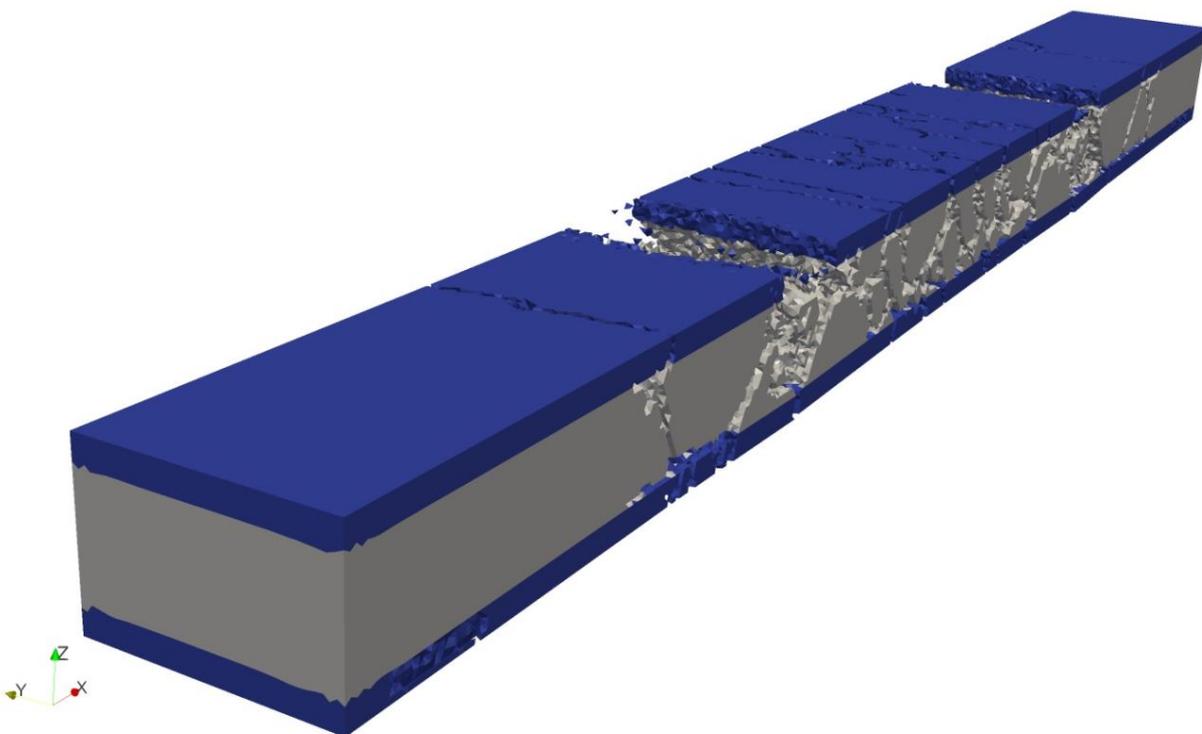


a)

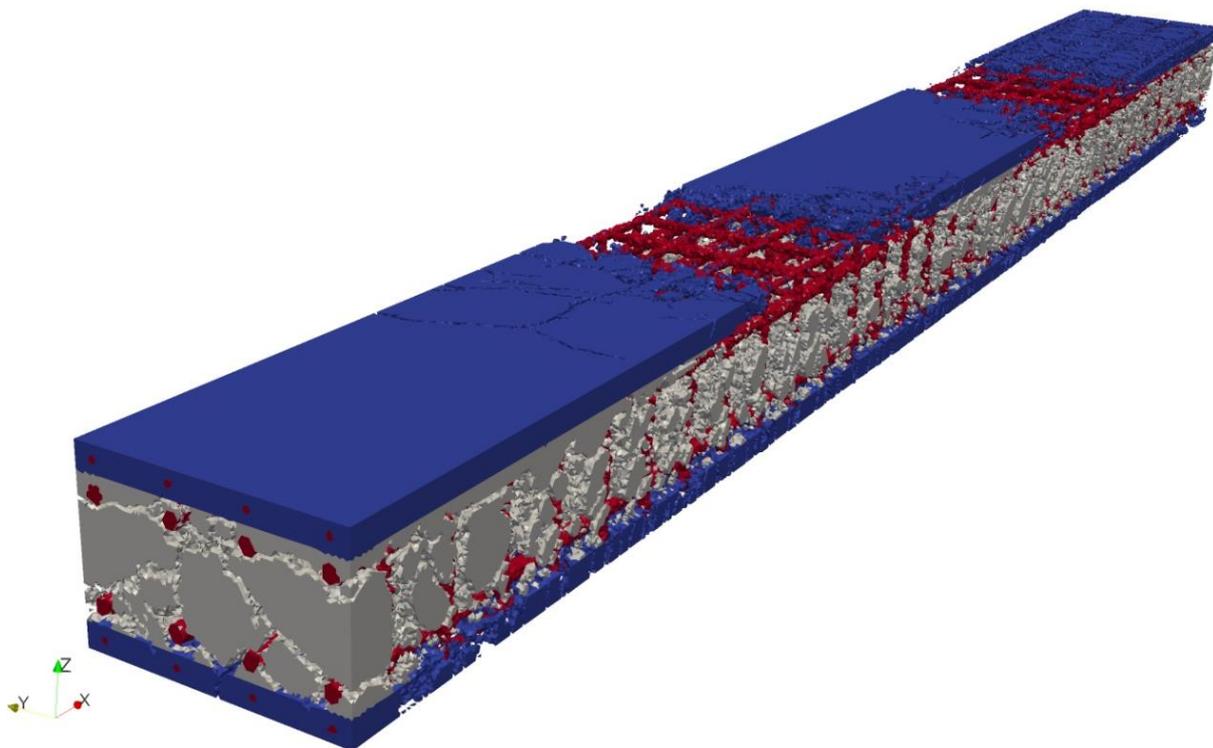


б)

Рисунок 4.6 – Внешний вид исследуемых образцов без арматуры (а) и с арматурой (б) в момент времени  $t=3$  мс.



а)



б)

Рисунок 4.7 – Внешний вид исследуемых образцов без арматуры (а) и с арматурой (б) в момент времени  $t=6$  мс.

В табл. 4.2 приведены максимальные значения растягивающих и сжимающих (со знаком «-») нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$  и сдвигового напряжения  $\sigma_{zx}$  в плоскости  $ZX$  в стальной арматуре и бетоне для армированной балки, а так же значение этих напряжений в слое бетона в балке без арматуры. В стальном армировании и в прилегающем к нему слое бетона возникают наибольшие по величине напряжения. Разрушение бетона происходит вследствие возникновения разрушающих напряжений в областях его взаимодействия с арматурной сеткой. Что приводит к образованию трещин и дальнейшей релаксации напряжений в неразрушенном бетоне.

Таблица 4.2 – Максимальные значения напряжений в материале

Время	Материал	Компонента тензора напряжений	$\sigma_{\min}$ , МПа	$\sigma_{\max}$ , МПа
3 мс	Сталь	$\sigma_{xx}$	-92,4	267
		$\sigma_{zx}$	-60,8	52,1
		$\sigma_{zz}$	-35	125
	Бетон	$\sigma_{xx}$	-55	7,18
		$\sigma_{zx}$	-13	15,2
		$\sigma_{zz}$	-55	6,44
	Без арматуры	$\sigma_{xx}$	-24,9	5,94
		$\sigma_{zx}$	-7,33	7,64
		$\sigma_{zz}$	-11,6	6,19
6 мс	Сталь	$\sigma_{xx}$	-455	365
		$\sigma_{zx}$	-131	133
		$\sigma_{zz}$	-437	402
	Бетон	$\sigma_{xx}$	-281	5,64
		$\sigma_{zx}$	-19	2,19
		$\sigma_{zz}$	-281	6,24
	Без арматуры	$\sigma_{xx}$	-4,59	3,57
		$\sigma_{zx}$	-2	2,8
		$\sigma_{zz}$	-3,43	2,75

На рис. 4.8 – рис. 4.10 приведены в сравнении изменения во времени перемещения точек тыльной поверхности армированной балки, полученных в эксперименте (сплошная кривая) и в расчете (пунктирная кривая). Для центральной точки ( $x=0$  м, рис. 4.8) расхождение составило 22%, для точки  $x=0,33$  м (рис. 4.9) — 8% и для точки  $x=0,66$  м (рис. 4.10) — 5%. С учетом

размерности решаемой задачи согласно с экспериментом вполне удовлетворительное.

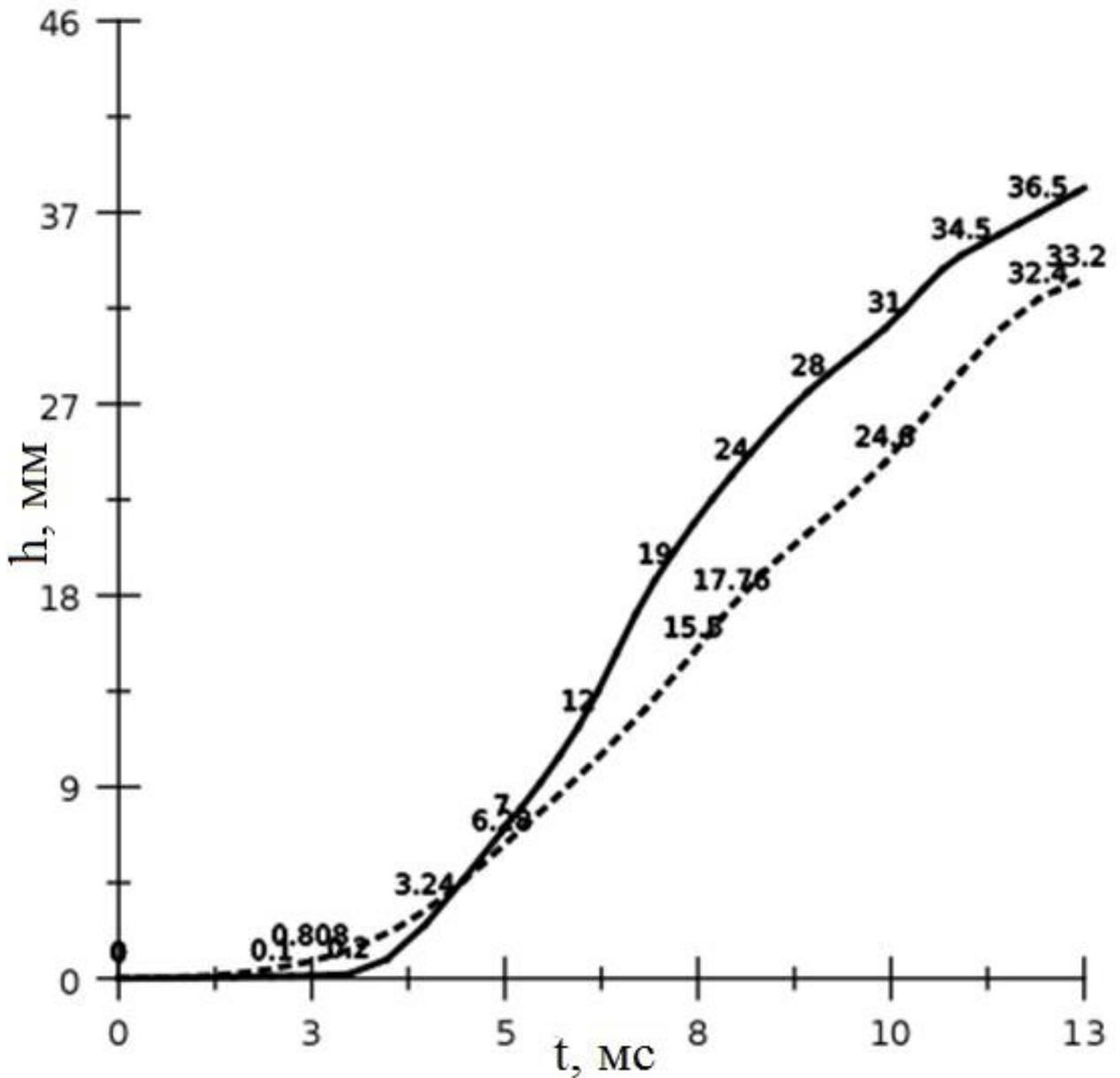


Рисунок 4.8 – Экспериментальное и расчетное перемещение во времени центральной точки тыльной поверхности балки.  $x=0$  м.

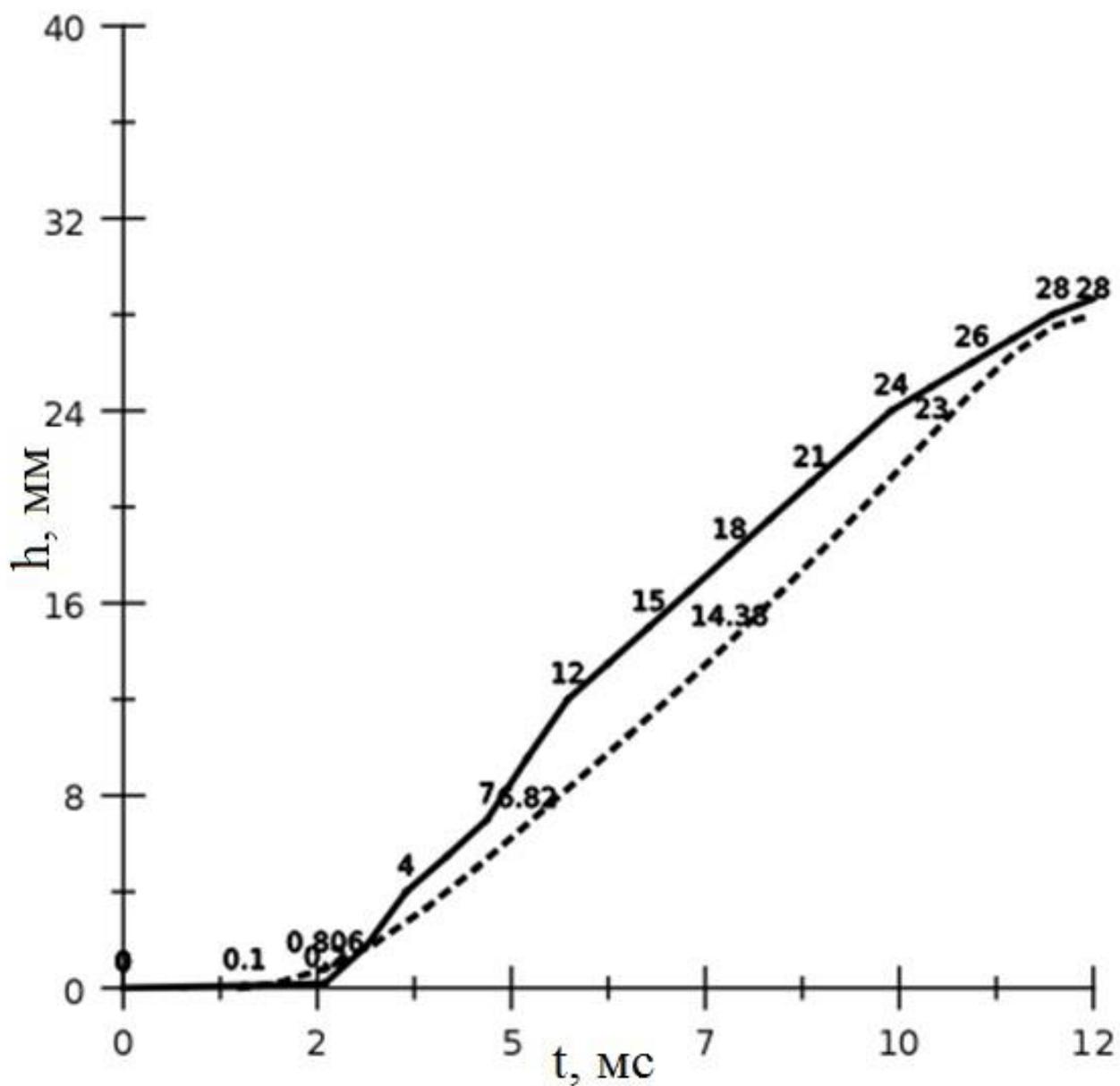


Рисунок 4.9 – Экспериментальное и расчетное перемещение во времени точки тыльной поверхности балки.  $x=0,33$  м.

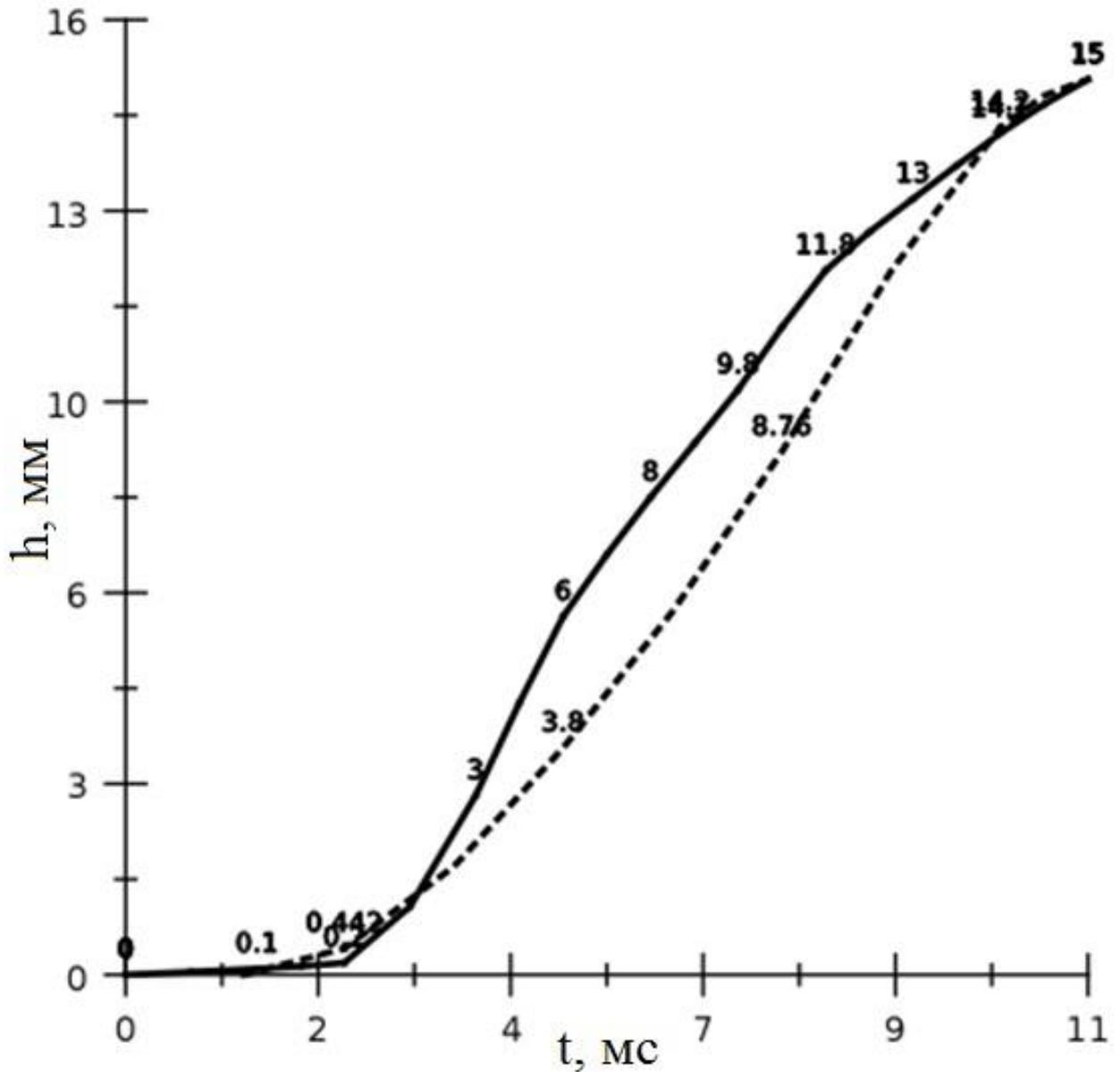


Рисунок 4.10 – Экспериментальное и расчетное перемещение во времени точки тыльной поверхности балки.  $x=0,66$  м.

В результате проведения ряда экспериментальных и численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Предложенная модель поведения бетона и фибробетона адекватно описывает динамику напряженно-деформированное состояние и процесс разрушения.

2. Реализованный алгоритм и методика расчета позволяют исследовать поведение конструкции в целом в полной трехмерной динамической постановке.

3. Было получено хорошее количественное и качественное согласование численных результатов с экспериментальными данными.

#### **4.2. Исследование разрушения защитной оболочки атомной станции при импульсном воздействии**

В исследовании показаны результаты математического моделирования деформирования и разрушения защитной оболочки атомной станции при динамическом нагружении. Защитная оболочка представляет собой конструкцию со сложной сотовой структурой. Сотовая структура состоит из бетона с применением углеродной фибры. Оболочка включает в себя восемь секторов, скрепленных между собой стальными фермами. Было проведено численное исследование поведения данной конструкции под воздействием падающего самолета.

Оболочечные конструкции широко применяются в разных областях: в нефтегазодобывающей отрасли — при хранении и транспортировке нефтепродуктов, в аэрокосмической отрасли, а также в целях защиты важных стратегических объектов. Разрабатывая новые конструкции крайне важно проводить анализ конструкции в целом, а не рассматривать только её отдельные элементы. В большинстве случаев натурные эксперименты требуют больших материальных затрат, а при реализации быстропротекающих процессов не всегда есть возможность учесть значения искомых параметров эксперимента в различные моменты времени. Поэтому становится необходимым наличие моделей и методов, предоставляющих возможность анализировать и осуществлять предсказание поведения сложных конструкций под действием нагрузок, возникающих во время эксплуатации и нештатной ситуации. Адекватное описание поведения конструкций требует учета пространственного характера напряженно-деформированного состояния (НДС), связанного со следующими факторами:

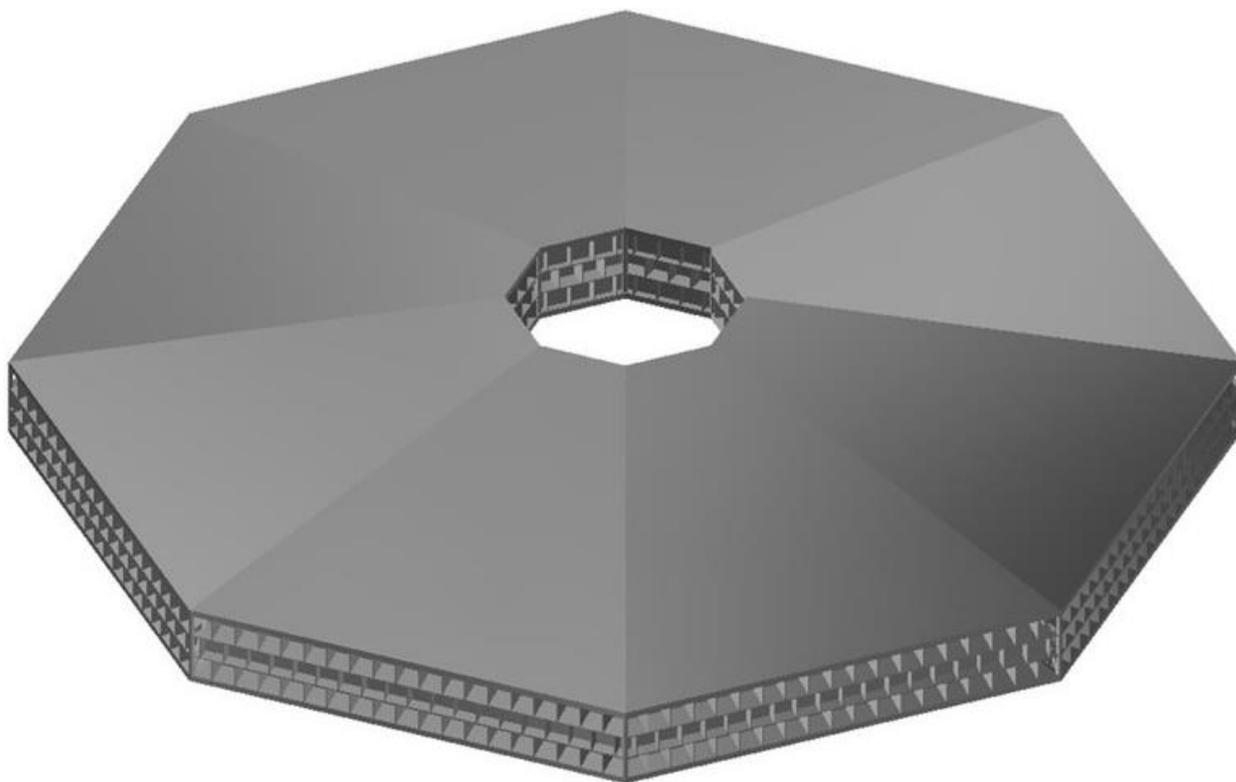
- геометрическая несимметричность
- несимметричность нагружения

— различие физико-механических свойств материалов и конструкций в различных направлениях

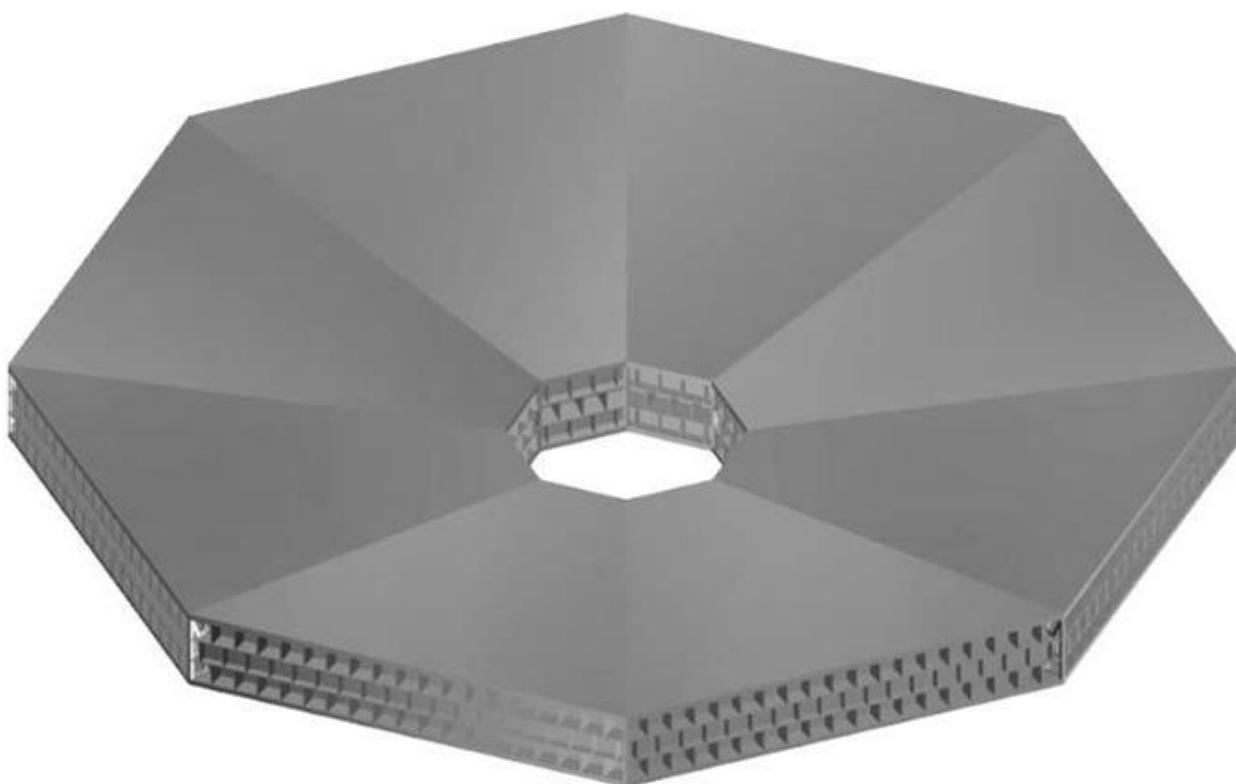
Анализ в полной трехмерной постановке необходим, если в проводимом численном исследовании присутствует хотя бы один из вышеперечисленных пунктов, но он требует как создания модели поведения, адекватно описывающей динамику напряженно-деформированного состояния и процессов разрушения, так и учет геометрии и пространственного расположения всех конструктивных элементов.

В данном подразделе представлено численное исследование падения самолета Боинг 747-400 на защитную оболочку атомной станции. Защитная оболочка представляет собой конструкцию со сложной сотовой структурой, состоящую из трех слоев бетона и бетона с применением углеродной фибры. Оболочка включает в себя восемь секторов, скрепленных между собой стальными фермами. Параметры взаимодействия самолета Боинг 747-400 с оболочечной конструкцией представлены в [133]. Численное моделирование проводилось в рамках модели, описанной во втором разделе. За счет использования параллельных вычислений было решено порядка  $10^{15}$  уравнений.

Защитная оболочка представлена на (рис. 4.11). Верхняя и нижняя крышки оболочки состоят из трех слоев различной толщины. Толщина верхнего и нижнего фибробетонных слоев — 0,05 м, толщина среднего бетонного — 0,2 м. Так как, в данной задаче рассматривается сложный геометрический объект с количеством конечных элементов более 50 млн., то явное выделение армирующих элементов привело бы к колоссальному возрастанию времени счета. Поэтому, было принято решение учитывать арматуру при помощи эффективных модулей, свойства арматурных элементов учитывались через их объемную долю в армированном материале.



a)



б)

Рисунок 4.11 – Общий вид защитной оболочки. а) – вид сверху, б) – вид снизу.

На (рис. 4.12) представлена сложная сотовая структура оболочки, состоящей из бетона с применением углеродной фибры. Оболочка включает в себя восемь секторов, скрепленных между собой стальными фермами. Физико-механические характеристики материалов приведены в (табл. 4.1).

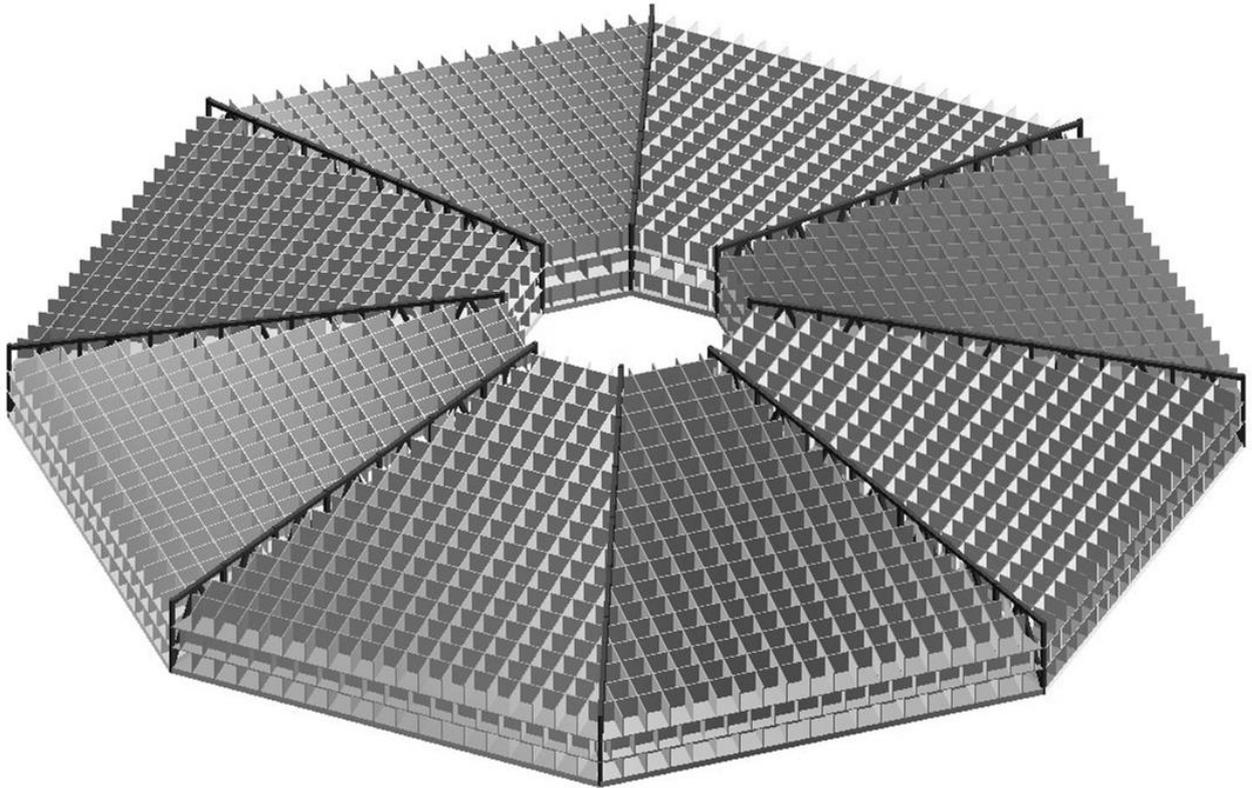


Рисунок 4.12 – Внутренняя сотовая структура оболочки.

Воздействие падающего самолета на защитную оболочечную конструкцию при численном моделировании принималось в качестве импульса, приведенного в [133]. Направление импульса соответствовало падению самолета под углом 10 градусов к горизонту. Область приложения импульса приведена на (рис. 4.13). Темно-серым цветом обозначено место приложения нагрузки от фюзеляжа и крыльев. Максимальное значение нагружающей силы — 250 МН.

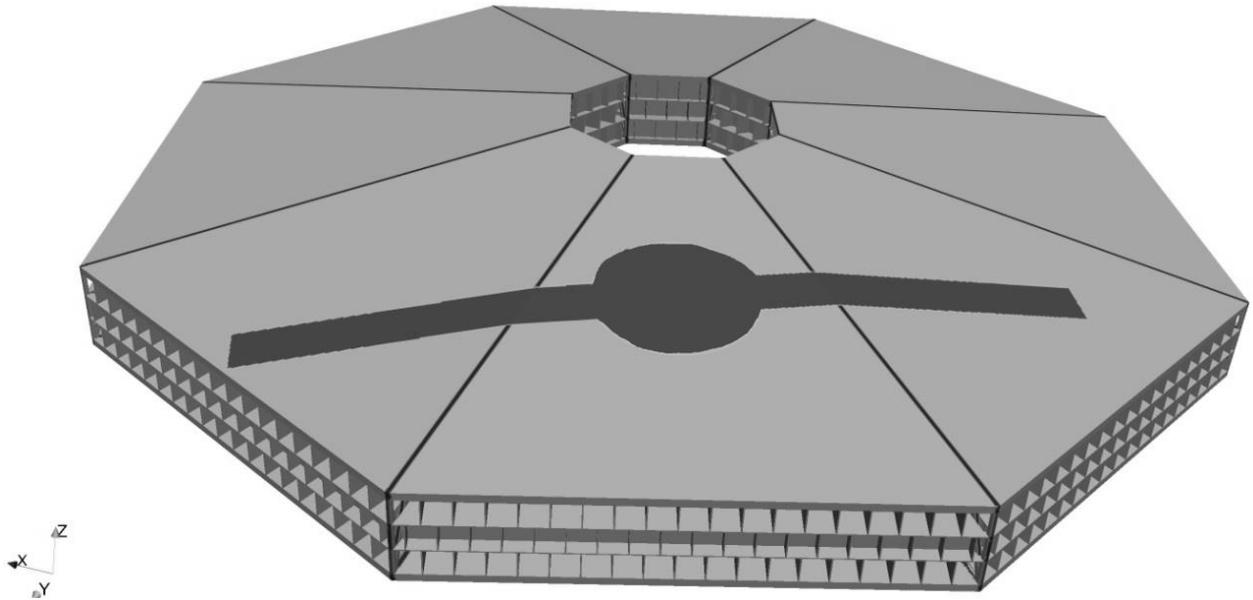


Рисунок 4.13 – Схема приложения импульса.

На (рис. 4.14) представлена зависимость величины нагрузки, распределяемой по области приложения импульса в зависимости от времени.

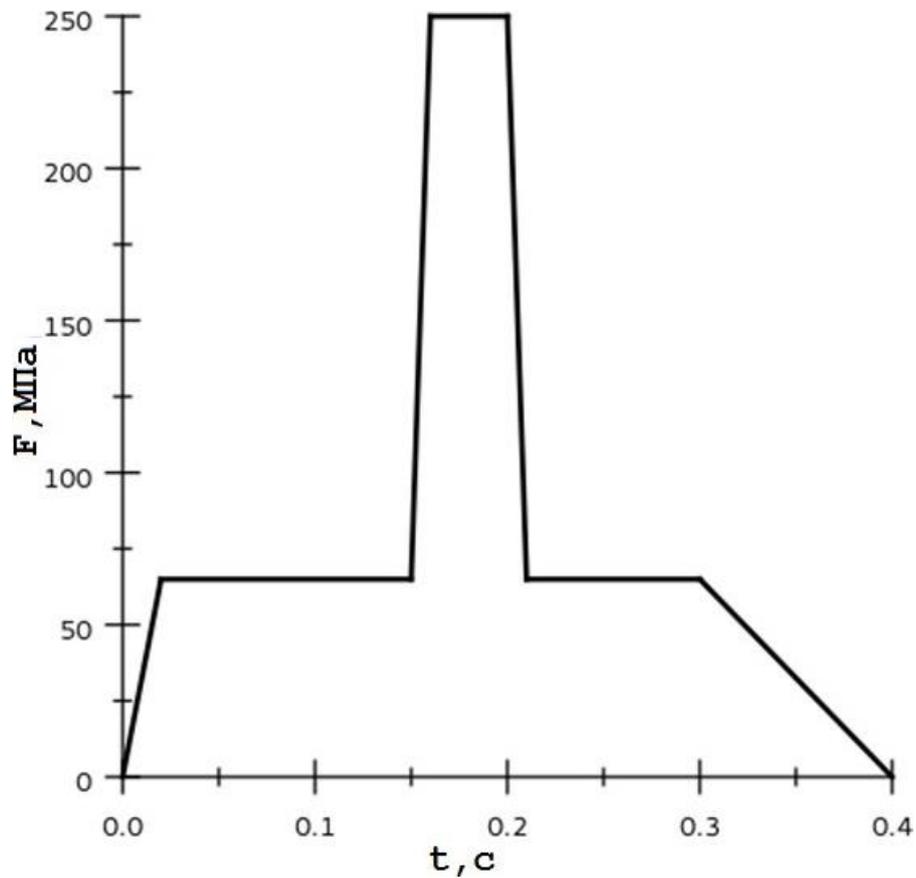


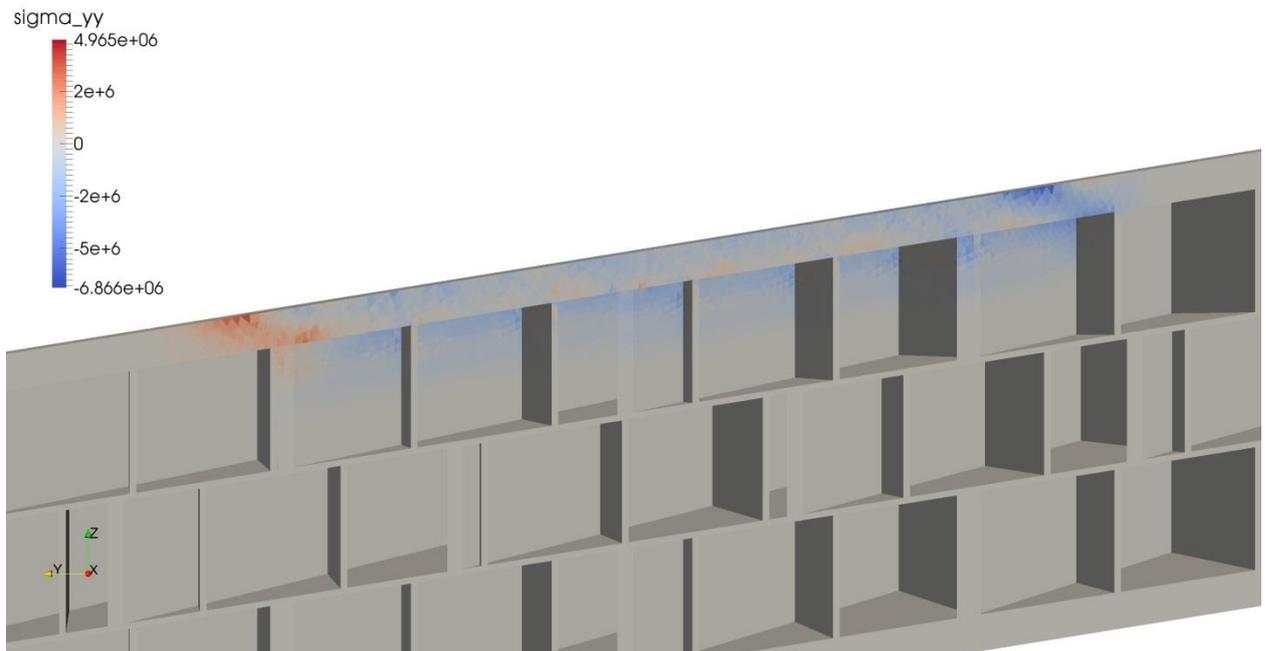
Рисунок 4.14 – Нагрузка при ударе самолета Боинг 747-400

Следует отметить, что процесс создания качественной трехмерной расчетной сетки является сложным вопросом, особенно для конструкций, включающих большое число различных элементов. Это является самостоятельной трудоемкой задачей, решение которой влияет как на точность полученного результата, так и на затраченное, на его получение время. Принимая это во внимание, итоговая конечно-элементная сетка защитной оболочки состояла из  $5 \cdot 10^7$  тетраэдров.

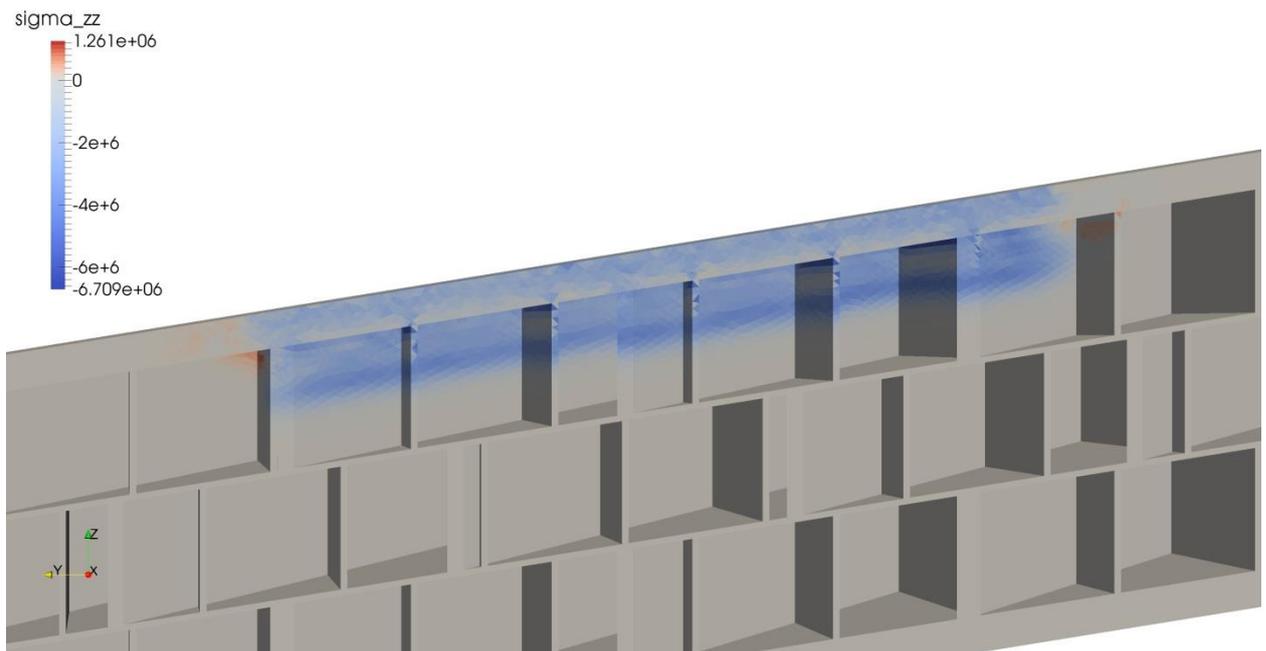
В рамках работы было проведено численное исследование напряженно-деформированного состояния данной конструкции под воздействием падающего самолета.

На рис. 4.15 – рис. 4.18 представлены распределения в различные моменты времени компонент тензора напряжений в радиальном сечении оболочки, проходящем через центральную точку приложения нагрузки. Графики наглядно иллюстрируют распространение волны сжатия (отрицательные значения напряжений, синий цвет) по толщине оболочки и формирование растягивающих напряжений (положительные значения, красный цвет) по периметру зоны приложения импульса и внутри оболочки на свободных поверхностях сотовой структуры. К моменту времени 0,8 мс (рис. 4.18) в результате действия растягивающих напряжений уже наблюдаются разрушения сотовой структуры. При анализе напряженно-деформированного состояния оболочки было установлено формирование растягивающих напряжений в области воздействия импульсной нагрузки и на внутренних свободных поверхностях сот. Именно под воздействием растягивающих напряжений происходит разрушение сотовой структуры оболочечной конструкции. При достижении волнами сжатия свободных поверхностей оболочки происходит их отражение волнами разгрузки, вследствие чего появляются растягивающие напряжения. Благодаря внутренней сотовой структуре имеется большое количество свободных поверхностей, что как

снижает уровень сжимающих напряжений, так и способствует образованию областей растяжения. Последнее приводит к зарождению трещин.



а)



б)

Рисунок 4.15 – Распределение напряжений в момент времени 0,2 мс. а) –  $\sigma_{yy}$ , б) –  $\sigma_{zz}$ .

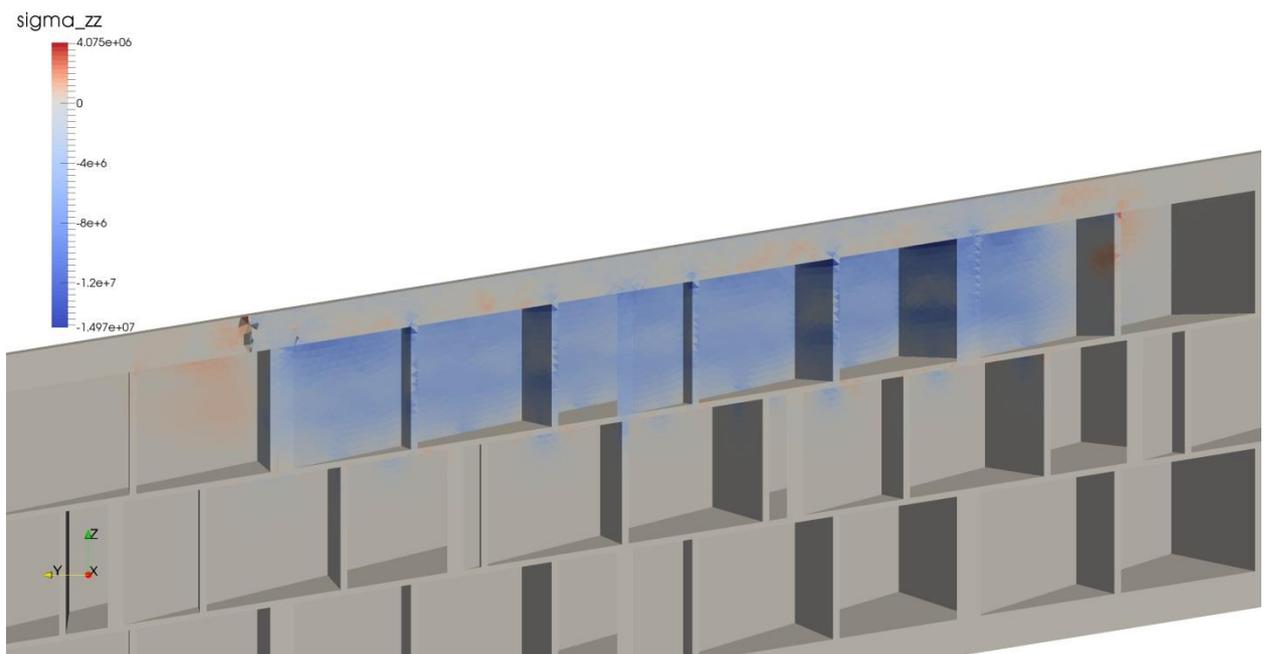
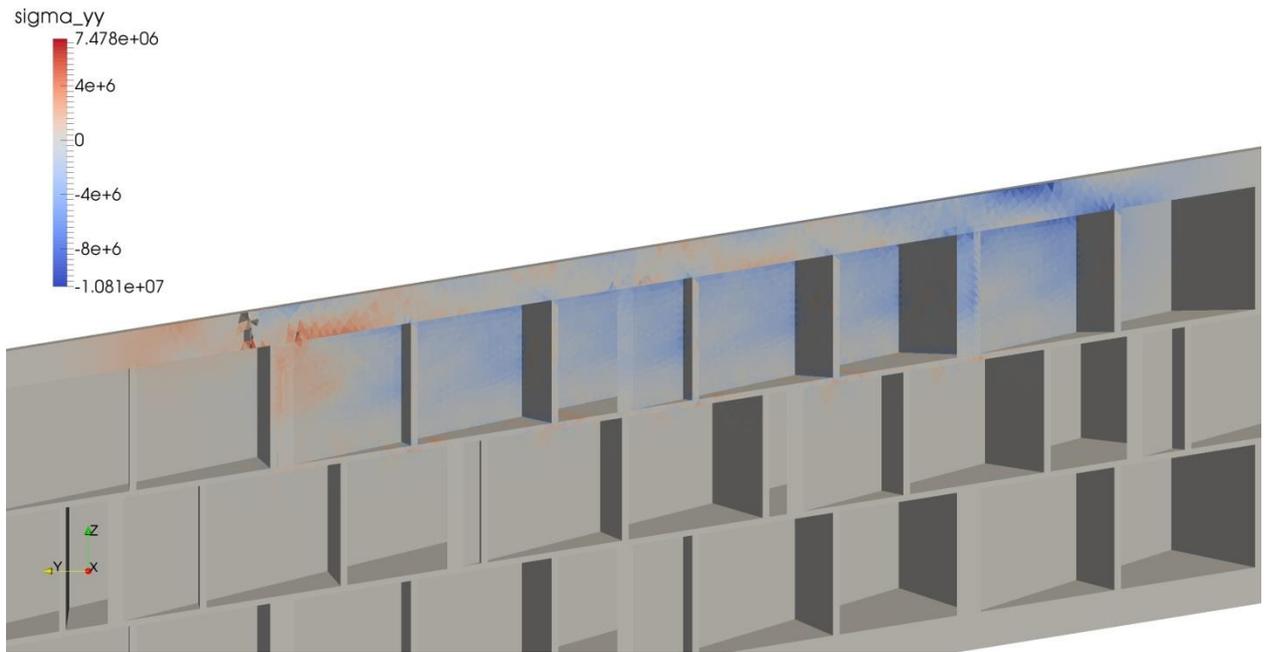
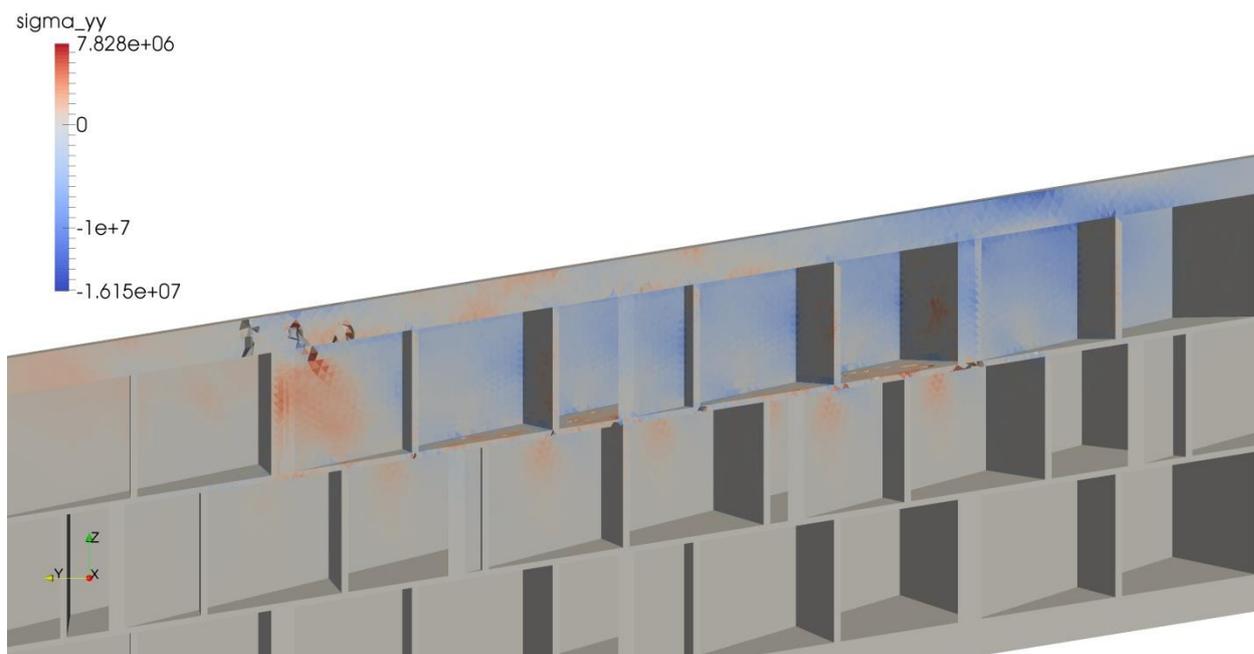
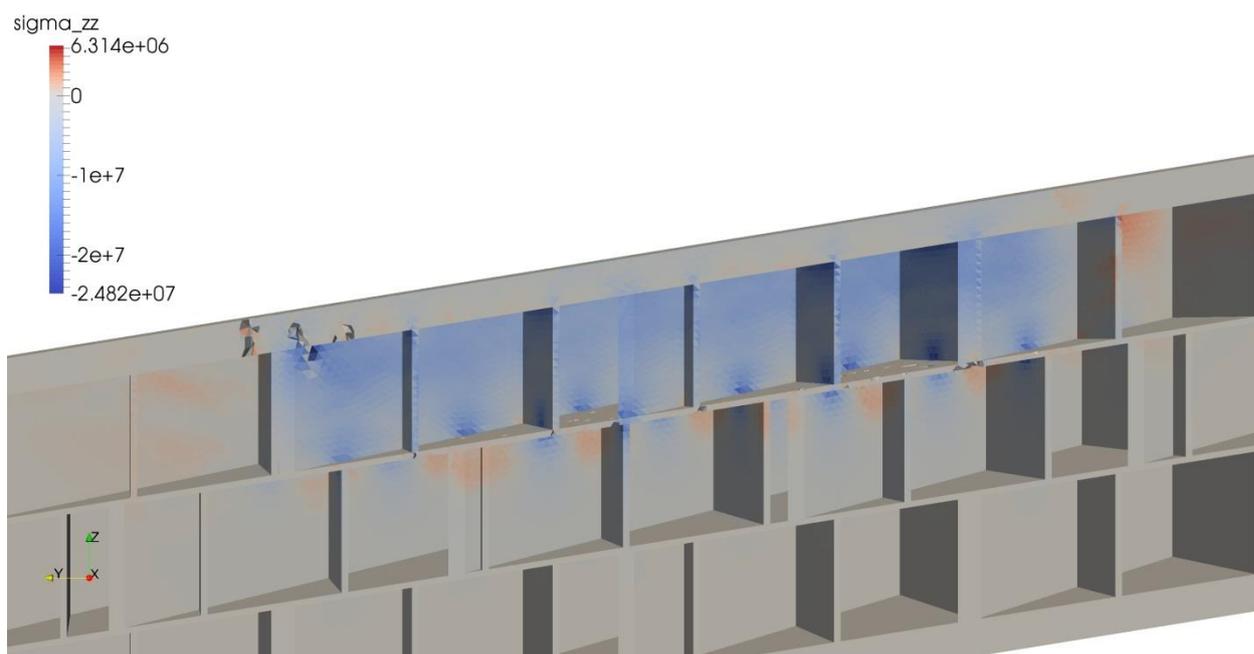


Рисунок 4.16 – Распределение напряжений в момент времени 0,4 мс. а) –  $\sigma_{yy}$ , б) –  $\sigma_{zz}$ .

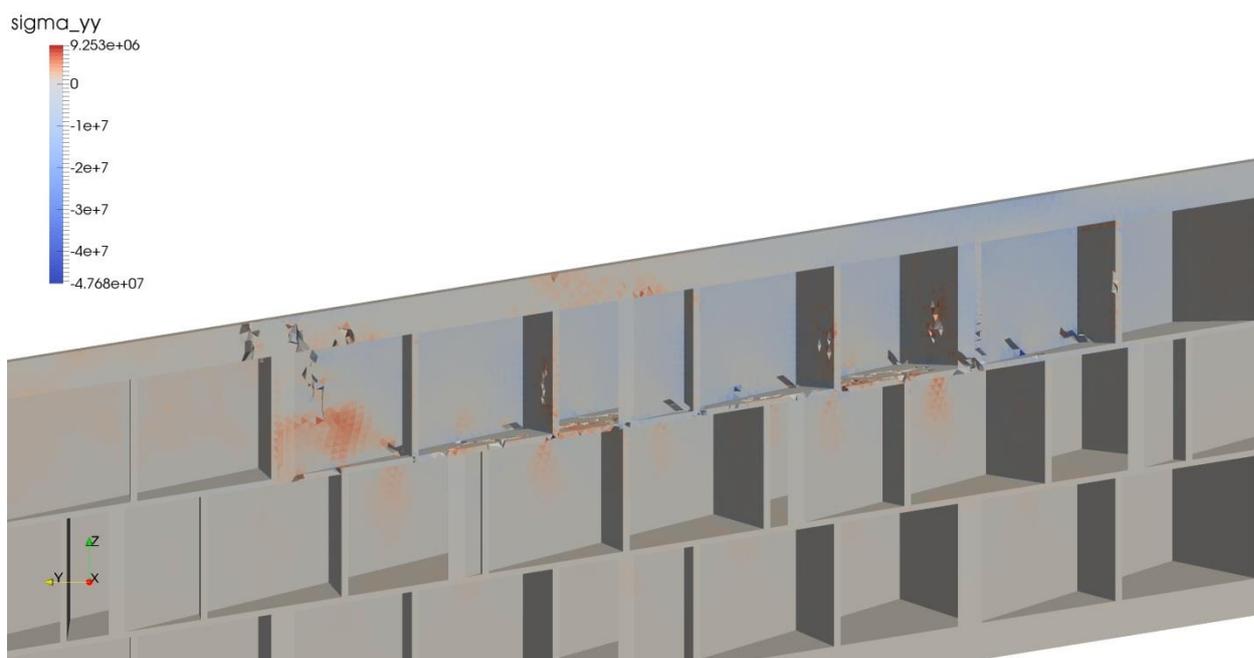


а)

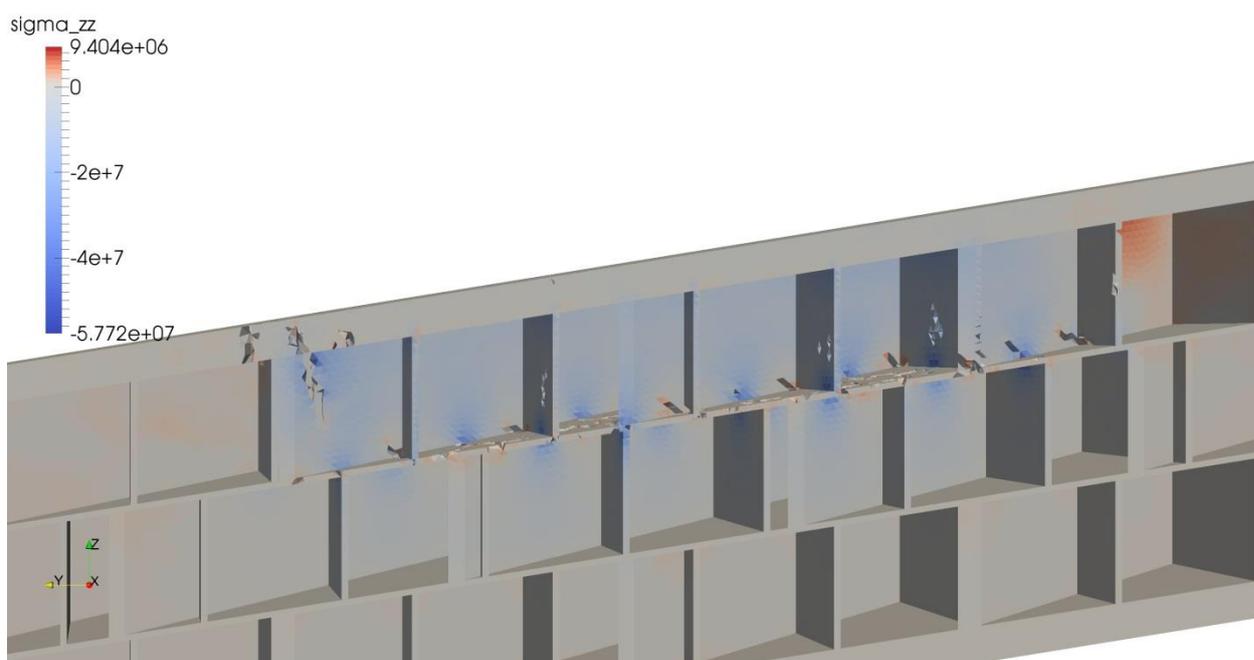


б)

Рисунок 4.17 – Распределение напряжений в момент времени 0,6 мс. а) –  $\sigma_{yy}$ , б) –  $\sigma_{zz}$ .



а)



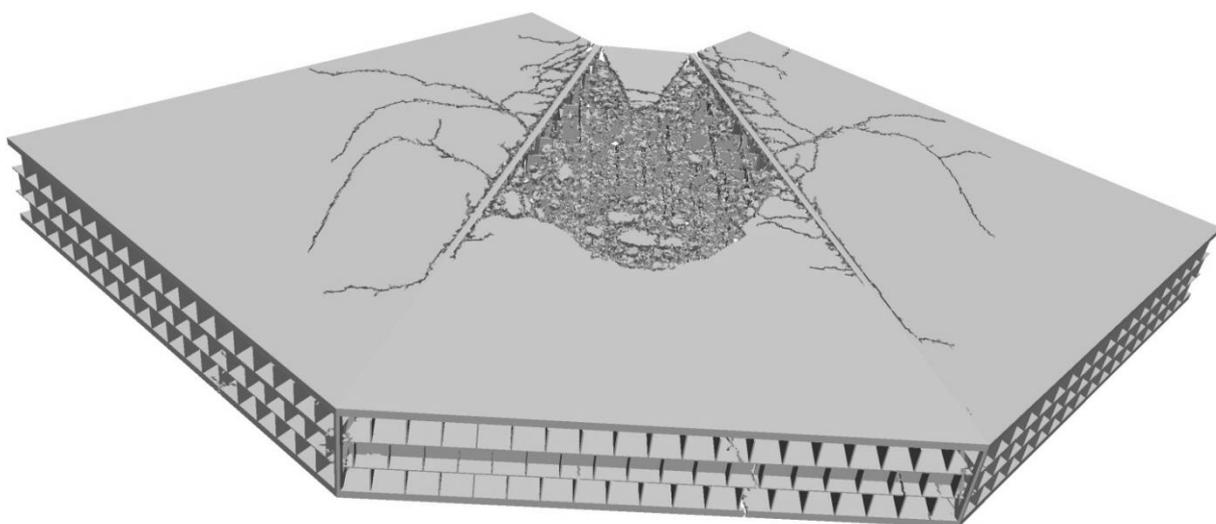
б)

Рисунок 4.18 – Распределение напряжений в момент времени 0,8 мс. а) –  $\sigma_{yy}$ , б) –  $\sigma_{zz}$ .

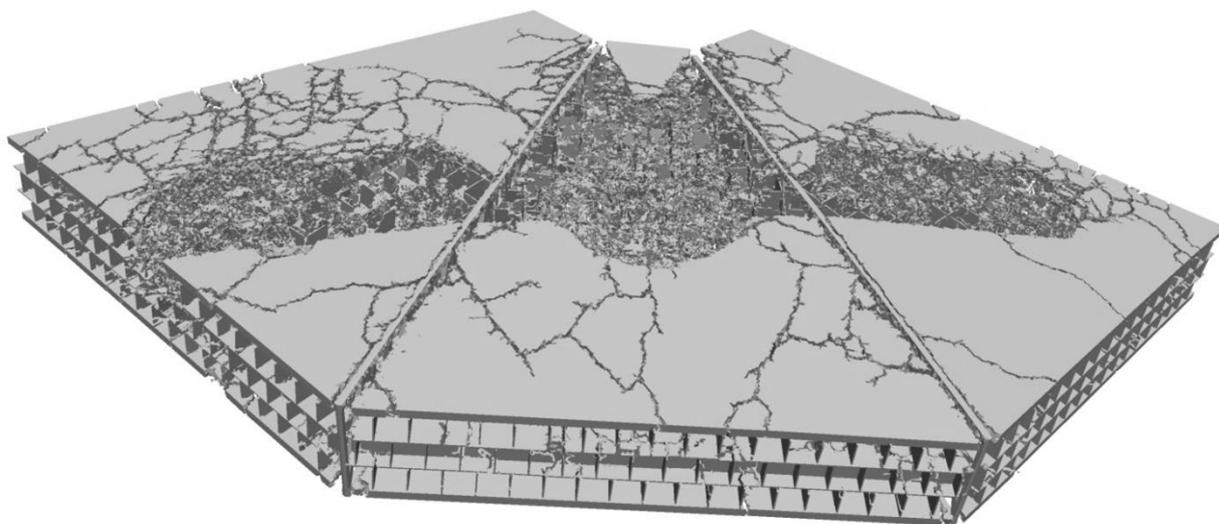
Процесс разрушения защитной оболочки с течением времени представлен на (рис. 4.19), проиллюстрировано трещинообразование на фронтальной поверхности. Инициирование разрушения происходит в местах импульсного воздействия. Под действием растягивающих напряжений, образуются трещины в области приложения импульса, в дальнейшем их рост происходит по лицевой

поверхности оболочечной конструкции. Под воздействием импульса нагрузки металлические фермы испытывают сильные деформации, но разрушения в них не происходит. Но из-за серьёзного различия упругих и прочностных характеристик исследуемых материалов, стальные фермы выступают концентраторами напряжений.

В момент времени 160 мс начинается взаимодействие крыльев самолета с защитной оболочкой, что приводит её более интенсивному разрушению.



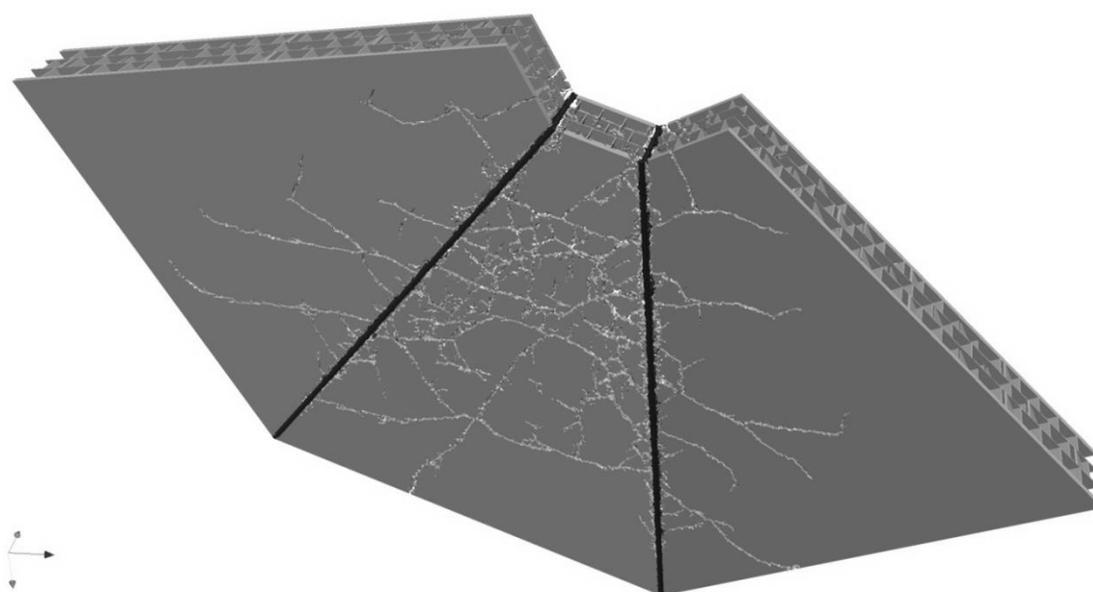
$t=20$  мс



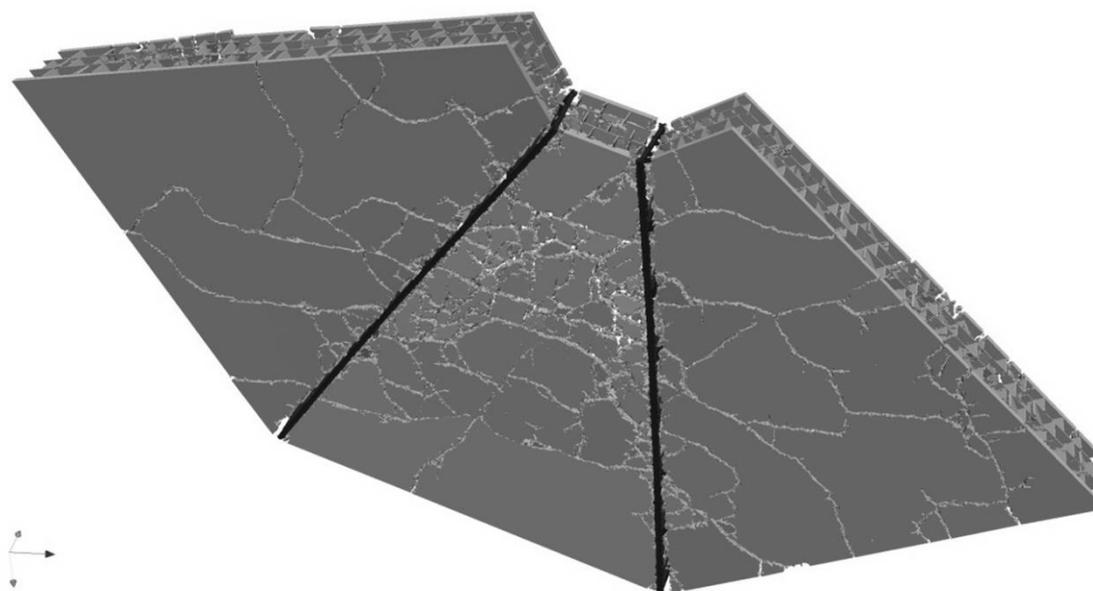
$t=300$  мс

Рисунок 4.19 – Разрушение оболочки. Вид сверху.

Картина развития разрушения на тыльной поверхности проиллюстрирована на рис. 4.20. Наглядно показано, что процесс трещинообразования возникает под областью приложения импульса и приводит к развитию трещин по всей тыльной поверхности. Данное разрушение обусловлено действием растягивающих напряжений, возникающих при достижении волнами сжатия тыльной поверхности, развитие трещин продолжается на протяжении всего процесса приложения нагрузки.



$t=20$  мс



$t=300$  мс

Рисунок 4.20 – Разрушение оболочки. Вид снизу.

Развитие разрушения в оболочечной конструкции в срединном сечении зоны импульса нагрузки в наиболее показательные моменты времени представлено на рис. 4.21. На первой иллюстрации виден процесс разрушения, обусловленный внедрением фюзеляжа самолета, а к моменту времени  $t=300$  мс оболочка интенсивно разрушается вследствие взаимодействия с крыльями.

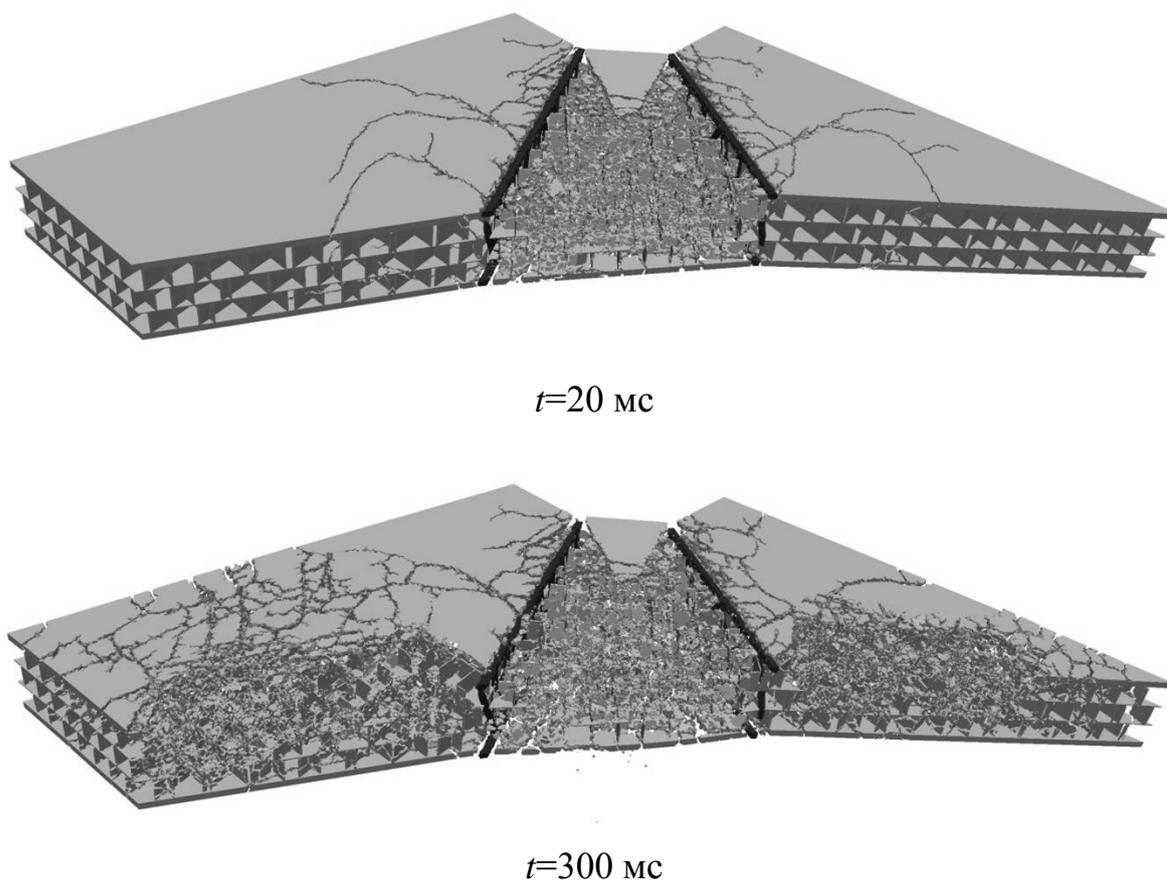


Рисунок 4.21 – Разрушение оболочки. Поперечное сечение.

После реализованных численных исследований были сделаны следующие выводы:

1. В рамках феноменологического подхода механики сплошной среды предложена модель и создана методика расчета оболочечных конструкций со сложной внутренней структурой при интенсивных динамических нагрузках. Данная методика, использующая полную трехмерную постановку основана на модифицированном МКЭ.

2. Благодаря предложенной методике стало возможным проведение широкопараметрических численных исследований для проектирования конструкций, оптимально работающих в заданных условиях.

3. Проведены численные эксперименты, показывающие динамику НДС и развития разрушения защитной оболочки атомной станции, имеющей сложную сотовую структуру при динамическом нагружении.

4. Показано, что начало процесса разрушения защитной оболочки обусловлено выходом волн сжатия на свободные поверхности внутренней сотовой структуры и образованием областей растягивающих напряжений. В дальнейшем рост уровня разрушения связан с действием импульсного нагружения.

5. Схема трещинообразования во фронтальной и тыльной поверхностях конструкции, обусловлена действием растягивающих напряжений и имеет радиальный характер.

#### **4.3. Исследования поведение балок с неметаллической арматурой**

Изготовление долговечных и высокопрочных бетонных конструкций является актуальной задачей. Поэтому особое внимание стало уделяться использованию неметаллической композитной арматуры в строительных конструкциях. В данном разделе рассмотрены экспериментальные (экспериментальные исследования были осуществлены на кафедре ЖБК ТГАСУ следующим научным коллективом: В.С. Плевковым и К.Л. Кудяковым) и численные исследования характера разрушения и трещинообразования изгибаемых бетонных элементов со стержневым композитным армированием [134, 135]. Армирование осуществлялось при помощи стержней из стеклопластика, с диаметром сечения 6 мм. Бетонные элементы испытаны на динамическую нагрузку на специальной копровой установке [132], в результате получены схемы разрушения и трещинообразования, максимальная величина

нагрузки и максимальный прогиб элемента. Проведено сравнение численных и экспериментальных результатов между собой.

Для соответствия современным тенденциям в строительной отрасли возникают всё новые требования к материалам, применяемым при создании строительных конструкций. Учет прочностных и деформативных свойств остается столь же важным, но и начинают появляться требования к долговечности, коррозионной стойкости, электропроводимости материалов. Наряду с этим, самый популярный современный строительный материал — железобетон, чаще всего, не удовлетворяет вышеперечисленным условиям. Последнее время всё чаще пересматриваются нормативы сейсмической активности различных регионов РФ, поэтому появилась необходимость реализации новых конструктивных решений с применением современных строительных материалов [136].

Одним из подходов решения этой задачи является применение композитного стержневого армирования бетонных конструкций. Так как подобного рода армирование имеет ряд преимуществ: малый удельный вес, высокие прочностные характеристики, коррозионная стойкость. А также к плюсам можно отнести магнитоинертность, радиопрозрачность и наличие диэлектрических свойств. Но наличие таких недостатков, как малая деформативность, невысокий уровень огнестойкости и отсутствие стабильной технологии создания преднапряженного состояния, ограничивает область их возможного применения. В связи с этим, исследования применения неметаллического композитного полимерного армирования в бетонных конструкциях становятся крайне актуальными [136].

С целью определения схем трещинообразования и исследования особенностей деформирования балочных бетонных элементов с применением стеклопластикового армирования был предложен и реализован план экспериментальных испытаний. Он включал в себя создание бетонных балок с композитным армированием и их дальнейшее исследование при

кратковременном импульсном нагружении. Для проведения экспериментальных исследований применялась копровая установка, позволяющая создать кратковременную импульсную нагрузку (рис. 4.22).

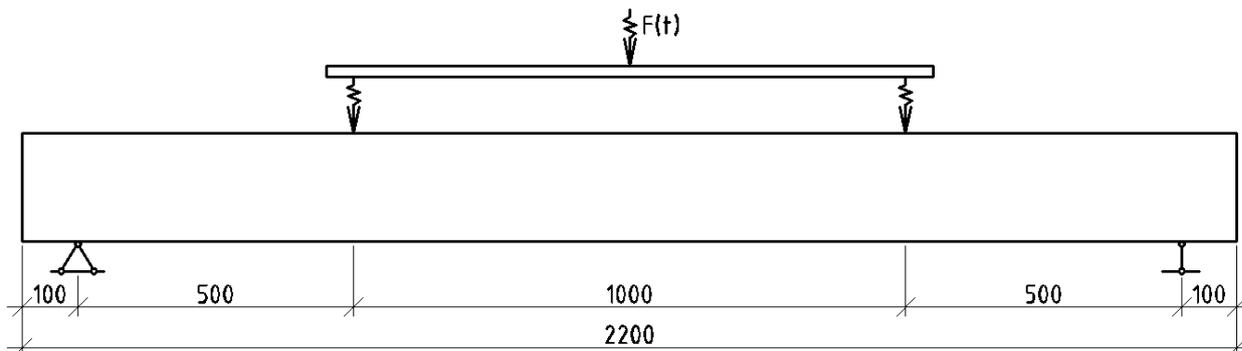


Рисунок 4.22 – Схема приложения нагрузки

Для изготовления образцов использован состав мелкозернистого бетона с классом по прочности на сжатие В35. В качестве продольной стержневой арматуры применялись композитные стержни из стеклопластика марки «MONSTEROD» диаметром 6 мм. Данная арматура имела ребристую поверхность для сцепления с бетоном. Также использованы арматурные стальные стержни класса А240. В качестве поперечного армирования использована арматурная проволока класса Вр500. (рис. 4.23)

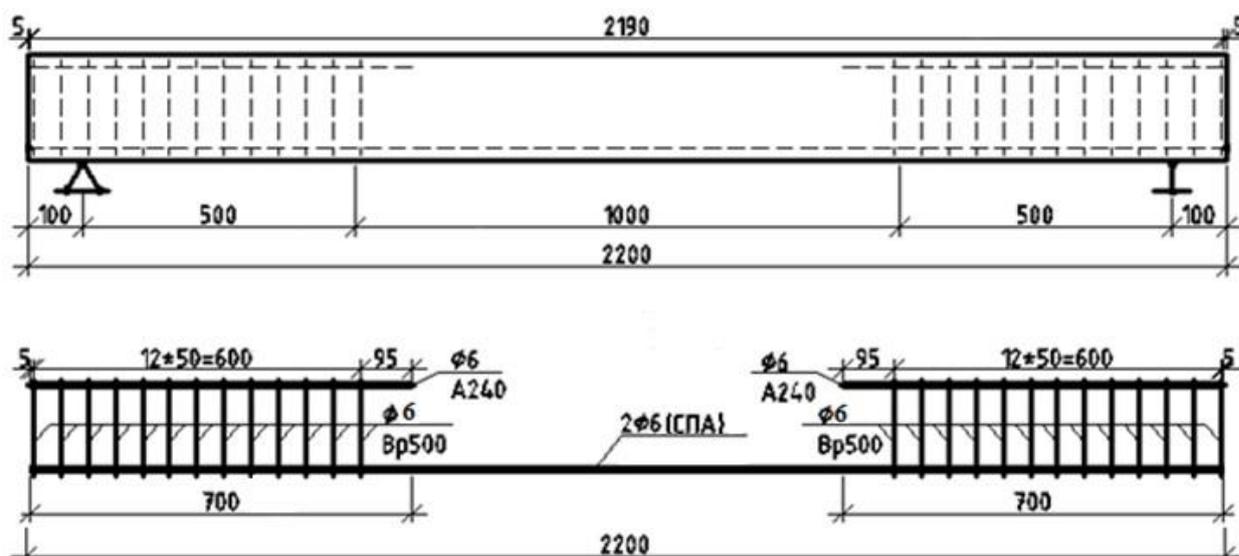


Рисунок 4.23 – Конструкция бетонной балки со стеклопластиковым армированием

Ряд предварительных испытаний [137, 138] выявил, что стеклопластиковая арматура имеет высокий предел прочности в условиях растяжения (до 1,28 ГПа), а модуль Юнга имел значение 40 — 60 ГПа. Применение подобной арматуры позволяет снизить удельный вес конструкции на 2% до 112,7 кг, так как плотность арматуры равна 1950 кг/м<sup>3</sup>. Физико-механические характеристики используемых материалов приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Физико-механические характеристики используемых материалов

Материал	Предел прочности		Модуль упругости		Плотность, кг/м <sup>3</sup>
	при растяжении, МПа	при сжатии, МПа	при растяжении, МПа	при сжатии, МПа	
Бетон	2,09	26,12	32400	32400	2450
Стеклокомпозит	1280	790	60000	40000	1950

После проведенных экспериментальных исследований были определены схемы трещинообразования и особенности развития разрушения бетонных балок со стеклопластиковым стержневым армированием (рис.4.24). Анализ полученных результатов выявил, что разрушение балки происходит по сечению, нормальному к продольной оси с образованием трещин в пределах зоны чистого изгиба. При проведении эксперимента проскальзывания арматуры зафиксировано не было. Максимальный прогиб образца составил 53 мм.

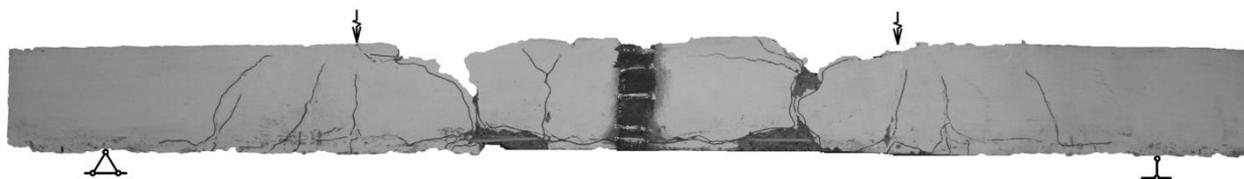


Рисунок 4.24 – Схема трещинообразования и развития разрушения исследуемой балки при кратковременном динамическом воздействии

Поведение элементов с композитным и металлическим армированием существенно отличаются. Под воздействием импульса нагружения образцы с композитной арматурой проявляли ярко выраженные затухающие колебания. После прекращения действия нагрузки исходная форма бетонного образца восстанавливалась. Испытания показали более высокую деформативность балок с неметаллическим армированием при схожей несущей способности.

Для экспериментальных исследований прочности и деформативности бетонных балок, армированных стеклопластиковыми стержнями, проведены численные исследования их поведения при кратковременном импульсном нагружении.

При численном моделировании динамическая нагрузка на бетонный элемент принималась равной нагрузке полученной в ходе эксперимента, при помощи силомера. Направление, величина и место приложения нагрузки полностью соответствуют эксперименту. Максимальное значение импульса 94 кН в момент времени 4 мс.

В численных исследованиях бетон, стеклопластик и сталь имели математическую модель, описанную в разделе 2.

В рамках поставленной задачи был проведен ряд исследований с использованием различных численных моделей. В настоящее время использовалось 3 варианта задания граничного условия интерфейса:

1) Свойства арматуры «размазывались» по всему объему бетону, вследствие чего бетон получает высокую анизотропию упругих и прочностных свойств. Среда является гомогенной.

2) Арматура и бетон являются одним телом, но арматура выделяется явно, путем задания прочностных свойств армирования расчетным ячейкам

3) Бетон и арматура являются независимыми телами. Возникает возможность контактного взаимодействия на границе двух сред.

Сложность численного моделирования интерфейса «бетон-арматура» заключается в том, что ни один из подходов пока в полной мере не отражает

реального поведения арматуры. Потому что в экспериментах арматура может проскальзывать, не разрушая бетон, чего не позволяет добиться ни один из трёх способов. В способе 2 арматура является концентратором напряжений и вдоль неё интенсивно начинает разрушаться бетон, чего в натуральных экспериментах не происходит. Проводились численные эксперименты в рамках подхода 2, в которых вокруг арматуры создавались несколько более податливых слоев бетона, что позволило получить результаты, близкие к экспериментальным, но проблема интерфейса как концентратора напряжений до конца не является решенной.

Если размеры армирующих элементов малы по сравнению с размерами всей конструкции, то подход 1 является корректным. Когда размеры армирования сопоставимы с размерами конструкции, то результаты моделирования с данным подходом в меньшей степени согласуются с экспериментом.

Подход 3 требует очень качественной конечно-элементной сетки, для таких размерностей задачи это приблизительно 35 млн. элементов. И задача становится контактной, что при таком количестве решаемых уравнений требует на порядок большего процессорного времени. При этом, численные результаты качественно близки к полученным в эксперименте: точное физическое описание интерфейса «бетон-армирование», а также адекватное сравнение интегральной характеристики прогиба конструкции в целом.

В результате численного расчёта получены картины возникновения и развития разрушения исследуемого образца при кратковременном импульсном нагружении, которые имеют хорошую сходимость с экспериментальными исследованиями (рис. 4.25).

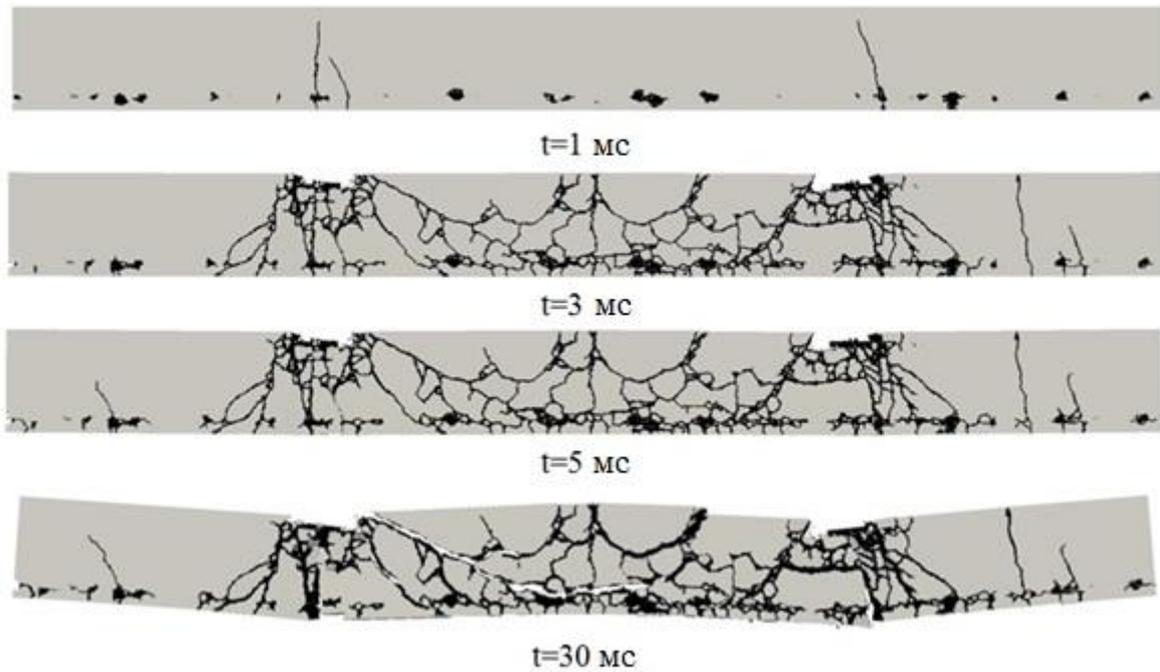


Рисунок 4.25 – Вид железобетонной балки в момент времени

Также было проведено сравнение численного и экспериментального прогиба балки с течением времени (рис. 4.27).

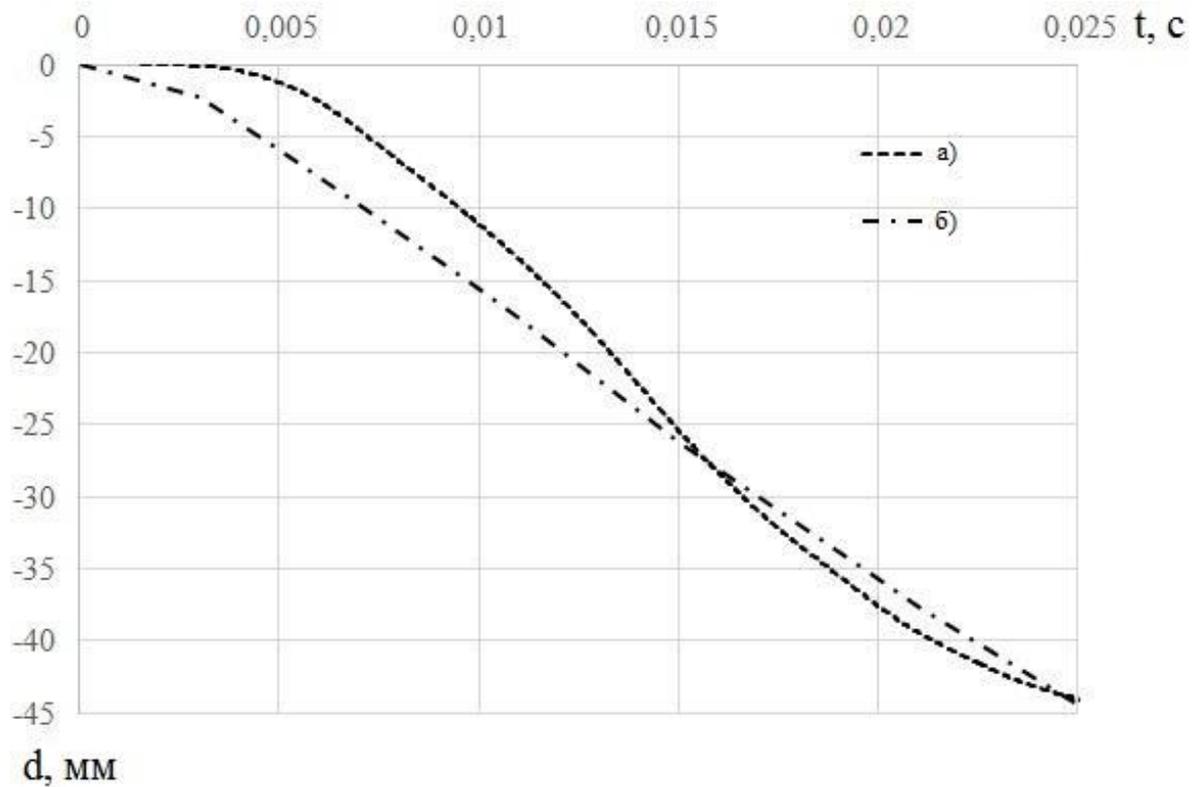


Рисунок 4.26 – График прогиба балки. а) эксперимент, б) численное моделирование

Величины максимального прогиба в численном и экспериментальных образцах совпадают. Максимальное расхождение составляет не более 7%.

Анализ результатов экспериментальных и численных исследований образцов при динамическом воздействии показал, что применение в изгибаемых конструкциях стеклопластиковых стержней, позволяет увеличить несущую способность элемента до 10-30%, при этом увеличивая его деформативность. Благодаря этому возрастает живучесть изгибаемых бетонных элементов при динамическом нагружении.

После реализованных исследований были сделаны следующие выводы:

1. Исследовано влияние металлического и неметаллического армирования и наличия фиброволокна на прочностные характеристики бетонных балок. Выявлены схемы образования разрушения. При динамических нагрузках, возникновение трещин начинается с тыльной поверхности бетонных и железобетонных балок. Установлено, что применение в изгибаемых конструкциях стеклопластиковых стержней, позволяет увеличить несущую способность элемента, при этом увеличивая его деформативность. Благодаря повышенной деформативности балок с композитным армированием, возрастает их несущая способность и живучесть при динамическом нагружении.

2. Исследована динамика напряженно-деформированного состояния и разрушения в защитной оболочке атомной станции (АС). Установлено, что при падении самолета на защитную оболочку реактора АС разрушение инициируется на свободных поверхностях сотовой конструкции под действием растягивающих напряжений при отражении волны сжатия от свободных поверхностей. С течением времени конструкция продолжает разрушаться под действием растягивающих напряжений.

3. Исследовано влияние анизотропной стеклопластиковой арматуры на несущую способность изгибаемых элементов конструкций. Установлено, что при динамических воздействиях использование стеклопластиковой арматуры в бетонных балках позволяет увеличить несущую способность и деформативность балки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный алгоритм, модели и результаты исследований могут использоваться для исследования и прогнозирования поведения широкого спектра материалов и конструкций при различных режимах внешних воздействий. Полученные результаты внедрены и используются на АО НПК «Конструкторское бюро машиностроения», г. Коломна, корпорации Росатом, также они могут использоваться в организациях, которые исследуют свойства материалов и конструкций при динамическом нагружении.

Итоговые выводы по проделанной работе заключаются в следующем:

1. Предложена модель поведения композитов на основе бетона при динамических нагрузках, учитывающая их специфические свойства – разномодульность упругих и прочностных характеристик, пластичность, зависимость прочности от скорости деформирования.

2. На базе метода конечных элементов создан алгоритм численного расчета для исследования свойства и закономерностей поведения широкого класса материалов и конструкций при динамических нагрузках в трехмерной постановке. Реализован уникальный алгоритм расчета контактных границ, корректно работающий с геометрией любой сложности. Реализованный алгоритм, оптимизирован под многоядерные системы и параллельные вычисления, что позволяет добиться максимальной производительности и быстродействия. Произведена многократная оптимизация вычислительной схемы для достижения максимального быстродействия.

2. В трехмерной постановке исследовано влияние скорости и формы поражающих элементов на проникающую способность при взаимодействии с кумулятивным снарядом. Установлено, что форма поражающих элементов оказывает значительное влияние на их проникающую способность и на механизмы разрушения как ударника, так и преграды. Показано, что наибольшую проникающую способность имеет ударник в форме удлиненного цилиндра. Установлено, что при скоростях взаимодействия порядка 800 м/с

происходит потеря устойчивости и вращение удлинённых ударников после пробития первой преграды, что отрицательно сказывается на их дальнейшей проникающей способности. Показано, что при скоростях порядка 2000 м/с происходит активное разрушение ударников и снижение их проникающей способности. Для рассмотренных поражающих элементов максимальная проникающая способность достигается при скорости 1400 м/с.

3. Исследовано влияние металлического и неметаллического армирования и наличия фиброволокна на прочностные характеристики бетонных балок. Выявлены схемы образования разрушения. При динамических нагрузках, возникновение трещин начинается с тыльной поверхности бетонных и железобетонных балок. Установлено, что применение в изгибаемых конструкциях стеклопластиковых стержней, позволяет увеличить несущую способность элемента, при этом увеличивая его деформативность. Благодаря повышенной деформативности балок с композитным армированием, возрастает их несущая способность и живучесть при динамическом нагружении.

4. Исследована динамика напряженно-деформированного состояния и разрушения в защитной оболочке атомной станции (АС). Установлено, что разрушение оболочки инициируется на свободных поверхностях сотовой конструкции под действием растягивающих напряжений при отражении волны сжатия от свободных поверхностей. С течением времени конструкция продолжает разрушаться под действием растягивающих напряжений.

5. Исследовано влияние анизотропной стеклопластиковой арматуры на несущую способность изгибаемых элементов конструкций. Установлено, что при динамических воздействиях использование стеклопластиковой арматуры в бетонных балках позволяет увеличить несущую способность и деформативность балки.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ахмадеев Н.Х. Динамическое разрушение твердых тел в волнах напряжений. Уфа: БНЦ УО СССР, 1988. 167 с.
2. Ахмадеев Н.Х., Нигматулин Р.И. Моделирование откольного разрушения при ударном деформировании. Анализ схемы мгновенного откола // ПМТФ. 1984. № 3. С. 120-128.
3. Ахмадеев Н.Х., Ахметова Н.А., Нигматулин Р.И. Структура ударноволновых течений с фазовыми превращениями в железе вблизи свободной поверхности // ПМТФ. 1984. № 6. С. 113-119.
4. Аптуков В.Н. Модель термоупруговязкопластической поврежденной среды. Приложение к откольному разрушению // ФГВ. 1986. Т. 22. № 2. С. 120-130.
5. Аптуков В.Н., Белоусов В.Л. Модель анизотропной поврежденности тел. Сообщение 1. Общие соотношения // Проблемы прочности. 1994. № 2. С. 28-34.
6. Глушко А.И. Исследование откола как процесса образования микропор // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 132-140.
7. Гулидов А.И., Фомин В.М. Модификация метода Уилкинса для решения задач соударения тел. Новосибирск: Препринт ИТПМ СО АН СССР, 1980. 32 с.
8. Гулидов А.И., Фомин В.М., Шабалин И.И. Численное моделирование разрушения сдвигом // Механика быстропротекающих процессов. 1984. С. 48-51.

9. Гулидов А.И., Фомин В.М., Яненко Н.Н. Численное моделирование проникания тел в упругопластическом приближении // Проблемы математики и механики. 1983. С. 71-81.
10. Фомин В.М. Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия тел. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1982. 92 с.
11. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
12. Гриднева В.А., Корнеев А.И., Трушков В.Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения пластины конечной толщины при ударе бойками различной формы // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 146-157.
13. Белов Н.Н., Корнеев А.И., Николаев А.П. Численный анализ разрушения в плитах при действии импульсных нагрузок // ПМТФ. 1985. № 3. С. 132-136.
14. Белов Н.Н., Коняев А.А., Симоненко В.Г., Стуканов А.Л., Хабибулин М.В., Югов Н.Т. Влияние полиморфных фазовых превращений на процесс взрывного обжатия стальных шаров // ФГВ. 1997. Т. 33. № 5. С. 128-136.
15. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Афанасьева С.А., Хабибулин М.В., Валуйская Л.А. Взаимодействие высокоскоростного ударника с преградой, содержащей ВВ // Химическая физика процессов горения и взрыва. 12 Симпозиум по горению и взрыву. Черноголовка. 2000. Т. 3. С. 23-25.
16. Югов Н.Т. Численный анализ трехмерного процесса деформирования и разрушения цилиндра и пластины при наклонном соударении // Изв. АН

СССР. 1990. № 1. С. 112-117.

17. Горельский В.А., Радченко А.В. Кинетика разрушения при ударноволновом нагружении двухслойной пластины // Прикладная механика. 1991. Т. 27. № 11. С. 85-90.
18. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Радченко А.В. Численное исследование задач ударно-волнового взаимодействия твердых тел при наличии нескольких контактных границ // Химическая физика. 2000. Т. 19. № 1. С. 54-57.
19. Горельский В.А., Платова Т.М., Радченко А.В., Хорев И.Е. Моделирование разрушения набора пластин при динамическом нагружении с учетом их взаимодействия // В кн.: Инженерно-физический сборник. Томск: Изд-во ТГУ, 1987. С. 123-130.
20. Горельский В.А., Платова Т.М., Радченко А.В., Хорев И.Е. Численное исследование взаимодействия частиц с гетерогенными оболочками // В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Томск: Изд-во ТГУ, 1987. С. 52-55.
21. Горельский В.А., Радченко А.В., Хорев И.Е. Кинетика разрушения и релаксационные эффекты в композиционной плите при нестационарном нагружении // Проблемы прочности. 1992. № 8.
22. Горельский В.А., Радченко А.В., Хорев И.Е. Кинетические механизмы процесса пробивания двухслойных пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 185-189.
23. Горельский В.А., Радченко А.В., Хорев И.Е. Численное исследование

- упругопластического взаимодействия твердых частиц с составными пластинами // Прикладная механика. 1987. Т. 23. № 7. С. 117-120.
24. Горельский В.А., Радченко А.В., Толкачев В.Ф., Хорев И.Е. Исследование взаимодействия метеорных частиц с оболочечными конструкциями в условиях осесимметричного и неосесимметричного нагружения // Труды 9 научных чтений по космонавтике. Вопросы проектирования летательных аппаратов. Москва, ИИЕТ АН СССР. 1987. С. 168-174.
25. Горельский В.А., Радченко А.В., Толкачев В.Ф., Хорев И.Е. Кинетические механизмы перфорации пластин // Проблемы прочности. 1988. № 11. С. 77-80.
26. Хорев И.Е., Горельский В.А. Осесимметричный откол в задачах широкодиапазонного взаимодействия твердых тел // Доклады АН СССР. 1985. № 3. С. 612-615.
27. Радченко А.В. Модель поведения хрупких анизотропных материалов при динамических нагрузках и ее приложения // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета, № 2, 2003. С. 179-193.
28. Радченко А.В., Радченко П.А. Ударно-волновые процессы и разрушение в анизотропных материалах и конструкциях. Томск: Издательство ТГАСУ, 2015. 217 с.
29. Радченко П.А. Алгоритм расчета контактных границ с учетом эрозии конечных элементов при высокоскоростном взаимодействии тел // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.

2016. T. 21. № 3. C. 1275-1287.
30. Zienkiewicz O.C. The finite element method in structural and continuum mechanics. London: McGraw-Hill, 1967.
  31. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. New York: Academic Press, 1964. 211-63 pp.
  32. Johnson G.R. Analysis of elastic-plastic impact involving severe distortions // J Appl Mech , 1976. pp. 439-444.
  33. Johnson G.R. Dynamic analysis of explosive-metal interaction in three dimensions // J Appl Mech, 1981. pp. 30-34.
  34. Johnson G.R., Stryk R.A. Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions // Int J Impact Eng, 1987. pp. 411-421.
  35. Johnson G.R., Stryk R.A. Symmetric contact and sliding interface algorithms for intense impulsive loading computations // Comput Meth Appl Mech Eng, 2001. pp. 4531-4549.
  36. Johnson G.R., Beissel S.R., Stryk R.A. A generalized particle algorithm for high velocity impact computations // Comput Mech, 2000. pp. 245-256.
  37. Johnson G.R., Stryk R.A. Conversion of 3D distorted elements into meshless particles during dynamic deformation // Int J Impact Eng, 2003. pp. 947-966.
  38. Johnson G.R., Cook W.H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // Proceedings of 7th International Symposium on Ballistics, 1983. P. 841.
  39. Johnson G.R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to

- various strains, strain rates, temperatures and pressures // Eng Fract Mech, 1985. pp. 31-48.
40. Johnson G.R., Holmquist T.J. An improved computational constitutive model for brittle materials // High-Pressure Science and Technology, 1994. pp. 981-984.
  41. Holmquist T.J., Johnson G.R., Cook W.H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures // Proceedings of 14th International Symposium on Ballistics, 1993. pp. 591-600.
  42. Johnson G.R., Beissel S.R., Cunniff P.M. A computational model for fabrics subjected to ballistic impact // Proceedings of 18th International Symposium on Ballistics, 1999. pp. 962-969.
  43. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Госстройиздат, 1949. 280 с.
  44. Рабинович И.М. К динамическому расчету сооружений за пределом упругости // Исследование по динамике сооружений, 1947. С. 100-132.
  45. Попов Н.Н., Кумпяк О.Г., Плевков В.С. Вопросы динамического расчета железобетонных конструкций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. 288 с.
  46. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1968. 323 с.
  47. Забегаев А.В. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при аварийных ударных нагрузениях. Автореф. дисс. Докт. тех. наук. М: МИСИ, 1992. 36 с.
  48. Котляревский В.А., Ганушкин В.И., Костин А.А. Убежища гражданской

- обороны. Конструкции и расчет. М.: Стройиздат, 1989. 606 с.
49. Кумпяк О.Г., Копаница Д.Г. Прочность и деформативность железобетонных сооружений при кратковременном динамическом нагружении. Томск: Изд-во STT, 2002. 333 с.
  50. Плевков В.С. Прочность и трещиностойкость эксплуатируемых железобетонных конструкций зданий и сооружений при статическом и динамическом нагружении. Дисс. докт. Тех. Наук. Томск: ТГАСУ, 2003.
  51. Попов Г.И. Железобетонные конструкции, подверженные действию импульсивных нагрузок. М: Стройиздат, 1986. 128 с.
  52. Расторгуев Б.С. Прочность железобетонных конструкций зданий взрывоопасных производств и специальных сооружений, подверженных кратковременным динамическим воздействиям: Автореф. дисс. докт. техн. наук. М.: МИСИ, 1987. 37 с.
  53. Рабинович И.М., Сеницын А.П., Лужин О.В., Тетерин В.М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. М.: Стройиздат, 1970. 304 с.
  54. Саргсян А.Е. Динамика взаимодействия сооружений с основанием и летящим телом конечной жесткости: Дисс. докт. техн. наук. М. 1985. 385 с.
  55. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. М.: Госстройиздат, 1956. 340 с.
  56. Агапов В.П. О соотношениях МКЭ в статических и динамических расчетах геометрически нелинейных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений, № 5, 1984. С. 43-47.
  57. Гениев Г.А. Вариант деформационной теории пластичности бетона // Бетон

- и железобетон, № 2, 1969. С. 18-19.
58. Забегаев А.В. К построению общей модели деформирования бетона // Бетон и железобетон, № 6, 1994. С. 23-26.
59. Забегаев А.В., Пичугин А.А. Нормирование предельных состояний железобетонных конструкций, подверженных аварийным ударным воздействиям // Строительная механика и расчет сооружений, № 3, 1991. С. 65-71.
60. Костин И.Х., Шаблинский Г.Э., Затеев В.Б., Мальцева Л.Б. Натурные динамические исследования строительных конструкций реакторного отделения Крымской АЭС // Строительная механика и расчет сооружений, № 2, 1991. С. 77-81.
61. Курбанов Б.Х. Расчет предварительно напряженных железобетонных балочных конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок: Автореф. дисс. канд. техн. наук. М: МИСИ, 1987. 23 с.
62. Ржевский В.А., Ибрагимов Р.С., Харланов В.Л. Динамический анализ физически нелинейных железобетонных рам с учетом неупругих свойств бетона и арматуры // Строительная механика и расчет сооружений, № 6, 1989. С. 44-47.
63. Рыков Г.В., Обледов В.П., Майоров Е.Ю., Абрамкина В.Т. Механические характеристики бетонов с учетом их разрушения при кратковременных динамических нагрузках // Строительная механика и расчет-сооружений, № 4, 1989. С. 31-34.
64. Забегаев А.В., Тамразян А.Г. Оценка влияния динамических нагружений

- на структурные изменения бетона // Сейсмостойкое строительство, № 3, 1998. С. 29-32.
65. Усманов А. Расчет плит перекрытий многоэтажных зданий при действии взрыва с учетом податливости опор: Автореф. дисс. канд. техн. наук. М.: МИСИ, 1981. 22 с.
66. Педиков А.В. Исследование сжато-изгибаемых железобетонных конструкций на податливых опорах при кратковременном динамическом нагружении: Автореф. дисс. канд. техн. наук. Томск. 2006. 23 с.
67. Югов А.А. Деформирование и разрушение железобетонных плит при высокоскоростном ударе летящим предметом конечной жесткости : Автореф. дисс. канд. техн. наук. Томск. 2007. 22 с.
68. Галяутдинов З.Р. Совершенствование метода расчета железобетонных плит с трещинами при кратковременном динамическом нагружении. Ав-тореф. дис. канд. техн. наук. Томск. 2004. 25 с.
69. Родевич В.В. Совершенствование метода расчета железобетонных балок по наклонным сечениям при статическом и кратковременном динамическом нагружении: Автореф. дисс. канд. техн. наук. Томск: ТГАСУ, 2003. 26 с.
70. Трекин Н.Н. Несущая способность колонн, армированных высокопрочной сталью, при динамическом воздействии: Автореф. дисс. канд. техн. наук. М.: МИСИ, 1987. 20 с.
71. Хорошилова А.Н. Прочность железобетонных колонн при взрывных и неоднократных ударных нагрузках: Дисс. канд. техн. наук. Томск. 2006.

165 с.

72. Флаксерман А.Н. Влияние наклона волокон на механические свойства древесины сосны. Москва: ГНТИ, 1931. 48 с.
73. Ашкенази Е.К. // Заводская лаборатория. 1964. Т. 30. № 2. С. 285-287.
74. Ашкенази Е.К. // Механика полимеров. 1965. Т. 1. № 2. С. 60-70.
75. Ашкенази Е.К. Прочность анизотропных древесных и синтетических материалов. Москва: Лесная промышленность, 1966. 167 с.
76. Ашкенази Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов. Ленинград: Машиностроение, 1969. 111 с.
77. Ашкенази Е.К., Пеккер Ф.П. Экспериментальная проверка применимости полинома 4-й степени для опи-сания поверхности равноопасных плоских напряженных состояний стеклопластиков // Механика полимеров. 1970. № 2. С. 284-294.
78. Ашкенази Е.К., Лавров А.В., Мыльникова О.С., Попов В.Д. Экспериментальное исследование прочности анизотропных материалов при 2-х и 3-х–осном сжатии // Механика полимеров. 1973. № 6. С. 991-996.
79. Ашкенази Е.К., Морозов А.С. Методика экспериментального исследования упругих свойств композиционных материалов // Заводская лаборатория. 1976. № 6. С. 731-735.
80. Ашкенази Е.К., Мыльникова О.С., Райхельгауз Р.С. Еще раз про геометрию прочности анизотропных материалов // Механика полимеров. 1976. № 2. С. 269-278.
81. Ашкенази Е.К., Гершберг М.В., Мыльникова О.С., Райхельгауз Р.С.,

- Сборовский А.К. Экспериментальное исследование прочности стеклопластиков при двусосном сжатии в трех плоскостях симметрии // Механика полимеров. 1976. № 1. С. 63-72.
82. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. Ленинград. 1980. 247 с.
83. Малмейстер А.К. Геометрия теории прочности // Механика полимеров. 1966. № 4. С. 519-524.
84. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972.
85. Tsai S.W., Wu E.M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials // J. Compos. Mater. 1971. Vol. 5. pp. 58-80.
86. Ву Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // В кн.: Механика композиционных материалов. Москва: Мир, 1985. С. 401-491.
87. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. Москва: Наука, 1973. 640 с.
88. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. Москва: Машиностроение, 1977. 224 с.
89. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. Москва: Наука, 1983. 296 с.
90. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 416 с.
91. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. Москва:

- Наука, 1970. 482 с.
92. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. Москва: Изд-во МГУ, 1984.
93. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. Москва: Мир, 1982. 334 с.
94. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. Москва: Наука, 1965. 388 с.
95. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
96. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука, 1974.
97. Носатенко П.Я., Омельченко М.Н. Численное решение пространственной задачи свободных колебаний анизотропных оболочек вращения из композитных материалов // Механика композиционных материалов. 1991. № 5. С. 861-868.
98. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостех-теоретиздат, 1953. 264 с.
99. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
100. Гулидов А.И., Фомин В.М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ, Т. 3, 1980. С. 126-132.
101. Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование

- процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // ПМТФ, № 4, 1984. С. 132-139.
102. Краус Е.И., Шабалин И.И. Моделирование сценариев деформирования и разрушения в структурированных геологических средах // Материалы XXIV всероссийской конференции "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". 2015. С. 121-125.
103. Краус Е.И., Шабалин И.И. Моделирование процессов высокоскоростного деформирования и разрушения сложных технических объектов // Сборник докладов XI всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 2070-2073.
104. Бузюркин А.Е., Гладкий И.Л., Краус Е.И. Численное моделирование аварийного обрыва лопатки вентилятора газотурбинного двигателя // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты), 2014. С. 52-60.
105. Johnson G.R. High Velocity Impact Calculations in Three Dimension // J. Appl. Mech. March 1977. pp. 95-100.
106. Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В. Трехмерное моделирование деформации и разрушения гетерогенных материалов при динамических нагрузках (EFES 1.0), Программа для ЭВМ 2014614671, May 06, 2014.
107. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 1. Москва: Наука, 1976. 536 с.
108. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 2. Москва: Наука, 1976. 574 с.
109. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. Москва: Мир, 1967. С. 212-263.

110. Белов Н.Н., Кабанцев О.В., Копаница Д.Г., Югов Н.Т. Расчетно-экспериментальный анализ динамической прочности элементов железобетонных конструкций. Томск: СТТ, 2008. 292 с.
111. Радченко А.В. Численный анализ разрушения композиционных материалов при ударных нагрузках // Материалы Всесоюзной конференции "Современные проблемы физики и ее приложений". Москва, 15-17 апреля 1990. Москва. 1990. С. 47.
112. Радченко А.В. Моделирование поведения анизотропных материалов при ударе // Механика композиционных материалов и конструкций. 1998. Т. 4. № 4. С. 51-61.
113. Радченко А.В., Гальченко Н.К. Разрушение изотропных и анизотропных конструкционных сталей при динамических нагрузках // Физико-химическая механика материалов. 1992. Т. 28. № 3. С. 80-83.
114. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. Москва: Наука, 1988. 192 с.
115. Косарчук В.В., Ковальчук Б.И., Лебедев А.А. Теория пластического течения анизотропных сред. Сообщение 1. Определяющие сообщения // Проблемы прочности, № 4, 1986. С. 50-57.
116. Радченко А.В., Радченко П.А. Разрушение и ударно-волновые процессы в анизотропных материалах // Международная конференция VII Забабахинские научные чтения, 5-10 сентября 2005. Тезисы докладов. Снежинск. 2005. С. 170.
117. Кобенко С.В. Диссертация на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. Томск: Изд-во

ТГУ, 2003. 118 с.

118. Радченко А.В. Поведение хрупких анизотропных материалов и конструкций из них при динамических нагрузках: Диссертация на соискание уч. ст. д.ф.-м.н. 2002. 207 с.
119. Anderson C.E., Cox P.A., Johnson G.R., Maudlin P.J. A Constitutive Formulation for Anisotropic Materials Suitable for Wave Propagation Computer program-II // *Comp. Mech.* 1994. Vol. 15. pp. 201-223.
120. Johnson G.R. Three-dimensional analysis of sliding surface during high velocity impact // *J. Appl. Mech.* 1977. No. 6. pp. 771-773.
121. Schöberl J. NETGEN – An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules // *Computing and Visualization in Science*, Vol. 1, 1997. pp. 41-52.
122. Радченко П.А. Ударно-волновые процессы и разрушение в анизотропных материалах и конструкциях: Диссертация на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. 2010. 147 с.
123. Зубов В.И., Степанов Г.В., Широков А.В. Влияние скорости деформации на предел текучести сталей различной прочности // *Проблемы прочности*, № 5, 2003. С. 113–121.
124. Wilkins M.L., Guinan M.W. Impact of cylinders on a rigid boundary // *J. Applied Physics*. 1973. No. 3. P. 45.
125. Радченко П.А., Радченко А.В., Батуев С.П., Тукаев А.М. Математическое моделирование пробития разнесенных преград в широком диапазоне скоростей взаимодействия // *Известия высших учебных заведений. Физика*,

- Т. 59, № 7/2, 2016. С. 211-215.
126. Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В., Тукаев А.М. Численное и экспериментальное исследование разрушения разнесенных преград при ударе // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 3. С. 1278-1281.
127. РПГ-7 URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/РПГ-7>
128. Румянцев Б.В. Противокумулятивная неметаллическая защита // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. 2015. № 11-12. С. 73-78.
129. Belov N.N., Yugov N.T., Kopanitsa D.G., Yugov A.A., Arkhipov I.N., Tabachenko A.N., Afanaseva S.A. Mathematical simulation of the behavior of materials and structural elements under multiple impact loading // Russian Physics Journal. 2010. Vol. 53. No. 1. pp. 73-78.
130. Buzyurkin A.E., Kraus E.I., Gladky I.L. Determination and verification of Johnson-Cook model parameters at high-speed deformation of titanium alloys // Aerospace science and technology. 2015. Vol. 45. pp. 121-127.
131. Radchenko A.V., Batuev S.P., Radchenko P.A., Plevkov V.S., Utkin D.G. Destruction of concrete beams with metal and composite reinforcement under impulse action // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 653, 2015. P. 5.
132. Плевков В.С., Однокопылов Г.И., Кудряков К.Л., Невский А.В., Мещеулов Н.В., Галяутдинов Д.Р. Патент РФ на ПМ № 158496. Стенд для динамических испытаний изгибаемых железобетонных элементов. 10.01.2016.

133. Birbraer A.N., Roleder A.J. Extreme Actions on Structures. Saint-Petersburg: Saint-Petersburg Politechn. University, 2009.
134. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V., Plevkov V.S., Kudyakov K.L. Experimental and numerical investigation of concrete structures with metal and non-metal reinforcement at impulse loadings // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 774, 2016.
135. Плевков В.С., Балдин И.В., Радченко П.А., Кудяков К.Л., А.В. Н. Прочность и деформативность бетонных конструкций с неметаллическим дисперсным и композитным стержневым армированием // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: Материалы международных академических чтений. 2014. С. 108-113.
136. Степанова В.Ф., Степанов А.Ю., Жирков Е.П. Арматура композитная полимерная. М: АСВ, 2013. 200 с.
137. Плевков В.С., Колупаева С.Н., Кудяков К.Л. Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальтофибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник ТГАСУ. 2016. Т. 5. № 58. С. 91–101.
138. Плевков В.С., Балдин И.В., Кудяков К.Л., Невский А.В. Прочность и деформативность арматуры композитной полимерной при статическом и кратковременном динамическом растяжении и сжатии // Вестник ТГАСУ. 2016. Т. 5. № 58. С. 91–101.
139. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва: Мир, 1976. 464 с.

140. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V., Plevkov V.S. Numerical simulation of deformation and fracture of space protective shell structures from concrete and fiber concrete under pulse loading // Journal of Physics: Conference Series. 2015. No. 653.
141. ГОСТ 31938-2012. Арматура композитная полимерная для армирования бетонных конструкций. Общие технические условия. – Введ. 2014-01-01. М.: Стандартинформ, 2013. 42 с.
142. Radchenko A.V., Radchenko P.A. Numerical modeling of development of fracture in anisotropic composite materials at low-velocity loading // Journal of Materials Science, Vol. 46, No. 8, 2011. pp. 2720-2725.
143. Плевков В.С., Радченко А.В., Балдин И.В., Радченко П.А., Гончаров М.Е., Батуев С.П. Особенности разрушения железобетонных конструкций при динамическом нагружении // Вестник Тамбовского университета, Т. 18, № 4, 2013. С. 1578-1579.
144. Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В., Плевков В.С. Численное моделирование разрушения оболочки из бетона и фибробетона при импульсном воздействии // Омский научный вестник. 2015. № 3. С. 345-349.

## Свидетельство о регистрации программы EFES

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014614671

**Трехмерное моделирование деформации и разрушения  
гетерогенных материалов и конструкций при динамических  
нагрузках (EFES 1.0)**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего профессионального  
образования «Томский государственный  
архитектурно-строительный университет» (ТГАСУ) (RU)*

Авторы: *Радченко Павел Андреевич (RU), Батуев Станислав  
Павлович (RU), Радченко Андрей Васильевич (RU)*

Заявка № 2014612050

Дата поступления 12 марта 2014 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 06 мая 2014 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

Б.П. Симонов

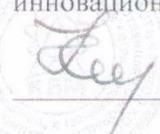
## Акт внедрения результатов исследования

АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО  
«НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ  
КОРПОРАЦИЯ  
«КОНСТРУКТОРСКОЕ  
БЮРО  
МАШИНОСТРОЕНИЯ»  
(АО «НПК «КБМ»)  
Российская Федерация, 140402,  
Московская область, г. Коломна,  
Окский проспект, 42  
Факс (496) 613-30-64, 615-50-04  
Тел. (496) 616-36-69, 616-34-68  
E-mail: kbm-kbm@mail.ru  
<http://www.kbm.ru>  
ОГРН 1125022001851

от \_\_\_\_\_ № \_\_\_\_\_  
на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый заместитель  
генерального конструктора –  
директор по НИОКР и  
инновационному развитию

  
В.А. Коновалов

« 10 » марта 2017 г.

## А К Т

реализации результатов диссертационного исследования старшего преподавателя Томского государственного архитектурно-строительного университета **Батуева Станислава Павловича**

Мы, нижеподписавшиеся, заместитель начальника научно-теоретического отделения, д.т.н. Новиков В.Г., начальник сектора Тукаев А.М., ведущий инженер, к.т.н. Родионов К.А., составили настоящий акт о том, что результаты диссертационного исследования **Батуева Станислава Павловича**, представленные в отчетах «Тестирование программного комплекса EFES 1.0» (инв. № Н-7069, Н-7405, Н-7406), программе для ЭВМ «Программный комплекс для трехмерного моделирования деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках (EFES 1.0)» (инв. № Н-6763, разработчики Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В., свидетельство о государственной регистрации №2014614671), внедрены в АО «НПК «Конструкторское бюро машиностроения», а именно:

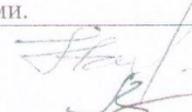
Результаты диссертационного исследования	Где внедрены и реализованы
1. Научно-методический аппарат численного исследования деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках.	При выполнении НИОКР
2. Программный комплекс «EFES 1.0» для трехмерного моделирования деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках.	При выполнении НИОКР
3. Результаты сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных о высокоскоростном взаимодействии ударников с гетерогенными конструкциями.	При выполнении НИОКР

Зам. начальника отделения, д.т.н.

Начальник сектора

Ведущий инженер, к.т.н.

« 10 » марта 2017 г.

  
В.Г. Новиков

  
А.М. Тукаев

КОПИЯ ВЕРНА

ОТДЕЛ ДЕЛОПРОИЗВОДСТВА  
О.С.Б. Улынина





**วช.**  
**NRCT**

*National Research Council of Thailand*

This is to certify that

*Radchenko Andrey, Radchenko Pavel and Batuev Stanislav*

has been awarded

**Gold Medal**

In recognition of creative efforts to invent

***EFES 1.0***

Exhibited at “Bangkok International Intellectual Property, Invention, Innovation  
and Technology Exposition”

On the occasion of “Thailand Inventors’ Day 2017”

2 – 6 February 2017

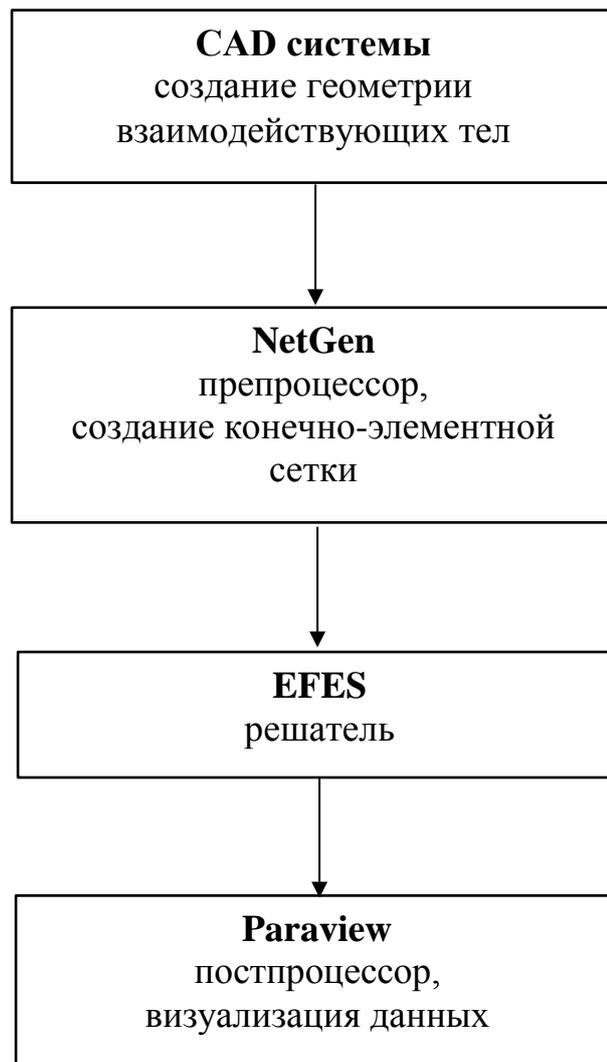
*Sirirug Songsivilai*

(Professor Sirirug Songsivilai, M.D., Ph.D.)

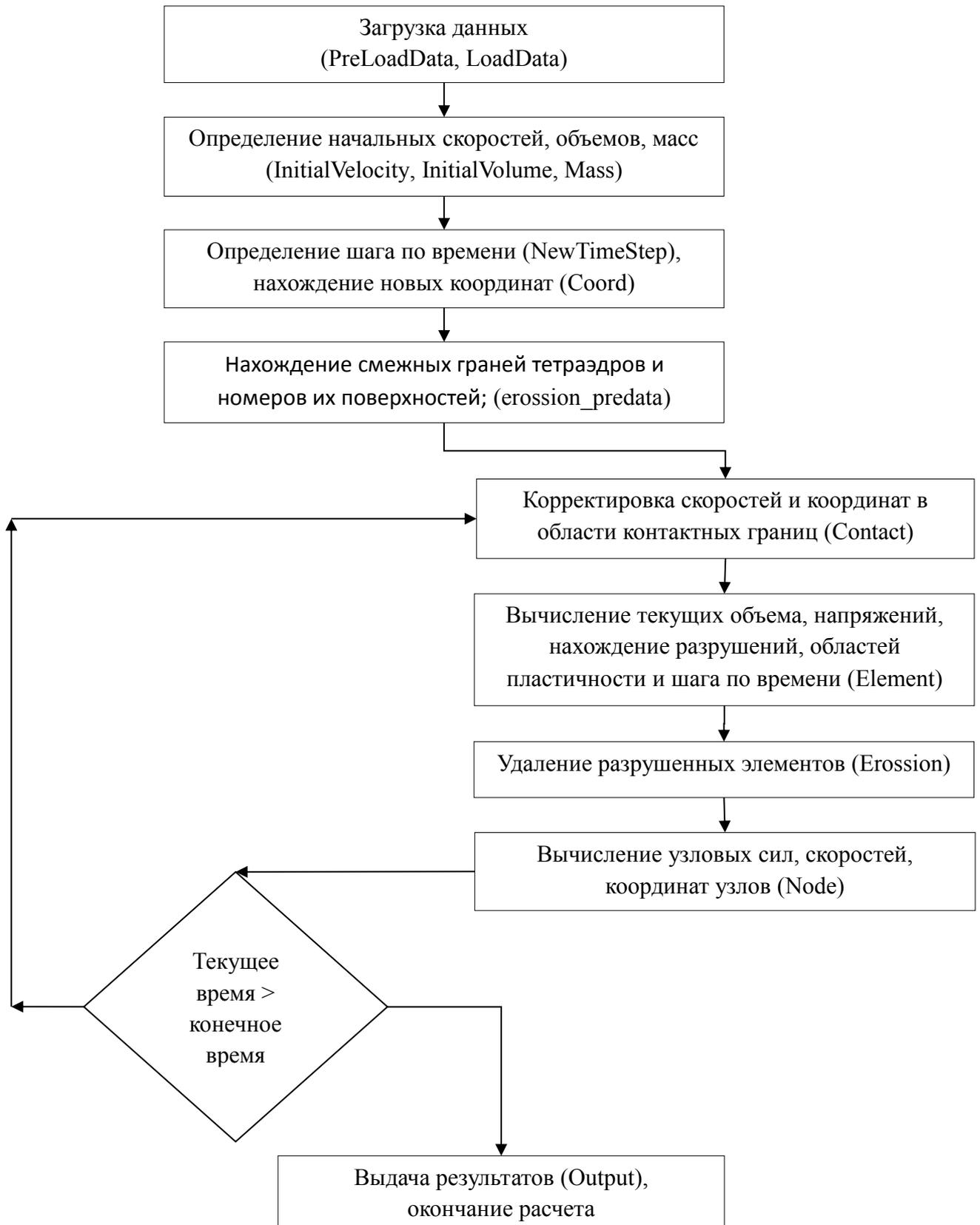
Secretary – General



Общая схема выполнения расчета с применением МКЭ.



## Блок-схема выполнения подпрограмм решателя EFES



## Перечень подпрограмм решателя EFES:

- subroutine newTimestep() — нахождение нового шага по времени;
- subroutine PreLoadData() — подготовка к загрузке данных сетки;
- subroutine LoadData() — загрузка данных сетки;
- subroutine Output(j) — запись расчетных данных для постпроцессора Paraview;
- subroutine Mass() — вычисление массы узлов;
- subroutine Coord(TimeStep) — нахождение координат узлов;
- subroutine InitialVolume() — нахождение начальных объемов элементов;
- subroutine ArtificialViscosity() — расчет искусственной вязкости;
- subroutine TensorViscosity() — расчет тензорной вязкости;
- subroutine ShearStrainEnergy() — расчет энергии сдвиговых деформаций;
- subroutine InternalEnergy() — расчет внутренней энергии;
- subroutine InitialVelocity() — определение начальной скорости;
- subroutine LinearMoment(I, K, L, M, A, B, C, Stype) — корректировка скоростей узлов контактных поверхностей;
- subroutine contact2() — корректировка геометрии контактных поверхностей;
- subroutine CentrVelocity() — нахождение скорости центра масс;
- subroutine element() — вычисление текущих объемов, напряжений, проверка критерия разрушения, пластичности и шага по времени в элементах;
- subroutine Node() — вычисление узловых сил, скоростей, координат узлов;
- subroutine erosion(f) — удаление разрушенного элемента из расчета и перераспределение масс его узлов соседним;
- subroutine erosion\_predata() — нахождение смежных граней тетраэдров и определение номеров их поверхностей;
- subroutine SaveTmp() — сохранение данных;
- subroutine LoadTmp() — загрузка данных.