Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Олейник Полина Ивановна

ЛОГИЦИЗМ, НЕОЛОГИЦИЗМ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИНЦИПА ЮМА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

09.00.03 – История философии

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата философских наук

Научный руководитель
доктор философских наук, профессор
Суровцев Валерий Александрович

Томск – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Актуальность выбранной темы обуславливается рядом причин.

Во-первых, математические методы в различных научных отраслях приобретают все большее значение и представляются важной частью их развития. В связи с этим возрастает необходимость определения места математики в системе наук, предполагающее изучение объектов, языка и методологии математики, способов и границ ее познания.

Во-вторых, изучение оснований математики, которое ведется со второй половины XIX века, связано с попытками решить такие проблемы, как кризис оснований математики, определение статуса математических объектов и математического знания, поиск принципа обоснования достоверности математического знания. Однако, ни по одному из указанных вопросов, не было достигнуто окончательного решения. Несмотря на то, что все предыдущие попытки установить основания математики оказались неудачными, такая проблема до сих пор стоит, и ее нельзя считать искусственно поставленной. Сама проблематика философии математики имеет корни в кризисе математики, и для адекватного разрешения этого кризиса необходимо решить эту проблему. В современной литературе наблюдается энтузиазм в решении этих проблем. Задача оценки, обобщения и выявления перспектив результатов исследований в этом направлении является важной и пока не решенной задачей философии математики. Необходимы реконструкция и развитие эпистемологических и онтологических оснований, предложенных в рамках программ философии математики. Одной из таких программ в области оснований математики является логицизм Г. Фреге.

В-третьих, исследование логицистского подхода к обоснованию математики на сегодняшний день нельзя считать завершенным, несмотря на множество работ в отечественной и зарубежной литературе, посвященных этому вопросу. Действительно, фундаментальные проблемы философии математики в том виде, в каком они представлены в современности, имеют точкой отсчета работы в этой области немецкого математика, логика и философа Г. Фреге. Г. Фреге является представителем логицизма, программы обоснования математики, суть которой состоит в том, чтобы свести понятия математики к понятиям логики и представить принципы математики в качестве общезначимых логических истин. Работы Г. Фреге, в настоящее время ставшие классикой философии математики, при жизни ученого не были по достоинству оценены. Найденное в его системе противоречие показало несостоятельность программы логицизма. Дальнейшее развитие философии математики было связано с разработкой программ логицизма (его модифицированных версий), интуиционизма и формализма. Вместе с тем, в ряде литературы отмечается такая тенденция, что имя Г. Фреге, инициировавшего проблематику современной философии математики, было несправедливо отодвинуто на второй план и стало «модно говорить о том, что логицизм мертв» [130, p. 127]. Между тем, в настоящее время наблюдается определенное возрождение его идей: логицизм Г. Фреге сформировался в новое течение, получившее название неологицизм. «Реабилитация классического логицизма Г. Фреге в работах К. Райта и Б. Хейла, а также других философов, показывает, что аргументы, использованные для вынесения приговора логицизму как устаревшему направлению в философии математики, оказываются ныне для многих неубедительными» [82, с. 5-6]. Задачи, поднимаемые самим Г. Фреге и представителями шотландского неологицизма актуальны, а нестандартность их решения является причиной горячих полемик. Споры вокруг логицизма Г. Фреге, которые возобновились в свете разработки неологицизма К. Райта, не прекращаются, но при этом количество неясных моментов в его творчестве, требующих разработки, не убывает. Вопросы о том, каковы онтологические и эпистемологические следствия принятия выдвигаемых логицизмом и неологицизмом тезисов, как может быть интерпретирована содержательная составляющая этих программ и какие результаты могут быть достигнуты в области обоснования математики при принятии этих тезисов, открыты и требуют разрешения.

На решение вышеназванных вопросов, связанных с программами логицизма и неологицизма и онто-эпистемологическим обоснованием математики, и направлено настоящее диссертационное исследование.

Степень научной разработанности проблемы. Тема диссертации связана с исследованиями в отечественной и зарубежной литературе, посвященной вопросам основания математики, а также различным подходам к осмыслению наследия математического логицизма (в том числе в свете развития неологицизма). Программа логицизма анализируется во множестве работ отечественных и зарубежных авторов (чего нельзя сказать о программе неологицизма, которая редко тематизируется в отечественной литературе).

Это исследования, направленные на рассмотрение проблем логицистского обоснования математики, философских оснований программы, методологических установок, а также на выявление позитивного вклада в развитие математики. К числу авторов таких исследований относятся И. Бар-Хиллел, Б.В. Бирюков, Дж. Булос, Т. Бердж, Ван Хао, В. В. Горбатов, М. Даммит, И. Б. Микиртумов, В. Я. Перминов, К. Райт, Г. И. Рузавин, В. А. Суровцев, А. К. Сухотин, А. Френкель, В. В. Целищев, Б. Хейл, А. Чёрч и др.

Также необходимо обратиться к исследованиям логико-методологических и семантических аспектов математики в работах Б. В. Бирюкова, Н. Бурбаки, Г. Генцена, И. Н. Грифцовой, Х. Б. Карри, С. К. Клини, У. Куайна, И. Лакатоса, Я. Лукасевича, П. С. Новикова, В. Я. Перминова, В. А. Суровцева, В. А. Успенского, Г. Фреге, В. В. Целищева, А. В. Чусова и др.

Тема диссертации связана с современными исследованиями онтологических и эпистемологических проблем обоснования математического знания. К ним относятся труды Е. И. Арепьева, Г. Б. Гутнера, С. Л. Катречко, А. Н. Кричевца, А. Ф. Кудряшева, В. Я. Перминова, Я. Хинтикки, В. В. Целищева и др.

Разработка историко-философских аспектов развития математики, исследование подходов к ее обоснованию находят отображение в трудах таких авторов как Б. В. Бирюков, А. Ф. Грязнов, В. Н. Катасонов, А. Ф. Кудряшев, И. С. Кузнецова, Г. Г. Майоров, А. В. Родин, В. А. Шапошников, А. П. Юшкевич и др.

Исследования, посвященные современному состоянию дел в философии математики и перспективам ее развития присутствуют в работах следующих авторов: А. Г. Барабашев, В. Я. Перминов, З. А. Сокулер, В. В. Целищев, С. Шапиро и др.

При разработке темы диссертации использовались классические труды по основаниям математики И. Бар-Хилелла, Р. Дедекинда, Р. Декарта, Евклида, И. Канта, Г. Кантора, Х. Б. Карри, С. К. Клини, Г. Лейбница, А. Ф. Лосева, Дж. фон Неймана, Д. Пеано, А. Пуанкаре, Ф. П. Рамсея, Б. Рассела, самого Г. Фреге, А. Френкеля, Э. Цермело и др.

В отечественной и зарубежной литературе тема философии математики Г. Фреге стала объектом анализа в работах Т. Байса, Т. Берджа, Б. В. Бирюкова, Дж. Булоса, М. Даммита, Н. Коккиареллы, И. Б. Микиртумова, Ч. Парсонса, В. Я. Перминова, К. Райта, В. А. Суровцева, А. К. Сухотина, Б. Хейла, Р. Хека, Х. Ходеса, В. В. Целищева, С. Шапиро и др.

Что касается рецепции философии математики неологицизма, то в отечественных трудах она тематизируется в работах двух исследователей: Т. В. Пащенко и В. В. Целищева. В западной литературе она представлена широко: это работы Дж. Булоса, О. Буэно, А. Вейра, М. Даммита, Э. Залты, Р. Кука, Б. Librarian Лински, Ф. Макбрайда, К. Райта, М. Россберга, Н. Теннанта, М. Тробок, К. Файна, Р. Хека, Б. Хейла, С. Шапиро, П. Эберта, М. Эклунда и др. Труды этих же исследователей направлены на компаративный анализ программ логицизма и неологицизма.

Проведенный обзор литературы, посвященной исследуемой теме, показывает, что философия математики неологицизма и его связь с философией математики Г. Фреге довольно основательно изучены на Западе, тогда как в отечественной историко-философской науке число публикаций на эту тему невелико. С момента появления первых работ по философии математики неологицизма прошло больше тридцати лет, однако до сих пор в российской философии отсутствуют специальные систематические исследования, в которых давалась бы целостная характеристика философско-математических взглядов неологицизма и был бы представлен основательный компаративный анализ программ логицизма и неологицизма. Актуальной остается и проблема правильной интерпретации философии математики самого Г. Фреге. Это обстоятельство во многом обусловливает выбор темы, цель и задачи настоящего диссертационного исследования.

Объект исследования:философия математики Г. Фреге, его логицизм, а также философия математики неологицизма К. Райта и Б. Хейла.

Предмет исследования: возможности и проблемы обоснования математики в логицизме Г. Фреге и неологицизме К. Райта и Б. Хейла.

Основная цель и задачи исследования:

Целью диссертационного исследования является осуществление рациональной реконструкции философии математики логицизма Г. Фреге и неологицизма К. Райта, выявление связи этих программ и определение перспективности обоснования математики на основе предлагаемых в рамках логицизма и неологицизма методов.

Реализация цели предполагает решение следующих **задач**:

– продемонстрировать возможность реабилитации программы логицизма Г. Фреге в работах современных исследователей в области философии математики (К. Райта, Б. Хейла), выявить, в каком направлении в рамках проекта неологицизма осуществляется реконструкция логицизма;

– выделить исходные положения и методологические установки неологицизма, установить допущения, необходимые для реализации проекта неологицизма, определить значимость подхода неологицизма к проблеме обоснования математического знания;

– выявить, какие проблемы возникают в силу принятия тезисов неологицизма и рассмотреть предлагаемые решения этих проблем;

– установить, в какой степени проект неологицизма действительно является «преемником» логицизма: проанализировать, в чем заключается связь этих программ, исходя из задач, способов их достижения и достигнутых результатов в рамках проектов.

Теоретико-методологическая основа исследования. Решение поставленных задач требует использования соответствующих методов и подходов. При написании диссертации использовались системный подход (для обеспечения многоаспектного описания философии математики логицизма и неологицизма) и междисциплинарный подход (его использование обусловлено сопряжением в диссертационном исследовании различных областей знания: философии, математики и логики). Значительное внимание в методологическом аппарате диссертации уделено таким методам, как историко-философский анализ и историко-философская реконструкция, методы компаративного и интерпретирующего анализа (при анализе и сравнении различных концепций).

Источниками исследования служат труды Г. Фреге и представителей неологицизма, в первую очередь К. Райта и Б. Хейла, а также работы отечественных (Б. В. Бирюков, В. А. Ладов, В. А. Суровцев, А. К. Сухотин, В. В. Целищев и др.) и зарубежных (Т. Байс, Т. Бердж, О. Буэно, М. Даммит, А. Райо, М. Россберг, М. Тробок, К. Файн, Р. Хек, Х. Ходес, С. Шапиро, П. Эберт и др.) авторов, в которых представлены различные интерпретации этих философско-математических программ. На основании этих работ было сформировано собственное понимание общего замысла философии математики логицизма и неологицизма.

Степень достоверности результатов проведённых исследований. Достоверность результатов, полученных в ходе работы над диссертацией, обусловлена привлечением репрезентативного для раскрытия избранной темы корпуса источников и литературы, а также корректным выбором и применением комплекса научных методов, отвечающих поставленной цели исследования:

Научная новизна исследования определяется результатами, полученными в ходе решения поставленных задач:

– установлено, что вопреки преобладающей в отечественной литературе позиции, программа логицизма получает свое развитие в современных исследованиях философии математики в рамках проекта неологицизма К. Райта и Б. Хейла;

– раскрыта специфика неологицистского подхода к проблеме основания и математики, выявлены и проанализированы допущения, необходимые для реализации проекта неологицизма; оценены перспективы развития неологицизма в обосновании математики;

– определен статус принципа Юма, используемого в рамках неологицизма для выведения основных понятий арифметики и установления аксиом Пеано;

– выявлен характер связи философии математики логицизма Г. Фреге и неологицизма К. Райта.

Данное исследование фактически является первым систематическим исследованием философии математики неологицизма в российской философской науке и направлено на восполнение пробела в проблемном поле исследований, связанных с вопросами обоснования математики в рамках программ логицизма и неологицизма, и вносит свой вклад в развитие философии математики.

Положения, выносимые на защиту.

1. Обосновано, что возможности предложенного Г. Фреге обоснования математики остаются открытыми и, в некотором смысле, его программа логицизма продолжает функционировать. Вопреки доминирующей в отечественной литературе установке, согласно которой логицизм Г. Фреге представляет исключительно исторический интерес, обращение К. Райта и других исследователей к идеям логицизма открывают путь к своего рода возрождению программы Г. Фреге (в модифицированной версии). Несмотря на открытие противоречия, вытекающее из Аксиомы V, которую Г. Фреге предлагал использовать для выведения основных понятий и положений арифметики, в настоящий момент обсуждаются возможности установления обоснования математики, используя идеи, предложенные в рамках логицизма.

2. Установлено, что успешность неологицистской программы философии математики зависит от решения серьезных затруднений, связанных с принятием спорных идей и положений (некоторые из них пока не получили должного

разрешения). Это обоснование таких допущений, как приемлемость использования принципов абстракции (необходимо установить критерий для отделения «хороших» принципов абстракции от «плохих») и имплицитных определений числа при построении основания математики. Кроме того, необходима аргументация возможности экзестенциальных следствий логики (в программе неологицизма на основе логики утверждается не просто существование объектов, но существование бесконечного числа объектов) и допустимости использования логики второго порядка. Несмотря на то, что для решения этих проблем была проделана большая работа, все еще не ясно, будет ли достигнут успех. Представители неологицизма (К. Райт, Б. Хейл и др.) обходят стороной некоторые из этих затруднений, не считая их достаточно серьезными, однако, критика проекта неологицизма в данном направлении (Дж. Булосом, А. Вейром, П. Раатикаиненом, М. Тробок, Р. Хеком, М. Эклундом и др.) хорошо обоснована. Вместе с тем, радикальная позиция некоторых оппонентов К. Райта, в частности, М. Тробок, согласно которой задачи и цели неологицизма принципиально невыполнимы, не имеет достаточных оснований.

3. Показано, что наиболее остро стоит задача определения статуса принципа Юма. От ее решения во многом зависит выполнение поставленных неологицизмом целей. Утверждение К. Райта о том, что принцип Юма является аналитическим, не имеет достаточных оснований (как это показал Дж. Булос), несмотря на многочисленные попытки обосновать этот тезис. Одно из предлагаемых решений – пересмотр традиционного понятия аналитичности и формулирование нового, более адаптированного к современности понятия, является примером общей тенденции при обсуждении неологицизма: многие вопросы и решения этих вопросов могут быть пересмотрены в контексте уточнения и разъяснения терминологии.

4. Установлено, что вопрос преемственности логицизма и неологицизма многоаспектен. С одной стороны, проект неологицизма нацелен на решение тех же задач, что и логицизм Г. Фреге: доказательство основных предложений арифметики, установление их на основе логики, определение аналитического

априорного статуса арифметических предложений, поиск эпистемологического источника арифметического знания и др. Более того, техническая сторона решения этих задач во многом схожа: для основания математики используются принципы абстракции в рамках логики второго порядка. С другой стороны, многие предлагаемые решения этих задач в неологицизме не соответствуют самому духу логицизма, его исходным установкам (например, использование имплицитных определений). Решение неологицизма состоит в том, чтобы сохранить цели Г. Фреге, расширяя при этом сферу средств для их достижения до чего-то большего, чем чистая логика. Такой проект, к сожалению, будет далек от реализации задумки Г. Фреге. С адаптированной концепцией аналитичности и использованием имплицитных определений основное ядро программы логицизма Г. Фреге, судя по всему, сохранить не удастся, вопреки неофрегеанской цели.

Научно-теоретическая и практическая значимость исследования. Научно-теоретическая значимость диссертационного исследования состоит в том, что его результаты дают новую концептуальную основу для дальнейшего изучения философско-математических воззрений Г. Фреге и представителей неологицизма К. Райта и Б. Хейла, что позволяет правильно понять и адекватно оценить их вклад в современную философию математики. Результаты исследования дополняют картину онтологического и эпистемологического истолкования природы математического знания, расширяют методологический аппарат исследования проблем философии математики, способствуют более глубокому и разностороннему осмыслению философского наследия программы логицизма и оценке перспектив неологицизма в обосновании математики.

Практическая значимость диссертационного исследования состоит в том, что материалы диссертации могут быть использованы в учебном процессе при подготовке и чтении курсов «История западной философии», «Современная зарубежная философия», «История и философия науки», «Философия и методология науки», «Философские проблемы конкретных дисциплин», «Философия математики» и других специальных математических дисциплин в высших учебных заведениях и на курсах повышения квалификации преподавателей.

Апробация диссертационного исследования. Основные положения и выводы, полученные в ходе работы над диссертационным исследованием, обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях, среди которых: Международная конференция студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Актуальные проблемы социальных наук» (Томск, 2016; 2017), Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука и образование» (Томск, 2016; 2017), XII Международная научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке» (Санкт-Петербург, 2016), X Всероссийская научная конференция молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» (Новосибирск, 2016).

Публикации. По теме диссертации опубликованы12 научных работ, в том числе четыре статьи в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, в т.ч. 2 статьи в российском научном журнале, входящем в базу данных Web of Science.

Структура работы. Структура диссертационного исследования определяется его целью и задачами. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованных источников и литературы, включающего 186 наименований (в том числе 92 на иностранных языках). Общий объем диссертационного исследования – 197 страниц.

ГЛАВА 1. Философия математики Г. Фреге

Фридрих Людвиг Готлоб Фреге (1848–1925) – немецкий логик, математик и философ, один из основоположников современной символической логики. Его интерес к проблеме обоснования математики, который не был популярен среди его современников[1], инициирован вопросом о том, каков эпистемологический статус нашего знания истин арифметики. Являются ли они продуктами чистого разума, как полагал Г. Лейбниц? Или это эмпирические истины, которые мы знаем только апостериорно, как полагали эмпирики, особенно Дж. Ст. Милль? Или же правда на стороне И. Канта, который полагал, что наше знание таких истин, как «5+7=12» зависит в основном от интуиции, хотя и является априорным? Задумка Г. Фреге состояла в том, чтобы установить и обосновать позицию, схожую с точкой зрения Г. Лейбница: показать, что истины арифметики логически следуют из предпосылок, которые сами по себе являются истинами логики. Именно эту точку зрения принято называть логицизмом.

Разработка логицизма Г. Фреге была осуществлена в несколько этапов. В 1875-1902 годах Г. Фреге разработал новую систему логики и попытался использовать эту систему в качестве новой основы для математики. Г. Фреге написал три основательных труда, каждый из которых представляет собой этап в грандиозной программе обеспечения логического основания для арифметики и высшей математики. В его «Begriffsschrift» (1879) («Запись в понятиях» [73, с. 63-201]) вводится универсальная система символической логики.«Grundlagen der Arithmetic» (1884) («Основоположения арифметики» [74, с. 125-237]) имеет множество направлений, но проще всего выделить два: отрицательное и положительное. Негативная часть состоит из критики взглядов Дж. Ст. Милля, И. Канта, а также других, кто разделяет их видение. Критика предшествующих взглядов на основание арифметики хотя и встречается в различных местах, в

[1]Так Э. Аббе, учитель и друг Г. Фреге, весьма проницательно писал в отзыве на «Begriffsschrift» следующее: «его [труд Г. Фреге], как можно предположить, по-настоящему прочитают только немногие и еще меньше поймут его и оценят» [Цитата по 73, с. 18].

основном находится в первых трех главах. Вторая половина излагает его собственный фундамент арифметики: положительная часть состоит в попытке показать, как арифметические истины могут быть установлены чистым разумом, фактически предоставить их доказательства из предпосылок, которые являются (или должны быть) истинами чистой логики. Два тома «Grundgesetze» (1893, 1903) посвящены техническим деталям проекта, выполненным с использованием его собственного логического символизма (проект распространяется от арифметики, теории натуральных чисел, до математического анализа, теории действительных чисел). К сожалению, как раз в тот момент, в 1902 году, когда второй том «Grundgesetze» собирался выйти из печати, Б. Рассел обнаружил противоречие в системе Г. Фреге. В результате, Г. Фреге был вынужден отказаться от своего основополагающего проекта, и математическое сообщество в конце концов обратило свои взоры в сторону альтернативных источников основания математики: теории типов, теории множеств и др.

Последующая работа в логике и основаниях математики во многом обошла стороной «Grundgesetze», пока пару десятилетий назад философы и логики не посмотрели новым взглядом на противоречивую систему Г. Фреге, и не осознали, что гораздо большее, чем представлялось ранее, в ней может быть спасено. В последние годы были созданы свободные от парадокса версии системы Г. Фреге; значительные части классической математики были разработаны в рамках таких систем; и ряд мыслителей утверждает философские преимущества для такого подхода к основаниям математики.

Для того, чтобы провести компаративный анализ логицизма Г. Фреге и неологицизма К. Райта, вначале обратимся к логицизму Г. Фреге. При этом необходимо уделить внимание некоторым методологическим аспектам его работы и ключевым идеям философии Г. Фреге в целом. В рамках анализа философии математики Г. Фреге мы сосредоточимся на двух основных вопросах, предварительно сделав некоторые замечания относительно системы формальной логики Г. Фреге: какова логическая форма арифметических предложений и каков их эпистемологический статус. Анализ ответов Г. Фреге на эти ответы будет представлен в этой главе.

1.1 Логическая форма арифметических предложений

1.1.1 Построение Г. Фреге системы формальной логики

Г. Фреге не был первым, кто попытался показать, как арифметические истины могут быть доказаны из более фундаментальных предположений. Истоки логицизма в более или менее явном виде можно обнаружить еще у Р. Декарта, разрабатывавшего дедуктивный метод познания. Однако сама идея сведения математических истин к истинам логическим, судя по всему, имеет истоки в учении Г. Лейбница: «возможно, Г. Лейбниц был первым ученым, осознавшим, что нельзя войти в математику без логики» [30, с. 30]**.** Он различал необходимые истины (истины разума) и случайные (истины факта). Истина является необходимой, если противоположное утверждение приводит к противоречию (например, у самого Г. Лейбница, это утверждения о существовании бога, о равенстве всех прямых углов между собой), случайной истиной будет являться, например, утверждение о том, что в природе встречаются тела, в которых можно указать прямые углы – от истинности или ложности таких утверждений «Вселенная не перестанет существовать». Математические истины являются необходимыми, более того: они необходимы логически и должны быть выводимы из логики, они «легко сводимы к аналитическим суждениям» [45, с. 26].Именно взгляд Г. Лейбница на математику как частный случай логики лег в основу создания и логицизма, хотя сам «Лейбниц не осуществил программу вывода математики из логики, как не осуществили ее в течение последующих почти двухсот лет все те, кто высказывал аналогичные убеждения» [34, с. 252].

Действительно, подход Г. Фреге был более строгим и всеобъемлющим, чем все, что было раньше. Г. Лейбниц, например, пытался доказать такие арифметические истины, как «2+2=4». Однако его доказательства, как и доказательства Евклида до него, основываются на предположениях, которые он не устанавливает эксплицитно (например, Г. Лейбниц свободно обращается к ассоциативному закону сложения, в котором говорится, что $(a+b)+c=a+(b+c)$; то есть он позволяет себе свободно «переставлять» скобки). Для Г. Фреге же действительно важно точно определить, от каких предположений зависят доказательства. Идея Г. Фреге заключалась в том, чтобы предоставить доказательства в рамках формальной системы логики, в которой эксплицитно и точно определены все возможные правила вывода: так что определить, какие допущения используются в доказательстве, стало бы не более сложным, чем, скажем, определить, является ли ход в игре в шахматы законным. Существующие системы логики, вытекающие из работы Дж. Буля (и, в конечном счете, из Аристотеля), были неадекватны для этой задачи: они не подходили для представления доказательств. В частности, в системе Дж. Буля невозможно выразить предложения, содержащие множественные выражения общности, такие как «голова каждой лошади является головой животного» или «за каждым числом следует другое число». В некотором смысле эти предложения могут быть представлены в логике Дж. Буля, но не таким образом, чтобы на основе этого представления можно было увидеть, почему одно следует из другого, но не подразумевает, что «каждая лошадь - животное», и поэтому доказательства даже таких простых фактов не могли быть выполнены.

Именно по этой причине Г. Фреге был вынужден разработать новую систему формальной логики, которую он впервые представил в «Begriffsschrift». Его система, как он часто указывает, адекватна для представления предложений, подобных упомянутым выше; ее правила вывода позволяют нам выполнять те доказательства, которые не могли быть формализованы в системе Дж. Буля. Построение этой системы имело далеко идущие результаты. Как пишет Р. Хек, «было бы невозможно переоценить важность вклада, подразумеваемого в подходе Фреге. Идея Фреге о том, что посредством формальной логики ресурсы математики могут быть использованы для решения философских проблем, пронизывает современную аналитическую философию, дошедшую до нас через работы Б. Рассела, Л. Витгенштейна, Р. Карнапа и других. Но его влияние не ограничивается философией. Математическая логика, в том виде, в котором она есть сейчас, одержима вопросом, что может или не может быть доказано из конкретных предположений, и только на фоне системы формальной логики Фреге – или, по крайней мере, системы формальной логики, которая отвечает условиям, которые он впервые установил – этот вопрос может быть даже сформулирован таким образом, что делает его математически трактуемым» [125, p. 3].

Кроме того, подход к обоснованию математики Г. Фреге носит более фундаментальный характер: в доказательстве законов арифметики Г. Лейбниц фокусируется на таких утверждениях, как 2+2=4. Г. Фреге же обращается к более фундаментальным арифметическим истинам. Показать, что все истины арифметики доказуемы из логических законов невозможно, доказывая каждую из этих истин, поскольку существует бесконечно много арифметических истин. Скорее, должны быть определены некоторые основные арифметические истины, из которых следуют все другие, а затем должны быть доказаны эти основные истины. То есть, арифметика должна быть аксиоматизирована, так же, как Евклид аксиоматизировал геометрию, а затем доказала необходимые аксиомы. Г. Фреге не был первым, кто опубликовал такие аксиомы: эта честь часто присваивается Дж. Пеано, хотя исторические данные дают понять, что Р. Дедекинд был на самом деле первым, кто сформулировал то, что теперь известно как «аксиомы Пеано» (аксиомы эксплицитно представлены в работе Р. Дедекинда «Was sind und was sollen die Zahlen?», которая была опубликована в 1888 году, а затем переведена и опубликована на английском языке как «The Nature and Meaning of Numbers» в 1902. Общепризнано, однако, что Р. Дедекинд сформулировал свои аксиомы несколькими годами ранее).

Тем не менее, Г. Фреге формулирует аксиомы для арифметики и предпринимает попытку доказать их. Он также доказывает, как и Р. Дедекинд, что для характеристики абстрактной, математической структуры натуральных чисел (как говорится, с точностью до изоморфизма) достаточно формулируемых аксиом, что является стандартным тестом достаточности аксиоматизации (более подробно см. [124]).

Конечно, нельзя, в самом строгом смысле, доказать аксиомы арифметики в рамках системы чистой логики: ни одно из выражений на языке, в котором сформулирована система, даже не претендует на отсылку к числам, поэтому аксиомы арифметики даже не могут быть записаны в такой системе. Поэтому требуются определения основных понятий арифметики в терминах логических понятий; затем доказательства аксиом арифметики станут доказательствами их переводов в формальную, логическую систему. Таким образом, используя современную терминологию, математический проект заключается в «интерпретации» арифметики в системе формальной логики. Интерпретировать одну теорию в другой – значит показать, что определения могут быть представлены в примитивном лексиконе интерпретируемой теории (в данном случае, арифметики) с точки зрения примитивов базовой теории (в данном случае, формальной теории логики), так что транскрипции аксиом интерпретируемой теории становятся теоремами базовой теории. Такой результат показывает, что интерпретируемая теория является согласованной, если таковой является базовая теория: если есть доказательство противоречия в рамках интерпретируемой теории, это доказательство может быть воспроизведено в рамках базовой теории. Такие результаты интерпретируемости были хорошо известны геометрам, работающим во времена Г. Фреге. Сам Г. Фреге был геометром по образованию, а такие методы были одними из наиболее часто используемых для установления согласованности различных видов неевклидовых геометрий (доказательства согласованности таких геометрий обычно сводились к доказательствам того, что они могут быть интерпретированы в других теориях, согласованность которых не вызывает сомнений).

Таким образом, задумка философско-математического проекта Г. Фреге – определить фундаментальные арифметические понятия в терминах понятий чистой логики, а затем, в рамках формальной системы логики, доказать аксиомы для арифметики. Именно так Г. Фреге будет определять «основные законы арифметики», т. е. фундаментальные предположения, на которых основано арифметическое рассуждение. Это важная часть проекта, осуществление которой, однако, не закрывает ряд важных вопросов. Так, необходимо показать, действительно ли определения Г. Фреге основных арифметических понятий отражают их значение: действительно ли нам удалось доказать аксиомы арифметики и, таким образом, определить ее основные законы. Кроме того, даже если на этот вопрос ответить утвердительно, остается вопрос, каков эпистемологический статус основных законов: только если они сами являются истинами логики, аналитическими истинами, доказательство покажет, что аксиомы арифметики являются аналитическими истинами. Дискуссия вокруг этих вопросах в литературе, инициированной проектом Г. Фреге, имеет большое место.

Формальная логическая система, которую Г. Фреге развивает в «Begriffsschrift», по сути, является тем, что теперь известно нам как логика второго порядка. Она допускает квантификацию понятий и отношений. Вместе с тем, как отмечает Р. Хек, «система, как она представлена в “Begriffsschrift”, однако, не отвечает требованиям строгости, которые накладывает Фреге. В частности, одно из важнейших правил вывода ни разу не дается эксплицитно, а именно правило подстановки» [125, p. 61]. Неспособность Г. Фреге сформулировать правило подстановки в «Begriffsschrift» является важным упущением: утверждение о том, что подстановка является допустимой формой вывода, в контексте логики второго порядка является чрезвычайно мощным, и в системе Г. Фреге правило подстановки играет роль, которую играют в более современных формулировках так называемые аксиомы понимания. Позднее, он исправляет это упущение в «Grundgesetze der Arithmetic», где представленная формальная система отвечает критерию строгости.

Проблема использования формальной системы Г. Фреге в обосновании математики заключается в том, что, согласно исследованиям ряда современных авторов, аксиомы арифметики не могут быть доказаны только в полной логике второго порядка. Камнем преткновения стало то, что даже утверждение о том, что существует два различных объекта, не является теоремой логики второго порядка;

арифметика же утверждает существование не только двух, но бесконечно многих натуральных чисел. Это утверждение, является основным препятствием на пути любого развития арифметики по пути логицизма. Мы вернемся к нему при обсуждении неологицизма, представители которого отвечают на этот вызов. Забегая вперед, отметим, что их ответ является удовлетворительным только при принятии некоторых весьма спорных утверждений. И, как отмечает Р. Хек, «трудно понять, что есть более сложная проблема, стоящая перед тем, кто ответил бы на эпистемологический вопрос, который нас волнует: чем объяснить генезис нашего знания о том, что существует бесконечно много чисел, какой бы ответ он в конечном счете ни хотел дать» [125, p. 62].

1.1.2 Понятия и объекты

В предисловии к «Grundlagen» Г. Фреге формулирует три методологических принципа, которых он придерживается в работе.

1. «всегда резко отделять психологическое от логического, субъективное от объективного»;

2. «никогда не спрашивать о значение слова изолированно, но только в контексте суждения» (принцип контекстуальности);

3. «никогда не упускать из виду различие между понятием и объектом».

Сконцентрируемся сейчас на последнем.

Рассмотрим в качестве примера применения Г. Фреге понятий и объектов следующее предложение:

(1) Аристотель является логиком.

– имя собственное «Аристотель» обозначает объект.

– предикат « … является логиком» обозначает понятие.

– содержание (1) заключается в том, что объект подпадает под понятие.

В §§ 46-54[1]Г. Фреге различает три вида сущностей:

[1]В данном разделе указываются параграфы «Grundlagen» Г. Фреге ([74], [173]).

1. Имена собственные (‘Г. Фреге’, ‘Экватор’, и т. д., формально: *a*, *b*, *c*, и т.д.);

2. Понятийные слова (общие понятия, например, ‘является логиком’, ‘(галилеева) Луна Юпитера’, и т. д., формально: *P*, *Q*, и т.д.);

3. Понятийные слова второго порядка (‘по крайней мере один’, формально *P*, *Q* и т.д.).

Таким образом, позицию Г. Фреге о понятиях и объектах можно сформулировать следующим образом:

(1) объекты – это то, что выражают имена собственные; понятия – то, что выражают предикаты (общие термины) (§§ 47, 51).

(2) понятия не являются особым видом объектов (предисловие, стр. X, письмо Марти, 1882).

(3) Понятия объективны (§ 47). (Г. Фреге ограничивает «идею» как субъективный термин.)

Здесь следует отметить, что еще одна характеристика, часто приписываемая идеям Г. Фреге, это платонизм. В широком смысле необходимый элемент платонизма – противопоставление чувственному миру мира сверхчувственного. В математике это направление касается проблемы существования математических объектов, в вопросе, существовали бы числа, если бы не существовало математиков. Платонисты уверены в существовании математических объектов вне зависимости от человека, платонизм – «философское направление, согласно которому математика изучает сферу абстрактных объектов, чье существование не зависит от человеческого сознания» [82, с. 11]. Вместе с тем, математический платонизм – достаточно размытое понятие, имеющее внутри себя множество направлений: дефляционный (минималистический), полнокровный, методологический, эпистемологический и т.д.

Сам Г. Фреге в первую очередь был математиком – защитил две диссертации, был профессором математики в Иенском университете, и вопросы обоснования математики его интересовали с позиций работающего математика – лишь потом, подводя итоги своих научных исканий в конце жизни, Г. Фреге писал: «я питаю надежду, что в случае непредвзятой проверки философы тоже найдут в этом произведении кое-что приемлемое для себя». Относительно Г. Фреге, по крайней мере, будет верным сказать, вслед за Т. Харди: «мне кажется, что ни одна философия не может вызвать сочувствия у математика, если она так или иначе не признает незыблемости и безусловной годности математической истины» [Т. Харди. Цит. по: 82, с. 15]. В действительности, Г. Фреге был ярым противником тех взглядов, которые не признавали существования чисел. Вот что он пишет: «неблагоприятным для моей книги является также широко распространившаяся склонность признавать наличным только чувственно воспринимаемое. Что нельзя воспринять чувствами, то пытаются отрицать или просто обходят молчанием» [Г. Фреге. Цит. по: 73, с. 32]. Еще в самых ранних работах Г. Фреге яро осуждал отрицание статуса существования математических объектов. В области оснований математики Г. Фреге был решительным противником эмпиризма и номинализма, сравнивая математика с географом, который не создает, а лишь находит объекты своих исследований, «может лишь обнаружить то, что есть и дать этому название». Так, пишет он, «земная ось, центр тяжести Солнечной системы объективны, но я не могу назвать их реальными, в отличие от самой Земли. Экватор называют мыслимой линией, но было бы неправильным назвать эту линию выдуманной; экватор не создается мышлением» [Г. Фреге. Цит. по: 73, с. 36], поэтому и число у Г. Фреге объективно в том смысле, что независимо от процессов ощущений, восприятий и представлений человека. Позицию Г. Фреге можно описать так: «принимая систему связанных друг с другом утверждений, мы задаем некоторый логический универсум, объективную систему связей, которые существуют независимо от субъекта в том смысле, что он, сохраняя посылки, может только исследовать эту систему связей точно так же, как географ исследует материки» [55, с. 213]. Г. Фреге считал, что «понятие логически первенствует по отношению к своему объему» [74, с. 469], понятие же по Г. Фреге не относятся к сфере человеческого мышления и психики, а представляют собой нечто объективное. Такое отношение Г. Фреге к истинам математики было следствием и особого понимания самой истины: «то, что истинно, – истинно независимо от нашего признания» [74, с. 287].

В действительности, Г. Фреге вряд ли можно назвать наивным платонистом, хотя он и был работающим математиком. Вопросы метаматематики носили для него явный характер, и в отличие от многих математиков, никогда не задумывавшихся над объектами своих математических исследований, Г. Фреге посвятил вопросам оснований математики большую часть своей жизни, находясь на непонятной для современников периферии философии и математики. Вместе с тем, нельзя не отметить то, что фрегевский платонизм был во многом противостоянием эмпиризму и субъективизму – как математик Г. Фреге просто не мог признать эмпирический и психологический характер чисел, и всегда очень бурно реагировал на подобные измышления, если верить свидетельствам (так, современного Г. Фреге Б. Эрдмана, поместившего числа и галлюцинации на одну ступень, иенский ученый окрестил «застрявшим в психолого-метафизическом болоте»). Категоричность во многих вопросах здесь принимала у него самый острый характер, очевидно, что объективный характер чисел был для Г. Фреге принципиальной и непоколебимой позицией. Поэтому, кажется верным сказать, что платонизм Г. Фреге был скорее предпосылкой его научных исследований, чем их следствием.

1.1.3 Г. Фреге против Дж. Ст. Милля: число не является свойством внешних вещей

Вернемся к вопросам: Что такое числа? Чему приписываются числа? Отправной точкой Г. Фреге в § 21 является естественный язык: «в языке числа большей частью проявляются в форме прилагательного и в атрибутивной связи, наподобие слов твёрдый, тяжёлый, красный, обозначающих свойства внешних вещей» [74, с. 161].

Рассмотрим, например:

(*2*) *a.* Дерево имеет красные листья

б. Дерево имеет 1000 листьев

(*3*) *а.* Листья красные

б. Камень тяжелый

в. Карт пятьдесят две

Г. Фреге отмечает, что выражения «твёрдый», «тяжелый» и «красный» «означают свойства внешних вещей» и далее задается вопросом о том, «должны ли точно также пониматься отдельные числа» [Там же].

Так, тезис «*Вес является свойством внешних вещей*» кажется вполне правдоподобным. Например:

1. «камень» обозначает объект,

2. «тяжелый» обозначает понятие (первого порядка),

3. (*3б*) говорит, что объект подпадает под понятие.

Учитывая схожесть (*3б*) и (*3в*), мы можем по аналогии предположить, что и число является свойством внешних вещей (что является тезисом Дж. Ст. Милля). Тогда:

1. «карты» обозначает объект,

2. «пятьдесят два» обозначает понятие (первого порядка),

3. (*3в*) говорит, что объект подпадает под понятие.

Г. Фреге (§ 23) цитирует Дж. Ст. Милля как отстаивающего эту позицию: согласно ей «Созначение числового наименования заключается конечно в том или другом свойстве того агломерата вещей, которому мы придаём такое наименование и свойством этим служит тот особый способ, каким данный агломерат сложен из своих частей (и может быть на них разложен)» [74, с. 163].

Позиция Дж. Ст. Милля, таким образом, заключается в том, что представленная выше аналогия корректна: свойства числа действительно приписываются агломератам из одной или более внешних вещей. Г. Фреге возражает на этот тезис в §§ 23-25.

Возражение 1: определенное число не может быть приписано агломерату. В § 23, Г. Фреге возражает на утверждение Дж. Ст. Милля, что существует уникальный характерный способ, каким данный агломерат разложен. Он отмечает это одним разделом выше: «Если я даю кому-нибудь камень со словами: “Определи его вес”, то этим я полностью задал предмет его исследования. Но если я вручаю ему колоду игральных карт со словами: “Определи их число”, то ему не известно, хочу ли я узнать число карт, игровой комплект, или, скажем, [мастей]. Вручая ему колоду, я ещё не полностью задал ему предмет его исследования; я должен добавить слово: карты, комплект, [масти]» (здесь мы упрощаем пример Г. Фреге, подставляя вместо его «очки при игре в скат» «масть») [74, с. 162].

Вслед за Г. Фреге, в таком случае, надо полагать следующие агломераты:

- агломерат из пятидесяти двух карт в колоде
- агломерат из четырех мастей карт в колоде
- агломерат из одного комплекта

Следовательно, «свойство числа» Дж. Ст. Милля применяется или ко всем, или ни к одному из них. Мы не можем учесть разницу в истинностном значении между следующим:

(*4*) *а*. Карт в колоде пятьдесят две

б. Мастей в колоде пятьдесят две

Возражение 2: числа универсально применимы

Согласно Дж. Ст. Миллю, агломераты являются агломератами одного или нескольких внешних объектов. Г. Фреге же утверждает, что «применимость числа гораздо обширнее» (§ 24): «разве существует в собственном смысле агломерат доказательств теорем или событий? И всё же их также можно сосчитать. При этом безразлично, одновременны события или же разделены тысячелетиями» [74, с. 163].

Точка зрения Дж. Ст. Милля терпит неудачу, когда мы считаем что-либо иное, чем одну или более физическую вещь.

(*5*)*а*. Существуют три способа доказать теорему

б. Натуральных чисел меньших, чем 2, два

в. Есть 0 лун Венеры

В примерах (*5а*)-(*5в*) невозможно приписывать свойства числа Дж. Ст. Милля агломератам внешних вещей, поскольку здесь нет подходящих агломератов.

Р. Хек [125] отмечает, что причина, почему Г. Фреге отвергает естественное предположение, что числа являются своего рода свойствами высшего порядка, заключается в том, что такая позиция не позволит нам доказать аксиомы арифметики. Предположим, что в мире было бы ровно два объекта, назовем их Джордж и Джеймс. Тогда будет понятие, которое имеет свойство 0; будут такие, которые имеют свойство 1; и будет такое, которое имеет свойство 1+1. Но не будет понятия, которое имеет свойство 1+1+1: для того, чтобы было такое понятие, должно быть такое, под которое подпадают три объекта, а, по гипотезе, существует только два объекта. По той же причине не будет и понятия, имеющего свойство1+1+1+1. В таком случае: можно сказать, что нет числа 1+1+1; кроме того, можно сказать, что 1+1+1 и 1+1+1+1 в данном случае будет одним и тем же. В любом случае, однако, будет только конечное число чисел, и законы арифметики не могут быть доказаны. Исправление такой ситуации возможно, если мы просто предположим, в качестве аксиомы, что существует бесконечно много объектов: такой подход предлагается в «Principia Mathematica» [58] Б. Рассела и А. Уайтхеда. Однако у Г. Фреге не было бы никакого интереса к такому «решению». Как уже было сказано (и к этой проблеме мы еще обратимся), по-настоящему сложная проблема, стоящая перед эпистемологией арифметики, заключается в том, что существует бесконечно много чисел. Трудно понять, как предположение, что мы знаем, что существует бесконечно много вещей другого рода, должно помочь. Доказательство законов арифметики из такого предположения оставляет нас с открытым вопросом о его эпистемологическом статусе. Более того, если предполагается, что объекты, которые мы предполагаем, являются физическими объектами, маловероятно, что утверждение о том, что их бесконечно много, является тем, что можно установить одной логикой.

Позиция Г. Фреге, судя по всему, была во многом предопределена отрицанием им многих действовавших в его время установок. Г. Фреге являлся противником субъективизма, психологизма и эмпиризма, а также формального направления в обосновании арифметики.

Арифметика рассматривалась Г. Фреге как наука, лишенная наглядности. «Математика покоится на логике (не на эксперименте), ибо ее доказательства – апелляция не к опыту, а к возможности (процедуре) логического выведения одного предложения из других» [70, с. 82]. «Сквозной нитью в философских воззрениях Г. Фреге проходит тема несостоятельности эмпиризма [73, с. 29] в логике и философии математики». Субъективизм, по мнению Г. Фреге, является «результатом стремления идти наперекор природе вещей». Свои возражения Г. Фреге формулирует в виде примера.

«Пусть кто-то хочет мне внушить: все предметы суть будто бы не что иное, как образы на сетчатке моего глаза. Ну, хорошо! Я пока не возражаю. Но затем он говорит, что вот эта башня больше, чем окно, через которое, по моему мнению, я на нее смотрю. На это, однако, я возражаю: либо оба - и башня, и окно - не являются образами на сетчатке в моем глазу, и тогда башня может быть больше, чем окно; либо башня и окно суть, как ты говоришь, образы на моей сетчатке; но тогда башня не больше, чем окно, а меньше его. Тут-то он и пытается выйти из затруднения с помощью этого “как таковое” и говорит: образ башни [на сетчатке] как таковой действительно не больше, чем образ окна. Тогда я уже выхожу из себя и кричу ему: значит образ башни на сетчатке глаза вообще не больше, чем образ окна, и если бы башня была образом башни, а окно было бы образом окна, то сама башня была бы не больше, чем окно, и если твоя логика учит тебя другому, то она никуда не годится. Это “как таковое” есть превосходное изобретение для туманных писателей, которые не говорят ни да, ни нет» [Г. Фреге. Цит. по: 73, с. 30].

Для Г. Фреге путь, по которому идет эмпиризм, по его собственному выражению является «самым скверным», а мнение Дж. Ст. Милля о том, что все науки являются эмпирическими «тотчас портящим правильную мысль». Эмпирическое объяснение объектов арифметики для Г. Фреге является абсолютно неприемлемым.

Вместе с тем, считая, что «психология не должна воображать, что она может внести какой-то вклад в обоснование арифметики» [74, с. 136], Г. Фреге тем самым выступал против психологизма, чем явно выделялся среди своих современников. Конец XIX века, триумф так называемой психологизации в науке, когда именно с психологией связывались надежды о построении прочного фундамента в самых различных областях, не мог понять и признать идей ярого противника психологизма. В желании ниспровергнуть психологическую логику, в безграничной вере в объективную истину, Г. Фреге отрицает психологизм и субъективизм: «этот взгляд все сводит к субъективному и, будучи доведенным до конца, отменяет истину». Он и сам понимал, что истина им и представителями психологизированной логики понимается совершенно по-разному – для Г. Фреге истина была независимой от того, кто выносит суждение, для сторонников психологизма в логике это не так. «Если бы каждый именем “Луна” обозначал нечто другое, – именно, одно из своих представлений, примерно так, как выражают возгласом “ой!” свою боль, то, конечно, психологический подход к делу был бы оправдан; однако всякий спор о свойствах Луны стал бы беспредметным: один человек с таким же правом мог бы утверждать о своей Луне прямо противоположное тому, что другой с таким же правом говорил бы о своей. Если бы мы не могли постигать ничего, кроме того, что имеется в нас самих, то был бы невозможен ни спор между людьми, ни взаимное понимание» [Г. Фреге. Цит. по: 73, с. 31].

Для Г. Фреге числа и операции над ними – объективное содержание, которое может быть достоянием многих, а не известное лишь одному индивиду. Очевидно, что Г. Фреге выступал не против психологии, но против психологизма в логике и математике, делая вывод о том, что «считает ли отдельный человек мысль, что 2×2=4, истинна или же ложна, – а это может зависеть от химического состава его мозга, но то, что эта мысль истинна, от него не зависит».

Таким образом, Г. Фреге формирует область оппонентов, с мнениями которых он категорически не согласен. В итоге негативное определение числа он формулирует так: «Число не абстрагируется от вещей по типу цвета, веса, твёрдости и не является свойством вещей в том смысле, как эти последние. Всё ещё остаётся вопрос, к чему относится то, что высказывается посредством указания на число. Число – не физично, но также и не субъективно, оно не является представлением. Число не возникает прибавлением вещи к вещи. Также ничего в этом отношении не меняет и придание имени соответственно каждому прибавлению. Выражения "многое", "множество", "множественность" из-за их неопределённости не годятся для объяснения числа» [74, с. 176], и далее: «Число нельзя представить ни как самостоятельный предмет, ни как свойство внешней вещи, так как оно не является ни чем-то чувственным, ни свойством внешней вещи» [74, с. 195].

1.1.4 Г. Фреге: числа приписываются понятиям

В § 45 Г. Фреге спрашивает еще раз: «к чему относится то, что высказывается посредством указания на число?». Ответ Г. Фреге: к понятию. «Указание на число содержит высказывание о понятии. Более всего это, пожалуй, ясно относительно числа 0. Если я говорю: "Венера имеет 0 лун", то здесь вовсе нет луны или агломерата лун, о которых можно было бы нечто высказать; однако благодаря этому понятию "луна Венеры" прилагается свойство, а именно, под него ничего не подпадает» [74, с. 187].

А именно, отмечается сходство между следующим:

(*6*)Есть несколько лун Венеры

(*5в*) Есть 0 лун Венеры

Таким образом, Г. Фреге утверждает, что предложения, говорящие о количестве, что-то говорят о понятии (указание на число содержит высказывание о понятии), например, в случае с *(6)*:

- « … луны Венеры» обозначает понятие первого порядка,
- «есть несколько… » обозначает понятие второго порядка;
- *(6)* говорит, что понятие первого порядка подпадает под понятие второго порядка

в случае с (*5в*):

• «… луны Венеры» обозначает понятие первого порядка,

• «есть 0 …» обозначает понятие второго порядка;

• (*5в*) говорит, что понятие первого порядка подпадает под понятие второго порядка.

В терминологии Г. Фреге: в *(5в)* утверждается, что число 0 принадлежит понятию луна Венеры. Аналогично для *(3в):* «карт пятьдесят две»

• «Карты» обозначает понятие первого порядка,

• «… 52» обозначает понятие второго порядка;

• в предложении *(3в)* говорится, что понятие первого порядка подпадает под понятие второго порядка.

Точка зрения Г. Фреге против тезиса Дж. Ст. Милля о том, что числа – это свойства объектов трансформируется в его собственное представление о числах.

(А) определенные числа могут быть отнесены к понятиям (§ 48).

• понятие первого порядка «карты в колоде» имеет определенное число предметов, подпадающих под него;

• в отличие от Дж. Ст. Милля, Г. Фреге приписывает правильные истинностные значения (*4а*) и (*4б*).

(*4*) *а*. Карт в колоде пятьдесят две

б. Мастей в колоде пятьдесят две

(Б) Точка зрения Г. Фреге приводит к всеобщей применимости числа (§ 48).

• ноль не представляет никакой проблемы: такие понятия, как *луна Венеры* не имеет вещей, подпадающих под него;

• нет проблем в подсчете абстрактных объектов, как в (*5а*) и (*5б*), поскольку абстрактные объекты и физические объекты подпадают под понятия (§ 48).

Действительно, позиция Г. Фреге представляется более состоятельной, чем позиция Милля. Однако, существует вопрос, который заключается в том, достаточно ли этого, чтобы доказать, что числа приписываются понятиям? Дело в том, что позиция Дж. Ст. Милля – это только один из способов противостоять позиции Г. Фреге. К примеру, возьмем позицию И. Канта: *числа это свойства множеств*. Например, в случае с «карт пятьдесят две».

• «Карты» обозначает множество карт,

• «пятьдесят две» обозначает понятие первого порядка «*имеет пятьдесят два элемента*»;

• в предложении говорится, что множество подпадает под понятие.

Точка зрения И. Канта, похоже, также имеет те преимущества, которые Г. Фреге имеет над Дж. Ст. Миллем:

(А) определенные числа могут быть отнесены к множествам.

• оба множества $\{x : x$ это карты в колоде$\}$ и $\{x : x$ это масти в колоде$\}$ имеют определенное число элементов

• как и Г. Фреге, эта точка зрения приписывает правильные истинностные значения (*4а*) и (*4б*).

(Б) Точка зрения И. Канта приводит к всеобщей применимости числа.

• ноль не представляет никакой проблемы: множества, такие как $\{x : x$ это луна Венеры$\}$ не имеют элементов.

• нет проблем в подсчете абстрактных объектов, как в (*5а*) и (*5б*), поскольку абстрактные объекты и физические объекты являются членами множеств.

1.1.5 Г. Фреге: числа это объекты

Несмотря на то, что приписывание числа делает утверждение о понятии, сами числа не являются свойствами понятий: они являются объектами. «Слова» чисел являются не предикатами предикатов, а именами собственными. (Действительно, странно утверждать, что ноль является свойством понятия: утверждать это, все равно что говорить, что, например, понятие «женщина-президент Российской Федерации» имеет свойство ноль). Можно задаться вопросом, как эти две доктрины – что числа приписываются понятиям и что числа являются объектами – могут быть приняты совместно. Ответ заключается в том, что наиболее фундаментальное выражение, которое называет число, является одной из форм выражения «число, принадлежащее понятию F», и что это имя собственное. Приписывание числа, такое как «есть 102 карты на столе» затем пересматривается как утверждение об идентичности, например: число, принадлежащее понятию карты на столе идентично 102. Это, в очевидном смысле, содержит утверждение о понятии, но число 102 не является свойством понятия.

Рассмотрим два пути, по которым мы могли бы обозначить число лун Юпитера:

(*10*) *а*. Существует четыре Луны Юпитера. [Атрибутивное приписывание]

б. Число Лун Юпитера = четыре. [Субстантивное приписывание]

В различимых формах (*10а*) и (*10б*) предлагаются различные логические формы приписываниям числа:

- В (*10а*) «четыре» встречается в качестве прилагательного, логическая форма: (*10 – атриб*) Четыре (Л.Ю.)
- В (*10б*) «четыре» возникает как имя собственное, логическая форма: (*10 – суб*) Число (Л.Ю.) = 4

Обе эти логические формы соответствуют первому тезису Г. Фреге: число 4 относится к понятию *луна Юпитера*. Но они реализуют это по-разному:

- в (*10 – атриб*) простое выражение понятия Четыре (·) выражает понятие второго порядка, которое говорит о понятии *луна Юпитера*.
- в (*10 – суб*) комплексное выражение понятия Число (·) = 4 выражает понятие второго порядка, которое говорит о понятии *луна Юпитера*; но это выражение понятия имеет дальнейшую логическую структуру. Оно формируется из:

– предикат тождественности: =, который обозначает отношение между объектами.

– функция-выражение: N, которая обозначает функцию второго порядка, отображающую понятия на объекты.

– сингулярный термин: 4, который обозначает объект.

В таком случае возможны три варианта определения числовых выражений: числовые выражения всегда выражают понятия второго порядка, числовые выражения всегда выражают объекты, или же числовые выражения иногда выражают понятия второго порядка и иногда выражают объекты. Что касается позиции Г. Фреге, то он излагает ее в § 57. Очевидно, что Г. Фреге отвергает первый вариант, что числовые выражения всегда выражают понятия второго порядка: «здесь как раз уместно уделить более тщательное внимание нашему выражению, что указание на число содержит высказывание о понятии. В предложении “Понятию F соответствует число 0”, если мы рассматриваем понятие F как реальный субъект, 0 является только частью предиката. Поэтому я избегаю называть числа, типа 0, 1, 2, свойствами понятия. Отдельное число выглядит именно как самостоятельный предмет благодаря тому, что оно образует только часть высказывания. Выше я уже уделял внимание тому, что говорят “[die]” и благодаря определённому артиклю 1 изображает собой предмет. Эта самостоятельность повсеместно обнаруживается в арифметике, например, в равенстве 1+1=2. Поскольку здесь мы стремимся схватить понятие числа так, чтобы оно было пригодно в науке, нас не должно беспокоить, что в обычном языке жизни число также проявляется атрибутивно. Последнего всегда можно избежать. Например, предложение “Юпитер имеет четыре луны” может быть преобразовано в “Число лун Юпитера есть четыре”. Здесь “есть” не должно рассматриваться в качестве простой связки, как в предположении “Небо есть голубое”. Последнее обнаруживается в том, что можно сказать: “Число лун Юпитера есть четыре” или “есть число 4”. Здесь “есть” имеет смысл “есть равное”, “есть то же самое, как и”. Стало быть, у нас есть равенство, утверждающее, что выражение “число лун Юпитера” обозначает тот же самый предмет, как и слово “четыре”» [74, с. 194]. Перед Г. Фреге, однако, стояла еще одна проблема. Он отрицал, что арифметика является либо синтетической априори, либо апостериорной, отчасти на том основании, что числа не даются нам ни в восприятии, ни в интуиции. Как же они даются нам? Каков, так сказать, режим нашего когнитивного доступа к объектам арифметики? К ответам Г. Фреге на эти вопросы мы обратимся в следующем разделе.

1.2 Эпистемологический статус арифметических предложений

Конечная цель Г. Фреге заключалась в доказательстве основных арифметических предложений: «доказать с наибольшей строгостью, если только возможно, основные предложения арифметики; ибо, только если тщательно устранять каждый пробел в цепи выводов, можно с уверенностью сказать, на какие первичные истины опирается доказательство; и только когда последние известны, можно ответить на эти вопросы» [74, с. 142-143]. Интерес Г. Фреге заключается в предоставлении доказательств арифметических предложений, таких как:

(1) 7+5=12

(2) $(n + m) + k = n + (m + k)$

Откуда это стремление доказать такие очевидные утверждения? Мы еще обратимся более подробно к анализу причин, мотивировавших проект Г. Фреге в Главе 4 настоящего исследования, сейчас же кратко обозначим следующие:

Математические причины поисков доказательства (§ 2):

- «к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает последнее оправданию посредством индукции»
- открытие логических отношений: «чтобы позволить нам уяснить зависимость истин друг от друга».

Философские причины поисков доказательства (§ 3):

- разрешить вопрос о «природе арифметических истин» – «они априорные или апостериорные? синтетические или аналитические?»

Г. Фреге обращается к кантовской дистинкции аналитического/синтетического и априорного/апостериорного. Г. Фреге называет предложение:

аналитическим, если «на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной, причём предполагается, что при рассмотрении указаны также и предложения, от которых возможно зависит допустимость определения».

синтетическим если «невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки».

априорным, если «возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве».

апостериорным, если его «доказательство не удавалось без ссылки на факты; т.е. на недоказуемые истины, не обладающие всеобщностью, которые содержат высказывание об определённых предметах» (§ 3).

Г. Фреге берется за «Grundlagen» чтобы «сделать правдоподобным то, что арифметические законы являются аналитическими, а, следовательно, априорными суждениями» (§ 87, § 109).

Относительно этих дистинкций у Г. Фреге можно сделать несколько замечаний:

• логическое не психологические: оно о «конечных», а не фактических основаниях (§ 3).

Г. Фреге, по-видимому, не разделяет более раннюю характеристику аналитического Канта с точки зрения «концептуальной оболочки» (§§ 3, 5, 88, 89): у Г. Фреге 5+7=12 является аналитическим априори, тогда как у И. Канта это является синтетическим априори. Г. Фреге и И. Кант, вместе с тем, сходятся в том, что геометрические истины являются синтетическими и априорными (§ 89)[1].

[1] В действительности, Г. Фреге еще в самом начале своих исследований указывал на то, что геометрические понятия он не наделяет теми особенностями и характеристиками, которые он видел в арифметике. Не соглашаясь с И. Кантом в том, что математические истины являются синтетическими, Г. Фреге соглашался сданным утверждениям по отношению к предложениям геометрии. Хотя известно, что в конце своей жизни, разочаровавшись в построенной им теории, Г. Фреге переключился как раз на геометрию, и в ней пытался найти новое основание своей теории, все это не имеет никакого отношения к его основным работам по основаниям математики (в названии которых также указано, что автора интересует не вся математика и ее обоснование, но именно арифметика). Геометрия, считал Г. Фреге, является областью пространственно-наглядного, арифметика же избавлена от таких ограничений. Геометрия, более того, не базируется на логике, а ее познавательным источником является специфически геометрическое наглядное представление.

- аналитические истины – правильные подмножества априорных.

Для дальнейшего определения статуса арифметических предложений посредством доказательства требуется анализ: «если пытаются следовать данным требованиям, то очень скоро приходят к предложениям, доказательство для которых невозможно до тех пор, пока входящие в них понятия не удаётся разложить на более простые или подвести под более общие. В данном случае это относится ко всем числам, которые должны быть либо определены, либо признаны за неопределяемые. Это и должно быть задачей данной книги» [74, с. 143].

1.2.1 Логицизм

Логицизм является одной из основных программ-гигантов обоснования математики. В самом общем виде идея логицизма сводится к представлению о логической природе математических понятий и суждений.

Идеи логицизма в свое время разделялись и разделяются до сих пор немалым количеством мыслителей. Однако во времена Г. Фреге обращение к логике для обоснования математики выглядело, по меньшей мере, странно. Связь математики с логикой не отвергалась, скорее даже подразумевалась, но этого было достаточно. Стремление связать философию и математику не воспринималось ни теми, ни другими, и высказывание Г. Фреге о том, что «основательное исследование понятие числа всегда будет иметь нечто философское. Эта задача является общей для математики и философии» [Г. Фреге. Цит. по: 73, с. 59] было, по крайней мере, не тривиальным. Математикам (да и философам) еще только предстояло осознать, что «математика является незавершенной не только по своему содержанию, но и по обоснованию своих утверждений и методов. Противоречия и парадоксы, которые понимались до этого как случайные казусы, стали рассматриваться теперь как нечто неустранимое из математики, как одно из проявлений ее развития» [55, с. 220].

В самом общем виде логицизм можно сформулировать таким образом: «логицизм - философия математики, в основе которой лежит представление о логической природе математических понятий и суждений. Основной логицистский тезис сводится к тому, что математика не содержит в себе ничего, кроме комбинаторного усложнения понятий и принципов, содержащихся в логике. <…> Логицизм является одной из программ обоснования математики, которая стремится обосновать надежность математических теорий через их редукцию к аксиоматизированным теориям логики, надежность которых предполагается гарантированной самим статусом логики, ее местом в системе знания и связью логических принципов с универсальными онтологическими категориями» [63, с. 288].

Однако вряд ли удастся дать более исчерпывающее определение программы логицизма, чем определение П. Бенасерраф:

«логицизм укладывается в несколько различных версий, каждая со своими новшествами, но большинство из этих версий имеет следующую общую структуру:

1. Истины арифметики *переводимы* в истины логики.

2. (1) демонстрируется тем, что:

a) устанавливаются определения для “внелогического” словаря (понятий) арифметики в “сугубо логических” терминах; и

b) отмечается, что переводы, санкционированные этими определениями, перевели арифметические истины в логические истины, а арифметически ложные утверждения в логически ложные.

3. Об этой арифметической демонстрации затем утверждается, что обоснована аналитичность математических пропозиций, потому что: (a) поскольку определения, по предположению, сохраняют значение, логические переводы имеют то же самое значение, что и арифметические оригиналы и (b) *сами* логические истины мыслятся истинными в силу значения, в данном случае, значений, встречающихся в них логических частиц (и, таким образом, аналитическими)» [46, с. 195].

В этом смысле Г. Фреге, несомненно, является логицистом[1]. Так, логицизм Г. Фреге сводится к некоторым убеждениям, вокруг и от которых развивается его теория. В первую очередь здесь следует отметить, что одной из самых важных своих задач Г. Фреге ставил именно аналитический анализ понятия числа. Другими словами, для Г. Фреге принципиальным делом было устранение всяких сомнений по поводу аналитического характера математических истин: «главная цель предпринятого Г. Фреге мероприятия - доказательство не только принципиальной, но и реальной возможности редуцировать абсолютно все арифметические понятия, аксиомы и теоремы к арсеналу чисто логических терминов, законов, исчислений» [49, с. 115]. Таким образом, программа логицизма в задумке Г. Фреге должна была представить понятия арифметики как понятия логики, аксиомы арифметики как доказуемые теоремы логики, а также установить правила вывода из логических предложений арифметики.

Вместе с тем, упомянутый выше П. Бенасерраф, американский философ, весьма смело и неординарно называл Г. Фреге не только первым, но и последнем логицистам (в одноименной статье «Г. Фреге: последний логицист» [46]) в том смысле, что «если Г. Фреге был первым логицистом, то он также был и последним» [цит. по: 46, с. 200].В первую очередь Бенасерраф связывает это с тем, что никто из последующих «логицистов» не придерживался именно исходной позиции Г. Фреге, которая «была намного более интригующей и в его духе прямо антитетической философской мотивацией его «последователей» в двадцатом веке» [цит. по: 46, с. 200]. Кроме того, Г. Фреге, судя по всему, интересовала выдвинутая и доказываемая им самим теория с позиции математики, философская подоплека его исканий явилась если не побочной, то по крайней мере не самоценной: философские выводы этой работы были сделаны «по случаю». Как указывает П. Бенацерраф, интерес математика к вопросам основания математики принципиально иной, чем философский и если логицизм

---

[1] Дело в том, что в общем виде определение логицизма сводит все математические суждения к суждениям логическим. Однако в задумках Г. Фреге такого не было. Его интересовали только арифметические понятия, и для него это было не случайным упущением из вида остальных внутриматематичеких ответвлений.

является комплексом философских взглядов, то Г. Фреге не был логицистом. Подобная точка зрения еще раз показывает, что определение Г. Фреге как логициста должно быть дополнено уточнениями.

Сила (и философский интерес) тезиса логицизма Г. Фреге о том, что арифметика сводима к логике, зависит от того, что мы имеем в виду под: (1) «логикой», (2) «арифметикой» и (3) «сводится к». Для Г. Фреге:

- *(1) Логика: логика высшего порядка, подобная разработанной в «Begriffsschrift»*

Логика Г. Фреге допускает квантификацию второго порядка и имеет непредикативное содержание понятия.

- *(2) Арифметика: арифметика второго порядка Пеано ($ПА_2$)*

Мы можем аксиоматизировать $ПА_2$ на языке логики второго порядка, дополненной:

сингулярным термином: 0 («ноль»)

унарным предикатом: N («натуральное число»)

бинарным предикатом: P («предшествует»)

В терминологии Г. Фреге: Pmn интерпретируется как «n следует в ряде натуральных чисел непосредственно после m», мы говорим «n (непосредственно) следует за m» (имеется в виду интерпретация: $m + 1 = n$)

ПА1 Ноль является натуральным числом

$N0$

ПА2 Число, следующее за натуральным, тоже является натуральным

$\forall x\,(Nx \rightarrow \exists! y(Pxy \wedge Ny))$

ПА3 Если натуральное число n непосредственно следует как за числом m, так и за числом p, то m и p тождественны; (ни за какими двумя натуральными числами не следует одно и то же натуральное число)

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\,(Nx_1 \wedge Nx_2 \wedge Px_1y \wedge Px_2y \rightarrow x_1 = x_2)$

ПА4 Ноль не следует ни за каким натуральным числом

$\forall x(Nx \rightarrow \neg Px0)$

ПА5 *Математическая индукция:* Если какое-либо свойство F доказано для 0 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа (индукционное предположение), то свойство Fесть у всех натуральных чисел.

$\forall F(F0 \wedge \forall x \forall y(Nx \wedge Fx \wedge Pxy \rightarrow Fy) \rightarrow \forall x(Nx \rightarrow Fx))$

Отметим, что еще Г. Лейбниц предложил то, что натуральные числа должны быть охарактеризованы с помощью определения «нуля» и «увеличения на единицу».

• *(3) Сводимо к: доказуемо из (учитывая соответствующие определения)*

Арифметический логицизм Г. Фреге (второй пункт) арифметика сводима к логике, т.е:

1. нелогические выражения $ПА_2$ (0, N и P) могут быть определены на языке логики Г. Фреге.

2. определив 0, N и P, мы можем доказать аксиомы $ПА_2$ в логике Г. Фреге.

1.2.2 Лингвистический поворот

В знаменитом § 62 говорится:

«слова обозначают нечто только в контексте предложения. Стало быть, всё идёт к тому, чтобы объяснить смысл предложения, в которое входит числительное. <…> В нашем случае мы должны объяснить смысл предложения: “Число, соответствующее понятию F, является тем же самым, как и то, что соответствует понятию G”; т.е. мы должны воспроизвести содержание этого предложения другим способом, не используя выражения “число, соответствующее понятию F”». Именно в этом пассаже Г. Фреге совершает «лингвистический поворот».

Конечно, нельзя сказать, что ни один философ до него никогда не интересовался языком; Дж. Локк, например, был одержим языком и неоднократно утверждал, что различного рода философские проблемы были результатом иллюзий, порожденных непониманием языка. (Как отмечает Р. Хек, возможно, Дж. Локк был первым логическим позитивистом.) Что оригинально в подходе Г. Фреге, так это то, что эпистемологическая проблема, которую он ставит, превращается в проблему в философии языка, которую можно решить.

Ответ на эпистемологический вопрос, который подразумевается в подходе Г. Фреге, заключается в том, что наш когнитивный доступ к числам может быть объяснен с точки зрения нашей способности ссылаться на них, с точки зрения способности обозначать их с помощью выражений, которые мы понимаем. Конечно, если способность ссылаться на объект с помощью имени собственного зависит от того, имеем ли мы или, по крайней мере, можем ли мы иметь его восприятие или интуицию (или другие объекты такого рода), то никакой реальной выгоды от такого решения проблемы не будет. Объяснение должно происходить в таких терминах, что Г. Фреге ссылается на «принцип контекстуальности», утверждение о том, что значение выражения может быть объяснено путем прояснения значений полных предложений, в которых оно происходит. Цель в этом случае будет состоять в том, чтобы дать определение «число, принадлежащее понятию *F*, такое же, как и принадлежащее понятию *G*», в терминах самих понятий, принадлежащих чистой логике. Если это возможно, то из этого следует, что существует, так сказать, чисто логический путь к пониманию выражений, которые относятся к числам, то есть к способности ссылаться на них и, таким образом, к способности познавательного доступа к ним.

1.2.3 Фальстарт: принцип Юма и Юлий Цезарь

Критерий для определения «одинаковости» чисел *F* и *G* Г. Фреге «находит» у Д. Юма (в настоящее время широко признано, что сам Д. Юм не имел в виду критерий, который Г. Фреге приписывает ему). Предположим, например, что я хочу установить, что число тарелок на столе совпадает с числом стаканов. Одним из способов, конечно, было бы подсчитать их, присвоить числа понятиям тарелки на столе и стаканам на столе, а затем, оценить, являются ли эти числа одинаковыми. Но есть и другой способ: можно «соединить» тарелки и стаканы, скажем, поставив по одному и только по одному стакану на каждую тарелку, а затем посмотреть, окажется ли каждая тарелка со стаканом на ней и остались ли еще стаканы. То есть, можно попытаться создать «взаимно-однозначную корреляцию» между тарелками и стаканами: если такая корреляция есть, число тарелок такое же, что и число стаканов, и никак иначе.

Действительно, как подчеркивает Г. Фреге, процесс подсчета сам по себе опирается на установление взаимно-однозначных соотношений (§ 108). Для подсчета тарелок необходимо установить взаимно-однозначную корреляцию между тарелками и начальным сегментом натуральных чисел, начиная с 1; последнее используемое число затем присваивается понятию тарелки на столе в качестве ее числа. Почему, действительно, тот факт, что одно и то же число присваивается в этом процессе понятию тарелки на столе и понятию стаканы на столе, показывает, что число тарелок то же, что и число стаканов? Потому что, как говорит Г. Фреге, если есть взаимно-однозначная корреляция между тарелками и числами от 1 до n, а также между стаканами и числами от 1 до m, то взаимно-однозначная корреляция между тарелками и стаканами будет иметь место, если, и только если n является $м$. В терминологии Г. Фреге: «Число понятия F, является тем же самым, что и число понятия G» означает, что объекты, подпадающие под F можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с объектами, подпадающими под G ($F \approx G$).

Понятие взаимно-однозначной корреляции само по себе может быть определено в чисто логических терминах (если мы принимаем утверждение Г. Фреге о том, что общая теория понятий и отношений, разработанная в логике второго порядка, действительно считается логикой) (§ 72):

Определение. $F \approx G =_{df} \exists R(\forall x(Fx \rightarrow \exists! y(Rxy \wedge Gy)) \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists! x(Rxy \wedge Fx)))$

По аналогии с введением понятия направления (в § 65), Г. Фреге мог ввести предложение вроде такого:

«“число понятия F, является тем же самым, что и число понятия G” [$F \approx G$]

означает тоже самое, что и

“число, принадлежащее *F* = числу, принадлежащему *G*” [Число (*F*) = число (*G*)]».

Такое «определение» сейчас известно как *принцип Юма* (многие авторы часто сокращают его как HP - *Hume's Principle*), так как Г. Фреге цитирует Д. Юма, когда он вводит его (не потому, что кто-то думает, что Д. Юм действительно имел в виду этот принцип):

число (F) = число (G) $\leftrightarrow$ $F \approx G$ (число Fs то же, что и число Gs, если, и только если, Fs и Gs равночисленны).

Принцип Юма является принципом абстракции[1]. Во второй главе настоящего исследования мы обратимся к этой теме, а также к проблеме использования принципов абстракции, более подробно. Статус этого объяснения «числа *Fs*» является одной из основных открытых проблем, с которыми оставляет нас философия арифметики Г. Фреге. Однако следует подчеркнуть, что проблема носит более общий характер, чем вопрос о том, дает ли она нам чисто логический путь к пониманию чисел. Идея Г. Фреге заключается в том, что способность ссылаться на абстрактные объекты может быть объяснена в таких терминах. Определение параллельности направлений также будет примером «определения путем абстракции»: нашу способность ссылаться на направления можно объяснить с точки зрения нашего понимания названий направлений, которые в свою очередь объясняются с помощью принципа, аналогичного принципу Юма, а именно:

Направление линии *a* совпадает с направлением линии *b*, если и только если *a* параллельна *b*.

Основная проблема использования принципов абстракции, занимающая в последние годы ряд философов, а именно, как объяснить нашу способность обращаться к абстрактным объектам, не является для самого Г. Фреге первостепенной.

[1]Принцип абстракции в свою очередь является принципом, вводящим абстрактные объекты, а также принципом, выступающим в роли критериев тождественности абстрактных объектов; в свою очередь «парадигмальным примером такой абстракции является принцип абстракции Г. Фреге» [83, с. 63].

Как мы видим, такой способ определения понятий отличается от стандартных, *эксплицитных* определений, таких, как, например: гугол $=_{df} 10^{100}$. И Г. Фреге отвергает принцип Юма в качестве объяснительной основы чисел, поскольку «мы никогда не сможем, – если взять грубый пример – посредством наших определений решить, соответствует ли понятию число Юлий Цезарь или является числом этот знаменитый покоритель галлов или же нет» (§ 56). Принцип Юма говорит нам, что утверждения формы «число *Fs* то же, что и число *Gs*» имеют в виду; но он совершенно не рассказывает, что означает утверждения формы «*q* – это число *Gs*», кроме случаев, когда '*q*' - это выражение вида 'число *Fs*' (§ 66). Прежде всего, как отмечает Г. Фреге, мы, похоже, не сомневаемся в Цезаре: *a fortiori,* чем бы ни были числа, Юлий Цезарь не один из них. И трудно понять, что могло бы быть основой этих знаний, если бы они не содержались в нашем понимании имен чисел. Но если это так, то предлагаемое объяснение чисел можно считать неполным, поскольку оно не отражает этот элемент нашего понимания чисел.

Утверждая то, что Цезарь – это не число, мы используем понятие числа: и если бы мы понимали понятие числа, было бы легко ответить на вопрос, является ли какой-то объект, назовем его *a*, числом *Fs*. Либо *a* – это число, либо нет. Необходимо объяснить не только нашу способность ссылаться на отдельные числа, но и наше понимание концепции числа в целом. Согласно принципу Юму сказать, что что-то является числом, допустимо, если есть понятие, чье число таково. То есть, *a* является числом, если и только если есть понятие *F*, такое, что *a*– это число *Fs*. И, как уже было сказано, принцип Юма просто не может объяснить, что означает «*a* – число *Fs*», за исключением случаев, когда «*a*» имеет форму «число *Gs*», и в этом случае очевидно, что *a*– это число. Если нет другого способа определить понятие числа, то мы не понимаем даже того, что значит сказать, что Цезарь – это не число. Проблематичность использования принципа Юма для Г. Фреге, таким образом, такова: изначальная его цель состояла в том, чтобы прояснить наш когнитивный доступ к числам, объяснив нашу способность ссылаться на них и делать это, определяя или объясняя имена чисел в чисто логических терминах. Вопрос в том, действительно ли левая сторона принципа Юма, утверждения, что «число *Fs* то же, что и число *Gs*, если и только если *Fs* и *Gs* равночисленны» имеет семантическое утверждение об идентичности чисел. Если это так, то допустимо заменить «число *Fs*» переменной, и поэтому рассматривать такие «открытые» предложения, как «*x* – это число *Gs*», и спрашивать, истинны ли они или ложны, когда переменная принимает различные объекты, такие как Цезарь, в качестве своего значения. Но, как показано выше, принцип Юма сам по себе просто не объясняет, что означают подобные предложения. Это является причиной сомнения, действительно ли он объясняет утверждения об идентичности, содержащие числа. Эта проблема имеет особое значение в философии Г. Фреге: заявленное им самим требование (объяснения чисел в чисто логических терминах) не выполняется. И Г. Фреге отказывается от определения чисел путем абстракции и взамен дает эксплицитные определения в терминах объемов (§ 68).

1.2.4 Конструирование Г. Фреге натуральных чисел

На месте принципа Юма Г. Фреге устанавливает эксплицитное определение чисел в терминах объемов понятий:

Число, соответствующее понятию *F*, есть объём понятия «равночисленно понятию *F*» (§ 68)

Т.е. понятия *F* и *G* имеют одинаковые объемы, только если каждый *F* является *G* и каждый *G* является *F*. В «Grundgesetze» эта аксиома становится Аксиомой V (*Basic Law V*, иногда переводится как Основной Закон V) Г. Фреге.

Проект Г. Фреге, по сути, состоял из четырех основных этапов:

1. признать Аксиому V аксиомой логики;

2. сформулировать соответствующие эксплицитные определения числовых понятий в терминах объемов, предусмотренных Аксиомой V (§ 68);

3. вывести принцип Юма (§ 73);

4. вывести арифметику из принципа Юма (этот этап получил название Теорема Фреге, об этом более подробно речь пойдет во второй главе), а именно: определить 0 (§ 74), P – непосредственное следование одного числа за другим (§ 76), предшествующее число (§§79-81), натуральное число (§ 83).

Сформулировав Аксиому, Г. Фреге приступает к выполнению следующих этапов.

Сам Г. Фреге отмечает относительно понятия объемов: «я полагаю, известно, что является объемом понятия» (§ 68). Сформулируем Аксиому V символически:

$\{X{:}\Phi(X)\} = \{X{:}\Psi(X)\} \leftrightarrow \forall X\ (\Phi(X) \leftrightarrow \Psi(X))$, (*Основной Закон V*)

где $\{X{:}\Phi(X)\}$ – объем понятия (второго порядка) Ф.

Тогда определение числа будет следующим:

Число (F) = $\{X{:}X \approx F\}$

Например:

Число (*несамоидентичного*) = {*несамоидентичному, кругло-квадратному, мужчине-ведьме, …*}

Число(*галилеевых лун Юпитера*) = {*галилеевым* лунам Юпитера, точкам компаса, …}

Г. Фреге определяет «[кардинальное] число» (§ 72): $C(x) =_{df} \exists F\ (x =$ Число $(F))$.

В терминологии Г. Фреге: «число, соответствующее понятию F, есть объём понятия “равночисленно понятию F”» [74, с. 203], или: «числом понятия F называется объем понятия “равночисленно понятию F”, т.е. класс всех понятий, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие с F» [61, с. 52]. В этом определении Г. Фреге отталкивается от такого понимания, что «нечто можно отождествить несмотря на то, что нечто дается различными способами» [74, с. 203]. И далее: «выражение “*n* есть число” равнозначно выражению “Существует понятие такое, что *n* есть соответствующее ему число”» [74, с. 208]. Таким образом, Г. Фреге определяет число как некий абстрактный объект, общее свойство, присущее всем равночисленным классам (число 7 можно определить как объем понятия «чудеса света», «цвета радуги», «дни недели» и т.д.). Так определенное «число» включает кардинальные числа до бесконечности.

Из этого определения (и некоторых предположений относительно объемов) Г. Фреге может доказать принцип Юма

число (F) = число (G) $\leftrightarrow F \approx G$ (*Принцип Юма*)

и определить основные понятия арифметики.

Г. Фреге определяет 0 как число, соответствующее понятию «не равное себе» (§ 74):

Определение 0 = $_{df}$ *Число* $(x \neq x)$

Итак, 0 – это число некоторого понятия F, причем 0 определяется свойством быть не равным самому себе; 0 – такое понятие, объем которого содержит 0 *F's* или не существует ни одного объекта, выполняющего понятия F.

Поясним. Поскольку для Г. Фреге важно не просто определить 0, а определить его аналитически, то в качестве понятия, через которое это определение будет сделано, он выбирает понятие «неравное себе». Под понятие «неравное себе» по логическим основаниям (согласно суждению «$a = a$») не подпадает ни один предмет, оно пустое, так ничто не может удовлетворить критерию «быть неравным самому себе». Г. Фреге, опережая критику, уточняет – можно было бы определить 0 и как деревянное железо, и как круглый квадрат (под эти понятия как раз ничего и не подпадает), и в принципе любое абсурдное понятие, это не будет ошибкой. Но если вспомнить его задачу в установлении аналитического определения числа, то принципиально предпочтительнее понятие «быть неравным самому себе».

Следующий важный шаг – определить понятие *«непосредственного следования за натуральным числом в ряду»:*

«Теперь я хочу объяснить отношение, в котором находятся друг к другу два смежных члена натурального ряда чисел. Предложение:

“Понятие F и подпадающий под него предмет *x* существуют таким способом, что *n* - это число, соответствующее понятию F, и что *m* - это число, соответствующее понятию ‘подпадающий под F, но не равный *x*’”

равнозначно с

“В натуральном ряду чисел *n* следует непосредственно за *m*”» [74, с. 212].

Определение $Pmn =_{df} \exists F \exists x\ (Fx \wedge \text{Число}(F) = n \wedge \text{Число}(Fz \wedge z \neq x) = \mathrm{m})$,

Это является следующим важным шагом в построении системы Г. Фреге: установить следование одного числа непосредственно за другим в натуральном ряду. Здесь мы можем заметить следующее: когда мы говорим о 0, как о том, под понятие чего ничего не подпадает, мы уже создаем понятие, под который подпадает один, и только один объект – а именно понятие, под которое ничего не подпадает. Так мы уже имеем 1, причем 1 как число понятия «быть равным 0» (такой объект у нас уже имеется, и он только один).

Другими словами, под понятие «равно 0, но не равно 0» ничего не подпадает, и это и есть 0, а под понятие «равно 0» уже подпадает один объект (сам 0). Причем число, соответствующее понятию « равно 0» в натуральном ряду чисел следует непосредственно за 0.

Такой принцип является принципом и всего последующего ряда чисел. 2 будет следовать за 1, т. к. для 2 будут существовать уже два понятия – «равно 0, но не равно 0» и «равно 0» и так далее, и так далее. С введением каждого нового понятия мы также будем вводить и объект для последующего понятия. В этом и состоит принцип построения натурального ряда чисел Г. Фреге, удовлетворяющий требованию эффективности порождения числового ряда. Таким образом определяются и следующие числа:

Число 1 – это число некоторого понятия *F*, причем 1 определяется свойством быть равным 0; 1 – такое понятие, объем которого содержит 1 *F’s* или существует некоторый объект *n*, выполняющий понятие *F*, и для всякого другого объекта *m*, выполняющего понятие *F*, будет истинным свойство $m = n$.

Число 2 – это число некоторого понятия *F*, причем 2 определяется свойством быть равным 0 или 1; 2 – такое понятие, объем которого содержит 2

$F's$ или существуют два некоторых объекта n и m,, выполняющие понятие F, $n \neq m$, и для всякого другого объекта p, выполняющего понятие F, будет истинным свойство $p = n$ или $p = m$.

Таким образом можно определить любое число в натуральном ряду чисел, тогда натуральное число можно определить так:

Число n– число понятия F, причем n определяется свойством быть равным 0 или 1, …, или n или n – такое понятие, объем которого содержит точно $nF's$ или существуют n некоторых объектов $m, p, \ldots, n$, выполняющих понятие F, $m \neq p$, $m \neq q, \ldots, p \neq q$ и для всякого (n + 1)-го объекта w, выполняющего понятие F, будет истинным свойство $w = m$или $w = p$, или w = n.

Такая система удовлетворяет основным требованиям натурального ряда чисел: «во-первых, 0 есть число, которое непосредственно не следует ни за каким другим числом; во-вторых, за каждым числом не может следовать оно само; в-третьих, за каждым числом, которое в натуральном ряду следует за 0, непосредственно следует какое-то и только одно число» [68, с. 34].

Кроме того, данная система будет иметь преимущество перед системой, построенной на принципе Юма. Когда мы формализуем аргумент Г. Фреге в логике второго порядка, выражение «число, принадлежащее понятию F» будет классифицироваться как: число x, такое, что Fx. И таким образом, определения 0, 1 и 2 становятся:

0 – это число x такое, что $x \neq x$

1 – это число x такое, что $x = 0$

2 – это число x такое, что $x = 0$ или $x = 1$, и так далее.

При замене «0» его определением во второй строке, мы получим:

1 – это число x такое, что x = число y такое, что $y \neq y$

Таким образом, определение Г. Фреге 1 содержит открытое предложение формы «x – это число Fs» – именно такое предложение принцип Юма неспособен объяснить.

Г. Фреге делает набросок, как доказать версии аксиом $ПА_2$, используя эти определения. Успешность программы Г. Фреге, основанная на основательном и последовательном подходе к задаче была бы неизбежной, если бы не обнаруженное в таком подходе противоречие. Здесь надо сказать, что реконструкция понятия числа и понятий конкретных чисел в действительности последовательна и оправдана. Однако сам подход, система построения, порождает известный парадокс Рассела.

1.2.5 Некоторые варианты логицизма Г. Фреге. Парадокс Рассела

В качестве итога проделанной работы Г. Фреге пишет: «надеюсь, в данном сочинении я сделал правдоподобным то, что арифметические законы являются аналитическими, а, следовательно, априорными суждениями. Сообразно этому, арифметика была бы лишь дальнейшим развитием логики, а каждое арифметическое предложение было бы логическим законом, хотя и производным» [74, с. 221].

Почему *«правдоподобным»?* Действительно, в «Grundlagen» Г. Фреге только набросал свой проект: в нем нет именно специфически логической системы (важнейшее понятие объема осталось необъяснимым), и не проведено доказательств. Г. Фреге развивает свой набросок в «Grundgesetze», который точно определяет логическую систему и дает построчное доказательство: «с бесконечными предосторожностями и скрупулезностью, применяя причудливый геометрический символизм, Г. Фреге определял один основной арифметический термин за другим и, оперируя по ходу дела этими терминами, доказывал основные арифметические теоремы, связывающие эти термины» [75, с. 199-200]. В результате построения этой системы арифметика сводима к логике (второго порядка) и Аксиоме V.

Г. Фреге принимает Аксиому V как закон логики. Однако, Рассел показал, что он приводит к противоречию (остальной логики Г. Фреге)[1]. Дело в том, что в

---

[1]Вводя свою Аксиому V, сам Г. Фреге понимал, что такое введение не будет однозначно и всеми принято, однако именно ему он отдавал особое значение: «разногласия при этом, насколько я вижу, могут возникнуть только относительно моего основного закона (V), который логиками, по-видимому, специально еще не формулировался, хотя он и подразумевается, когда,

построенной Г. Фреге системе объемы можно рассматривать как множества: число *Fs*, таким образом, это множество всех понятий, равночисленных с понятием *F*; 0 будет множеством всех понятий, под которые ничего не подпадает; 1 множеством всех «единично представленных» понятий; 2 множеством всех «дважды представленных» понятий; и так далее и тому подобное. Однако этот шаг оказался катастрофическим. Чтобы доказать в своей формальной системе логики числа, Г. Фреге требуются некоторые аксиомы, которые говорят нам, что нам нужно знать об объемах понятий. И, если логицизм должен быть установлен, эти аксиомы должны быть логическими истинами. Согласно Аксиоме V, можно сказать, что каждое понятие должно иметь объем. Аксиома, согласно которой «объем понятия *F* такой же, что и объем понятия *G*, если каждый *F* является *G* и каждый *G* является *F*», принимаемая Г. Фреге, как показал Рассел, приводит к противоречию, если мы рассмотрим в ее контексте понятие (которое не имеет непосредственного отношения к арифметике, но, коль скоро аксиома, как утверждается, является логической истиной, может быть рассмотрено) множества всех множеств.

Знаменитый парадокс изложен в письме Б. Рассела к Г. Фреге в 1902 году. В нем британский ученый делает реверанс в сторону идей и задумок Г. Фреге, однако описывает «трудность, с которой он столкнулся»: «Пусть *w* есть предикат «быть предикатом, который не приложим к самому себе». Приложим ли предикат *w* к самому себе? Из любого ответа на этот вопрос вытекает его противоположность. Поэтому мы должны заключить, что *w* не есть предикат. Точно так же не существует класса (как целостного образования) тех классов,

---

например, речь заходит об объемах понятий. Я считаю данный закон чисто логическим. Во всяком случае, здесь я обозначил то место, где надлежит принять соответствующее решение» [73, с. 478]. Уже после обнаружения парадокса Г. Фреге писал: «я всегда признавал, что этот закон не обладает такой очевидностью, какую имеют другие законы, – очевидностью, которую, собственно говоря, надо требовать от логического закона. <…> Я бы охотно отказался от этого основоположения, если бы смог найти для него какую-нибудь замену» [74, с. 479].Аксиома V в действительности стала важным открытием Г. Фреге, «явное использование Г. Фреге принципа абстракции позволило ему определить понятие натурального числа. Однако из-за неограниченного применения названного принципа, позволявшего вводить предметы любых уровней абстрактности, система Г. Фреге оказалась противоречивой» [74, с. 8].

которые - как целостные образования - не содержат самих себя» [Б. Рассел. Цит. по: 73, с. 42].

Неформально парадокс можно описать следующим образом. Пусть множество является «обычным», если оно не является своим собственным элементом. Например, множество всех людей является «обычным», так как само множество - не человек. Примером «необычного» множества является множество всех множеств, так как оно само является множеством, а следовательно, само является собственным элементом. Если мы рассмотрим множество, состоящее только из всех «обычных» множеств (т.н. расселовское множество). Является ли это множество «обычным» или нет, то есть содержит ли оно себя в качестве элемента? Если это так, то оно должно включать себя в качестве элемента, так как оно по определению состоит из всех «обычных» множеств. Но тогда оно не может быть «обычным», так как «обычные» множества — это те, которые не включают себя в качестве элемента. Если мы предположим, что это множество «необычное», то и в этом случае мы придем к тупику: оно не может включать себя в качестве элемента, так как оно по определению должно состоять только из «обычных» множеств. Но если оно не включает себя в качестве элемента, то это «обычное» множество. Таким образом, мы получаем противоречие.

Для Г. Фреге письмо с изложенным парадоксом стало фатальным, и в спешно написанном Послесловии он с сожалением констатирует: «вряд ли есть что-нибудь более нежелательное для автора научного произведения, чем обнаружение по завершении его работы, что одна из основ воздвигнутого им здания оказалась пошатнувшейся. В такое положение я попал, получив письмо от господина Бертрана Рассела, когда печатание этого тома близилось к концу» [Г. Фреге. Цит. по: 74, с. 43].

Парадокс Рассела исходит из системы Г. Фреге в силу того, что способ задания понятий у Г. Фреге ничем не ограничен. В действительности, элементы классов никак не специфицированы, они сами могут быть классами любых других элементов: «поскольку на образование классов не накладывается никаких ограничений, каждый из элементов второго класса может быть, в том числе, классом, составленных из элементов первого класса» [69, с. 36]. «Такой подход к образованию классов <…> является крайне важным, поскольку классы, образованные из элементов предыдущего класса, должны принадлежать последующему классу для того, чтобы сохранить бесконечность ряда» [69, с. 36].

Впрочем, именно открытие парадокса сделало известным – хоть и печально известным – Г. Фреге. Последующие исследования в области обоснований арифметики, волной накрывшие величайшие умы XX столетия, непременно начинались или велись вокруг антиномии. Г. Фреге как в воду глядел, когда отвечал Б. Расселу: «во всяком случае Ваше открытие совершенно поразительно и наверняка приведет к большому прогрессу логики, сколь нежелательным оно ни выглядит на первый взгляд». В последующие годы в основаниях математики шли активные и небезуспешные поиски решения проблемы.

Так, пытаясь построить надежный фундамент арифметики, Г. Фреге, сам того не желая, становится поворотной фигурой в истории математики. В действительности, антиномия показала, что в обосновании математики дело не в порядке не с отдельными незначительными несостыковками, а с фундаментальными понятиями. До открытия антиномий вопросами обоснования математики не занимались, судя по всему, вследствие уверенности в прочности математического знания. Однако первая попытка углубиться в основания показали, насколько такая уверенность в незыблемости математики несостоятельна (в частности, парадокс Рассела затрагивал также теорию множеств Дедекинда, который, как и Г. Фреге, был поражен открывшимся парадоксом и на некоторое время прервал публикацию полученных им результатов, понимая, что их основа поколеблена антиномией Рассела).

Таким образом, «философия математики XX века сделала новый шаг вперед: она впервые дошла до понимания того, что математика является незавершенной не только по своему содержанию, но и по обоснованию своих утверждений и методов. Противоречия и парадоксы, которые понимались до этого как случайные казусы, стали рассматриваться теперь как нечто неустранимое из математики, как одно из проявлений ее развития» [55, с. 220].

1.3 Вклад Г. Фреге в философию математики

Логистика не бесплодна: она порождает антиномии

Анри Пуанкаре

Свой вклад в конце жизни Г. Фреге с некоторой надеждой, которой суждено было сбыться многим позже, резюмировал так: «если не все в них золото, то золото там все же есть. Я думаю, придет время, и многое в них будет оценено гораздо выше, чем теперь…». Выдающееся место работ Г. Фреге современниками понято не было. С развитием философии математики по пути логицизма историческое значение вклада Г. Фреге становилось все более очевидным. В 1925 г. в докладе на Математическом съезде Д. Гильберт сказал о Г. Фреге, своем бывшем оппоненте, что последний сделал очень много для обоснования математики. В аннотации к сборнику избранных работ Г. Фреге по вопросам логики и философии математики, изданном в 1952 г. в Оксфорде, говорится, что никто, начиная с Аристотеля, не сделал для развития формальной логики столько, сколько сделал Г. Фреге.

Работая на периферии философии и математики фактически первым, он осознавал, что математики, натолкнувшись на логические выражения, подумают: «*metaphysica sunt, non leguntur*», и равным образом философы, увидев формулы, воскликнут: «*mathematica sunt, non leguntur!*»[1] [91, p. 299], так что не найдет понимания ни у одних, ни у других. Хотя есть и точка зрения, согласно которой открытие Г. Фреге стало не более, чем случайностью: так, к примеру, Хао Ван полагает, что «интерес философов к основаниям математики возник как результат той исторической случайности, что Рассел и Фреге правильно или неправильно связали некоторые области математики с философией» [Хао Ван. Цит. по: 70, с. 91].

[1] Означает, что если человек, не знающий или не понимающий метафизику, увидев относящиеся к ней понятия, проигнорирует написанное, и также с математикой.

Фигура Г. Фреге стала источником глобальной реформы в области философии математики, приведшей к тому, что «XX век был уникальным временем, когда проблема обоснования математики считалась одной из самых приоритетных, и лучшие математические умы потратили немало времени на поиски ее адекватного решения. В результате были получены фундаментальные результаты, имеющие выдающееся философское значение» [61, с. 4], что было бы невозможным без трудов Г. Фреге. Кроме того, последовательная критика психологизма и субъективизма в науке привела к тому, что эти господствующие тенденции отошли на задний план. Программа Б. Рассела, выдвинутая им как попытка решить задачу в логицистическом ключе, но избежать парадокса, также оказалась несостоятельной. Как писал сам Б. Рассел в своей работе «Мое философское развитие» (1959): «восхитительная определенность, которую я всегда надеялся найти в математике, затерялась в путанице понятий и выводов. Это оказался поистине запутанный лабиринт, выхода из которого не было» [34, с. 267]. Изложенная доктрина логицизма была подвергнута критике не только непосредственно противниками логицизма, являющимися сторонниками других программ обоснования математики (в первую очередь это касается интуиционизма), но и определенной ревизии со стороны единомышленников (Л. Витгенштейн задавался вопросом, так ли уж эффективно обоснование математики; по его мнению, в обосновании нуждается нечто недостаточно устойчивое, иначе какой резон этим заниматься и другие).

Как ни парадоксально, вывод Г. Фреге, несмотря на обнаружившуюся противоречивость системы Г. Фреге, был безупречен. А. К. Сухотин дает такую оценку исканиям логицистов: «опыт же исканий логицистов показал, что хотя попытка оправдания математики логикой в некоторых моментах имеет право на применение, но по своим основаниям является недостаточной и вынуждена выходить за пределы собственно логики, апеллируя к философии и беря ее в союзники» [70, с. 86], поэтому последующие исследования в области оснований математики исходила уже совсем из других положений. Однако сформировавшиеся четыре основных программы также не увенчались успехом:

«философские цели трех школ не были достигнуты, и … мы не ближе к полному пониманию математики, чем основатели этих школ. Вопреки этому, нельзя отрицать, что активность этих школ принесла огромное число новых важных открытий, которые углубили наше познание математики и ее отношение к логике. Как часто случается, побочные продукты оказались более важными, чем исходные цели основателей трех школ» [Мостовский. Цит. по: 84, с. 17]. Вместе с тем, интересен тот факт, что, несмотря на безуспешность этих программ, современные исследования в этой области не ищут принципиально новых путей развития, а стараются усовершенствовать уже имеющиеся программы.

Как часто повторяется, «в сфере оснований математики и философии математики логицизм Г. Фреге изучен во всех своих деталях» [51, с. 118]. В действительности, утопичность логицизма Г. Фреге вроде как уже давно известный и всеми признанный факт, так может и правда, обращаться к нему больше не стоит? До середины 1980-х годов в этом месте действительно стояла точка. Несостоятельность попытки Б. Рассела спасти логицизм потерпела неудачу и на этом всё остановилось более чем на 50 лет. Однако в 1983 году появилась книга К.Райта по теории Г. Фреге натуральных чисел [165]. В ней К. Райт дает новую жизнь логицистическому проекту и в настоящее время логицизм Г. Фреге сформировался в новое течение, получившее название неологицизм (или неофрегеанство).

ГЛАВА 2. Неологицизм как программа обоснования математики

2.1 Проект шотландского неологицизма, Теорема Фреге, принципы абстракции и выведение постулатов Пеано-Дедекинда из принципа Юма

Оценка логицизма как несостоятельного проекта философии математики, и даже утверждение о том, что «логицизм мертв», сохранялись в течение нескольких десятилетий. Даже сейчас наблюдается определенная склонность к этому. Исследователь философии математики К. Клемент из Массачусетского университета в Амхерсте, к примеру, приводит следующий факт: «недавно, в 2010, веб-сайт, созданный для популярного логического учебника, утверждал, что “в 1920-е, немецкий математик и логик Курт Гёдель сделал удивительное открытие, открытие, которое обрубило всякие надежды на логицизм”, а именно, открытие того, что “есть истины арифметики, которые в принципе не доказуемы”, и “дедуктивными доказательствами, которые убедили всех” (!), Гедель доказал, что “логицизм ложен”»[1] [129, p. 127]. Сам К. Клемент отмечает, что сам он не в курсе о существовании такого доказательства – и даже попытки такого доказательства со стороны К. Геделя, и, вместе с тем, тенденция к подобного рода утверждениям, все еще сильна. И действительно, сегодня логики соглашаются, что, хотя математика может быть получена из теории множеств, она не может быть получена из одной только чистой логики. Таким образом, было доказано, что захватывающая теория Г. Фреге в итоге оказалась ложной.

Однако тенденция делать такие смелые заявления о смерти логицизма все же идет на спад. Происходит это в основном благодаря попыткам определенных мыслителей реанимировать форму логицизма в последние десятилетия. Самая серьезная попытка, судя по всему, представлена в работах шотландского философа Криспина Райта[2] (*Crispin Wright*) наряду с его соавторами, в первую

---

[1]Имеется в виду сайт *The Many Worlds of Logic* [186].

[2]Криспин Райт (р. 1942) – всемирно известный философ, который стал инициатором возрождения интереса к логицизму Г. Фреге (специализируется в области философии языка и математики, метафизики и эпистемологии). В настоящее время является профессором Нью-

очередь Бобом Хейлом[1] (*Bob Hale*). Оба они обозначают свою позицию как своего рода неофрегеанство (*neo-Fregeanism*). Учитывая противоречивость «Grundgesetze» Г. Фреге, выдвигаемый ими вид логицизма не может быть таким же, как логицизм Г. Фреге «до последней буквы» – даже сам Г. Фреге не поддерживал свой логицизм в конце жизни – но они описывают свою позицию как попытку спасти философию математики Г. Фреге в целом. Они сравнивают детали своей позиции с его, они обсуждают части «загадки», над которой работал Г. Фреге, они поддерживают принципы, которые они приписывают Г. Фреге, и работы Г. Фреге постоянно выступают для них в качестве источника вдохновения. И все же имеются серьезные сомнения, в какой степени выдвигаемая ими позиция в конечном счете действительно может быть понята как форма неофрегеанства (действительно, местами она даже антифрегеанская). Эта тема станет предметом третьей главы данного исследования.

Прежде чем двигаться дальше, необходимо сделать небольшое замечание относительно терминологии. Позиция К. Райта и Б. Хейла, их философский взгляд на математику, в разное время и в разных местах обозначался как как неофрегеанство (*neo-Fregeanism*), неологицизм (*neo-logicism*), шотландская школа, абстракционизм. Вместе с тем, ряд исследователей отделяют неофрегеанство от неологицизма как направления, суть которого состоит в формировании общей концепции соотношения языка и реальности, сами же К. Райт и Б. Хейл считают все эти наименования допустимыми обозначениями их

Йоркского университета, в дополнение к своим обязанностям, он является профессором философских исследований в университете Стирлинга. Он является членом Британской Академии (*the British Academy*), Королевского общества Эдинбурга (*the Royal Society of Edinburgh*), и Американской академии искусств и наук (*the American Academy of Arts and Sciences*). Он преподавал в Колумбийском, Мичиганском, Принстонском университетах, а также в Сент-Эндрюс, где он основал исследовательский центр «Архе» (*Arché*) и в Абердине, где он был директором Северного Института философии. Является автором множества публикаций, которые является широко обсуждаемыми в соответствующих разделах философии.

[1]Боб Хейл (р. 1945) –член Королевского общества Эдинбурга, британский философ, известный за его вклад в развитие неологицизма в сотрудничестве с Райтом, а также работами в области модальности и философии языка. С 2006 года он занимает должность заслуженного профессора философии на кафедре философии в университете Шеффилда. До этого он преподавал в университете Глазго, университете Сент-Эндрюса и в университете Ланкастера, кроме того, был президентом Аристотелевского общества (*Aristotelian Society*) в 2002-2003 гг.

проекта: «неофрегеанство <…> чаще обозначаемое как неологицизм, а иногда – лучше но более громоздко – неофрегеанский логицизм» [161, p. 43]. В русскоязычной традиции пока не сформировался порядок употребления этих терминов, и в данной работе они все будут относиться к философии математики К. Райта и Хейла. Однако отметим, что не все согласны с допустимостью применения всех этих терминов к проекту К. Райта. Так, во введении к «The Arche Papers on the Mathematics of Abstraction», основательной антологии по вопросам о неологицизме К. Райта под редакцией Р. Кука, отмечается, что в этой работе будет использоваться термин «абстракционизм». «Причины этого просты: “неологицизм” вводит в заблуждение, поскольку он, казалось бы, подразумевает, что данная позиция является новой версией логицизма, в то время как, как мы увидим, что это не так. Термин “неофрегеанство”, хотя, возможно, и не вводит людей в заблуждение таким образом, но, по мнению редактора, его лучше приберечь для более общей теории философии языка. <…> Однако при чтении эссе, собранных в этом томе, следует иметь в виду, что эти термины <неологицизм и неофрегеанство – П.О.> (к сожалению) используются по большей части как взаимозаменяемые» [160, p. xvi]. Из процитированного отрывка становится ясно, что такое терминологическое ограничение Р. Кук вводит в силу собственного взгляда относительно неологицизма (что неологицизм нельзя рассматривать как новую версию логицизма), а также то, что большинство авторов действительно используют эти термины как равнозначные. И в данной работе мы будем придерживаться такой же позиции: неологицизм, неофрегеанство и абстракционизм следует читать как обозначающие одно и тоже.

Делая набросок проекта неологицизма К. Райта и Б. Хейла, а также основных трудностей, с которыми он сталкивается, нужно отметить, что в последние годы были и другие, иногда очень отличные от неологицизма попытки других ученых оправдать некоторую форму логицизма (см. Дж. Босток [97], Н. Коккиарела [102], Дж. Ландини [133], Дж. Шер [155], Х. Ходес [127], Б. Лински и Э. Залта [134] и др.), которые уделяют большее внимание работам Б. Рассела. Точка зрения, называемая «неологицизм», получила довольно много внимания в последнее время. Есть фактически несколько различных позиций, которые можно назвать неологицизмом. В рамках данного исследования не будет дана ни оценка самих этих подходов, ни того, составляют ли они достойную конкуренцию неологицизму К. Райта и Б. Хейла.

Суть программы К. Райта заключается в «*Теореме Фреге*» (*Frege's Theorem*), согласно которой аксиомы второго порядка Пеано можно вывести в логике второго порядка из того, что известно как «*Принцип Юма*» (*Hume's Principle,* сокращенно HP)[1]. Неологицисты заявляют, что принцип Юма, даже если и не является в строгом смысле логической истиной, вводит понятие «кардинальное число», и имеет в силу этого такой же эпистемологический статус, как и статус логической истины – часто говорят, что он «квази-логический» – и, что, следовательно, общий дух логицизма может быть сохранен.

Принцип Юма заключается в следующем:

Число *Fs* идентично числу *Gs* если и только если между *Fs* и *Gs* имеется взаимно-однозначное соответствие (биективное отношение).

Б. Хейл и К. Райт обобщают свою программу таким образом: «существуют два основных утверждения <...> которые должны быть действительными, если главный тезис неофрегеанства может быть удовлетворительно принят. Логическое утверждение в том, что результат присоединения принцип Юма к логике второго порядка – последовательная система, которой достаточно в качестве основания арифметики в том смысле, что все фундаментальные законы арифметики выводятся из него как теоремы. Философское утверждение заключается в том, что если это так, то это является подтверждением логицизма, обоснованным пониманием тезиса,<…> что формальная часть логического утверждения может быть установлена» [121, p. 4-5].

[1]Принцип называется *Принципом Юма* с подачи Дж. Булоса (он вводит это название в работе «Согласованность Основоположений арифметики Г. Фреге» в [95]). Дж. Булос называет его именно так, вспоминая замечание Д. Юма в его Трактате) и соответствующие цитаты в «Grundlagen» (§ 63) Г. Фреге: «когда два числа составлены таким образом, что каждая единица в одном из них всегда отвечает каждой единице в другом, мы признаем их равными» [74, с. 198]. В работе Райта [165] этот принцип сначала обозначается как $N^{=}$.

Вместе с тем, К. Райт, как правило, резко останавливается перед тем, чтобы сказать (вторя основной идее Г. Фреге), что арифметические истины являются истинами логическими или что арифметика – это просто часть логики; он предпочитает говорить о том, что может (и должно) быть показано, что арифметика истинна аналитически, и, следовательно, имеет эпистемологический и метафизический статус, подобный тому, что предоставил ей Г. Фреге. Арифметические истины выведены из аксиом логики второго порядка, дополненной определенными дополнительными принципами, которые сами по себе являются аналитическими истинами или имеют эпистемологический и метафизический статус *определений* (*definitions*). Эти дополнительные принципы парадигматически принимают форму *принципов абстракции* (*abstraction principles*).

Формальной частью шотландского неологицизма является развитие разделов математики из принципов абстракции следующей формы:

(ABS) $\forall a \forall b\ (\Sigma(a) = \Sigma\ (b) \equiv E(a, b))$,

где a и b – переменные одного и того же типа, как правило, либо отдельные объекты, либо понятия; Σ – оператор, обозначающий функцию от свойств (или отношений) к отдельным объектам; и E является отношением эквивалентности объектов, относящихся к данному типу. Принципы абстракции предназначены, в некотором смысле, для того, чтобы быть имплицитными определениями оператора абстракции Σ. Особенности и границы применения принципов абстракции активно обсуждаются в современной литературе (см., например, работу К. Файна [113], в которой он показывает изобилие деталей математических возможностей и ограничений программы, построенной таким образом, а также значительное философское обсуждение ее достоинств) и мы обратимся к этому вопросу ниже.

Каноническим примером такого принципа абстракции является принцип Юма, принцип, который играет центральную роль в неофрегеанской теории чисел и который сделал очень многое, чтобы вдохновить обсуждаемый здесь вид неологицизма.

Общая идея принципов абстракции заключается в том, что они позволяют нам вводить новые термины (и, таким образом, предположительно, получить привилегированный эпистемологический доступ к соответствующим объектам) путем определения условий идентичности для референтов новых терминов с использованием лингвистических ресурсов, которые уже поняты (т. е. те ресурсы, которые встречаются в отношении эквивалентности «*E*(,)». В большинстве случаев «*E*(,)» – это либо чисто логическая формула, либо формула, состоящая из логики плюс ранее введенные операторы абстракции). Таким образом, принцип абстракции представляет из себя имплицитное определение классов, обеспечивая некоторую позицию относительно значения новых терминов в форме «$\Sigma(a)$».

Первое действительно заслуживающее внимания появление принципа абстракции появляется именно у Г. Фреге при попытке логической реконструкции арифметики (и, по сути, всей математики). В «Grundlagen» Г. Фреге обсуждает три наиболее ярких примера принципов абстракции: принцип эквивалентности направлений, принцип Юма и его Аксиому V. Г. Фреге указывает на то, что стандартное аксиомы арифметики Пеано следуют из принципа абстракции, известного теперь как принцип Юма (эксплицитная деривации аксиом Пеано из принципа Юма «экстраполирована» из комментариев Г. Фреге в работах К. Райта [165], Дж. Булоса [95], Р. Хека [126] и др.): с его помощью мы можем сформулировать довольно естественные определения арифметических понятий, таких как «натуральное число», «предшествующее число» и другие. Согласно принципу Юма, два понятия *F, G* являются *равночисленными* (*equinumerous*), если существует взаимно-однозначное соответствие между объектами, подпадающими под *F* и объектами, подпадающими под *G*. Если взять пример самого Г. Фреге, то на правильно накрытом столе, например, тарелки равночисленны салфеткам, а также стаканам. Г. Фреге показал, как определить равночисленность средствами того, что сейчас известно как логика второго порядка, и без явной пресуппозиции натуральных чисел. Равночисленность является отношением эквивалентности понятий. Принцип Юма, указывающий на более или менее очевидную связь между кардинальными числами и отношением равночисленности был обозначен

К. Райтом как $N^{=}$, но впоследствии он был назван принципом Юма с подачи Дж. Булоса. Тот факт, что с помощью определений основных арифметических понятий на базе принципа Юма можно вывести аксиомы арифметики Пеано второго порядка, весьма примечателен как математическая теорема, независимая от какой-либо философской мотивации, и результат получил название Теорема Фреге. Как было указано, Г. Фреге был не удовлетворен принципом Юма как основанием арифметики или как определением (кардинального) числа и сформулировал второй принцип абстракции, который сопоставил каждое понятие с уникальным объектом – его объемом. В отличие от принципа Юма, Аксиома V Г. Фреге, в символах:

$$(\forall \mathrm{F})(\forall \mathrm{G})(\mathrm{EXT}(\mathrm{F}) = \mathrm{EXT}(\mathrm{G}) \leftrightarrow (\forall \mathrm{x})(\mathrm{Fx}) \leftrightarrow \mathrm{Gx}))$$

содержит только логическую лексику (если разговор об объемах понятий входит в рамки логики). Г. Фреге дает эксплицитные определения отдельных чисел с точки зрения экстенсиональности: число *F* определяется как объем понятия, «равночисленного *F*». Согласно этому ключевому принципу Г. Фреге, для любых понятий *F*, *G*, объем понятия *F* идентичен объему понятия *G*, если и только если для каждого объекта *a*, *Fa*, если и только если *Ga*. Аксиома V была, по сути, ранней попыткой сформулировать основы того, что мы теперь называем теорией множеств. С ее помощью Г. Фреге установил арифметику Пеано на том, что казалось чисто логическим основанием. Г. Фреге дал определение натурального числа и смог доказать в построенной системе принцип Юма (который в таком случае становится теоремой логики Г. Фреге, а не примитивным нелогическим определением кардинального числа) и, таким образом, доказать аксиомы Пеано второго порядка для арифметики. Поэтому, если Аксиома V была бы, как надеялся Г. Фреге, логической истиной, то задача логицизма (по крайней мере, в отношении арифметики) была бы выполнена. Однако, как уже указывалось в первой главе, Б. Рассел показал, что Аксиома V, которая обеспечивала возможность вывода арифметики из логики, также, допускала вывод противоречия. Хотя фактическое представление Б. Рассела о парадоксе, который теперь носит его имя, немного запутано в первоначальном послании, вывод противоречия из Аксиомы V хорошо известен. Сам Г. Фреге попытался решить эту проблему, но не смог найти убедительную замену Аксиоме V. Б. Рассел, тем временем, вместе с А. Уайтхедом, предпринял свою собственную реконструкцию математики из основных, априорных принципов в монументальной «Principia Mathematica». Хотя «Principia» была (вероятно) согласованной, в долгосрочной перспективе она оказалась не более убедительной, чем «Grundgesetze» Г. Фреге.

После неудачной попытки Г. Фреге использования принципов абстракции в рамках выполнения программы логицизма, интерес к такой методологии не появлялся на протяжении трех четвертей века и возродился в работах К. Райта, который тематизировал отвергнутый самим Г. Фреге принцип Юма. Прежде чем мы приступим к его обсуждению, рассмотрим еще один принцип абстракции, *New V*. В «Еще раз об итерации» [92] Дж. Булос сравнил итерационную и ограниченную по размеру концепции множеств. Первая предлагает решить проблему, поставленную парадоксом Рассела, утверждая, что множества должны быть сформированы как некоторый бесконечный поэтапный процессе, в то время как вторая избегает парадоксов, утверждая, что только совокупности, которые (в некотором смысле) не слишком «большие», определяют множества. Один из вариантов концепции ограничения размера (предлагаемый Дж. Булосом) может быть сформулирован путем определения «X слишком большой» как «существует биекция между X и всей областью». Дж. Булос сформулировал абстракционистскую версию концепции ограничения размера множества. Пусть «*Big(P)*» обозначает формулу второго порядка, утверждающую, что существует функция от P ко всей области. Тогда принцип абстракции Дж. Булоса для экстенсионалов, называемый New V, таков:

New V: $(\forall P)(\forall Q)(EXT(P) = EXT(Q) \leftrightarrow ((\forall x)(Px \leftrightarrow Qx) \vee (Big(P) \wedge Big(Q))))$

New V предоставляет отдельный объект (экстенсионал или, более свободно, множество) для каждой совокупности объектов при условии, что она меньше, чем вся область – понятия, которые содержат столько объектов, сколько есть в области, однако, получают один и тот же абстрактный «плохой» объект (мы обратимся к нему ниже в разделе 2.3.1). С учетом New V, мы можем определить множество как экстенсионал не-большого объекта. Также, определяется, что один объект является членом другого объекта, если, и только если второй объект является экстенсионалом понятия, который содержит первый объект. Учитывая эти определения, из New V можно вывести многие из стандартных теоретико-множественных аксиом – аксиомы экстенсиональности, пустого множества, пары, выбора (аксиома объединения не следует в силу того, что объединение одноэлементного объекта «*bad*» не является множеством, однако, предлагается переформулированная версия аксиомы – см. [123], в ограниченном виде выводится и аксиома регулярности). Таким образом, единственными аксиомами, которые невозможно вывести, являются аксиома булеана и аксиома бесконечности. Несмотря на то, что New V не позволяет нам реконструировать всю стандартную теорию множеств Цермело-Френкеля, была проделана работа по изучению других абстракционистских маршрутов к теории множеств (например, Р. Кук в «И еще раз об итерации» (статья 2004 года, перепечатана на с. 421–454 в [160] предлагает принцип абстракции Newer V, из которого можно вывести все аксиомы, кроме аксиомы бесконечности и аксиомы замены. См. также работы Б. Хейла «Абстракция и теории множеств» [117] и С. Шапиро «Пролегомены к любой будущей неологицистской теории множеств» [150]). В New V Дж. Булоса была сформулирована популярная идея, лежащая в основе попыток обеспечить основу для теории множеств (и, следовательно, для всей математики) – ограничение концепции размера множества. Несмотря на то, что с помощью этого принципа абстракции не получается вывести столь сильную теорию множеств, как теория множеств Цермело-Френкеля, она имеет большое значение не только для сторонников абстракционизма, но для исследователей в области поисков основания теории множеств (так, Р. Кук приходит к такому выводу: «SOAP <(органиченный по размеру принцип ординалов (*Size-Restricted Ordinal Abstraction Principle*)) – П.О.> +Newer V + New V + InfNonSets <Существует бесконечно много элементов – П.О.> предоставляет неологицизму теорию множеств, которая (грубо говоря) так сильна, как полная второпорядковая ZFC.

Как уже отмечалось, необходима детальная философская защита приемлемости этих принципов. Тем не менее, математическая задача – определить, существует ли математически адекватная неологицистская теория множествкажется, решена» [160, p. 451]). Таким образом, обращение к принципам абстракции в философии математики широко распространено: принципы абстракции разрабатываются для различных целей в различных проектах. Интерес к данной методологии был инициирован работой К. Райта в данном направлении.

Анализируя логицизм, К. Райт отметил, что проект Г. Фреге состоял из четырех основных этапов:

(1) признать Аксиому V аксиомой логики;

(2) сформулировать соответствующие определения понятий чисел в терминах объема, предусмотренных Аксиомой V;

(3) вывести принцип Юма;

(4) вывести арифметику из принципа Юма (т. е. осуществить Теорему Фреге).

Новый проект, предлагаемый К. Райтом, имеет несколько видоизмененный план, включающий следующие этапы:

(1) установить принцип Юма как имплицитное определение кардинального числа;

(2) вывести арифметику из принципа Юма (т. е. осуществить Теорему Фреге).

Пристальный взгляд на структуру доказательства Г. Фреге показывает кое-что интересное: хотя Г. Фреге отказывается от принципа Юма в качестве определения чисел, он не отказывается от него полностью. Он продолжает отводить ему центральную роль в своей философии. По мнению некоторых исследователей (например, Р. Хека [125]), Г. Фреге недостаточно ясно указывает свои претензии относительно принципа Юма, вместе с тем, как видится, он считает принцип Юма не ошибочным, но скорее неполным. Понятие числа согласно Г. Фреге, действительно, тесно связано с понятием взаимно-однозначного соотношения; любое приемлемое определение числа должно быть совместимо с принципом Юма; он должен незамедлительно «всплыть на поверхность». И, действительно, первое, что Г. Фреге доказывает, когда дает эксплицитное определение числа, это то, что принцип Юма вытекает из него (§ 73). В 1965 в своей статье «Теория числа Г. Фреге» [143] Ч. Парсонс отмечает, что, как только Г. Фреге доказал принцип Юма, эксплицитное определение «тихо исчезает из поля зрения» – и с ним также исчезают все дальнейшие отсылки к объемам в доказательстве Г. Фреге. То есть, доказательство протекает в два совершенно отдельных этапа: во-первых, есть доказательство принципа Юма из Аксиомы V и определение чисел в терминах объемов; во-вторых, есть доказательство аксиом арифметики из принципа Юма в чистой логике второго порядка. Однако наблюдение Ч. Парсонса не вызвало большого ажиотажа, поскольку никакого особого интереса к принципу Юма не было бы, если бы он не соответствовал логике второго порядка, а Ч. Парсонс не поднял вопрос о том, так ли это. Однако почти двадцать лет спустя К. Райт вновь обратил внимание на наблюдение Ч. Парсонса и детально показал, как аксиомы арифметики могут быть получены из принципа Юма в логике второго порядка. Он также показал, что попытка воспроизвести парадокс Рассела в новой системе терпит неудачу, и он предположил, что новая теория на самом деле является согласованной. К. Райт разрабатывает теорию второго порядка, чьей единственной «нелогической» аксиомой является принцип Юма и называет эту систему арифметикой Г. Фреге.

Шотландский неологицизм предлагает обойти теорию экстенсиональности и использовать сам принцип Юма в качестве основы для элементарной арифметики. Идея заключается в том, что правая сторона двусторонней условной зависимости принципа Юма задает условия истинности левой стороны двусторонней условной зависимости, и левая сторона имеет грамматическую и логическую форму. В частности, выражения вроде «число *Fs*» являются подлинными сингулярными терминами, лингвистической формой, используемой для обозначения объектов. По крайней мере, некоторые примеры правой стороны принципа Юма истинны исключительно в силу логических оснований. Например, логически истинно, что понятие «не быть тождественным самому себе» равночисленно с понятием «не быть тождественным самому себе». Таким образом, исходя из принципа Юма, мы заключаем, что число несамотождественных вещей идентично числу несамотождественных вещей. Обозначим «число несамотождественных вещей» как «0», и тогда мы заключаем, что 0 = 0, и таким образом, 0 существует. Следуя Г. Фреге, неологицизм затем определяет число 1 как число понятия «тождественно нулю», число 2 как число понятия «или тождественно 0, или тождественно 1», и так далее. Из принципа Юма следует, что все эти натуральные числа существуют и отличаются друг от друга.

Никто не сомневается, что Теорема Фреге является существенным математическим достижением, которая показывает, как структура натурального числа вытекает из основного принципа о численности. Философское же значение этого вызывает определенную дискуссию. Что Теорема Фреге говорит нам о числе, и вообще о математике в целом? К. Райт и Б. Хейл не защищают ни традиционный тезис логицизма о том, что арифметические истины – это разновидность логических истин, ни то, что каждая арифметическая истина является истиной по определению. Вместо этого они утверждают, что принцип Юма является «аналитикой» понятия натурального числа. Притязания неологицистов, таким образом, в том, что мы можем объяснить необходимость, по крайней мере, основных арифметических истин и то, как эти истины могут быть известны априори. В более поздней работе, К. Райт писал: «Теорема Фреге <…> гарантирует, то, что фундаментальные законы арифметики могут быть получены в системе логики второго порядка, дополненной принципом, роль которого заключается в том, чтобы объяснить, если не точно определить, общее понятие кардинального числа, и что это объяснение протекает в терминах, понятия которых можно определить в терминах логики второго порядка. Если такой объяснительный принцип <…> можно рассматривать как аналитический, то его должно быть достаточно <…> для того, чтобы продемонстрировать аналитичность арифметики. Даже если этот термин находит затруднения <…> останется то, что принцип Юма – как и любой принцип, имплицитно определяющий некоторое понятие – будет допустим без существенных эпистемологических предпосылок <…>. Так, мы получаем один очевидно априорный путь в признании истины <…> фундаментальных законов арифметики. И если с дополнением принципом Юма он может рассматриваться как полное (завершенное, исчерпывающее) объяснение, показывающее, как понятие кардинального числа может быть полностью основано на чисто логическом основании, тогда арифметика будет вытекать из принципа Юма <…>. Так, это будет априорный путь от логики второго порядка к полному пониманию фундаментальных законов арифметики и их истинности. Такой эпистемологический маршрут <…> был бы результатом, который по-прежнему все-таки стоит описывать как логицизм...» [167, р. 210-211].

По словам А. Коффы [103], одним из основных пунктов повестки дня философии на протяжении XIX века была необходимость связи математики и логики без отсылки на интуицию И. Канта. А. Коффа утверждает, что наиболее успешная линия в этом вопросе была тем, что он назвал семантической традицией, проходящей через работы Б. Больцано, Г. Фреге, Б. Рассела, Л. Витгенштейна, Д. Гильберта, и завершенной М. Шликом и Р. Карнапом в Венском кружке. Ключевая идея заключается в том, что необходимость математики и логики лежит в языке, в том смысле, что априорное знание – это знание использования языка. Семантическая традиция, таким образом, обуславливает направление эпистемологии математики и логики: мы знаем математику до той степени, до которой мы знаем свой язык. На сегодняшний день существует ряд различных программ в философии математики, шотландский неологицизм является среди них наиболее близким по духу семантической традиции.

Как и Г. Фреге, неологицисты должны предоставить вывод постулатов Пеано-Дедекинда из своей системы: «получение постулатов Пеано из принципа Юма, пожалуй, наиболее важная проблема для оценки абстракционистского неологицизма» [130, р. 132], и стоит коротко остановиться на том, каков полученный результат в этом направлении.

Главная идея неологицистов заключается в том, чтобы с помощью принципа Юма, утверждения, что два понятия, *F* и *G*, являются равночисленными (в символах, «$\#F = \#G$»), если и только если существует взаимно-однозначное соответствие между ними (т.е. «$F \approx G$»). Или формально:

$$\forall F \forall G\ (\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G).$$

Используя принцип Юма вместе с логикой второй порядка, возможно реконструировать арифметику по пути логицизма. Решающее значение имеет то, что принцип Юма может быть выражен в логике второго порядка таким образом, что единственным дополнением будет числовой оператор, оператор числа «#». Развернутая формулировка принципа Юма будет такой:

$$\begin{aligned}\forall F \forall G\ [\#F = \#G \leftrightarrow \exists R\ [&\forall x \forall y \forall z (Rxy \& Rxz \rightarrow y = z)\ \& \\ &\forall x \forall y \forall z (Rxz \& Ryz \rightarrow x = y)\ \& \\ &\forall x (Fx \rightarrow \exists y\ (Gy \& Rxy))\ \& \\ &\forall y (Gy \rightarrow \exists x\ (Fx \& Rxy))]].\end{aligned}$$

Таким образом, принцип Юма не является таким спорным, как это может показаться на первый взгляд, по крайней мере для того, кто рассматривает логику второго порядка как логику. Дж. Булос [4] показывает, как арифметика может быть выведена из логики второго порядка с помощью принципа Юма как единственной нелогической аксиомы. Рассмотрим следующие определения и теоремы (где «#» - оператор числа, а «[ ]» означает понятие).

Определение 1. $0 = \#[x : x \neq x]$ (т.е., 0 – это число понятия, которое несамотождественно).

Из этого естественного определения мы можем легко вывести, что число понятия F – 0, если и только если нет ни одного объекта, подпадающего под это понятие:

Теорема 1. $\#F = 0 \leftrightarrow \forall x\ \neg Fx$

Поскольку $0 = \#[x : x \neq x]$ (по определению 1), из принципа Юма следует, что $\#F = 0$ если и только если $F \approx [x : x \neq x]$. Учитывая, что $\forall x\ \neg x \neq x$, $F \approx [x : x \neq x]$ если $\forall x\ \neg Fx$.

Как только определен 0, мы можем определить 1 следующим образом:

Определение 2. $1 = \#[x : x = 0]$. (т.е., 1 – это число понятия, идентичного числу 0)

Мы получаем следующую теорему:

Теорема 2. $0 \neq 1$

Поскольку $1 = \#[x : x = 0]$ (по определению 2), 0 это единственный объект, подпадающий под понятие 1. Учитывая то, что имеется ровно один объект, подпадающий под понятие 1, и ни один объект не подпадает под понятие 0, эти два понятия не находятся во взаимно-однозначном соответствии. Из принципа Юма следует, что их числа, 1 и 0, не идентичны.

Как только доказано, что 0 и 1 это различные числа, мы можем определить 2 следующим образом:

Определение 3.

$2 = \#[x : x = 0 \vee x = 1]$ (т.е., 2 – это число понятия, идентичного с 0 или 1).

Мы можем получить определения и теоремы для остальных чисел аналогичным путем. Более того, также возможно определить «сложение»:

Определение 4. Пусть $\#F = m$ и $\#G = n$, и предположим, что $\neg\exists x\ (Fx \wedge Gx)$. В таком случае, $m + n = \#\ [x: Fx \vee Gx]$. (Другими словами, если число Fs – m, а число Gs – n, и нет объектов, подпадающих и под понятияе F, и под понятие G, тогда $m + n$ это число Fs или Gs).

Используя данное определение, может быть установлено основное о понятии суммы. Также может быть определено умножение (и все натуральные числа). Фактически, все остальное в арифметике может быть выведено на основании принципа Юма и логики. Таким образом, мы получаем то, что называется «Теоремой Г. Фреге»:

Теорема 3 (Теорема Фреге): Для вывода арифметики второго порядка достаточно логики второго порядка и принципа Юма как единственной добавленной аксиомы.

Таким образом, результатом Теоремы Фреге является формулирование по крайней мере слабой версии логицизма в соответствии с линией самого Г. Фреге.

Другими словами, нет необходимости принимать противоречивую Аксиому V: решающую работу совершает принцип Юма (и логика второго порядка).

Постулаты Пеано могут быть сформулированы с использованием понятия нуля, отношения последовательности и понятия натурального числа. Они могут быть определены с помощью функтора #( ), введенного принципом Юма следующим образом:

$0 =_{df} \# (\lambda x\ (x \neq x))$

$Sxy =_{df} \exists F \exists z[Fz \wedge y = \# (F) \wedge x = \#(\lambda w\ (Fw \wedge w \neq z))]$

$Nx =_{df} \forall F\ [F(0) \wedge \forall y \forall z(Fy \wedge Syz \rightarrow Fz) \rightarrow Fx]$

Тогда Постулаты Пеано:

1. $N(0)$

2. $\forall x\ [Nx \rightarrow \exists y \forall z(Nz \wedge Pxz \leftrightarrow y = z)]$

3. $\forall x\ \neg S(x,0)$

4. $\forall x \forall y \forall z(Syx \wedge Syz \rightarrow y = z)$

5. $\forall F\ [F(0) \wedge \forall y \forall z(Fy \wedge Syz \rightarrow Fz) \rightarrow \forall x(Nx \rightarrow Fx)]]$

Наиболее сложно получить второй постулат, который гласит, что за каждым натуральным числом всегда следует натуральное число, и только одно. Единственность установить не трудно, чего нельзя сказать о существовании. Требуется показать, что для каждого натурального числа N существует такое понятие, которое создает из n множество вещей, плюс еще одна. С помощью принципа Юма эта задача осуществляется следующим образом: определение нуля «создает» число понятия, большее чем нуль, а именно понятие «быть идентичным нулю». При этом устанавливается существование одного. Как только «один» «лежит на столе», мы можем использовать его, чтобы установить существование двух, так как понятие «быть натуральным числом меньшим или равным одному» создает две вещи. Понятие «натуральное число, меньшее или равное двум» является тем, что создает три вещи, и так далее. Это свидетельствует о силе принципа Юма: с помощью него можно установить существование бесконечного множества чисел, что конечно необходимо, поскольку постулаты Пеано не могут быть выполнены на конечной области. Числовой ряд, сформированный с помощью принципа Юма, таким образом, является «самопорождающимся» (т.е. удовлетворяющим требованию эффективности порождения числового ряда); одно понятие, гарантированное логикой как созданное из ничего, может использоваться принципом Юма для того чтобы установить существование одного числа. Когда оно у нас появится, мы можем создать другое, и так далее, *ad infinitum*.

Учитывая дедуктивную силу принципа Юма, К. Райт должен предоставить нам объяснение для утверждения, что принцип Юма можно рассматривать как аналитическую истину, как имеющий, грубо говоря, эпистемологический и метафизический статус определения (к этому вопросу мы обратимся в Главе 3). Это не стандартный вид определения; оно не позволяет нам исключить знак «#( )» из всех тех контекстов, в которых оно появляется. Тем не менее, К. Райт считает, что принцип Юма является аналитическим следствием понятия числа, что он, в сущности, объясняет то, что мы подразумеваем, когда мы говорим о числе, и, что всем, кто правильно понимает формулу логики второго порядка на правой ее стороне и находится в состоянии признать некоторый пример в силу данного принципа как истинный или ложный, в состоянии осознать существование одного или (в случае ложного примера) двух чисел. Заимствуя метафору из Г. Фреге, К. Райт описывает пример с левой стороны как новый взгляд на содержание соответствующего примера справа.

Таким образом, мы можем ввести такие термины, как сформированные с «#( )», и при условии, что мы способны фиксировать истинностные условия утверждений, в которых они появляются, и фиксировать условия их идентичности – мы можем сделать это стипулятивно – и можем распознать самостоятельность получения этого условия, этого достаточно, чтобы гарантировать, что эти термины обозначают. Принцип Юма фиксирует условия идентичности чисел в терминах уже понятой логической лексики, и тем самым фиксирует истинностные условия арифметических высказываний, в которых высказывания о числах появляются.

Согласно неофрегеанскому логицизму, логицизм Г. Фреге был правильным во всех основных отношениях, кроме недооценки значения принципа Юма и дальнейшей его замены на Аксиому V. Так, неологицисты следуют по стопам Г. Фреге в еще одном направлении, в утверждении чисел как объектов (схожим образом называется первая и основная работа К. Райта – «Концепция Г. Фреге о числах как объектах» [165]): «неологицизм шотландской школы <...> направлен на то, чтобы объяснить знания арифметики и, возможно, всей классической математики путем апелляции к тому, что называется принципом контекстуальности, установленных основных принципов – так называемых принципов абстракции – и стандартной логики второго порядка. С помощью этой Троицы они направлены на то, чтобы устранить хорошо известную дилемму П. Бенасеррафа о математических знаниях, предлагая платонистический маршрут к математическому знанию» [110, p. 34].

Грубо говоря, функция принципа контекстуальности в том, чтобы гарантировать, что математические сингулярные термины действительно отсылают к абстрактным объектам. Цель теории принципов абстракции, во-первых, в том, чтобы ввести математические сингулярные термины, а во-вторых, предложить «эпистемически сговорчивый» путь, как некто может прийти к знанию основных математических принципов; логика второго порядка принята в целях создания теорем математики. Базовый подход шотландской школы касается конкретных принципов абстракции – в случае арифметики принципа Юма – и оценивает, квалифицируются ли эти принципы абстракции как «эпистемически сговорчивые» принципы, которые могут привести к знанию арифметики. В целях расширения математических знаний для других частей математики, скажем, анализа или теории множеств, аналогичное исследование должно проводиться в отношении других принципов абстракции, которые вводят понятие действительного числа или множества. Напомним, принцип Юма может быть сформулированы следующим образом:

$$\forall F \forall G (Nx{:}Fx = Nx{:}Gx \equiv F \approx G)$$

где «Nx:Fx» означает «(кардинальное) число $F's$» и «≈» выражает взаимно-однозначное соответствие. Таким образом, принцип утверждает, что кардинальное число, принадлежащее понятию F идентично кардинальному числу, принадлежащему понятию G, если и только если существует взаимно-однозначное соответствие между объектами, подпадающими под F и объектами, подпадающими под G. Этот принцип абстракции может быть выдвинут в качестве имплицитного определения, который вводит новое выражение: «Nx :x». Вопрос в том, как мы можем прийти к знанию содержания правой стороны. В связи с решением этого вопроса, неофрегеанцы и считают себя *неологицистами*, ибо их утверждение заключается в том, что это вопрос именно логики. Неофрегеанцы утверждает, что для того, чтобы увидеть это, нужно просто отметить то, что такой пример, как понятие «быть не самотождественнным» может тривиально быть помещен во взаимно-однозначное соответствие с самим собой и это является логической истиной,

Истинности этого примера правой стороны принципа Юма хватает – если предположить, что принцип Юма – это истина – чтобы вывести истинное утверждение идентичности утверждений о числах на левой стороне. Формально это может быть выражено следующим образом:

Шаг 1

$(Nx{:}x\neq x= Nx : x\neq x) \equiv (x\neq x) \approx (x\neq x)$

Правая часть этого утверждения является логической истиной. Предполагая истинность принципа Юма, мы можем отделить правую сторону и вывести:

Шаг 2

$(Nx : x\neq x= Nx : x\neq x)$

Предполагая, что числовые термины являются сингулярными терминами, мы можем, применяя принцип контекстуальности, логически вывести утверждение, что существует объект, к которому сингулярный термин относится. Мы можем, таким образом, экзистенциально определить количество в этой формуле:

Шаг 3

$\exists y\ (y = Nx : x \neq x)$

Кроме того, имея формальный результат, что второпорядковая версия аксиом арифметики Пеано-Дедекинда может быть выведена в логике второго порядка из принципа Юма, неофрегеанцы могут с полным основанием утверждать, что знание логики приводит через стипуляцию принципа Юма, к знаниям о числах как объектах и к знанию арифметики. Поскольку сторонник шотландской школы рассматривает знание арифметики как априорное, он также охватывает дополнительные утверждения, что основные математические принципы могут быть известны априори и это рассуждение в логике второго порядка сохраняет эпистемологический статус априорного познания принципа абстракции.

Согласно шотландской школе, некоторые, но не все, принципы абстракции имеют статус устанавливающих значение (*meaning-constitutive*). Они утверждают, что эта роль наделяет Принцип эпистемическим аспектом. Тем не менее, неофрегеанцы не считают принципы абстракции имеющими этот особый эпистемологический статус, а также не настаивают, что они являются логическими принципами, но лишь говорят о том, что они аналитически истинные, поскольку они являются устанавливающими значение. В этом отношении они отходят от логицизма Г. Фреге, который, по крайней мере, на начальном этапе, рассматривал свою злополучную Аксиому V – которая могла бы быть истолкована как принцип абстракции в неофрегеанской программе – как логическую.

Тем не менее, логика действительно играет важную эпистемологическую роль в шотландской школе. Поскольку это знание логики, которое необходимо для обоснованного вывода правой стороны принципа Юма, неофрегеанцы считают, что логического знания плюс знания определенных принципов абстракции достаточно для математического знания. «Шотландская школа находится прямо в соответствии с этим эпистемологическим фундаменталистским проектом Г. Фреге. Цель состоит в том, чтобы выбрать несколько принципов (которые, однако, не рассматриваются чисто логическими) и затем объяснить, каким образом <некто> может, путем схватывания этих принципа прийти к знанию математики. Полученная теория объясняет (в случае, если она работает), как математическое знание может вытекать из основных принципов и знания логики второго порядка. Кроме того, объекты этих принципов якобы считаются существующими, и существующими независимо от разума. Математика и логика рассматриваются объективными и не просто игрой или фантастикой: полученные утверждения являются категорическими утверждениями, включающими отчетливую онтологию. Таким образом, мы думаем, шотландская школа аккуратно вписывается в общую методологию и цели проекта логицизма Г. Фреге и должна быть обозначена как неологицизм» [110, p. 54].

2.2. Стипулятивный характер принципа Юма

В неофрегеанском логицизме при построении их философии математики предлагается использование стипулятивных определений (*stipulative definition*). Сделаем небольшое пояснение по поводу этого вида определений. В силу того, что в русскоязычной литературе данный вид определений не встречается, мы будем использовать кальку с английского языка. В англоязычной литературе некоторые источники приравнивают данный вид определений с номинальными или же контекстуальными определениями, другие же источники разделяют их. Поэтому мы во избежание путаницы не станем отождествлять номинальные или контекстуальные и стипулятивные определения. Согласно определению, стипулятивные определения – это определения, в которых новым или существующим терминам дается специфическое значение в целях аргументации или дискуссии в данном контексте. Когда термин уже существует, это определение, возможно, но не обязательно, противоречит словарному (лексическому) определению термина: «Лексическое определение, например, которое попадает в словарь (лексикон), является своего рода отчетом о том, как оно используется в языке. Стипулятивное определение предполагает (предусматривает), что язык должен использоваться в данных условиях» [114].

Согласно стэндфордской энциклопедии, «стипулятивное определение придает смысл определяемому термину, и не подразумевает никаких обязательств, которые приписывают смысл, согласованный с предварительным использованием термина (если таковой имеется). Стипулятивные определения эпистемологически специальные. Они придают суждениям эпистемологические характеристики, которые могут вызвать недоумение в другом месте» [175].

Например, в загадке индукции Н. Гудмэна, слово «зелубой» («grue») было стипулятивно оговорено как «свойство объекта, который, будучи рассмотренным до момента *t* является зеленым, а будучи рассмотренным позже момента *t* является голубым». «Grue» не имеет смысла в стандартном английском; следовательно, Н. Гудмэн создал новый термин и дал ему стипулятивное определение.

Однако существует ряд претензий к использованию стипулятивных определений. Зачастую они используются в спорах, «когда один человек тайно использует слово каким-то особенным образом и затем ведет спор, как если бы любой использовал бы это слово таким же образом. При таких обстоятельствах, человек использует слово “стипулятивно”. В таких случаях предположение, что другой человек использовал слово точно так же редко бывает оправданным» [122]. Кроме того, когда стипулятивное определение путают с лексическим, существует риск неопределенности, и более того: «слова в языке являются общедоступными инструментами для общения на этом языке, и стипулятивное определение имеет смысл, только если оно соответствует стандартам использования, которые необходимы для настоящих целей, для целей “под рукой”. Если стипулятивное определение становится популярным, слово, определенное в его новом смысле, становится частью общественного языка, и он открыт для изменения и вариации в использовании, как и другие слова» [115]. Стипулятивные определения также часто связывают с так называемым «Правилом Шалтая-Балтая» (*humpty-dumpty rules*) – это правило или принцип, который был – возможно, больше чем любой другой – движущей силой идиосинкразического и часто обескураживающего способа употребления терминов в науке. Оно исходит, конечно, от Льюиса Кэрролла, когда у него Шалтай придавал значения словам следующим образом: «когда я употребляю слово, – сказал Шалтай-Болтай довольно презрительным тоном, – это означает только то, что я выбираю, что бы оно означало – ни больше, ни меньше».

Вместе с тем, употребление стипулятивных определений является обязательным компонентом языка, и на это есть ряд веских причин. Так, мы используем стипулятивное определение каждый раз, когда слово определяется впервые или совершенно новым способом (к примеру, М. Гелл-Манн дает термину «кварк» именно стипулятивное определение). Кроме того, это может быть просто вопрос удобства – способ использования одного слова вместо пары десятков. Очень большим числам, например, иногда дают странные названия, как «гугол» или «йотта», потому что эти короткие и запоминающиеся слова намного проще использовать, чем их эквивалент в числовой терминологии. Стипулятивное определение может также быть необходимым, чтобы ясно донести какую-то новую идею или факт. Такие определения существующих терминов полезны в создании теоретических аргументов, или с указанием конкретных случаев. «Просто потому, что никто больше не использует это слово в такой манере не значит, что это не полезно в некотором конкретном контексте» [184]. Действительно, стипулятивные определения не только допустимы, но и необходимы. Однако в случае их использования необходимо учитывать все минусы этого использования. Неологицисты, вводя определения стипулятивно, должны ясным и понятным образом обосновать вводимые термины.

В случае с принципом Юма, основная идея, по-видимому, такова: принцип Юма – это стипуляция, которая задает условия истинности для ограниченного класса утверждений о числовой идентичности, а именно, формы, «число *Fs* идентично числу *Gs*». Хотя спецификация условий истинности является частной – она касается только ограниченного класса утверждений о числовой идентичности – полученное объяснение понятия числа является полным в той мере, в какой оно является достаточным для вывода основных законов арифметики. Как подчеркивает сам К. Райт, будет ли считаться принцип Юма аналитической истиной, целиком и полностью зависит от его статуса как стипуляции, регулирующей наше применение понятия числа. Формирование понятия на основании принципа Юма, как и формирование понятия в соответствии с каким-либо другим принципом абстракции, предполагает введение нового понятия: принцип Юма является тривиальным выводом о природе понятия числа, потому что он является стипуляцией, регулирующей введение этого понятия (а не анализом уже существующего понятия). Стипулятивный характер принципа важен, поскольку именно эта особенность позволяет ему сдержать (пусть в ограниченном и несколько модифицированном смысле) обещание логицизма обеспечить априорность арифметики, дополненной некоторыми видами стипуляции. Сам К. Райт изначально назвал свой подход «теоретико-числовой логицизм», потому что он выводит основные законы арифметики из стипуляции, регулирующей понятие числа, не представляя, однако, эксплицитных определений отдельных чисел или «непосредсвенного последования» на основании чисто логической лексики. Хотя теоретико-числовой логицизм не соответствует цели эксплицитного определения словаря арифметики в чисто логических терминах, он исходит из одной только стипуляции, и «объяснение» числовой идентичности посредством принципа Юма достигается в терминах понятий логики (второго порядка).

Стипулятивный характер принципа Юма сопряжен с рядом проблем в философии математики неологицизма, в первую очередь с проблемой «плохой компании» (речь о ней пойдет в разделе 2.3.1). Кроме того, претензия к методологии неологицизма, в которой используются стипуляции, состоит в сходстве введения понятия (числа) с помощью абстракции со случаем обычной аксиоматизации.

Предположим, что мы допускаем, что принцип Юма устанавливает условия истинности для определенных утверждений о числовой идентичности. Так является ли истинность принципа Юма всего лишь делом стипуляции? Сам К. Райт пишет: «положение дел изначально дано нам как получение определенного отношения эквивалентности <…>; но у нас есть возможность, путем стипуляции, которую содержат абстракции, так переосмыслить такие положения дел, что они составляют новый вид вещей» [121, p. 277]. То, что К. Райт рассматривает принципы абстракции как стипуляцию, усиливается контрастом, который он обозначает между основой нашего познания истины принципа Юма и нашим знанием о существовании чисел: абстрактные объекты не являются творением человеческого разума, «введенного своего рода стипуляцей. То, что формируется – создается – путем такой абстракции – это скорее концепция (понятие): результатом является просто фиксация условий истинности утверждений о тождественности относительно нового вида вещей, и это уже совсем другой вопрос, реализуются ли когда-либо эти условия истинности» [121, p. 278]. Фактически, К. Райт утверждает, что существование чисел – это что-то скорее обнаруженное, а не стипулированное, в то время как наше априорное знание о необходимости их существования является производным от принципа, истинного в силу стипуляции. Б. Хейл и К. Райт подчеркивают различие между трактованием принципа Юма как стипуляции – то, что они полагают непроблематичным – и рассмотрением существования чисел как результата стипуляции, что, соглашаются они, является проблематичным. Они пытаются показать, что принцип Юма просто устанавливает частные условия выполнения отношения числовой идентичности. Б. Хейл и К. Райт настаивают, что это не является частью их позиции относительно того, что стипуляция такой выполнимости условий должна обеспечивать существование объектов, связанных с отношением числовой идентичности; скорее, их существование обеспечивается доказательством того, что существуют объекты, связанные соотношением, введенным таким образом. Действительно, открытие этого доказательства придаёт тот смысл, который они вкладывают в то, что существование чисел «обнаруживается». Понятая таким образом, их методология отличается от «аксиоматической стипуляции существования», воплощенной в, например, теоретико-множественной практике простого установления понимания аксиомы и в утверждении на ее основе существования любых множеств — любых «объектов» - которые аксиома допускает, за исключением тех множеств, которые аксиома запрещает.

Возможно, стипулятивный характер принципа Юма должен мыслиться по образцу фиксирующей референцию стипуляции, наподобие примера С. Крипке введения такого термина, как «метр». Идея заключается в том, что мы стипулируем, что в момент времени t брусок b имеет длину в метр, из чего следует, что во время t длина b подпадает под понятие метр. Хотя мы задали стипуляцию (фиксирующую референцию стипуляцию), при этом мы преуспели в создании утверждения, основанного на фактах, а именно, что b имеет определённую длину в момент t - того, что имеется еще до того, как конвенция была задана, и того, что будет, даже если конвенция будет «изъята». Может ли нечто подобное содержаться в концепции введения понятия путём абстракции, чтобы представить, что она также могла состоять в задании стипуляции, и в то же время имела фактическое содержание? Сложность ответа заключается в том, что несмотря на то, что фиксирующей референцию модели С. Крипке достаточно для того, чтобы показать, что в целом не является истинным, что стипуляции не способны иметь фактическое содержание, которое не зависит от самих стипуляций, это не поможет уточнить то, как стипулятивный характер введения понятия с помощью абстракции способен предоставить фактическое содержание такого принципа, как принцип Юма. Это происходит потому, что фактическое содержание утверждения о том, что брусок b - метровый, осуществляется за счёт возможности демонстрации или выявления (независимо от фиксирующей референцию стипуляции) длины, к которой понятие метра должно быть применено. Но именно такой возможности не хватает в случае теоретико-числовой позиции в терминах введения понятия путём абстракции.

Идея, что истина принципа Юма является делом стипуляции, которая независима от какой-либо «априорно определяемой истины», позволяет К. Райту избежать тех трудностей, которые препятствуют тому, чтобы показать, что он истинный или что он правильно отражает наше доаналитическое понятие числовой идентичности. Однако это сопряжено с определенными издержками:

проблема в том, что есть много абстракций, которые являются выполнимыми, но относительно некоторых предположений, они не обязательно являются взаимно выполнимыми (см. ниже раздел о проблеме «плохой компании» 2.3.1). К. Райт и Б. Хейл используют стипулятивный характер принципа Юма как предпосылку в аргументе для обоснования априорности наших арифметических знаний. Схватывая концепцию числа, мы получаем критерий идентичности для чисел – критерий, позволяющий сказать, когда одно и то же число дано нам двумя различными способами, как число одного или другого понятия. Этот критерий идентичности – принцип Юма – является единственной не-логической посылкой, необходимой для выведения основных законов арифметики. Наше арифметическое знание основано, таким образом, на нашем схватывании понятия числа – на том, что мы получаем, когда мы «знакомимся» с понятием. Но поскольку это знание опирается на стипуляцию, это знание априорно. Эта позиция сходна с идеей Ф. МакБрайда об эпистемологическом интересе арифметики Г. Фреге [137, 138]. Для Ф. МакБрайда неофрегеанское объяснение априорности наших знаний арифметики таково: сначала мы стипулируем критерий идентичности для особого вида объектов; далее называем их кардинальными числами. То, что определенные фундаментальные истины об этих объектах устанавливаются на основе стипуляции гарантирует, что наше знание этих истин – это знание априори. Это противопоставлено позиции, которая будет стремиться вывести априорность нашего знания арифметики из тезисов о значении или истины в силу значения. Неофрегеанская позиция не зависит от традиционного понятия аналитичности; поскольку неофрегеанство нуждается только в относительно неспорном признании априорности стипуляции, оно может утверждать, что его объяснению априорности арифметики не адресуются трудности, связанные с отстаиванием традиционных понятий аналитичности. Однако такая позиция критикуется. Так, В. Демопулус [106] отмечает, что «никакая реконструкция не поддерживает эпистемологические претензии неофрегеанства как позиции об априорности наших знаний арифметики. Выдвигается ли эта позиция как теория, в рамках которой обычная арифметика может быть смоделирована, или заявляется о фиксации моделей использования нашего теоретико-числового словарного запаса, это не имеет прямого отношения к эпистемологической основе нашего арифметического знания, которое неофрегеанство, согласно собственным предположениям, имеет» [106, p. 99].

Таким образом, последствия трактования принципа Юма в качестве стипуляции распространяются на широкий круг вопросов, обсуждение которых продолжается.

2.3 Проблемы шотландского неологицизма

Как пишет К. Клемент, «трудно отрицать интуитивную привлекательность позиции К. Райта. Принцип Юма, кажется, каким-то образом объясняет, что мы подразумеваем, когда мы говорим о числах; если он не имеет статус своего рода определения или другого вида аналитической истины, трудно понять, какой другой статус он мог бы иметь, на каком ином основании мы могли бы прийти к его знанию или даже на каком другом основании он может быть истиной» [130, p. 135]. И действительно, проблемы здесь в технической части, в мета-онтологической. В этой части мы сосредоточимся на основных проблемах, с которыми сталкивается шотландская школа неологицизма.

2.3.1 Проблема «плохой компании» и возражение о «слишком богатом выборе»

Первая серьезная проблема, преследующая абстракционистский проект, и, пожалуй, самая известная из всех – так называемая проблема «плохой компании» *(The Bad Company Objection).* Название этой проблемы равнозначно обвинению: принцип Юма виновен в связи с неправильными принципами. Дело в том, что есть принципы почти точно такой же формы, как принцип Юма, которые, отнюдь не являются аналитическими истинами, более того, они невозможны логически. Несмотря на то, что сам принцип Юма не является противоречивым, он имеет форму, которая может привести к противоречию. Наиболее известным примером противоречивого принципа абстракции является Аксиома V Фреге, согласно которой, напомним, понятия F и G имеют один и тот же объем если и только если они коэкстенсиональны. Не сложно представить кого-то, кто игнорируя (или не зная) противоречие, к которому приводит этот закон, принимает его не только как аналитически истинный, но стипулятивно истинный, истинный в силу решения о том, что должно означать понятие «объем понятия». Пока такой человек будет виновен в некоторого рода логической ошибке. И К. Райт должен дать пояснение. Сам он признает, что его собственные предложения зависят от того условия, что «образование понятий путем абстракции» приемлемо. То есть, программа зависит от легитимности введения по крайней мере некоторых понятий через принципы абстракции.

Необходимы некоторые общие критерии для демаркации приемлемых и неприемлемых принципов абстракции. Очевидно, что Аксиома V, будучи противоречивой, находится на неприемлемой стороне поля, в то время как принцип Юма, гордость и радость абстракционизма, (можно надеяться) на приемлемой стороне (если нет, то таковым, по-видимому, является некоторая его модификация). Проблема, однако, заключается в том, что одной лишь согласованности (непротиворечивости) недостаточно для приемлемости, и в результате необходимо еще какое-то руководство для того, чтобы отличать «хорошее» от «плохого».

Первоначальная формулировка этой проблемы (как и многих других вопросов, адресуемых неологицистам) датирована 1990-м годом и принадлежит Дж. Булосу [96], который отметил, что есть принципы абстракции, которые являются согласованными, но которые, тем не менее несовместимы с принципом Юма (или, на самом деле, с любым принципом абстракции, предполагающим существование бесконечно многих объектов). Если предположить, что принцип Юма приемлем, то из этого следует, что противоречивость, хотя и достаточна для отклонения принципа абстракции как неприемлемого, не является единственным критерием по определению «плохих» принципов.

Позиции К. Райта направляется два возражения о «плохой компании». Во-первых, введение понятий с помощью принципа абстракции может дать сбой, и может сделать это так зрелищно, как в случае с принципом абстракции, выраженным в «Grundgesetze» – Аксиомой V. Но как мы можем принять подход, который призывает нас полагаться на методологию, которая, как известно, имеет серьезные изъяны? А во-вторых, учитывая нашу свободу вводить тот или иной принцип абстракции, необходимо дополнить этот подход критерием, способным регулировать предпочтительность выбора одной абстракции вместо другой.

Существование как несогласованных принципов абстракции, так и несовместимых пар принципов, согласованных по отдельности, и породило проблему, известную как проблема «плохой компании». Главными среди проблем, подпадающих под этот раздел, являются:

(1) экзистенциальная проблема: учитывая существование проблемных принципов той же общей формы, что и принцип Юма (например, Аксиома V), какова причина, по которой мы думаем, что существуют какие-либо хорошие принципы абстракции (включая принцип Юма), которые имеют привилегированный статус, на который претендует абстракционизм?

(2) Эпистемологическая проблема: даже если кто-то убежден, что существуют хорошие принципы абстракции, которые могут играть основополагающую роль, такую как предусмотренная для принципа Юма, в целом, как мы можем отличить «хорошие» принципы от «плохих»?

По поводу первого возражения, экзестенциальной проблемы, которая касается допустимости использования принципов абстракции вообще, К. Райт стремится показать, что тот факт, что методология иногда приводит к ошибочным выводам, не означает, что она сама непоправимо испорчена, и он напоминает нам, что принцип Юма является согласующимся с анализом. Обсуждая этот вопрос, Р. Хек [125] напоминает, цитируя песню: одно плохое яблоко не испортит целую кучу девушек. Так почему необходимо показать, что процедура будет работать независимо от того, какой принцип абстракции используется? Одна из трудностей, связанная с ответом на этот вопрос, заключается в том, что имеется тенденция сравнивать введение понятия с помощью абстракции со случаем обычной аксиоматизации, что не позволяет в полной мере оценить настоятельное требование К. Райта того, что предлагаемая им программа существенно отличается от того, что он называет «просто аксиоматической стипуляцией существования».

Но, тем не менее, если есть проблемы, которые формально затрагивают утверждения, подобные данному, то, даже если они не затрагивают само это утверждение, есть основания полагать, что эти проблемы, при ближайшем рассмотрении, будут рассматриваться как проявления более глубоких проблем, которые должны, судя по всему, касаться и непосредственно данного утверждения.

Н. Теннант [159] и Дж. Булос [93] выступают против «образования понятий путем абстракции» как допустимой процедуры для проекта, претендующего на связь с логицизмом. Действительно, Аксиома V – не единственный проблематичный пример. Редко обсуждаемый пример, который можно принять как отношение эквивалентности тождества:

(Нечто) $\forall F \forall G$ (Нечто (F) = Нечто(G) $\leftrightarrow F = G$

равносилен предположению, что уникальный объект существует для каждого понятия, что является явным нарушением теоремы Кантора, и приводит к расселовскому парадоксу предикации.

Еще один «плохой» принцип абстракции, который должен особенно тревожить представителей абстракционистского неологицизма, учитывая его очевидную схожесть с принципом Юма, таков:

(Упорядоченность) $\forall R \forall S$ (Порядок (R) = Порядок (S) $\leftrightarrow R \approx S$)

Здесь «$R \approx S$» означает, что R и S изоморфны или имеют аналогичные отношения упорядоченности. Абстракция утверждает, что тип упорядоченности относительно R, является типом упорядоченности относительно S, если и только если R и S изоморфны. Этот принцип влечет противоречие из парадокса Бурали-Форти. Вместе с тем, это принцип кажется не большим не меньшим, чем измененным Принципом Юма, используемым для порядковых чисел, а не кардинальных. Конечно, существуют некоторые различия между этим принципом и принципом Юма, принцип Юма выглядит непротиворечивым (и действительно таковым является, если учитывать арифметику второго порядка Пеано). Но это не объясняет, как он может играть своего рода основополагающую роль, которую ему хочет отвести К. Райт, учитывая его «плохую компанию». Действительно, у нас есть очень веские основания думать, что одна только непротиворечивость в одиночку не может быть обоснованием какого-либо привилегированного статуса для принципов абстракции, и это отсылает нас ко второй, эпистемологической проблеме «плохой компании».

Эпистемологическая проблема демаркации «хороших» принципов абстракции от «плохих» связана с тем, что есть не только принципы абстракции, которые, взятые изолированно, приводят к противоречию, но есть пары принципов абстракции, каждый из которых по отдельности является непротиворечивым, но вместе с тем они несовместимы друг с другом. Эта проблема выделяется в отдельную проблему как возражение о «слишком богатом выборе» (*Embarrassment of Riches).* Таким образом, проблема в том, что есть много абстракций, которые являются выполнимыми, но некоторые из них являются *взаимно не*выполнимыми. Эту проблему «плохой компании» Р. Хек обозначает так: «принципов этой формы – пруд пруди. И некоторые из согласованных несовместимы друг с другом. Таким образом, например, можно записать принципы той же формы, которые, хотя и согласованны, подразумевают, что существует только конечное число объектов. Поскольку из принципа Юма следует, что существует бесконечно много объектов, он несовместим с ними. Хуже того, выберите любое понравившееся вам предложение: можно записать принцип упомянутой выше формы, который подразумевает его; и, тем же самым, можно записать другое, которое подразумевает его отрицание. Поэтому не все такие согласованные принципы могут быть даже истинными, не говоря уже об аналитической истинности. Поэтому необходимо каким-то образом отличить “хорошие” принципы от “плохих”» [125, p. 72].

Рассмотрим некоторые из таких проблематичных примеров. Принцип Юма, приводящий к полной арифметике второго порядка Пеано, выполняется только в бесконечной области. Существуют и другие последовательные принципы абстракции, которые удовлетворяются только в конечной области, один из которых – это принцип равной представленности (*parity principle*, сокращенно PP), который также может быть определен в число логических (в логике второго порядка) терминах и формулируется Дж. Булосом [96] следующим образом:

(PP) ∀F∀G (Px:Fx = Px:Gx ↔ F и G равномерно представлены)

Принцип утверждает, что между F и G имеется непересекающееся отношение равной представленности (*differing evenly*), если число объектов, попадающих под Fно не подG или под G но не под F одинаково (и конечно). То есть, по определению F и G равно представлены, если *x* такие, что (Fx∧~Gx) ∨ (Gx∧ ~Fx), равны (и конечны) по числу.

Дж. Булос показывает, что этот принцип абстракции является согласованным, но выполняется только в конечных областях. Принцип Юма также согласованный, но выполняется только в бесконечных областях. Таким образом, каждый из них является согласованным, но они не могут быть истинными «вместе». В случае с этим примером, неологицизм не может ссылаться на противоречивость принципа абстракции в качестве основания для отказа. В сочетании с принципом Юма, однако, мы получаем противоречие. К. Райт и другие неологицисты должны дать некоторое объяснение не-*ad hoc*, почему именно принцип равной представленности, а не принцип Юма мы должны отвергнуть, «и почему один должен быть низведен до статуса невозможности, в то время как другой наслаждается привилегированной эпистемологической и основополагающей ролью» [130, p. 137].

К. Райт в работе «О философском значении Теоремы Фреге» [167] рассматривает модификацию этого примера Дж. Булоса для того, чтобы наложить ограничение на «приемлемые» принципы абстракции. Пример включает функцию, понижающую тип, которая применяет два понятия к одному и тому же объекту только в случае, если их симметричное различие конечно. Т. е., отражение *n* от понятий к объектам удовлетворяет условию:

n(F) = n(G) если и только если [x: x является F, но не G, или является G, но не F] конечно.

Это, пожалуй, наиболее известный пример такого «спорящего» с принципом Юма принципа абстракции, который сам К. Райт метко называет «досадный принцип» (*Nuisance Principle*, сокращенно NP). *Неудобство*, связанное с понятием F – то же *неудобство*, что и связанное с понятием G только в случае, если имеется *симметричное различие* между F и G – круг вещей, которые или F, или G, но не оба сразу – конечен. Может быть показано, что результат этого принципа абстракции выполняется в конечных областях, но не выполняется, если область индивидуальных терминов бесконечна и круг переменных понятий является полной мощностью множества этой области. Таким образом, досадный принцип, хотя и является согласованным, является столь же неприемлемым принципом абстракции, как и Аксиома V. Однако причина неприемлемости иная. На первый взгляд, досадный принцип, по-видимому, выводит его неприемлемость не только с точки зрения его собственных формальных свойств, но и с точки зрения его взаимодействия с другими принципами (такими как принцип Юма). Если принцип Юма является аналитическим, то NP является аналитически ложным. Но с каким правом мы могли бы сделать это утверждение – разве аналогичность двух принципов не является почти совершенной?

Чтобы увидеть сложности, к которым приводит «плохая компания», предположим, что мы (по какой-либо причине) привержены стандартам интерпретации логики второго порядка. Далее, если мы принимаем стипуляцию, выраженную в досадном принципе, мы будем ограничены моделями, имеющими только конечное число объектов. Поскольку принцип Юма выполняется только в бесконечной области, наше принятие досадного принципа будет препятствовать нашему стипулированию того, что числовые сингулярные термины должны использоваться в соответствии с принципом Юма. Но если принимать всерьез идею, что принципы абстракции являются лишь стипуляциями, регулирующими использование сингулярных терминов, которые они вводят – т. е., что они являются конвенциями, которые мы свободно установили – мы могли бы легко отвергнуть истину принципа Юма в силу «некорректного» изначального выбора принципа абстракции, который выполняется только в конечной области. Это будет происходить, если, например, мы впервые обратились к стипуляции, выраженной в досадном принципе. Но если принципы абстракции являются стипуляциями, и, таким образом, принцип Юма – это только одна стипуляция из многих, как мы можем придать смысл идеи, что существует *правильный* изначальный выбор? Если истина некоторой абстракции является вопросом стипуляции, то наличие области достаточно большой, чтобы содержать числа, может показаться зависящим от того, какие абстракции заложены в первую очередь, тогда вопрос о том, содержит ли область объектов под-область, способную смоделировать основные законы арифметики, будет зависеть от нашего произвольного решения. Очевидно, что этот вывод, который К. Райт и Хейл не одобрят, и они признают, что то, что можно было бы назвать «квази-конвенциональными» особенностями их подхода, обязывает их сформулировать принципиальное разделение абстракций.

Один общий ответ на этот вид возражения требует, чтобы принцип абстракции был консервативным в определенном смысле: некоторый принцип абстракции является приемлемым, только если он удовлетворяет требованию «консервативности», т.е. не ограничивает мощность множества понятий, с введением которых он сам эксплицитно не связан. Внедрение критерия консервативности, предложенного К. Райтом в [168] является первым шагом к устранению проблемы «плохой компании». Понятие консервативности К. Райт заимствует у Х. Филда (или по крайней мере понятие консервативности К. Райта очень близко к предлагаемому Х. Филдом): принцип, или набор принципов, консервативен по отношению к данной теории, когда, грубо говоря, его добавление к этой теории не приводит к новым теоремам о старой онтологии. Интуитивная философская идея заключается в следующем: приемлемый принцип абстракции должен быть определением абстрактов, которые он вводит, но он также не должен делать что-то более того. В результате данный принцип не должен иметь существенных последствий для тех объектов в области, которые не являются абстрактами. Проще говоря, принцип Юма может повлечь за собой всевозможные интересные утверждения о числах и даже интересные утверждения относительно чисел, соответствующих определенным совокупностям кошек, но принцип Юма не должен подразумевать каких-либо существенных нечисловых утверждений о самих кошках (числовое утверждение будет содержать по крайней мере одно вхождение оператора числа). Консервативность принципа Юма можно доказать. С другой стороны, досадный принцип оказывается неконсервативным, как мы надеемся (поскольку он влечет за собой, например, что должно быть только конечное количество кошек).

По этому критерию принцип Юма будет консервативным по отношению к любой теории, для которой консервативна арифметика Пеано второго порядка (то есть, можно было бы надеяться, к любой теории). Напротив, последовательное дополнение любой теории *T*, следуя досадному принципу, приведет к теории, из которой следует, что все категории исходной онтологии *T* являются конечно экземплифицированными. Поскольку он имеет последствия для размера объема понятий, которые совершенно не связаны с тем, для введения чего он якобы служит, досадный принцип, таким образом, не может рассматриваться как такой концептуальный-объяснительный принцип. Более того, любой принцип абстракции, который сталкивается с принципом Юма, требуя конечности любой области, в которой он будет иметь место, будет в подобном случае таковым. И действительно, любой принцип абстракции, который ставит границу на размер универсума, будет неконсервативным по отношению к какой-то последовательной теории вещей, кроме абстрактных сущностей, которых он касается. И К. Райт приходит к выводу, что «данная аналогия разрушена: имеется непобедимый повод для надежды, что принцип Юма консервативен по отношению к каждой последовательной теории, касающейся вещей, отличных от его собственной специальной онтологии – кардинальных чисел. (Это, заметьте, своего рода слабая аналитичность: если бы существовал возможный мир, в котором принцип Юма потерпел неудачу, то за счет него исказилась бы природа кардинальных чисел в этом мире.) Досадный принцип и подобные ему принципу, напротив, не соответствуют этому ограничению» [160, p. 29].

Критерий консервативности является удовлетворительным, однако, не достаточным. С его помощью можно установить, что абстракция приемлема только в том случае, если она консервативна по отношению к любой последовательной теории, в онтологии которой нет собственных абстрактных понятий, и, в этом смысле принцип Юма является приемлемым, так как он имеет дело с консервативными, логическими абстракциями. Таким образом, на первый взгляд, ограничение консервативности, по-видимому, выполняет работу, для которой оно предназначено. Однако имеется ряд проблем с использованием этого критерия. Во-первых, New V, самая перспективная абстракционистская реконструкция теории множеств на настоящий момент (даже если она далека от полностью удовлетворительной), не является консервативной. Технические детали можно найти в статье С. Шапиро и А. Вейра [153], но неформальную идею легко понять. В языке New V мы можем определить ординалы обычным способом: ординалы – это просто транзитивные чистые множества, упорядоченные по членству. По аналогии с рассуждением в парадоксе Бурали-Форти мы можем заключить, что нет множества всех ординалов. Однако в контексте New V это означает, что множество ординалов является «большим», т. е. есть функция от ординалов ко всему универсуму. Но, поскольку ординалы упорядочены по членству, это накладывает упорядоченность на весь универсум. Таким образом, New V не консервативен, поскольку он подразумевает, что универсум может быть упорядочен (и в рамках логики второго порядка мы можем выразить это утверждение, не используя теоретико-множественной терминологии). Проблемы с требованием выполнения критерия консервативности не заканчиваются на том факте, что, казалось бы, исключаются принципы (такие как New V), приемлемость которых хотелось бы установить. Кроме того, оказывается, (как показывает А. Вейр в [164]), что есть согласованные, но несовместимые принципы абстракции, которые выполняют требование консервативности. А. Вейр называет такие принципы «отвлекающими», и далее он показывает, что если мы попытаемся укрепить ограничение консервативности различными способами, чтобы избежать таких пар отвлекающих факторов, аналогичные проблемы возникают в метатеории.

Существует ряд других критериев, которые были предложены для сужения списка потенциально хороших принципов абстракции. Мы не будем рассматривать технические детали этих предложений здесь (более подробно перспективы установления критерия для отделения «хороших» принципов абстракции от «плохих» анализирует К. Файн [113], М. Эклунд в [112] и др.). Достаточно сказать, что в целом можно согласиться с тем, на настоящий момент не определен не-*ad hoc* критерий, принятый непроблематично, который утверждает все абстракции, которые хочет ввести неологицизм. Поиск продолжается, и он еще не безнадежен, но даже те предложения, которые близки к выполнению этой задачи, требуют от неологицистов достаточно утонченного логического и математического аппарата в метатеории, чтобы установить, что данный принцип абстракции обладает возлагаемыми на него функциями.

2.3.2 Проблема Юлия Цезаря

Т. н. проблема Юлия Цезаря (*The Julius Caesar Problem*) проистекает из собственного обсуждения Г. Фреге принципов абстракции. В «Grundlagen» он рассматривает принцип абстракции, вводящий направления:

$(\forall a)(\forall b)(\mathrm{DIR}(a) = \mathrm{DIR}(b) \leftrightarrow a//b)$

Указав, что это определение дает нам средства для определения направлений и различения различных направлений друг от друга, он отмечает, что:

«В предложении

«(die) Направление *a* равно направлению *b*»

направление а выглядит как предмет, и наши определения дают нам средство отождествления этого предмета, если бы он выступал в другом одеянии, скажем, как направление b. Но этого средства не достаточно для всех случаев. Сообразно с ним нельзя, к примеру, решить, являются ли Англия и направление оси Земли одним и тем же. Да простят нам этот кажущийся бессмысленным пример! Естественно, никто не смешивает Англию с направлением оси Земли; но это – не заслуга нашего объяснения» [74, с. 201-202].

Глядя на это с технической точки зрения, мы можем увидеть проблему следующим образом: принципы абстракции, такие как принцип Юма, правая сторона которых может быть выражена в чисто логических терминах, не устанавливают ограничения на то, какие именно объекты выполняют функцию в конкретной области, допустим, семь, или пустое множество (единственное требование заключается в том, что каждый объект может играть роль только одного числа или одного множества).

Знание любого общего понятия, применимого к объектам, предполагает знание того, что отличает объекты, к которым оно относится, от тех, к которым оно не относится, то есть понимание того, что М. Даммит назвал критерием применения понятия. Что отличает понятия о классах от других, так это то, что полное знание понятия о классах включает, кроме того, знание того, что регулирует вопрос идентичности и различимости среди ее экземпляров – того, что определяет, являются ли x и y одним и тем же Fs, или же они отличны (учитывая, что и x, и y являются Fs). Другими словами, понятия о классах отличаются от других своей взаимосвязью с тем, что Г. Фреге назвал критерием идентичности. Принцип Юма, предоставляет необходимое условие, чтобы число было понятием о классах в этом смысле – путем предоставления критерия идентичности – и, таким образом, является по крайней мере частичным объяснением понятия о классах числа. Однако одного принципа Юма не может быть достаточно, поскольку, как и в случае любого другого понятия, также требуется критерий применения. Поскольку такой критерий определил бы, какие вещи не являются числами, он также урегулировал бы условия истинности любого идентификационного утверждения формы «число $Fs = q$», где на месте q находится термин, эксплицитно предназначенный для обозначения вещи некоторого ранее понимаемого класса. Короче, проблема Цезаря, в том виде, в котором Г. Фреге выражает это в § 66 «Grundlagen», есть не что иное, как проблема обеспечения критерия применения для числа и соответственно установления его как понятия о подлинном классе объектов.

Принцип Юма не предоставляет такого определения выражений о числах, которое позволило бы нам понять условия истинности любого предложения, в котором числа появляются в терминах уже известного словарного значения, более того, он не предоставляет условия истинности для всех выражений идентичности чисел. Он только дает нам условия истинности для утверждения об идентичности двух указанных чисел, которые имплицитно описывают число как число некоторого понятия. Это не позволяет нам определить, при каких условиях число некоторого понятия будет идентично объекту, введенному другим способом, скажем Англии, или Юлию Цезарю. Следовательно, невозможно установить, к чему могут или не могут относиться выражения о числах и поэтому невозможно установить их смысл.

К. Райт и Б. Хейл, конечно, хорошо сознавая эту трудность, дают ответ. Упростим: принцип Юма вводит понятие о классах (*sortal conception*) числа, он говорит нам, какого рода объектами должны быть числа, а именно те, чьи условия идентичности устанавливаются или нет в зависимости от равночисленности понятий. Страны, такие как Англия, и люди, такие как Цезарь, попадают под другие понятия о классах. Конечно, трудно точно сформулировать, что именно подпадает под это понятие, но мы можем только предполагать, что вопрос о том, является или не является что-то идентичным Цезарю является законным, только если есть определенный условия, при которых один человек будет идентичен другому. По словам К. Райта и Б. Хейла, условия идентичности между сущностями, входящими в различные понятия о классах могут быть истинными только если понятия одного класса являются суб-понятиями другого класса, и, следовательно, если условия идентичности являются частным случаем условий идентичности других. Понятие (в терминах классов) *человека* может быть только суб-понятием понятия (в терминах классов) *числа*, если, каким-то образом, нечто идентичное данному человеку может быть объяснено в рамках двух равночисленных понятий. Поскольку числа, очевидно, не могут быть истолкованы как люди, числа никогда не являются людьми. Этот ответ по-прежнему требует довольно серьезного объяснения, чтобы было абсолютно ясным, и многие по-прежнему скептически относятся к нему.

Много было написано о проблеме Цезаря, но подходы к ней обычно принимают один из трех путей: во-первых, мы можем отрицать, что это проблема, принимая своего рода структуралистский подход к абстракционизму, где не имеет значения, окажется ли Цезарь числом два, если мы гарантируем, что какой-то объект выполняет эту функцию. (Хотя проблема Цезаря не является его главной целью, К. Райт в работе «Неофрегеанские основания для реального анализа: некоторые размышления об ограничении Г. Фреге [166] показывает связи между структурализмом и абстракционизмом в том числе относительно именно этого вопроса). Подробнее этот вопрос рассматривается в [176]. Во-вторых, мы можем попытаться переформулировать наши принципы абстракции более сложными способами (например, путем добавления модальных операторов в соответствующих местах), чтобы референция числовых терминов была более определенной. В-третьих, мы можем утверждать, что, хотя принципы абстракции сами по себе не определяют, какой объект, в частности, обозначается определенной цифрой, принципы абстракции плюс другие контекстуальные ограничения определяют числовую референцию однозначно.

Какой из этих подходов является наиболее перспективным, еще предстоит определить. На самом деле, по мере роста литературы, новые вариации на проблему Цезаря, кажется, возникают по крайней мере так же быстро, как попытки их решить. Наиболее важными из них являются:

Проблема контр-Цезаря (counter-Caesar problem): как мы можем гарантировать, что конкретные числа Г. Фреге обозначают тот же объект, что и их естественные языковые аналоги (например, обозначает ли NUM (x = x) то же самое, что и английское выражение «ноль»)?

Проблема Юлия Цезаря: как мы можем гарантировать, что кардинальные числа, предусмотренные принципом Юма, обозначают тот же тип объектов, что и объекты, которые обозначаются математическими терминами, встречающимися в естественном языке (например, обозначает ли NUM (x = x) тот же самый вид вещей, что и английское выражение «ноль»)?

Проблема C-R: как мы определяем, идентичны ли различные абстрактные сущности, предоставляемые различными принципами абстракции (например, идентично ли комплексное число 0, предоставляемое соответствующим принципом абстракции, действительному числу 0, предоставляемому другим принципом абстракции)[1]?

Хотя проблема Цезаря (и сопутствующие проблемы) является результатом определенных формальных характеристик принципов абстракции, ответы на нее, как правило, менее технические (см. [136], [104] и др.). Любое решение проблемы Цезаря должно предоставить две вещи: (*a*) эксплицитное описание скрытого содержания принципа Юма и, следовательно, ограничения, которое принцип Юма налагает на интерпретацию символа функции «#» и (*b*) демонстрацию того, что значения функции (функций), которые удовлетворяют этому ограничению, не включают «обычные» объекты, такие как Юлий Цезарь. Что касается (*a*), то предложение неофрегеанства в том, что, когда принципом абстракции вводится символ, то этот символ ограничен обозначением функции, которая полностью определена этим принципом. Это исключает подавляющее большинство функций, которые просто удовлетворяют принципу. Одно дело быть функцией, которая учитывает параллельные линии как один и тот же объект и непараллельные линии как различные объекты. Другое дело быть функцией, сущность которой исчерпывается тем, что она имеет эту особенность. Мы можем назвать любую функцию такого рода абстракцией. Что касается (*b*), предложение заключается в том, что, во-первых, если f – это некоторая функция абстракции, то факты формы

---

[1] Более подробно эта проблема обсуждается в работе Кука и Эберта [104]. Проблема получает название C-R, поскольку определение того, являются ли действительные (*Real*) числа подвидом комплексных (*Complex*) чисел, является частным случаем проблемы, а термин «C-R» имеет удобное сходство со словом «Цезарь».

[$f(b) = a$] должны допускать определенного рода объяснение, почему $f(b)$ – это именно это, а не что-то другое – и, во-вторых, такие факты объясняются только в том случае, если функция абстракции также является производящей функцией: грубо говоря, функцией, значения которой, фактически, относятся к ее значениям. В одном смысле этого слова (хотя, возможно, и несколько узком) абстрактный объект является объектом, который по своей природе является значением определенной функции абстракции для определенного диапазона аргументов. Тогда, если наши принципы обоснованы, то из этого следует, что объекты, «введенные» неофрегеанским принципом абстракции, должны быть абстрактными объектами в этом смысле. А это значит, что обычные объекты вроде Юлия Цезаря исключены, так как совершенно ясно, что такие вещи не являются абстрактными объектами в этом смысле. Такое предложение неологицизма также обсуждается, и нет единого мнения относительно его допустимости и того, что проблема Цезаря может быть решена с его помощью. Действительно, каждое предложенное решение проблемы Цезаря в итоге приводит к обнаружению новых нюансов этой знаменитой проблемы, которая пока не получила своего окончательного решения.

2.3.3 Беспокойство относительно слишком богатой онтологии

Критика неологицизма, связанная с формулируемой проблемой относительно слишком богатой онтологии (*Worries about an overfull ontology*), вводимой принципом Юма, имеет различные направления. Первое вытекает из того факта, что принцип Юма выполним только в бесконечной области. В сырой форме возражение таково: логическая истина должна быть – или даже *определяется* как – истинная во всех моделях. Но принцип Юма не может быть истинnымв моделях с конечной областью, и, следовательно, можно возразить, что принцип Юма не может иметь статуса логической истины. Это вид более общей линии критики, которая утверждает, что, так как логика сама по себе не должна вносить каких-либо экзестенциальных допущений и если в математике постулируется существование различных видов вещей, то это не влечет за собой независимые экзистенциальные требования математики, которая может быть частью логики. Логика должна быть лишена онтологических обязательств, и не должна повлечь за собой даже существование одного объекта, а тем более, бесконечно многих. В такой форме это возражение кажется не слишком серьезным. Почему не может быть логически истинным то, что определенные объекты существуют, если эти объекты являются логическими объектами? Почему логика не должна иметь свою собственную онтологию? Такая позиция «кажется немногим большим, чем остаточным побочным продуктом логического позитивизма, который настаивает на том, что аналитические истины, как не поддающиеся проверке опытным путем, должны быть полностью лишены фактического содержания или значения, которая непостижимым образом умудряется оставаться, несмотря на почти всеобщее неприятие большинства» [130, p. 140]. Аргумент такого рода может использоваться только для установления, что что-то не является логической истиной, если уже установлено то, что должно считаться законной моделью, и не может быть установлено до рассмотрения того, что следует считать логической возможностью, а что не должно. Никто не возражает против того, чтобы принимать закон первого порядка самоидентичности «$\forall x\ x = x$» в качестве логической истины, потому что нет такой модели, в которой будет установлено отношение идентичности между понятиями разного объема. Эти так называемые модели просто исключены из рассмотрения. К. Райт настаивает на том, что он берет отдельные кванторы как неограниченные, распространяющиеся на все существующие объекты. Если он прав, думая, что полностью аналитические аргументы могут убедить нас в существовании бесконечно многих объектов, нет необходимости рассматривать так называемые модели с конечными областями. Здесь необходимо помнить, что неологицистское доказательство бесконечности объектов вытекает из принципа Юма «самопорождающимся» путем, описанным ранее. И если выдвигается требование, что они дают несколько независимых оснований для бесконечности объектов, прежде чем они допускаются к постулату принципа Юма – то это значит просто отвергнуть их проект до его начала.

Более сложная версия этой критики, однако, вытекает из анализа средств, с помощью которых неологицизм утверждает существование объектов. Изначальное беспокойство может быть обозначено таким образом: аргументы неологицистов в пользу существования различных логических объектов, будь то числа или другого рода абстрактные объекты, требует переосмысления примера правой половины некоторого абстрактного принципа в левой половине. В то время как правая половина экзистенциально не загружена и ничего не говорит о каких-то отдельных объектах, того же нельзя сказать о левой половине. Истинный пример левой половины служит средством признания существования одного предмета, и ложный пример ведет к наличию двух разных объектов. Как может одно утверждение, которое относится к объектам и позволяет нам предположить их существование, быть переформулированным содержанием другого, которое таковым не является?

Среди большинства исследователей признается, что нельзя вводить новые объекты в существование путем стипуляции. И неологицизм должен предоставить решение этого затруднения. Полная оценка этого ответа будет в той или иной степени требовать урегулирования практически всех крупных проблем в онтологии, метаонтологии, философской семантике, что в рамках данного исследования сделано не будет. Но если углубиться немного дальше в онтологические и метаонтологические обязательства, которые влечет за собой тезис неологицистов, то можно обратиться к недавней статье М. Эклунда [112]. Он утверждает, что обосновывая свою позицию на такого рода тезисе, неологицисты принимают для себя «радикально беспорядочную онтологию», и в частности своего рода максимализм о существовании. Любая теория, которая может быть оценена как истинная «по обычным меркам», которая использует индивидуальные термины для референции к некоторым примерам понятия о классах *F* будет успешной при референции к *Fs*; если мы можем вразумительно говорить в терминах «*Fs*», *F* существуют. Должны существовать автомобили, а не только молекулы, поскольку адекватно говорить об «автомобиле в моем гараже», а не о молекулах в моем гараже, которые упорядочены как автомобиль. Такие объекты, как дизъюнкции и конъюнкции должны существовать, потому что сказать «дизъюнкция p и q возникает при конъюнкции p и q», представляет собой вполне внятную и, по обычным меркам, верную переформулировку «$(p \wedge q) \models (p \vee q)$». В ответ М. Эклунду и другим, Б. Хейл и К. Райт отрицают, что они привержены чему-либо, что является своего рода максимализмом. Тем не менее, они признают, что являются приверженцами взгляда на онтологический статус сущностей, который постулируется принципами абстракции, при обращении к которым нет и не может быть серьезных сомнений в истинности перехода от правой стороны принципа абстракции к левой. Для обеспечения этого, эти сущности все же должны быть поняты как что-то меньшее, чем конкретные объекты, скорее больше похожие на свойства метафизики, которая постулирует их существование, когда для них могут быть заданы условия экземплификации (отсылки к примеру). Это, по сути, равносильно предположению, что пока существует понятийный аппарат, который позволяет говорить о таких сущностях в качестве осмысленных, (или, в терминологии Г. Фреге имеется «смысл»), референция гарантирована. Даже если это не приводит к максимализму, это все равно приводит к довольно большой онтологии, лишь на основании того, что что-то может быть осмысленно сказано или концептуально.

Эта проблема также связана с понятием «антинуля», которое порождает еще один серьезный пласт критики. К нему мы обратимся в следующей главе.

2.4 Перспективы развития философии математики неологицизма

Указанные выше проблемы являются, по всей видимости, самыми острыми для проекта шотландского неологицизма.

Существуют и другие проблемы, с которыми сталкивается неологицизм, и на которых сфокусирован любой разговор о неологицизме. Некоторые из этих проблем противостоят любой версии логицизма, и их решения могут быть необходимы в качестве «условий адекватности» последнего. Так, стэндфордская энциклопедия [180] выделяет, помимо указанных проблем (многие из которых взаимосвязаны и вытекают друг из друга), еще такие, как «*концептуализация проблемы Г. Фреге*» (как мы воспринимаем числа, если мы убеждены, что арифметика не основывается на кантовской «чистой форме интуиции времени»? Как Г. Фреге обозначил это в «Grundlagen» § 62: «как ... числа будут даны нам, если мы не можем иметь их идеи или интуиции»; «*проблема применимости*» (может ли логицизм обосновать (1) как натуральные числа могут быть применены в подсчете конечных совокупностей, и (2) как действительные числа могут быть применены в измерении непрерывно изменяющихся величин, таких как длин, промежутков времени и т. д.?); «*проблема аналитичности*» (можно ли продемонстрировать, что выбранные принципы абстракции относительно чисел являются аналитическими? Эта проблема анализируется в Главе 3 настоящего исследования); «*теоретическая инвариантность*» (натуральные числа являются всеобщими; они обладают арифметическими свойствами и входят в арифметические отношения с необходимостью. Итак, принципы абстракции для натуральных чисел должны быть совместимы с любой непротиворечивой теорией о любой области дискурса. Но действительно ли это так?) и др. (см. [180]).

Кроме того, большая часть философской дискуссии вокруг неологицизма действительно сосредоточилась на статусе принципа Юма и других принципов абстракции. Гораздо меньше внимания было уделено довольно неограниченному применению логики второго порядка в неологицистской программе. Однако многие из тех, кто активно работают в области оснований математики и математической логики, скептически относятся к логике второго порядка. Конечно, эта напряженность заслуживает более пристального внимания. Как К. Райт недавно выразился: «если логика, которая используется в абстракционистской программе действительно является, как думал Куайн, ничем иным, как теорией множеств в овечьей шкуре, то философский интерес к выполнению различных проектов местного абстракциониста, несмотря на их техническую успешность, значительно поубавится» [169, p. 152].

Было предпринято несколько попыток для решения этих проблем (см., например, [98, 121, 139, 145, 146, 150, 169] и др.), однако ряд исследователей (например, П. Раатикаинен [182]) заявляет о том, что «есть более фундаментальные причины, чтобы сопротивляться некритическому использованию логики второго порядка в качестве логики основания, по крайней мере, в контексте оснований математики» [182, p. 2]. Так же значительно в связи с абстракционистским развитием арифметики то, что арифметика – это только малая часть математики. Еще одна серьезная задача, стоящая перед неологицизмом, состоит в том, чтобы расширить понимание на другие области математики (такие, как функциональный анализ, возможно, геометрия и теория множеств). Программа предполагает поиск принципов абстракции, обладающих достаточно широкими возможностями для того, чтобы охарактеризовать более мощные математические теории, но все-таки приемлемые «без существенной эпистемологической предпосылки» (см. К. Райт [167], Б. Хейл [117]).

По сути, отвечая на вопрос, что такое неологицизм, можно ответить следующее: это программа философии математики, в которой основанием математики становятся логика второго порядка плюс принцип абстракции – принцип Юма (*Число F's такое же, как число G's, если и только если F's и G's могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие*). Сейчас, как и в свое время логицизм, неологицизм породил целый ряд интересных технических и философских вопросов. Можем ли мы найти принципы абстракции, которые позволяют нам получить классический анализ? Как насчет теории множеств? Какие свойства делают принцип абстракции «хорошим»? (Явно, что не каждый принцип абстракции хорош, так как некоторые из них прямо противоречат друг другу.) Являются ли принципы абстракции приемлемыми (контекстными) определениями? Они априорны? Они аналитичны? И т. д., и т. д., и т. д. Некоторые из этих вопросов носят общий характер, некоторые являются более техническими. Как отмечает Т. Бэйс, то, что наиболее характеризует философские вопросы, создаваемые неологицизмом – это «предельный уровень сложности, который для некоторых из нас обеспечивает уровень фрустрации» [90, p. 421].

Вместе с тем он отмечает, что есть и некоторая общая мораль всех этих замечаний: «я думаю, однако, что в нашем стремлении ответить на эти конкретные вопросы – вопросы, которые мотивированы проектом воскрешения логицизма – мы упускаем что-то важное» [90, p. 420]. Философские трудности здесь имеют истоки еще в задумке самого Г. Фреге. Дело в том, что он считал, что у математики много хороших свойств – априорность, аналитичность, достоверность, необходимость и другие – и он считал, что эти свойства составляют вместе довольно удачную связку. Однако, с развитием истории философии математики, было красочно показано, как такие связки могут развалиться. Стало понятно, что эти свойства если и уживаются вместе, то крайне проблематично. И до сих пор нет ответа на вопрос, какие именно виды свойств мы хотим получить из принципов абстракции. И «пока мы не можем решить, какие свойства математики мы хотим получить, – и действительно перестать ожидать, чтобы получить все хорошие свойства вместе – трудно понять, как возможен прогресс философии неологицизма» [90, p. 419]. Вместе с тем для оценки философской значимости программы неологицизма, вначале нужно потратить гораздо больше времени на их математику. В программе шотландского неологицизма действительно есть много хороших технических вопросов, касающихся абстракции, на которые еще не был дан ответ (или которые даже не были действительно затронуты). Пристальное внимание к этим вопросам вполне может стать предпосылкой для достижения прогресса относительно базовых вопросов философии математики. В действительности же кажется справедливым сказать, что разработка неологицизма на настоящий момент продолжает стремительно набирать обороты, и «мы можем надеяться построить неологицизм в XXI веке такой же широкой, богатой, и философски продуктивной исследовательской программой, которой стал сам логицизм в веке XX» [90, p. 420].

ГЛАВА 3. Принцип Юма и его роль в проекте неологицизма

Джорж Булос (1940-1996), профессор философии Массачусетского Института Технологии, является одним из наиболее видных специалистов в области философии математики Г. Фреге. Он показал, что система Г. Фреге в «Grundgesetze» может быть освобождена от противоречия, если заменить одну из ее аксиом, Аксиому V, принципом Юма. Работы Дж. Булоса, которые во многом диалогичны с работами К. Райта, стали точкой развития нологицизма К. Райта в различных направлениях. Сам К. Райт так оценивает вклад Дж. Булоса в развитие неофрегеанства: «прогресс, достигнутый в современной дискуссии в очень значительной мере связан с яркими и уникальными работами Джорджа, посвященными этим вопросам» [160, p. 33]. Дж. Булос в свою очередь, соглашаясь с К. Райтом в том, что «проблемы и возможности фрегевского обоснования математики остаются открытыми» и в том, что «более обширная эпистемологическая программа, которую Г. Фреге надеялся реализовать в Grundgesetze, все еще продолжает функционировать» [160, p. 3], во многом противостоит ему, предоставляя развернутую критику некоторых (в том числе и опорных) тезисов К. Райта.

Одной из таких ключевых в изучении неологицизма работ, является статья «Является ли принцип Юма аналитическим?», впервые опубликованная в 1997 году («Is Hume's Principle Analytic?».Данная работа не раз перепечатывалась. Мы будем ссылаться на нее в [160], антологии по философии, математике и логике неологицизма). В этой работе Дж. Булос сформулировал свои основные претензии относительно использования в неологицизме принципа Юма, на которые К. Райт дал ответ и комментарий в одноименной статье («Is Hume's Principle Analytic?» К. Райта впервые опубликована в 1999 г. Также перепечатана в [160]).

Дж. Булос дает убедительный ответ на заглавный вопрос: по его мнению, принцип Юма не является аналитическим. Это означает, что, несмотря на Теорему Фреге, логицизм в конечном счете «не работает»: если принцип Юма не является аналитическим, Теорема Фреге не устанавливает, что арифметика второго порядка может быть сведена только к логике и аналитическим определениям – арифметика имеет предположения, которые выходят за рамки логики. Несмотря на то, что вопрос об аналитичности принципа Юма вынесен в заголовок статьи, он, судя по всему, все же является не только не единственным, но и не главным вопросом, разбираемым Дж. Булосом. К. Райт отмечает, что возражения, выдвинутые Дж. Булосом, и их решения самим К. Райтом сосредоточены не на решении заглавного вопроса об аналитичности принципа Юма: на самом деле Дж. Булоса беспокоило не то, является ли принцип Юма аналитическим, а то, истинен ли он, и то, насколько оправданно рассматривать его таковым. Проблемные моменты можно сформулировать в форме следующих вопросов:

1. Что оправдывает принятие принципа с такими богатыми онтологическими последствиями – как мы знаем, что есть какая-либо функция, которая ведет себя как референт знака числа?

2. Какие у нас есть основания для уверенности в том, что сильная теория – арифметика Г. Фреге – к которой приводит принцип Юма, является согласованной теорией?

3. Не является ли несогласованность принципа Юма с теорией множеств Цермело-Френкеля (плюс стандартные определения) сильным основанием для сомнения в истинности принципа Юма?

4. Какое основание существует для принятия принципа, который должен служить основой для арифметики, но имеет так много избыточного содержания, выходящего за рамки арифметики?

5. С каким правом мы принимаем принцип, который, как представляется, «стоит на четвереньках» рядом с другими согласованными принципами, которые несовместимы с ним?

Относительно каждого из этих вопросов К. Райт обозначил что-то вроде направления, в котором должны быть разработаны соответствующие ответы на них Данный раздел исследования посвящен рассмотрению и анализу высказанныхДж. Булосом «опасениий» относительно принципа Юма, а также ответов самого К. Райта[1].

Дж. Булос не дает названия этим «опасениям», однако К. Райт структурирует свой ответ, называя пять указанных выше проблем следующим образом: онтологическая проблема, эпистемологическая проблема, проблема универсального числа, проблема избыточного содержания и проблема «плохой компании». Мы рассмотрим эти проблемы в том же порядке. Отметим, что постановка самих вопросов и ответы на них в значительной степени перекликаются с проблемами, которые мы обозначили в предыдущем разделе. Однако, целесообразно отдельно обратиться к ним в несколько другом, более узком аспекте, обратив внимание в первую очередь на сам принцип Юма, его статус и критику его использования.

3.1 Онтологическая проблема

Онтологическое беспокойство, каким его видит К. Райт у Дж. Булоса, воплощено в следующих отрывках: «я хочу предположить, что принцип Юма можно сравнить с высказыванием “нынешний король Франции является относящимся к королевскому” [*the present King of France is a royal*] в том, что у нас нет аналитических гарантий, что для каждого значения “F” есть такой объект, который обозначает открытое определенное сингулярное описание “число, принадлежащее F”. <…> Наша нынешняя трудность заключается в следующем: откуда нам знать, какие у нас есть гарантии, почему мы должны верить, что есть функция, которая отображает понятия на объекты так, как делает знак числа <т.е.*octothorpe*, ‘#’, символ Дж. Булоса для численного оператора – П. О. >, если принцип Юма является истинным? <…> Но есть ли у нас какие-либо аналитические гарантии того, что есть функция, которая работает соответствующим образом?» [160, p. 7-8].

---

[1] Пятый вопрос касается указанной в разделе 2.3.1 проблемы «плохой компании». В связи с этим мы не будем останавливаться на нем в данной главе.

Дж. Булос приводит этот классический пример в видоизмененной форме, желая показать, что используя аналогичный неофрегеанскому подход, семантической связи между «королем» и «королевским» достаточно для обеспечения аналитичности всего высказывания, несмотря на неспособность обозначить его субъект. Вместе с тем, высказывание «нынешний король Франции является королевским», не было бы аналитическим, даже если бы в настоящее время существовал (уникальный) король Франции, поскольку, конечно, его существование не было бы аналитическим. Онтологическая проблема, таким образом, такова: принцип Юма говорит слишком много, для того, чтобы его можно было считать аналитической истиной: «принцип Юма при внедрении в аксиоматическую логику второго порядка дает невероятно мощную математическую теорию» [160, p. 6]. Если мы принимаем аналитические принципы как свободные от содержания – в стиле простых утверждений, таких как «все холостяки не женаты»,- тогда кажется неправдоподобным, что принцип Юма квалифицируется как аналитическое утверждение. Он просто имеет слишком много содержания. Как обычно подразумевается, аналитическая истина должна содержаться в любой возможной области, или – в менее строгой концепции понимания аналитической истины – что некоторые аналитические истины содержатся в любой непустой области. Но как принцип, который влечет за собой то, что существует бесконечно много объектов, можно считать аналитическим?

Отвечая на этот вопрос, К. Райт ставит под сомнение некоторые особенности классической концепции аналитического, предпринимая попытку продемонстрировать, что существование нуля, единицы, и других кардинальных чисел, вопреки традиционному представлению, действительно можно показать аналитическим. Обратимся к этой попытке, реконструируя представленную К. Райтом цепочку рассуждений.

К. Райт отмечает, что согласно здравому смыслу, все, что вытекает из некоторого принципа (вместе с истинами логики), может рассматриваться как вытекающее только из этого принципа, соответственно, неоспоримо, что принцип Юма влечет за собой существование бесконечно многих объектов. Но принципиальное значение имеет то, каким образом выводится это следствие. Принцип Юма – универсальный количественный бикондиционал второго порядка и «мы не сможем извлечь из него существование каких-либо объектов, за исключением соответствующих исходных данных (экземпляров) его правой стороны» [160, p. 8]. Далее К. Райт предлагает сравнить то, как получаем число ноль, на основе принципа Юма:

$x : x \neq x = Nx : x \neq x \leftrightarrow x \neq x \quad 1{\approx}1 \quad x \neq x$, (1)

и то, как мы получаем направление линии из знаменитого примера Г. Фреге принципа эквивалентности направлений:

(DE) $D\underline{a} = D\underline{a} \leftrightarrow \underline{a}//\underline{a}$

Правые стороны принципов он называет «незначительным допущением» (*minor premise*). В случае с принципом эквивалентности направлений, правая сторона – это необходимая истина, по модулю существования линии *a*, что эта линия параллельна самой себе. В случае с получением нуля с помощью принципа Юма, правая сторона,

$x \neq x \quad 1{\approx}1 \quad x \neq x$, (2)

может быть установлена в логике второго порядка. И К. Райт заключает: «так что существование нуля следует из этой истины логики, вместе с принципом Юма. Если, соответственно, последнее можно рассматривать как во всех соответствующих отношениях имеющее статус, сходный со статусом определения, то существование нуля является следствием логики и определений» [160, p. 8].

И такой вывод существования нуля будет считаться соответствующим классическому объяснению аналитичности: аналитические истины следуют из логики и определений. Так что существование нуля было бы аналитической истиной.

Теперь можно утверждать, что

$x{=}0 \quad 1{\approx}1 \quad x{=}0$ (3)

является аналитической истиной (так как это следует в логике второго порядка, с предоставлением только того, что существует такое понятие, как ноль, а существование нуля было только что получено, причем получено «аналитически»). Применяя принцип Юма, получаем число один:

$x : x = x = Nx : x = x \leftrightarrow x{=}0 \quad 1{\approx}1 \quad x{=}0$ (4)

Его правая сторона – аналитическая истина (как только что было установлено). Так что его существование тоже аналитично. Аналогичным образом, мы можем получить каждое кардинальное число из предположительно аналитических допущений в логике второго порядка.

К. Райт, таким образом, получает несколько иной результат: он не выводит тезис о том, что существование бесконечного числа конечных чисел аналитично, но показывает, что можно аналитически установить существование каждого из конечных чисел (т.е., что существование каждого конечного числа может быть аналитически обосновано). И хотя сам К. Райт понимает, что это «будет в равной степени оскорбительно традиционному пониманию аналитичности», которое настаивает на экзистенциальной нейтральности и которое, судя по всему, подразумевает Дж. Булос, для него разница полученных результатов принципиальна (он не выдвигает и не пытается обосновать тезис о том, что существование бесконечного числа чисел является следствием из аналитической истины).

Решение в неофрегеанстве «онтологической» проблемы Дж. Булоса ведется в разных направлениях: некоторые авторы предлагают скорректировать сам термин «аналитический» (об этом речь пойдет в разделе 3.6) и использовать его в неклассическом понимании, другие оправдывают принцип Юма с номиналистической позиции (тогда сам факт «существования» не является проблематичным[1]). Однако сам К. Райт исходит из классического понимания

[1] О. Буэно в [98] отмечает относительно того, что принцип Юма не может быть аналитическим в силу того, что он влечет за собой существование бесконечно многих объектов следующее: «онтологическая обязанность является проблемой только для платониста. Именно платонист настаивает на том, что, выполняя арифметику, мы онтологически привержены области абстрактных объектов (натуральных чисел) и что, учитывая принцип Юма, содержание

аналитичности. Для него возможность выведения существования нуля из принципа Юма является не аргументом против аналитичности принципа Юма, но причиной, по которой «под угрозой» находится сама традиционная концепция аналитичности. Приведем его слова: «согласно классической позиции аналитичности, аналитическими истинами являются те, которые следуют из логики и определений. Поэтому, если существование нуля, единицы и т. д. следует из логики плюс принцип Юма, то при условии, что последний имеет статус, соответствующий определению, будет аналитическим в классическом смысле, что *n* существует для каждого конечного числа *n*. Идея, которая стандартно сопровождает классическую концепцию, что – с, возможно, очень немногими, скромными исключениями – экзистенциальные утверждения никогда не могут быть аналитически истинны, потенциально находится в напряжении с классической концепцией. Если принцип Юма имеет статус, существенно не отличающийся от определения, то получается, что классическая концепция не вяжется с этой стандартной сопутствующей идеей» [160, p. 20].

Одно из основных утверждений неофрегеанства (которое по совместительству является причиной, по которой принципу Юма отводится столь высокая роль в построении арифметики) заключается в том, что принцип Юма действительно имеет такой статус: его можно рассматривать как объяснение концепции кардинального числа в целом и конкретных кардинальных чисел в частности (Дж. Булос отмечает, что есть «терминологические» пункты, по которым он не согласен с К. Райтом. Наделение принципа Юма статусом определения является одним из таких: «<…> если бы принцип Юма был показан

арифметики требует существования бесконечно многих таких объектов. <…> При номиналистском прочтении принципа Юма вопрос о содержании и онтологической приверженности просто исчезает. Если принцип Юма не влечет за собой существование бесконечного числа абстрактных сущностей, гораздо более правдоподобно утверждать, что он действительно аналитический». Как номиналист, он отстаивает то, что такие сущности, объекты, существование которых следует из принципа Юма, не являются абстрактными. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом. Отметим лишь, что вряд ли такое решение удовлетворительно для неофрегеанства, чье второе название, отражающее сущность проекта, – абстракционаизм. (Р. Кук, редактор сборника работ по неофрегеанству [160], и вовсе считает, что абстракционизм – это единственное корректное название проекта К. Райта и Б. Хейла).

как аналитический или как что-то сродни тому, что можно назвать определением. Но я сомневаюсь, что это может быть сделано» [160, p. 4]) .

Дж. Булос спрашивает: «если числа должны быть идентичными тогда и только тогда, когда понятия, числами которых они являются, равночисленны, какая у нас есть гарантия, что каждое понятие имеет число?» [160, p. 9] и предполагает, что такой гарантии (во всяком случае аналитической) нет. К. Райт же заявляет, что «эта, казалось бы, здравомыслящая и обоснованная позиция, непрочна» [160, p. 20] и предлагает еще раз рассмотреть принцип параллелизма DE. Он перефразирует вопрос Дж. Булоса относительно существования референтов принципа Юма и формулирует такой вопрос: как мы узнаем, что есть какие-либо объекты, которые ведут себя так, как должны вести себя референты терминов направления, учитывая их введение принципом эквивалентности направлений (DE); то есть, учитывая, что они идентичны в том случае, если связанные линии параллельны и различны в том случае, если они таковыми не являются? Разве мы не должны просто сказать, что то, что есть такие вещи, как направления, будет условием их идентичности и различимости? В таком случае следующий принцип будет считаться абсолютно аналитическим: для любых линий a и b,

$$((\exists x)(\exists y)(x = \mathrm{D}a \,\&\, y = \mathrm{D}b)) \rightarrow (\mathrm{D}a = \mathrm{D}b \leftrightarrow a//b) \quad (4)$$

Условие истинности антецедента должно предусматривать некоторое представление о том, что значит быть истинным для контекстов формы «p = D*a*» и «q = D*b*». Однако такое представление на данный момент не реконструировано (предложенные достаточные условия истинности таких контекстов, где «p» и «q», являются, соответственно, терминами направления, включенными в DE, были отвергнуты Дж. Булосом и Х. Филдом, а новые не предложены). Так что, заключает К. Райт, «если мы встаем на сторону Филда и Булоса, то не имеем ни малейшего представления, собственно, о том, в чем может состоять удовлетворение антецедента вроде бы более незначительной и более сдержанной формулировки» [160, p. 21].

Г. Фреге пытался решить вопрос о том, как мы достигли и оправдали концепцию области абстракта. И если настаивается на том, что принципы абстракции всегда нуждаются в обосновании путем референции к ранее заданной области сущностей, это лишь предполагает – без аргументации – что они бесполезны в этом проекте. И до сих пор не представлена альтернативная концепция, как проект может быть выполнен. Неофрегеанское утверждение, напротив, заключается в том, что при правильных условиях такие принципы доступны для того, чтобы зафиксировать условия истинности контекстов идентичности для определенных сущностей и, таким образом, – с учетом соответствующих исходных данных его правой стороны – внести свой вклад в определение этого, и того, как мы можем знать, что сущности такого рода существуют. Поэтому К. Райт считает, что поставленный Дж. Булосом вопрос «если числа должны быть идентичными тогда и только тогда, когда понятия, числами которых они являются, равночисленны, какая у нас есть гарантия, что каждое понятие имеет число?» [160, p. 9] имеет смысл только в том случае, если дано, что существование чисел является дополнительным фактом, чем-то, что (простая) равночисленность понятий оставляет нераскрытым. Но идея К. Райта состоит в том, чтобы установить принцип Юма в качестве объяснения таким образом, чтобы зафиксировать такое понятие кардинального числа, что равночисленные понятия F и G представляет собой необходимое и достаточное для идентификации числа Fs с числом Gs, так что больше ничего и не требуется для существования этих чисел сверх равночисленности понятий (т.е., экземпляр левой стороны принципа абстракции представляет собой реконцептуализацию положения дел, изображенного справа. Эта идея более полно обсуждается в ранних разделах К. Райта [165] и Б. Хейла [117]. К. Райт говорит, по сути, что положение дел «Fs равночисленно G» может быть «переосмыслено» как положение дел, связанное с существованием чисел: совокупность положений дел о равночисленности может быть «реконцептуализирована» как положения дел, включающие существование области чисел). К. Райт отмечает, что «вопрос Булоса либо игнорирует этот аспект неофрегеанской позиции, либо предполагает, что он непродуман» [160, p. 22]. Здесь стоит отметить, что рассмотрение такого ответа К. Райта упирается в еще один терминологический спор: Дж. Булос не удовлетворен пониманием понятия реконцептуализации, которое представляет К. Райт. Кроме того, он задается еще одним справедливым вопросом, на который К. Райт не дает ответ в данной работе: «К. Райт хочет разрушить традицию <понимания аналитической истины – П.О.>, но следует задаться вопросом, как утверждение, невозможное в том случае, если существует только конечное число объектов <принцип Юма, напомним, не выполняется в конечной области – П.О.>, может считаться аналитическим» [160, p. 7]. Более того, поскольку теория, которая является результатом принципа Юма, настолько сильна, возникает серьезное беспокойство о согласованности теории. Это приводит нас ко второму серьезному «беспокойству» Дж. Булоса.

3.2 Эпистемологическая проблема

Следующее возражение Дж. Булоса, которое рассматривает К. Райт, называя это «эпистемологической проблемой», выражено в следующем пассаже Дж. Булоса: «(это не невротично так думать) мы не знаем, что арифметика второго порядка <…> является согласованной. Действительно ли мы знаем, что некий умник Рассел 23-го века не сделает для нас то, что сделал Рассел для Г. Фреге? Обычный аргумент, с помощью которого мы думаем, что можем убедить себя в согласованности анализа - «рассмотрим мощность множества натуральных чисел… » - вопиюще круговой (циклический). Вероятно, было бы разумно сделать ставку на согласованность этой теории <арифметики Г. Фреге – П.О.>, но мы не должны отчаиваться: мы не знаем, что они таковы, и мы не должны терять надежду, что кто-то однажды докажет в одной из них, что 0 = 1. Учитывая неясность относительно непротиворечивости арифметики Г. Фреге, как мы (осмелимся) называть принцип Юма аналитичным?» [160, p. 14-15].

К. Райт в ответ на этот пассаж отмечает, что теперь и сам не уверен, невротично ли считать арифметику Г. Фреге согласованной. Решение поставленной проблемы он видит зависимым от очередной терминологической путаницы, принятия Дж. Булоса за аналитичность ясность, или, по крайней мере от того, что он «настаивает на том, что ясность является предварительным условием для обоснованных требований об аналитичности» [160, p. 22]. В неофрегеанстве принцип Юма служит объяснением понятия кардинального числа, и коль скоро принцип Юма успешен в этом, неофрегеанцы уверены, что «он опирается на своего рода истину, которой обладает любое успешное имплицитное определение - и, следовательно, является аналитическим в любом вытекающим отсюда смысле» [160, p. 22].

О. Буэно, профессор философии в университете Майами, в отличие от К. Райта не сомневается относительно того, что арифметика Г. Фреге является согласованной и настаивает на том, что, действительно, невротично думать, что арифметика второго порядка может оказаться несогласованнной – особенно используя аргумента Дж. Булоса, который соединяет (возможно) несогласованную арифметику Г. Фреге с (возможной) несогласованностью теории Цермело-Френкеля. Он пишет: «в конце концов, просто нет доказательств того, что ZF и арифметика второго порядка противоречивы – совсем наоборот. Вероятность того, что “некий умник Рассел 23-го века [сделает] для нас то, что сделал Рассел для Фреге”, гораздо более отдаленная, чем совместный накопленный опыт всего математического сообщества почти за один век использования ZF и арифметики второго порядка без обнаружения каких-либо несоответствий. Отсутствие доказательства согласованности типа Генцена для арифметики второго порядка или конструктивного доказательства согласованности для ZF кажется мало беспокоящим, когда мы сталкиваемся со столетним успешным использованием этих двух теорий – опять же, без несоответствия. По этим причинам утверждение о том, что “мы не знаем, что арифметика второго порядка согласованна”, просто необоснованно» [98, p. 111].

3.3 Проблема универсального числа

Построение чисел на основе принципа Юма полностью опирается на легитимность применения на первом этапе численного оператора к некоторому обязательно пустому понятию, причем понятие, не являющееся самоидентичным (самотождественным), является стандартным выбором. На первый взгляд, нет никаких препятствий для применения оператора к дополнению любого такого понятия, поэтому достигается универсальное число, анти-нуль (*anti-zero*) – число абсолютно всего, что есть. Принцип Юма, сформулированный стандартно, не создает никаких препятствий для такого применения. Как Дж. Булос излагает это понятие, «поскольку существует ноль, число вещей, которые не являются самоидентичными, поэтому, учитывая позицию о числе, которую мы рассматривали, должно быть несколько вещей, которые самоидентичны. Число всех вещей, которые есть» [160, p. 15].

Проблема заключается в том, что в теории множеств Цермело-Френкеля было показано, что кардинального числа, которое является числом всех множеств, не существует. А значит, «рассматриваемая нами теория чисел, арифметика Г. Фреге, несовместима с теорией множеств Цермело-Френкеля плюс стандартные определения <…> тот, кто всерьез считает, что [принцип Юма является аналитической истиной], должен быть обеспокоен несовместимостью такого следствия арифметики Г. Фреге, что существует такое число, как анти-нуль, с утверждением теории Цермело-Френкеля плюс стандартные определения <…> что такого числа нет» [160, p. 15].

Как писал Дж. Булос, хотя это возражение «может сначала показаться недопустимым как глупое или тривиальное», оно, возможно, является «самым серьезным из всех»: аналитические истины не должны противоречить нашим лучшим математическим теориям. Что может ответить на это К. Райт? Он соглашается с тем, что это будет слишком высокой ценой – считать теорию множеств Цермело-Френкеля аналитически ложной для того, чтобы назвать принцип Юма (или любой другой принцип) аналитически истинным. Но он приводит основания для того, чтобы показать, что такая причинно-следственная связь не является необходимой. Он отмечает, что сформулированная Дж. Булосом проблема зависит от перекрестной идентификации референтов терминов арифметики Г. Фреге и терминов в теории множеств Цермело-Френкеля. Однако, числа, подобные анти-нулю, не обязаны быть множествами. Впрочем, основания для беспокойства о согласованности принципа Юма со стандартной теорией множеств лежат глубже вопроса о перекрестной идентификации терминов. Теория множеств Цермело-Френкеля подразумевает, что нет множества всех множеств и нет никакого числа множеств. И независимо от того, идентифицируется ли анти-нуль с множеством, посредством принципа Юма мы можем получить такое число: соответственно, столкновение этих двух теорий неизбежно.

К. Райт вновь обращается к принципу DE. В силу рефлексивности отношения *x параллельна y* при наличии принципа DE, *a* будет иметь направление, чем бы эта прямая линия *a* ни была. И К. Райт формулирует вопрос: «каковы последствия применения DE для случая, когда *a* и *b* не параллельны, потому что они *даже не являются линиями*, как, например, моя шляпа не параллельна моей обуви?» [160, p. 24]. Мы могли бы определить оператор D таким образом, чтобы каждый объект имел направление: в случае объекта, который не может быть параллелен ничему другому, потому что он попросту не является линией, он имел бы направление, которое больше ничто не имеет. Однако такая формулировка не будет удовлетворительной: если отсутствие параллелизма между моей шляпой и моей обувью будет зависеть от принятия положения о неспособности любого объекта быть параллельным чему-либо, то по этой же причине они не параллельны сами себе, а DE не дает стимула рассматривать что-либо как имеющее направление «как таковое». И К. Райт подводит итог этому примеру: «так же, как не каждый объект подходит для определения направления, так же мы не должны без предисловий предполагать, что каждое понятие – каждая сущность, выражение для которого является допустимой заменой для связанных вхождений предикатных букв в принципе Юма – является таким, чтобы определить число» [160, p. 24].

Он утверждает, что для изгнания анти-нуля необходимо обосновать утверждение, что несмотря на то, что к несамоидентичному (или любому другому самопротиворечивому) понятию возможно применить числовой оператор, к его «дополнению» применить его нельзя.

К. Райт видит два способа установить это обоснование. Первый представляет из себя следующее размышление. Смысл ответа на вопрос «сколько имеется Fs?» сопряжен со специальным классом подстановок для F: того, что называется счетными существительными, или выражением понятий о классах. Обычное интуитивное понимание состоит в том, что понятие о классах связано с критерием применения – различием между вещами, к которым оно применяется и теми, к которым оно не применяется — и критерием идентичности: некоторым принципом, определяющим значения истинности контекстов формы «X тот же F, что и Y». «Дерево», «человек», «город», «река», «число», «множество», «время», «место», являются, по крайней мере, в определенных целях, понятиями о классах в предполагаемом смысле. Напротив, «красный», «состоящий из золота», «большой» – в общем, чисто качественные предикаты, предикаты конституции и атрибутивные прилагательные таковыми не являются. Назовем последний класс выражений простыми атрибутивами. В том случае, где F является простым атрибутивом, вопрос «сколько имеется Fs?» при прочих равных условиях не имеет смысла, и «число Fs», соответственно, не имеет определенную референцию. К. Райт полагает, что понятие «самоидентичное» – это простой атрибутив. Простые атрибутивы в определенных случаях поддерживают вопросы относительно кардинального числа, когда их сфера ограничивается каким-то конкретным понятием о классах: например (примеры К. Райта), может быть определенное количество «красных яблок в чаше» или «золотых колец в окне ювелира». Если бы «самоидентичное» было понятием о классах, то из этого бы следовало, что можно установить определенное число «красных самоидентичных в чаше» и «золотых самоидентичных в окне ювелира». Однако, поскольку «F и самоидентичное» эквивалентно «F», отсюда следует, что не может быть определенного числа там, где нет определенного числа Fs. Итак, «самоидентичное» не является понятием о классах. Если мы возьмем, что, за исключением случаев, когда F имеет пустой объем на чисто логических основаниях, только понятия о классах, и понятия, образованные путем ограничения простого атрибутива для понятия о классах, имеют кардинальные числа, из этого следует, что нет универсального числа. Этот первый способ не касается случаев, когда мы имеем дело с результатами применения числового оператора к понятиям, которые (предположительно) являются понятиями о классах, но «опасно» велики (например, все порядковые числа). Соответственно, потенциальное столкновение принципа Юма с теорией множеств Цермело-Фраенкеля все еще имеет место.

Второй способ, предлагаемый К. Райтом, состоит в «принципиальном возражении против идеи о том, что должны быть определенные числа, связанные с этими “опасно” большими понятиями» и касается «заманчивого» понятия *бесконечной расширяемости* (*indefinite extensibility*). Предположение о том, что Fs, составляя множество, должны иметь определенное кардинальное число, кажется естественным и хорошо мотивированным. Однако многочисленные исследования показали, что не обязательно рассматривать область объектов, охваченную арифметикой Г. Фреге, через понятие множества – имеется другая альтернатиная интерпретация.

Так, парадокс Кантора показывает, что не может быть никакого универсального множества – никакой абсолютно всеохватывающей тотальности, которая подчинена, например, операциям и принципам, которые обеспечивают доказательство теоремы Кантора. Это не то же самое, что сказать, что неограниченная квантификация первого порядка является незаконной – что, конечно, было бы фатальным для всего проекта Г. Фреге. Дело скорее в том, что объекты, которые находятся в пределах такой неограниченной квантификации составляют не определенную совокупность, но, как выразился М. Даммит «бесконечно расширяемую» – совокупность такого рода, что любая попытка рассматривать ее как определенное множество объектов будет способствовать указанию на новые объекты, которые, интуитивно, должны находится в пределах совокупности, но в силу потенциального противоречия это не допускается.

К. Райт находит привлекательной эту идею М. Даммита, согласно которой фундаментальные классические математические области, такие как натуральные или действительные числа, должны рассматриваться как бесконечно расширяемые. Вопросы, поставленные этой теорией, рассматриваются в современной литературе (см., например, [142]). И, как отмечает К. Райт, «если есть что-либо вообще в понятии бесконечно расширяемой совокупности, <…> одно принципиальное ограничение, налагаемое на принцип Юма, несомненно, будет заключаться в том, что F и G не будут связаны с такими совокупностями» [160, p. 26]. Этот второй способ для решения беспокойства относительно существования анти-нуля основан на том, что когда диапазон как индивидуальных, так и переменных более высокого порядка неограничен, дополнение любой определяемой конечной концепции, по-видимому, всегда является бесконечно расширяемой совокупностью.

3.4 Проблема избыточного содержания

Эта проблема, которую, по собственному возражению К. Райта, он не до конца понимает, выражена в следующем пассаже Дж. Булоса: «известно, что принцип Юма не следует <…> из соединения двух его самых сильных следствий: <…> утверждений, что ничто не предшествует нулю и что то, что предшествует – это взаимно-однозначное отношение. Если принцип Юма аналитичен, то он должен быть сильнее <…>, чем некоторые из его сильных последствий. Также известно, что арифметика следует только из этих двух утверждений <…> столкнувшись с такими результатами, как мы можем действительно хотеть называть принцип Юма аналитическим?» [160, p. 6].

Это возражение получило развитие в работе Р. Хека [123]. Р. Хек подчеркивает, что существует длительный концептуальный переход, участвующий в достижении концепции кардинального числа, зафиксированной в общей форме в принципе Юма для любого, чье предыдущее знакомство с кардинальным числом – так сказать до-канторовским – ограничено конечной арифметикой и ее приложениями. Длина перехода отражается в результатах о теоретико-доказательственной силе различных систем, включая фрегевскую арифметику (то есть принцип Юма плюс логика второго порядка) – арифметику Пеано второго порядка и некоторых посредников, которые Р. Хек демонстрирует, опираясь на работу Дж. Булоса. Вот его вывод: «принцип Юма, является он концептуальной истиной или нет, не может быть тем, что лежит в основе нашего знания арифметики. И никакие размышления о природе арифметической мысли никогда не сможет убедить кого-либо ни в принципе Юма, ни даже в согласованности понятия численности, которое якобы аналитично. Конечно, любой рационалистический проект такого рода должен будет ссылаться на различие между “порядком открытия” и “порядком обоснования”. Но возражение не в том, что принцип Юма не известен обычным ораторам, и не в том, что было время, когда были известны истины арифметики, но принцип Юма известен не был. Оно заключается в том, что, даже если принцип Юма мыслится как “определение” или “введение” или “пояснение” нашего нынешнего понятия численности, концептуальные ресурсы, необходимые для признания согласованности этого понятия (не говоря уже об истине принципа Юма) значительно превышают концептуальные ресурсы, используемые в арифметических рассуждениях. Поэтому версия логицизма Райта является несостоятельной» [123, p. 597-598].

Сам Р. Хек рассматривает вариант некоторой версии принципа Юма, ограниченной конечными понятиями[1]: может ли такая версия быть существенной

[1] FHP: HP: $(\forall P)(\forall Q)(NUM(P) = NUM(Q) \leftrightarrow ((Px \approx Q) \vee (Inf(P) \wedge Inf(Q))))$ (здесь «Inf(P)» обозначает утверждение второго порядка, что существует бесконечно много P’s).

Ограниченный принцип Юма (*Finite Hume’s Principle*, сокращенно FHP) обеспечивает кардинальное число для каждого конечного понятия, но отображает любое понятие с бесконечным числом экземпляров на один и тот же «плохой» объект. Теорема Г. Фреге выполняется при использовании такого видоизмененного принципа (поскольку конечные кардиналы, т. е. натуральные числа, ведут себя так же, как и в случае принципа Юма). Однако в качестве правильного обзора его конститутивных принципов кем-то, обладающим только концептуальными ресурсами, развернутыми в конечной арифметике кардиналов и ее приложениях. Но К. Райта интересует не эта «ограниченная» версия принципа Юма. Он сосредотачивается на выяснении того, действительно ли это возражение, касающееся «концептуального превышения принципа Юма над арифметикой Пеано второго порядка» наносит серьезный ущерб утверждениям неофрегеанства.

Допустим, что признание истины принципа Юма не может быть основано исключительно на аналитическом осмыслении понятий и принципов, используемых в конечной арифметике. Вместе с тем вопрос, несомненно, касается обратного направления: вопрос заключается в том, может ли быть достигнут доступ к этим понятиям и подтверждению этих принципов с помощью принципа Юма и может ли сам по себе принцип Юма иметь своего рода концептуальный статус, который сделал бы этот результат интересным. Но, по мнению К. Райта, «никакое частное мнение об этом не может быть результатом просто размышления о том, что концептуальные ресурсы, задействованные в принципе Юма, в той мере, в какой речь идет о распространении понятия кардинального числа на бесконечный случай, значительно превышают те, которые участвуют в обычной арифметической компетенции» [160, p. 27]. Кроме того, неясно, как кто-либо, желающий продемонстрировать аналитичность арифметики (соответственно, в первую очередь, сам К. Райт) может согласиться с правилами дебатов, подразумеваемыми в обсуждении Р. Хека. Эти правила требуют, чтобы некто представил некоторый принцип, который предположительно является

нет наибольшего кардинального числа, так как «плохой» объект, который является значением «NUM», присваивается любому бесконечному понятию и не может быть интерпретирован как число (ограниченный принцип Юма отображает понятия различных численностей на «плохой» объект в любой бесчисленной модели). Таким образом, ограниченный принцип Юма не влечет за собой существование каких-либо странных кардинальных чисел, таких как анти-нуль. Тем не менее, он предусматривает общий «плохой» объект, так же, как рассмотренный ранее New V. В то время как такой дополнительный объект, как и анти-нуль, кажется, не нарушает никаких интуиций относительно типа порядка кардинальных чисел, они влекут за собой разные, но одинаково серьезные проблемы. Более подробно об этом принципе: в работе самого Р. Хека, [123], а также в статье МакБрайда [137].

аналитикой обычных арифметических понятий в точном смысле таким образом, что он может быть признан систематизирующим эти обычные понятия и их теорию доказательств. Необходимым условием успеха неофрегеанского проекта является то, что соответствующий принцип не только порождает теорию, в рамках которой арифметика может быть истолкована – между ними должна быть более тесная концептуальная связь, чем эта. Но, заключает К. Райт, «нет необходимого условия для удовлетворения этого необходимого условия, чтобы не было концептуального избытка аксиомы над теорией» [160, p. 28].

3.5 Значение понятия «аналитичность» и статус принципа Юма

Дж. Булос пишет: «таким образом, трудно понять, как в любом смысле слова “аналитический”, ключевую аксиому теории, которая не известна нам как согласованная и которая противоречит нашей самой устоявшейся теории числа (при естественном прочтении ее примитивов) можно рассматривать как аналитическую» [160, p. 15]. Хотя Дж. Булос и говорит о «любом смысле» слова аналитический, из его статьи становится понятно, что смысл, который подразумевает сам Дж. Булос – это традиционное понимание термина «аналитический», то есть рассмотрение аналитических истин как истинных в силу значения. И с точки зрения некоторых авторов, определив это понятие достаточно точно для определенных классов языка, мы увидим, что есть по крайней мере один, в котором принцип Юма действительно будет аналитическим. Например, Р. Джонс в [178] демонстрирует аналитичность принципа Юма (несмотря на то, что его личное мнение относительно него таково, что принцип Юма «не дает хорошей основы ни для семантики, ни для доказательства арифметических предложений») следующим образом. Он определяет семантику для языка первого порядка как непустое множество интерпретаций этого языка, которое мы будем называть «предполагаемыми» интерпретациями, и которые являются именно теми интерпретациями нелогических констант, которые согласуются с (неформально предполагаемой) семантикой. Язык первого порядка вместе с семантикой для этого языка может называться интерпретируемым языком первого порядка. Тогда предложение в интерпретируемом языке первого порядка будет аналитическим, если оно истинно во всех предполагаемых интерпретациях.

Для обсуждения принципа Юма приведенное выше определение аналитичности может быть распространено на логику более высокого порядка с ее стандартной семантикой путем замены «первого» на «более высокий» порядок. Р. Джонс считает, что такое понятие аналитичности не только хорошо определено (и намного лучше определено, чем большинство понятий в философии), но и что это определение для рассматриваемых классов языков является точным отображением понятия «истинно в силу его значения». Хотя концепция аналитичности теперь точно и полностью определена, ее применение зависит от семантики соответствующих языков. Семантику некоторых языков (например, теории множеств первого порядка) не так просто точно определить (или, по крайней мере, договориться о том, как она должна быть определена). Понятие аналитичности по отношению к конкретному языку унаследует любую неточность, найденную в семантике языка. Классический пример точной, но неформальной семантики – язык первого порядка «истинной арифметики». Семантика этого языка первого порядка «истинной арифметики» может быть определена, сказав, что у него есть только одна предполагаемая интерпретация (с точностью до изоморфизма), которая является натуральными числами. Предложения истинной арифметики при этой семантике и определении аналитичности, приведенном выше, являются аналитическими истинными, и в этой терминологии истина логической доктрины о том, что «арифметика – аналитическая» устанавливается без какого-либо рассмотрения аксиом. Что касается принципа Юма, то в рамках предложенного определения, мы можем определить язык (назовем его «арифметика Фреге»), который является языком второго порядка с «не-логическим» знаком функции «#», чьей интерпретацией является именно та, в которой принцип Юма истинный в соответствии со стандартом семантики второго порядка. В этом языке принцип Юма и все арифметические истины, которые выводятся из него, являются аналитическими.

Еще одно замечание по поводу самого понятия аналитичности делает О. Буэно. Он полагает, что в контексте обсуждения работы Дж. Булоса уместно «интуитивное понимание аналитичности»: например, принцип является аналитическим, если он истинен в силу значения его определяющих терминов. Это не определение аналитичности; это лишь один из способов указать, как используется этот термин. В любом случае, это, по-видимому, рабочее понятие аналитичности, которое Дж. Булос сам использует в своей работе. С этой отправной точки О. Буэно предлагает найти критерий аналитичности, который поможет нам решить, является ли данное предложение аналитическим или нет. И предлагает (для примера) следующий критерий:

(C) предложение S является аналитическим тогда и только тогда, когда отрицание S является противоречивым.

Что касается принципа Юма, то в контексте логики второго порядка он выполняет данный критерий. Предположим, что принцип Юма терпит неудачу в арифметике второго порядка. То есть, предположим, что существует взаимно-однозначное соответствие между понятиями, F и G, а F и G не являются равночисленными. Если это так, то существует нестандартная модель арифметики, в которой, несмотря на взаимно-однозначное соответствие между F и G, существует, скажем, больше Fs, чем Gs. Но, как известно, в арифметике второго порядка нет нестандартных моделей (более детально об этом в работе самого С. Шапиро [149]). Таким образом, отрицание принципа Юма явно приводит к противоречию, и критерий (C) удовлетворен. Этот критерий, впрочем, О. Буэно не предлагает в качестве убедительного доказательства аналитичности принципа Юма. Он берет его в качестве примера, чтобы указать на две особенности, которые надо учитывать, отвечая на вопрос об аналитичности принципа Юма. Первое замечание таково: согласно указанному критерию, ряд математических аксиом не будет классифицироваться как аналитические (и не представляется таковым): отрицание таких аксиом, как правило, не противоречиво. Таким примером будет пятый постулат Евклидовой геометрии, аксиома выбора и аксиома основания в теории множеств, так как есть Неевклидовы геометрии, и теории множеств, в которых не удается выбрать аксиому, и не вполне обоснованные теории множеств. И О. Буэно задается вопросом (и сам же на него отвечает): «если некоторые математические аксиомы не являются аналитическими, учитывая, что их отрицание не является противоречивым, каков статус математических теорем? <…> важно отделить роль аксиом (в математической теории) от роли, которую играют теоремы — хотя различие между аксиомами и теоремами не является абсолютным» [98, p. 112].

И второе, на что акцентирует внимание О. Буэно: критерий (C) может быть надлежащим образом применен только после определения логики, лежащей в основе. Понятие противоречивости, предполагаемое в подпункте (C), конечно, зависит от используемой логики: «некоторые логики могут утверждать выводы, которые недопустимы в других логиках, и поэтому противоречия, полученные в одной логической системе, не могут быть получены в других. Вместо того, чтобы указывать на слабость критерия (C), скажем, что зависимость от логики на самом деле является силой критерия. Аналитичность, будучи лингвистическим понятием, зависит от принимаемой логики, – и это именно то, что (C) подчеркивает» [98, p. 112]. О. Буэно подчеркивает, что приведенный критерий лишь указывает на один путь, который можно было бы использовать для демонстрации аналитичности этого принципа. И, «если эта мотивация работает, возможно, не так уж и невозможно защищать идею о том, что принцип Юма может быть в конце концов аналитическим» [98, p. 113].

Изменение понятия аналитичности также можно увидеть в контексте критики принципа Юма. Принцип Юма в качестве основания арифметики критикуется как самим Г. Фреге, так и представителями современной философии математики. Однако, аргументы Г. Фреге и современные аргументы в корне различны: Г. Фреге полагал данный принцип слишком слабым для фундамента арифметики, современные же философы математики обеспокоены тем, что принцип Юма является слишком сильным для базиса арифметики, то есть его введение имеет слишком большие (экзестенциальные) последствия. Чтобы понять причину такого изменения в оценивании принципа Юма, рассмотрим критику этого принципа в этих двух направлениях:

Сам Г. Фреге отвергает принцип Юма в силу т.н. возражения Юлия Цезаря. Его критика использования принципа Юма имеет два аспекта: Г. Фреге уверен, что Юлий Цезарь не число, и он считает, что у всех нас есть сильная интуиция об этом. То есть должна существовать онтологическая область чисел, которая отличается от «обычных» объектов, а принцип Юма не передает эту интуицию должным образом. Это онтологическое беспокойство Г. Фреге. Кроме того, Г. Фреге утверждает, что определение чисел должно быть четким и информативным таким образом, что, когда число не дается в виде некоторого #F, должен быть способ распознавания этого числа. Это можно назвать эпистемологической проблемой. Другими словами, принцип Юма не предоставляет нам критериев распознавания чисел, которые представлены нам не в форме «число F».

Таким образом, для Г. Фреге логическое основание арифметики должно быть в то же время онтологически и эпистемологически информативным. Отказ Г. Фреге от использования принципа Юма заключается в том, что он слишком слаб: хотя Г. Фреге разделяет аналитичность принципа Юма, он не признает, что он имеет достаточную силу, чтобы служить в качестве фундаментальной аксиомы (т.к. не выполняет требования эпистемологической полезности). Принцип Юма, в силу проблемы Юлия Цезаря, не является подходящим кандидатом для заложения основания арифметики.

Теперь перейдем к сравнению собственного отказа Г. Фреге от принципа Юма и современных аргументов против подхода неологицизма. Это сравнение, как видится, является хорошим примером того, как изменилось наше мышление с развитием аналитической философии. Современная критика сосредоточена на том, что принцип Юма подразумевает существование бесконечно большого числа чисел, и это кажется слишком сильным онтологическим обязательством. В настоящее время широко признается, что основная трудность предоставления аналитической основы математике заключается в том, что аналитические принципы никогда не должны иметь экзистенциальных обязательств и, следовательно, не могут заложить основу для фактов в математике, таких как «существует более двух простых чисел». Поскольку принцип Юма способен производить экзистенциальные утверждения, он слишком силен, чтобы быть аналитическим в традиционном смысле этого понятия. Среди неологицистов широко признается, что принцип Юма не аналитичен в стандартном смысле. Однако, они утверждают, что дело не в том, является ли принцип Юма аналитическим в традиционном смысле аналитичности: тот факт, что принцип Юма интуитивно очевиден, говорит о том, что само понятие аналитичности может быть открыто для пересмотра, чтобы мы могли рассматривать действительные (действующие) неаналитические принципы особым образом. Таким образом, задача неологицистов, как они ее ставят, состоит в том, чтобы сформулировать и обосновать новое понятие аналитичности – уметь прояснить интуицию, что аксиомы, подобные принципу Юма, уже «достаточно аналитичны». Неологицизм стремится развивать такое понятие аналитичности, что арифметика может рассматриваться как надлежащим образом основывающаяся на логике, опирающейся на непреложный факт, что Теорема Фреге уже сводит арифметику к логике второго порядка и принципу Юма.

Вопрос о том, подходит ли принцип Юма для основополагающего использования, и какое понятие аналитичности подходит для дальнейшего развития основ математики, все еще остается достаточно открытым. Он требует значительных усилий со стороны неологицистов, чтобы сформулировать и обосновать новое понятие аналитичности, которое может открыть новый интерес к ранним произведениям аналитической философии. Разница критики принципа Юма свидетельствует о значительном прогрессе, который был достигнут в понимании аналитических понятий через развитие логики и аналитической философии. Переход от оптимизма Г. Фреге к современному скептическому отношению относительно основополагающих вопросов и необходимость переопределения аналитичности показывает наш прогресс в понимании основ математики. Это сравнение собственного отказа Г. Фреге от принципа Юма и современных аргументов против подхода неологицизма демонстрирует, как изменилось наше мышление с развитием аналитической философии.

Как уже было отмечено, заглавный вопрос об аналитичности принцип Юма – не самый важный вопрос, поднимаемый в дискуссии К. Райта и Дж. Булоса. Под угрозой, скорее, находится вопрос об источнике нашего права на принцип Юма. Как К. Райт справляется с этой угрозой? Он формулирует основной тезис неофрегеанства (что знание фундаментальных законов арифметики (по существу, аксиом Дедекинда-Пеано) и, следовательно, существование ряда удовлетворяющих их объектов, может быть априорно основано на принципе Юма как объяснении концепции кардинального числа в целом и конечного кардинального числа в частности), который состоит из четырех утверждений:

1. Лексика логики высшего порядка плюс оператор численности (*octothorpe*), знак числа или *«Nx : ... x ...»*, обеспечивает достаточную определяющую основу для утверждения основных законов арифметики;

2. Сформулированный таким образом принцип Юма предусматривает выведение этих законов в рамках логики высшего порядка;

3. Тот, кто понимает язык высшего порядка, к которому добавлен оператор численности, узнав, что принцип Юма регулирует значение этого оператора, получит все, что необходимо знать, чтобы интерпретировать любое из новых утверждений, которые затем будут сформулированы;

4. Последнее и самое главное, что принцип Юма может быть заложен без существенных эпистемологических обязательств: что он может быть просто определен как объяснение смысла высказывания об идентичности чисел, и, что помимо вопроса об удовлетворении истинностных условий, которые он тем самым устанавливает для таких утверждений – не возникает ни одного компетентного требования предоставления независимой гарантии того, что существуют объекты, условия идентичности которых таковы, как он стипулирует. Если Дж. Булос выступает против неофрегеанства, то он должен быть не согласен с одним или несколькими из этих утверждений.

Что касается первого утверждения, то К. Райт считает необходимым пояснить фразу «достаточная определяющая основа». Действительно, Г. Фреге показал, как определить *выражения*, которые соответствуют тем же, что и «предшествующее», нуль и предикат «натуральное число», что позволяет формулировать теорию, которую *приемлемо интерпретировать* как арифметику Пеано. Но одно дело определить выражения, которые, по крайней мере, в чисто арифметических контекстах, ведут себя так, как будто они выражают эти различные понятия, а другое – определить сами эти понятия – то, что необходимо сделать, чтобы признать принцип Юма достаточным для теории, которая не просто допускает чистую арифметическую интерпретацию, но претендует на роль арифметики для выполнения всех функций. Как это возможно сделать? Необходимо определить диапазон выражений, использование которых было заложено таким образом, что оно было бы неотличимо от выражений, которые действительно выражают эти понятия. Интерпретируемость арифметики Пеано в рамках арифметики Г. Фреге обеспечивает выполнение этого, и любое сомнение по этому вопросу должно касаться того, является ли определение арифметических примитивов, которое предлагает Г. Фреге, основанное на принципе Юма и логических понятиях, адекватным для обычного применения арифметики. Удалось ли показать, как понятия арифметики, понимаемые как в чистом, так и в прикладном использовании, могут быть поняты просто на основе логики второго порядка и численного оператора, ограниченного принципом Юма, или: может ли кто-то полностью понять всю конструкцию, не имея ни малейшего представления об обычном значении арифметических утверждений? К. Райт отвечает на это, что Г. Фреге выполнил более амбициозную задачу: показал, что принцип Юма обеспечивает доказательство очень важного принципа, получившего от Б. Хейла название N^q, о том, что для каждого числительного, 'n_f' определенного способом Г. Фреге, мы можем установить, что

$n_f = Nx : Fx \leftrightarrow$ имеется ровно nFs ,

где второй случай «n» схематично выражает арабскую цифру, как она обычно понимается. Из этого следует, что каждая цифра Г. Фреге имеет именно то значение в применении, которое она должна иметь. И К. Райт заключает: «мне кажется, этого достаточно для обеспечения того, что сам принцип Юма обеспечивает интерпретацию фрегевской арифметики как подлинной арифметики, а не просто как теории, которую можно интерпретировать как таковую» [160, p. 32].

Относительно второго пункта у Дж. Булоса, судя по всему, нет никаких возражений. И принять хотя бы эти два первых утверждения «уже означает признать существенное достижение Г. Фреге: аналитическую редукцию примитивной лексики арифметики к основанию, содержащему только одно нелогическое выражение, оператор численности; и демонстрацию того, что на этой основе фундаментальные законы арифметики могут быть сведены к одному: к самому принципу Юма» [160, p. 31].

В таком случае ключевые философские вопросы должны касаться третьего и четвертого утверждения. Важность третьего утверждения вытекает из того, что принцип Юма не является, собственно говоря, элиминативным определением – он позволяет построить использование числового оператора, который, в свою очередь, не предоставляет ресурсов для элиминативного определения. Поэтому утверждение о том, что он служит объяснительной основой для арифметики, должно зависеть от его способности так или иначе объяснять такое использование неконструктивно. К. Райт осуществляет это, аргументируя, что, во-первых, с определенным кругом основных использований не возникает проблем, а во-вторых, на каждом последующем этапе, способ вхождения, характерный для этой стадии, может быть понят на основе понимания способа вхождения на предыдущем этапе (более подробно этот вопрос он обсуждает в [168]).

Именно четвертое утверждение – утверждение о том, что принцип Юма может быть положен в качестве объяснительной стипуляции без дальнейшего эпистемологического обязательства, – является камнем преткновения. Дж. Булосу действительно не по душе это утверждение: он полагает, что, по выражению К. Райта, «в понятие объяснения было протащено гораздо больше контрабандного, чем соответствует кажущейся скромности объяснительного тезиса». Ответ К. Райта таков. Неофрегеанская программа закрепляет использование утверждений, включающих референцию к субъектам и их количественную оценку, чтобы каким-то образом привести получение их условий истинности в пределах наших возможностей признания. И независимо от того, в чем состояла эта фиксация, она должна была быть чем-то, что мы осуществили путем определения смысла, и поэтому она не должна была включать эпистемологических обязательств, которые не участвуют в построении понятий и определении значений в целом. К. Райт заключает: «я действительно не понимаю, почему способ, которым принцип Юма – если он действительно преуспевает в этом, – определяет условия истинности утверждений, которые задает оператор численности с логическими понятиями второго порядка, должен быть эпистемологически более проблематичным, чем любое определение или другая форма стипуляции, чей результат заключается в установлении условий истинности утверждений <…> Если и есть хорошие замечания в отношении такого подхода к принципу Юма, я не думаю, что они были сформулированы убедительно» [160, p. 33].

К. Райт, таким образом, «расправляется» с проблемами, высказанными Дж. Булосом. Однако стоит отметить, что более общий вопрос, в котором Дж. Булос и К. Райт не могут сойтись, это вопрос о том, подтверждает ли вывод арифметики из принципа Юма логицизм как работающую и допустимую философию математики. И ответ Дж. Булоса на этот вопрос категоричен: нет логики – нет логицизма. Он настаивает на том, что с помощью принципа Юма невозможно показать арифметику как доказуемую в логически истинной теории, дополненной определениями, что должно быть сделано для установления истинности того, «что мы можем с чистой совестью назвать логицизмом» [160, p. 5]. При любом доступном понимании логики, логика не может подразумевать существование объектов, в программе К. Райта же она якобы это делает (это отсылает нас к онтологичсекой проблеме, рассмотренной выше). К. Райт рассматривает принцип Юма как истину логики, и поэтому утверждает, что доказательство Теоремы Фреге само по себе устанавливает логицизм. Дж. Булос же против такого понимания принципа Юма, и, характеризует доказательство Теоремы Фреге как то, что «показывает красивый, глубокий и удивительный результат, что арифметика интерпретируется в арифметике Г. Фреге, теории, единственной нелогической аксиомой которой является принцип Юма» [160, p. 5]. Дж. Булос не соглашается с К. Райтом в том, что принцип Юма имеет статус аналитического или вообще чего-то сродни статусу определения, а значит, логицизм не достигается ни в классическом понимании термина, ни в каком-либо другом.

Дискуссия К. Райта и Б. Хейла об аналитичности принципа Юма и сопутствующих вопросах является одной из основных дискуссий о неологицизме К. Райта. Представители спорящих сторон, судя по всему, не придут к общему выводу, в том числе в силу значительных разногласий в терминологии. И К. Райт, и Дж. Булос в своих работах неоднократно указывают как на это, так и на несовпадение самого видения места принципа Юма в доказательстве арифметики. Так, Дж. Булос признается: «у меня нет ни одного сокрушительного аргумента, который убедит решительного защитника утверждения о том, что принцип Юма аналитичен, отказаться от этой точки зрения. Все, что я могу предложить, это то, что кажется мне довольно весомым и, возможно, достаточно весомым соображением против этой позиции» [160, p. 6]. И К. Райт, судя по всему, находится в том же положении, не имея того самого «сокрушительного» аргумента, который бы рассеял все сомнения и опроверг любую критику против принятия принципа Юма в качестве основания для построения арифметики. Кроме того, ряд исследователей полагает, что, несмотря на ответ на вопрос об аналитичности принципа Юма, он все равно может рассматриваться как важный принцип в философии математики. Так, Р. Хек отмечает: «однако следует отметить, что не следует чрезмерно подчеркивать важность этого вопроса. Пусть будет предоставлено, что принцип Юма не является аналитическим. Тем не менее, возможно, что он играет определенную роль в основании нашего знания истин арифметики. Принцип Юма, в конце концов, имеет мощную интуитивную привлекательность, и утверждение, что это, в некотором глубоком смысле, неотъемлемая часть нашего понимания понятия числа, что понятия имеют одинаковое число, если и только если они равнозначны, может быть истиной, даже если это принцип Юма не аналитический, в любом смысле, что спасет проект Фреге» [125, p. 72].

ГЛАВА 4. Преемственность логицизма и неологицизма

В первых трех главах данного исследования представлена характеристика двух проектов философии математики – ставшего уже классическим логицизма Г. Фреге и современного, развивающегося проекта шотландского неологицизма ряда авторов, в первую очередь К. Райта и Б. Хейла. В данном разделе будет произведен анализ того, как неологицизм в своем проекте решает задачи самого Г. Фреге в контексте вопроса о том, насколько в действительности задачи этих двух философско-математических проектов совпадают.

Вопрос преемственности двух проектов рассматривается исследователями в двух направлениях. Представители первого сосредотачиваются на выявлении задач проекта логицизма и сравнительном анализе того, как эти задачи решаются в логицизме и неологицизме, можно ли рассматривать решения представителей этих программ в рамках единой системы – т.е. будут ли методы неологицизма соответствовать линии самого логицизма. Представители второго направления выступают против того, что неологицизм соответствует не только исходным целям логицизма, но и в целом духу этой программы философии математики: аргументируется тезис о том, что логицизм и неологицизм относятся к совершенно разным видам направлений в философии математики.

Мы обратимся к работам представителей двух этих возможных интерпретаций.

В анализе более традиционной интерпретации мы будем в первую очередь отталкиваться от позиции по этому вопросу Стюарда Шапиро[1]в его работе «Измерение Шотландского неологицизма» [152]. Целью этой работы является оценить неологицизм в различных направлениях, в первую очередь – сопоставить проект неологицизма с изначальной задумкой Г. Фреге. С. Шапиро анализирует программу неологицизма и обозначает различные критерии (или, как выражается

---

[1]Стюарт Шапиро (род. 1951) – профессор философии в университете Огайо (*Ohio State University*) и постоянный почетный приглашенный профессор в университете Сент-Эндрюс в Шотландии. Отстаивая структурализм в философии математики, он является видной фигурой в данной сфере.

С. Шапиро, мерные палочки (*meter sticks*)), которые он предлагает использовать для «измерения» программы. Мерными палочками являются задачи самого Г. Фреге, мотивы, которые привели его к разработке логицизма (выделяются математические, логико-картезианские, эпистемологические и Евклидовы причины). То, насколько проект неологицизма решает поставленные в этих направлениях задачи, позволяет оценить преемствееность двух проектов.

В качестве представителя альтернативной позиции мы обратимся к Мажде Тробок (Университет Риеки, Хорватия) и ее работе «Обсуждение (нео) логицизма: Г. Фреге и неофрегеанство» [162]. Проект Г. Фреге трактуется как несовместимый с узким эпистемологическим прочтением его теории, а также представлен критический анализ неофрегеанства, претендующего на следование программе Г. Фреге в эпистемологическом плане. Принцип Юма в такой трактовке не имеет эпистемологической функции (традиционно приписываемой ему). М. Тробок приводит доводы в пользу пессимистического вывода о том, что конечный результат неологицизма может быть провальным относительно обеих целей Г. Фреге, а именно: доказательства аналитичности арифметики, и, следовательно, определения основ математики прочными в силу того, что они основаны на логике. Вместе с тем, она же предлагает возможные пути отступления для неофрегеанского логицизма, констатируя при этом, что «такой проект, к сожалению, будет далек от целей Г. Фреге» [162, p. 84].

4.1 Задачи логицизма Г. Фреге и их решение в рамках проекта неологицизма

4.1.1 Мерные палочки

Для того, чтобы определить мерные палочки, обратимся к самому Г. Фреге. Г. Фреге отмечает, что «к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает доказательство. <…> Евклид доказывает многое из того, с чем и без этого с ним согласился бы каждый» [74, с. 140]. Это наблюдение действительно точно. Евклид, Архимед, О. Коши, К. Вейерштрасс, Р. Дедекинд и многие другие приводят строгие доказательства «многих вещей, которые раньше принимались как сами собой разумеющиеся», как выразился Г. Фреге. Он ставит перед собой задачу предоставления доказательств таких базовых арифметических суждений, как «за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число», принципа индукции и простых арифметических тождеств, таких, как «1+1=2».

Исследователи расходятся в вопросе о том, *почему* мы предпочитаем доказательство. И ученые расходятся во мнениях о том, почему Г. Фреге думал, что мы предпочитаем доказательство везде, где доказательство возможно. Каковы были цели логицизма Г. Фреге? Что сделал сам Г. Фреге, чтобы добиться полного доказательства основных арифметических истин? Р. Джешон [128, p. 939-940] обобщает цели, которые были приписаны Г. Фреге различными учеными и выделяет следующие доводы, которыми руководствовался Г. Фреге при построении программы неологицизма:

- *Математические причины* (*Mathematical Rationale*): мотивы Г. Фреге являются математическими. Он действительно хотел доказать некоторые теоремы. Он верил, что все, что допускает доказывания, должно быть доказано. И он думал, что предложения арифметики, ранее недоказанные, допускают доказывания. Поэтому они должны быть доказанными.

- *Логико-картезианские причины (Logico-Cartesian Rationale):*Г. Фреге являлся реформатором, который стремился совершенствовать арифметическое знание. Он думал, что на основе одной только логики можно производить знания, обладающие абсолютной самоочевидностью, определенностью и ясностью. Он также думал, что фактические арифметические знания омрачаются сомнениями, неопределенностью и неясностью. И создание логицизма было необходимо Г. Фреге для демонстрации эпистемологического превосходства арифметического знания.

- *Эпистемологические причины (буквально – причины от знания источников, Knowledge-of-Sources Rationale):*Г. Фреге хотел понять философский статус нашего арифметические знания, т. е. определить, является ли арифметика аналитической или синтетической, априорной или апостериорной. Развитие логицизма было мотивировано тем, что Г. Фреге полагал, что доказательство предложений арифметики необходимо для определения эпистемологического источника нашего арифметического знания.

Р. Джешон отмечает, что эти причины совместимы друг с другом и, кроме того, выделяет четвертый вид причин, мотивировавших Г. Фреге. Он формулируется в терминах некоторых метафизических и эпистемологических принципов в отношении предложения. Для прояснения этого вида причин обратимся к рационализму Г. Фреге.

Г. Фрегепоясняет, почему математики «предпочитают доказательство везде, где доказательство возможно», по крайней мере, метафорически: «доказательство как раз имеет целью не только поставить истинность предложений вне всяких сомнений, но также и просмотреть зависимость истин друг от друга. Убедившись в непоколебимости каменной глыбы в тщетных попытках её передвинуть, можно далее задаться вопросом, что же её так надёжно удерживает?» [74, с. 141].

Таким образом, Г. Фреге полагал, что суждения находятся в отношении зависимости. Отношения зависимости являются объективными в том смысле, что речь не идет о том, как какой-то человек или любой другой приходит к убеждению в данном предложении. Скорее, некоторые предложения объективно исходят из других.

Понимание Г. Фреге понятия аналитичности и априорности сформулированы в условиях отношения зависимости: «эти различения априорного и апостериорного, синтетического и аналитического, по моему мнению, относятся к пониманию не содержания суждений, но оправдания вынесения суждения. Ведь там, где это оправдание отсутствует, пропадает также и возможность данных подразделений. Разве априорная ошибка не такой же вздор, как, скажем, голубое понятие? Когда предложение называют апостериорными или аналитическими в моём смысле, судят не о психологических, физиологических и физических обстоятельствах, которые делают возможным образование содержания предложения в сознании, а так же не о том, как другой, возможно ошибочно, приходит к тому, что он считает его истинным, но о том, на чём в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное. <…> Теперь это зависит от того, чтобы найти доказательство и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной, причём предполагается, что при рассмотрении указаны также и предложения, от которых возможно зависит допустимость определения. Но если невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки, то предложение является синтетическим. Для того чтобы истина была апостериорной, требуется, чтобы её доказательство не удавалось без ссылки на факты; т.е. на недоказуемые истины, не обладающие всеобщностью, которые содержат высказывание об определённых предметах. Если, наоборот, возможно провести доказательство всецело из общих законов, которые сами не способны и не нуждаются в доказательстве, то истина является априорной» [74, с. 141-142].

Оставим в стороне возможность того, что отношение зависимости между предложениями недостаточно обоснованно. Отсюда следует, что некоторые истинные предложения являются обоснованно надежными и не зиждутся на других предложениях. Термин Г. Фреге для таких предложений – *selbstverstandlich*. Следуя Р. Джешон, оставим его на немецком языке. В терминологии современной философии этому термину соответствуют «примитивные» или «первичные истины». *Selbstverstandlich*-предложения не требуют никаких доказательств, и, действительно, их (нетривиальные) доказательства невозможны. Все остальные известные суждения основаны на *selbstverstandlich*-предложениях. Поэтому надлежащие аксиомы являются *selbstverstandlich*.

Как же тогда *selbstverstandlich*-истины познаваемы? По определению, такие предложения не могут быть доказаны. Они не известны на основе чего-либо другого. Г. Фреге определил, что надлежащие аксиомы имеют эпистемическое свойство, которое он называет *einleuchten*, самоочевидность. Р. Джешон поясняет это свойство следующим образом:

«(*einleuchten*) предложение *p* является самоочевидным, если и только если ясное схватывание *p* – достаточное и убедительное основание для признания истинности *p*» [128, p. 953].

По словам Т. Берджа, эпистемологически-метафизический статус, которыми пользуются такие предложения – это «что-то несомненно разумное для того, кто полностью понимает соответствующее предложение» [99, p. 312].

Так, Р. Джешон выделяет еще одну цель логицизма Г. Фреге:

- *Евклидовы причины (Euclideanrationale)*: мысль Г. Фреге в том, что примитивные истины математики имеют два свойства. (1) Они *selbstverstandlich*: обоснованно надежные, пока не основаны на какой-либо другой истине, и, как таковые, не нуждаются в доказательстве. (2) и они самоочевидны: их ясное схватывание является достаточным и убедительным основанием для признания их истинности. Он также думал, что отношения эпистемологического обоснования в науке отражает естественный порядок истин: в частности, что является самоочевидным, является и *selbstverstandlich*. Обнаружение множества предложений арифметики не самоочевидно, и Г. Фреге заключает, что они (предложения) нуждаются в доказательстве. Задумка С. Шапиро в том, чтобы увидеть, насколько хорошо программа продвинулась в направлении четырех причин, предложенных Р. Джешон. Эти четыре причины и станут «мерными палочками» для измерения результатов неологицизма.

4.1.2 Математические причины

Тезис здесь заключается в том, что Г. Фреге увидел, что принцип последующего элемента и принцип индукции (возьмем эти два примера), еще не доказаны. По математическим причинам – так как математика требует доказательства, когда доказательство возможно – Г. Фреге задался целью доказать эти предложения. Это могло бы объяснить его недовольство выводом этих предложений из принципа Юма. Дело не в том, что есть что-то неверное в этом выводе. Скорее, быть может, Г. Фреге думал, что он обнаружил, что сам принцип Юма может быть доказан, как только будут предоставлены правильные эксплицитные определения кардинальных чисел (хотя, следует отметить, что Г. Фреге не указывал это в качестве причины, почему он был неудовлетворен принципом Юма, и почему он перешел к эксплицитным определениям чисел в терминах объема).

Мало кто сомневается, что Теорема Фреге является значительным математическим достижением. Кто бы мог подумать, что столько может быть получено из такого простого и более или менее очевидного факта о численности? Однако, одного этого недостаточно, чтобы удовлетворить математические причины, по крайней мере, как они сформулированы здесь. Согласно им, Г. Фреге почувствовал, что основные положения арифметики были ранее недоказанными, и он предложил то, что было, в сущности, первым доказательством этих предложений.

Аналогичным притязанием со стороны шотландского неологицизма является то, что при выводе аксиом Пеано-Дедекинда из принципа Юма мы получаем, по сути, доказательства этих предложений. Однако существуют вопросы, касающиеся удовлетворения математических доводов. Дело в том, что мы не можем знать, реализована ли математическая задача, пока мы не определили, что подразумевается под математикой (арифметикой), и какие доказательства будут считаться приемлемыми. Нам необходимо знать, что такое арифметика, и что нужно, чтобы доказать что-то в арифметике. Рассмотрим, например, утверждение *S*, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число. Г. Фреге и сторонники неологицизма предоставляют действующий вывод, последняя строка которого имеет те же слова, что и предложение, которое выражает *S*. Вывод неологицизма имеет преимущество перед Г. Фреге в том, что, возможно, его посылки истинны. Но этого, конечно, не достаточно, чтобы представить доказательство. То, что из *S*&*S* вытекает *S*, не является доказательством *S*. Другой вопрос касается содержания предложений в выводе Теоремы Фреге: действительно ли последняя строка в неофрегеанском выводе является такой, как и S, предложением о том, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число? Это должно быть именно так, если мы хотим утверждать, что мы имеем доказательство S. Логицизм и неологицизм не должны менять субъект (не должно быть подмены понятия). С. Шапиро предлагает использовать следующий «глупый» пример: предположим, что я определяю «натуральное число» как «ребенок», и определяю «последующий элемент» как «родитель». Тогда я докажу с помощью аналитической рефлексии предложение «за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число». Можно взять менее глупый пример, предположим, что я определяю «натуральное число» конечным ординалом фон Неймана, и определяю «последующий элемент “натурального числа”» x как $x \cup \{x\}$. Тогда я докажу из аксиомы пары и объединения, что «за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число».

Ни в одном случае не дано доказательство S, предположения, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число. Как говорится, названный лапой хвост – ещё не лапа. Называя натуральное число ребенком или ординалом фон Неймана, мы не делаем натуральное число ребенком или ординалом фон Неймана.

С. Шапиро приводит столь абсурдный пример для того, чтобы более наглядно показать, насколько «просто» может быть произведена подмена понятий. Дело в том, что в качестве критики программе неологицизма предъявляется то, что выводимая ими из принципа Юма математика не является математикой в общепринятом смысле этого понятия. А потому, представляя доказательства математических предложений, они доказывают «свою математику», и подмена понятий все-таки имеет место.

Представленный Г. Фреге принцип последовательности натуральных чисел можно принять в качестве принципа последовательности натуральных чисел S только в том случае, если эксплицитные определения Г. Фреге верны. То есть, Г. Фреге действительно предоставляет доказательство принципа последовательности натуральных чисел, только если натуральные числа, о которых говорят математики и обычные люди, от античности и до 1884 года, по сути, – объемы, которыми их считает Г. Фреге. С. Шапиро пишет: «мне кажется, что неологицизм находится здесь в более выгодном положении. Не беря во внимание их концептуальный анализ, действительно кажется правдоподобным, что натуральные числа – это просто кардинальные числа конечных понятий. <…> Интуитивно, ноль – это просто кардинальное число понятия, под которое ничего не подпадает, один – это кардинальное число одноэлементных понятий, и т.д. Кроме того, принцип Юма является довольно очевидной и простой истиной о кардинальных числах, или, по крайней мере, это так, если кто-то думает, что кардинальные числа существует, и что каждое понятие имеет кардинальное число» [152, p. 77]. Теорема Фреге включает вывод принципа последовательности натуральных чисел S из этой более или менее очевидной истины. И можно полагать это доказательством S.

Однако обратимся к еще одному видному немецкому математику Р. Дедекинду, который, в некоторой степени сделал обратное тому, что предлагают Г. Фреге и представители неологицизма. И Г. Фреге, и неологицисты выводят структуру натуральных чисел – конечных кардинальных чисел – из принципа Юма. Р. Дедекинд, напротив, определяет бесконечную систему как множество с необходимой структурой, а затем определяет «натуральные числа» в качестве такой системы. Затем он задает процедуру установления натурального числа для каждого конечного множества. Так мы получаем версию принципа Юма, ограниченную конечными понятиями. В соответствии с общим математическим обоснованием, мы, таким образом, получаем доказательство этой ограниченной версии принципа Юма из структурных принципов натуральных чисел – в том числе принципа последовательности натуральных чисел S – и определений. Г. Фреге полагал, что правильное определение математических объектов должно вытекать из их (основного) применения, и в силу этого его теория дала правильное определение натуральных чисел, и таким образом правильное доказательство *S*. Р. Дедекинд, наряду со структуралистами не согласен с этим, полагая структуру в качестве сущности натуральных чисел. Применение чисел добавляется позже, и соответствующая теорема – принцип Юма – тогда доказывается. Поэтому стороны расходятся во взглядах на математическое обоснование: одна сторона берет на себя доказательство *S* и других особенностей строения натурального ряда чисел из принципа Юма (плюс определения); другая берет на себя доказательство ограниченной версии принципа Юма из структуры (плюс определения). Вопрос в том, какое из них является реальным доказательством?

Возможно, представители неологицизма могут рассуждать следующим образом: понимание арифметики мы получаем из принципа Юма, который имеет правильную структуру и это понимание приводит нас к стандартному применению (чисел). Так теория, основанная на принципе Юма, может играть ту роль, которую арифметика играет в нашей концептуальной схеме. Пожалуй, это все, что имеет значение для математического обоснования. Метафорически, если что-то ходит как утка, звучит как утка, выглядит, как утка и делает все то, что делает утка – «то, возможно, это и есть утка». В таком случае, возможно, не стоит рассматривать две эти позиции как конкурирующие (как предлагает сам С. Шапиро). И С. Шапиро отмечает, что арифметика, полученная с помощью принципа Юма плюс определения, действительно является эквивалентом аксиом Пеано-Дедекинда и «кажется разумным, и не вызывает никаких споров, считать это как подпадающее под нечто в пределах математических доводов» [94, p. 78].

4.1.3 Логико-картезианские причины

Руководствуясь этой причиной, логицизм Г. Фреге стремится укрепить наши знания арифметики: подразумевается, что было нечто неполноценное в их эпистемологическом статусе и мы не знаем основополагающих истин арифметики с достаточной степенью определенности. Это обоснование предполагает, что прежде логицизма, мы толком не знаем, что камень арифметики непоколебим –

или, по крайней мере, мы этого не знаем так хорошо, как мы могли и должны это знать. Термины «самоочевидный», «определенный», «ясный», и «сомнительный» в разработке логико-картезианских причин рассматриваются не в их обычном, психологическом смысле: любой уважающий себя фрегеанский логицист отклонил бы обоснование, истолкованное таким образом, в духе линии анти-психологизма Г. Фреге (эти понятия тесно связаны с другими причинами, мотивировавшими Г. Фреге на создание логицизма, которые будут рассмотрены ниже). Логицизм – это не вопрос чьего-либо субъективного состояния ума, касающегося основных арифметических предложений. Действительно, Г. Фреге полагал, что речь идет не о том, «как некто приходит к тому, что он считает истинным» предложение арифметики, но о том, «на чём в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное» [74, с. 142]. Также, «здесь рассматривается не способ поиска [числовых законов], но разновидность оснований доказательства; или, как говорит Лейбниц, “Ведь здесь речь идёт не об истории наших открытий, которая различна у разных людей, но о естественной связи и естественном порядке истин, который всегда одинаков”» [74, с. 142]. Согласно задумке Г. Фреге, выводы логицизма должны были удалить любые сомнения, неопределенность и неясность основных предложений арифметики.

Эта задача не была выполнена логицизмом ввиду противоречивости Аксиомы V Г. Фреге. Для ее решения неологицизм должен обосновать, или, по крайней мере, утверждать, что принцип Юма сам по более надежный, определенный и понятный, чем такие арифметические истины, как принципы последующего элемента и индукции, и даже такие основные арифметические примеры, как «7+5=12». И кажется, что такой тезис достаточно трудно обосновать.

Как отмечалось выше, одним из самых обсуждаемых возражений против неологицизма является выдвигаемая и формулируемая Н. Теннантом и Дж. Булосом проблема «плохой компании». Принцип Юма имеет ту же форму (форму абстрактного принципа), что и Аксиома V. Учитывая то, что не каждый принцип абстракции приемлем, как мы можем быть уверены, что с принципом

Юма все в порядке? Дж. Булос [95] и другие предоставили доказательства того, что принцип Юма является непротиворечивым, если таковой является арифметика второго порядка. Но, несомненно, это не является основанием того, чтобы признать принцип Юма более определенным или, иначе говоря, лучше эпистемически обоснованным, чем сама арифметика.

Кроме того, принцип Юма имеет некоторое содержание, которое выходит за рамки натуральных чисел и их приложений (см. Р. Хек [123] и, опять же, Н. Теннант [158]). Кванторы в начале принципа Юма распространяются на все понятия, а не только на те, которые применяются только к конечным множествам вещей. Соответственно, принцип Юма предполагает, что каждое понятие имеет число и влечет за собой, что существует число всех множеств, число всех ординалов, и, действительно, число *всех* объектов. Независимо от того, каково будет решение в дискуссии по данным вопросам, представляется очевидным, что нельзя серьезно утверждать, что принцип Юма является более определенным, чем арифметика. Его дополнительное содержание порождает возможные тревоги и сомнения, которые не имеют ничего общего с арифметикой.

Для удовлетворения сформулированных логико-картезианских причин Р. Хек [123] предлагает представителям неологицизма заменить принципа Юма на другой вариант, в котором начальные кванторы ограничены понятиями, которые применяются к не более, чем конечному числу объектов, – на уже упомянутый в предыдущих главах ограниченный (или конечный) принцип Юма. Однако представляется, что замена на такой принцип не является исчерпывающим решением. Для того чтобы указать ограничение на кванторы в ограниченном принципе Юма, нам потребуется строгое определение конечности, которое не предполагает натуральных чисел. И даже если мы оставим этот вопрос в стороне и предположим, что у нас есть достойная, четкая и ясная формулировка конечности, кажется сомнительным, что этот принцип увеличивает нашу уверенность в арифметике и предоставляет лучшие эпистемические основания.

Сам С. Шапиро указывает на возможность решения логико-картезианской задачи кардинально другим способом. Он пишет: «неофрегеанцы могли бы утверждать, что поскольку наше предыдущее понимание арифметики омрачено сомнениями, неуверенностью и неясностью, мы должны просто отказаться от старых понятий, и заменить их более четкими, более известными, и способными делать всю законную работу, которую выполняли наши предыдущие понятия. Шотландский неологицизм, который принимает эту перспективу, не будет волноваться о том, будет ли новая, определенная теория в точности совпадать с предыдущим, пред-теоретический массивом понятий и представлений. Главное, что новая теория выполняет все функции, которые выполняла старая» [152, p. 80].

Как было затронуто в конце предыдущего раздела, дело в том, что теория, основанная на принципе Юма, имеет правильную структуру и играет роль, которую играет арифметика в нашей концептуальной схеме. Если нечто ходит, как утка, и выполняет всю работу, что и утка, то это нечто – утка. Ключевым моментом здесь является то, что неологицизм может не беспокоиться о том, изменился ли субъект – что новая вещь может не быть уткой. Указав на такую возможность для неологицистов удовлетворить выполнение этой т.н. логико-картезианской задачи, С. Шапиро сам отмечает, что такой способ нуждается в дополнительном обосновании: «возможно, предмет необходимо менять, поскольку старые вещи просто никуда не годятся, или, по крайней мере, не так хороши, как новые вещи. Тот, кто хочет следовать этому маршруту, нуждается в аргументе, что действительно есть что-то неполноценное в отношении наших эпистемологических состояний в старой арифметике и теории чисел. Если же они не сломаны, то зачем их чинить? И нам понадобится некоторое представление об эпистемологическом статусе нового предмета. Почему он лучше? Лучше в каком смысле?» [152, p. 80]. Это выводит нас на другие причины, мотивировавшие создание логицизма.

4.1.4 Эпистемологические причины

Этот вид причин, мотивировавший разработку Г. Фреге проекта логицизма связан с тем, что он хотел понять философский статус нашего арифметические знания, т. е. определить, является ли арифметика аналитической или синтетической, априорной или апостериорной. Необходимость выполнения этой задачи открыто заявляется и самим К. Райтом, который утверждает, что «принцип Юма доступен без существенных эпистемологических предпосылок» и заключает из этого, что «ясный априорный маршрут в признании истины… фундаментальных законов арифметики… был искажен» [167, p. 210-211]. Неологицизм претендует на то, что проект показывает, что арифметика познаваема априори. Теорема Фреге дает «априорный маршрут от знания логики второго порядка к полному пониманию и схватыванию истины фундаментальных законов арифметики».

Для обоснования того, что неологицизм действительно выполняет данную задачу, ему необходимо осуществить следующие шаги:

(1) сформулировать особый эпистемологический статус арифметики: объяснить эпистемический источник основных предложений арифметики;

(2) обосновать, что принцип Юма, и другие приемлемые принципы абстракции имеют этот особый статус;

(3) обосновать, что аксиомы и правила логики второго порядка, использованные в Теореме Фреге, сохраняют эпистемологический статус. То есть, шотландский неологицизм должен показать, что если вводная часть используемого правила вывода имеет необходимый эпистемологический статус, то таким же является и вывод;

(4) обосновать, что выводы Теоремы Фреге действительно являются утверждениями основных предложений арифметики, т. е. показать, что субъект не был изменен.

Что касается (1), неологицизм не принимает рационалистическое понимание Г. Фреге понятия априорности и аналитичности в терминах объективного обоснования отношений между предложениями. В стандартном понимании утверждение является априори, если оно может быть познано независимо от опыта. Как выражается С. Блэкберн, предложение известно априори, если знания не основаны на «опыте конкретного хода событий действительного мира» [91, p. 21]. Опыт может потребоваться для схватывания соответствующих понятий, но помимо этого, без определенного опыта надо знать, что предложение является истинным. Безусловно, центральное утверждение программы неологицизма заключается в том, что основные предложения арифметики являются познаваемыми априори в этом смысле.

Согласно С. Шапиро, утверждение или предложение является аналитическим, если оно верно исключительно в силу смысла утверждения или предложения. Мы видели, что неологицизм отступает от утверждения о том, что предложения арифметики являются аналитическими в этом смысле. Но они полагают, что именно Теорема Фреге показывает, что основные истины арифметики могут стать известными «без существенной эпистемологической предпосылки». В частности, основные истины могут стать известными без обращения к кантовской интуиции, платоновской проницательности, эмпирическим подтверждениям, незаменимости для научных исследований (практики), или тому подобному. Неологицизм не утверждает, что программа показывает арифметику как известную безошибочно (непогрешимо). Действительно имеется определенная степень риска в принятии принципа Юма.

Второй пункт, касающийся того, является ли принцип Юма (или его ограниченная версия) действительно познаваемым без существенной эпистемологической предпосылки является основным вопросом в обширных дебатах по поводу неологицизма. Принцип Юма (или ограниченный принцип Юма) представляет собой достаточно очевидную истину для того, кто полагает, что кардинальные числа существуют и что каждое понятие (или, что каждое конечное понятие) имеет кардинальное число. Это, конечно, влечет за собой ряд спорных вопросов. Знаем ли мы, что кардинальные числа существуют, и что каждое (конечное) понятие имеет кардинальное число априори, без существенной эпистемологической предпосылки? К. Райт и Б. Хейл скажут, что это так, поскольку мы можем получить знания этого из принципа Юма. Но это уводит нас в порочный круг.

Чтобы избежать каких-либо вопросов, необходимо использовать свободную логику, чтобы интерпретировать рассуждения вслед за шотландским неологицизмом[1]. Хорошо сформированные условия в виде «число $F's$» не должны автоматически обозначать объекты, в данном случае кардинальные числа существование чисел не исходит из простого факта, что выражения в форме «число $F's$» являются грамматическим сингулярным термином. Оставаясь как можно ближе к текстам шотландского неологицизма, наиболее естественно принять такую логическую систему, в которой равенство $s = t$ означает, что s и t оба существуют, так как К. Райт и Б. Хейл делают вывод о существовании нуля из того, что $0 = 0$ следует из принципа Юма. Однако, не очевидно, что сам принцип Юма, интерпретируемый таким образом, обладает необходимым эпистемологическим статусом быть познаваемым без существенной эпистемологической предпосылки только потому, что принцип Юма имеет онтологические следствия. То есть, мы выводим существование нуля из принципа Юма и логической истины, что понятие «быть не-самотождественным» равночисленно себе самому. Это является наиболее острым моментом непрекращающейся дискуссии вокруг неологицизма.

Тезис К. Райта и Б. Хейла в том, что принцип Юма является (или сродни) имплицитному определению понятия кардинального числа, а это значит, он может быть истиной стипулятивно. В неологицизме ему отводится функция определения понятия кардинального числа. Кроме того, утверждается, что он является аналитическим (т.е. истинным в силу стипулированного значения понятия «кардинальное число»). Действительно, «конечно, не каждый принцип в форме (ABS) <принцип абстракции – П.О.> удачно передает смысл составляющих его понятий. Так, все еще остается проблема «плохой компании». К. Райт и

[1] Классическая логика требует, чтобы каждый сингулярный член обозначал объект в области квантификации, что обычно понимается как множество «существующих» объектов. В свободной логики нет. Поэтому свободная логика полезна для анализа дискурса, содержащего сингулярные термины, которые либо являются, либо могут быть пустыми. Как писал К. Ламберт, «на самом деле, можно рассматривать свободную логику<...> буквально как теорию о сингулярном существовании, в том смысле, что она устанавливает определенные минимальные условия для этой концепции» [133].

Б. Хейл сформулировали некоторые ограничения, которым успешные (абстракционистские) условия должны соответствовать. Однако предлагаемая ими формулировка, опять-таки остается крайне спорной» [152, p. 82]. Критерий согласованности является необходимым критерием, которому должен соответствовать «хороший» принцип абстракции. Однако, вторая теорема Геделя о неполноте делает маловероятным, и пожалуй, невозможным, доказательство непротиворечивости принципа Юма или его ограниченной версии без принятия чего-то, чья непротиворечивость по крайней мере, проблематична (например, непротиворечивости другой теории). Можем ли мы, в действительности, познать непротиворечивость принципа Юма независимо от нашей твердой убежденности в, скажем, постулатах Пеано? Возможно, неологицизм может утверждать, что предлагаемый ими критерий (отделения «хороших» принципов от «плохих») имеет место, пока нет доказательств обратного. Т. е., что абстракция может считаться приемлемой, пока ее противоречивость не доказана. Дискуссия по этому вопросу продолжается.

Пункт (3) в приведенном выше списке утверждает, что аксиомы и правила логики второго порядка в Теореме Фреге сохраняют заявленный эпистемологический статус. Аксиомы и правила в выводе неологицизма являются, во-первых, обычными правилами введения и исключения связок, кванторов первого порядка, кванторов второго порядка. С. Шапиро отмечает, что этот тезис непроблематичен, если мы используем свободную логику. Возьмем схему:

$$\exists X \forall x (Xx \equiv \Phi(x)),$$

для каждой формулы (Φ) в языке есть пример, который не содержит переменную X свободно. Эта схема говорит, в сущности, о том, что есть такое понятие (или свойство, или множество, или что бы это ни было, что входит в диапазон переменных второго порядка), соответствующее каждой формуле в языке. Для получения Теоремы Фреге необходимо назвать некоторые непредикативные (*impredicative*) примеры понимания схемы. То есть, нам нужны понятия, соответствующие формулам с переменными, которые распространяются на все понятия. Например, определения Г. Фреге и неологицистов отношения последовательности имеет экзистенциальный квантор, распространяющийся на все понятия. Нам также нужен пример осмысления содержания понятия, в котором включена формула вроде «$x \neq x$». То есть, Теорема Фреге требует существования пустого понятия. Есть исследователи, которые обеспокоены этим вопросом, и существует обширная литература на эту тему (см., например, [107, 153, 159, 168]).

Последний пункт (4) является утверждением о том, что выводы Теоремы Фреге действительно являются утверждениями основных положений арифметики. Принцип Юма является своего рода тем, что может быть стипулировано как истинное, и истинное, в силу стипуляции. Стоящий перед нами вопрос теперь в том, не подменяет ли неологицизм субъект. Действительно ли выводы Теоремы Фреге являются истинами о натуральных числах, к которым обращается каждый, кто имеет дело с теоретической и прикладной арифметикой? (В конце предыдущего раздела была обозначена позиция, в которой неологицизм не озадачивается вопросом о том, изменился ли субъект, или даже признается, что он изменился. Такая позиция может быть использована также и здесь, и в этом случае, пункт (4) снимается с повестки дня. Но допустим, в настоящее время, что неологицизм пытается выстроить эпистемологический фундамент для арифметики, которую мы «уже знаем и любим»).

Один вопрос здесь касается природы «стипуляции», предлагаемой неологицизмом. Само использование «стипуляции» как минимум говорит о том, что неологицизм намеревается ввести новое понятие, которое еще не используется. Проблематичность использования стипулятивных определений затрагивалась во второй главе данного исследования. Проблема в том, что нельзя просто стипулятивно оговорить истины о понятиях, используемых в повседневной, математической и научной практике. Нельзя стипулятивно оговорить, например, что хвост – это нога, или что натуральное число является ребенком или ординалом фон Неймана. В лучшем случае, это могло бы ввести двусмысленность. Тогда было бы многозначное использование слов «хвост» и «натуральное число», как и многозначное использование, например, русского слова «язык».

Предположим, что неологицистское введение нового понятия понимается посредством стипуляции. И допустим, что такая стипуляция успешна. Чтобы избежать двусмысленности, назовем определенное понятие «*НЛ*-число» (неологицистское число), и назовем *НЛ*-число конечного понятия «*НЛ*-натуральное число». Тогда Теорема Фреге предполагает, что *НЛ*-натуральные числа действительно являются примерами структуры натуральных чисел. Они изоморфны натуральным числам, конечным ординалам фон Неймана и др. Таким образом, *НЛ*-натуральные числа будут выступать в качестве «заменителей» натуральных чисел. Все в языке арифметики, что является истиной о них, истинно и в любой другой системе, которая повторяет их структуру. Шотландские неологицисты могут и не принимать «стипуляцию» принципа Юма (или его ограниченной версии) для введения нового понятия впервые. Если была такая стипуляция, она случилась в древности, возможно, в Греции, и эта стипуляция регулирует текущее использование понятия кардинального числа. Возможность избежать изменения субъекта может исходить из тезиса, который заключается в том, что принцип Юма неявно присутствует в нашей практике использования понятия (конечного) кардинального числа. С. Шапиро резюмирует: «откровенно говоря, я слабо представляю, как возможно прийти к решению относительно такой претензии. Это эмпирический вопрос о слове, разрешаемый полевым лингвистом, который изучает носителей английского языка или немецкого, или это априорное утверждение о понятии, разрешаемое путем концептуального анализа? Последний относится к собственной методологии Г. Фреге, но нет единого мнения, каковы правила этой игры» [152, p. 85].

4.1.5 Евклидовы причины

С точки зрения Г. Фреге, свойства *selbstverstandlich* и самоочевидности являются *объективными* характеристиками предложения. Первое касается естественного порядка истин, а второе касается способа, посредством которого некоторые истины могут стать известными (и должны стать известными). Неологицизм для решения этой задачи должен показать (1), что принцип Юма является *selbstverstandlich*, т. е., вообще говоря, что он надежный и не основан на любой другой истине – в этом есть объективный смысл обоснования, и (2) что принцип Юма является самоочевидным: его четкое (ясное) схватывание является достаточным основанием для его знания, или, по крайней мере, признания его истинности. Также, опять-таки, имеет место вопрос, не сменил ли неологицизм предмет разговора.

Если принцип Юма при введении нового понятия сродни имплицитному определению, и если он может быть истинным в силу условия (стипулятивно), то, казалось бы, он s*elbstverstandlich*. То есть, если понятие «кардинальное число» фактически введено посредством абстракции, то нет смысла доказывать принцип Юма из других принципов. Действительно, «если мы докажем принцип Юма из других принципов, то, очевидно, понятие “кардинальное число” было введено каким-то другим способом. Однако, как мы видели в предыдущей части, если мы думаем об абстракции как о стипуляции, тогда принцип Юма не может быть о натуральных числах, которые мы имели со времен античности. И тогда выходит, что шотландский неологицизм изменил субъект» [152, p. 85].

Если неологицисты хотят представить принцип Юма как некоторое утверждение о натуральных числах, которые мы используем и о которых мы все говорим – и если принимается метафизическая и эпистемологическая системы взглядов Г. Фреге – то есть существенный вопрос, является ли принцип Юма *selbstverstandlich*. Возможно, он основан на других принципах. По-видимому, Г. Фреге думал, что принцип Юма внедрен в Аксиому V, дополненную эксплицитными определениями. Ограниченная версия принципа Юма может быть выведена из арифметики второго порядка Пеано-Дедекинда плюс однозначные определения. В силу этого неологицизм, ставя цель осуществить выполнение Евклидовой задачи, должен аргументировать, что это не является доказательством, или, по крайней мере, что сам принцип Юма не нуждается в таком доказательстве, т.е. доказать, что принцип Юма не внедрен ни в аксиомы Пеано-Дедекинда, ни в аксиомы Цермело-Френкеля, ни, конечно, в противоречивую теорию объемов Г. Фреге. Относительно этого тезиса были предложены различные решения, а также многосторонняя критика этих решений и вопрос остается открытым.

Второй тезис заключается в том, что принцип Юма является само собой разумеющимся в смысле Г. Фреге. Претензия неологицизма заключается в том, что ясное схватывание принципа Юма – достаточное и убедительное основание для признания его истинности. Используя формулировку Т. Берджа [99, p. 312], претензия в том, что принцип Юма несомненен для тех, кто полностью понимает его. Т. Бердж и Р. Джешон допускают возможность того, что данное предложение может быть само собой разумеющимся в требуемом смысле. Они рассматривают отношение Г. Фреге к Аксиоме V. Еще до рокового письма от Рассела, он признался, что его Аксиома не настолько ясная, или не настолько очевидная, как ему хотелось бы. Как пишет Т. Бердж, поскольку Г. Фреге думал, что его АксиомаV действительно имела статус аксиомы, «должно быть он думал, по крайней мере иногда, что Аксиома является надежной, но в силу недостаточного анализа или неполного понимания, она не является таковой» [99, p. 337].

Разговор относительно «ясного схватывания» и «полного понимания» таких тезисов, как принцип Юма, является частью рационалистической концепции о ясных и отчетливых идеях. Соответственно, можно «перепутать» понимание понятий в различных положениях. Тезис заключается в том, что после того, как все эти «недоразумения» будут удалены, и некто имеет правильное – ясное и четкое – схватывание понятий, то он будет уверен в том, что принцип Юма является истинным.

Если взять противоположный тезис, то идея в том, что если суждение самоочевидно, то любой, кто имеет обоснованные сомнения относительно него, не полностью понимает его. В лучшем случае, имеется только неясное понимание понятия предложения. Т. е., например, номиналисты, которые отвергают принцип Юма, на самом деле не понимают его. Они не полностью осознают, о чем идет речь. В силу того, как Г. Фреге разворачивает понятие самоочевидности, важно, что достаточное и необходимое основание для знания рассматриваемого предложения не включает какую-либо дедукцию. Конечно, Г. Фреге думал, что для полного схватывания соответствующих понятий достаточно знать арифметические примеры, такие как 135 + 784 = 919 или даже 7 + 5 = 12 или 2 + 2 = 4. Ведь он думал, что эти суммы являются аналитическими.

Тем не менее, Г. Фреге явно утверждал, что такие арифметические примеры не являются самоочевидными. Они известны только через дедукцию – мы должны доказать их. Это дисквалифицирует «суммы» в качестве кандидатов примеров самоочевидности.

В неологицизме утверждается, что принцип Юма сродни имплицитному определению; и указывается на значение оператора «число (*F's*)». Напомним еще раз, что не каждое предложение в форме принципа абстракции является успешным имплицитным определением: в силу противоречивости некоторых из них сформулирована проблема «плохой компании». Неологицизм определяет некоторые ограничения, которые мы обозначим здесь как *C*, для признания абстракции приемлемой: т.е. абстракция является «хорошей», и может стать известной «стипулятивно», только если она введена с учетом *C*.

Предположим, что некто может знать абстракцию только в том случае, если доказано, что она выполняет критерий С. В таком случае принцип Юма не является ни самоочевидным, ни *selbstverstandlich*. Понимания понятий не достаточно для того, чтобы знать истину принципа Юма. Предположим, наоборот, что правильная позиция заключается в том, что принцип Юма «невиновен», пока не доказано обратное. Даже в этом случае можно сказать, что принцип Юма не является ни самоочевидным, ни *selbstverstandlich*. Вероятно, необходимо как минимум знать, что нет никаких оснований сомневаться в том, что *C* выполняется еще до того, как кому-то становится известен принцип Юма. Это дополнительное знание не являются допущением при выводе принципа Юма, но, все-таки такое (негативное) знание необходимо для того, чтобы знать принцип

Юма. Одного лишь понимания, независимо от того, насколько оно ясное, не достаточно.

С. Шапиро видит и другой выход: «неологицизм может пойти здесь совершенно экстерналистским путем. Тезис заключается в том, что абстракция “хорошая”, и известная, пока ограничения *C* соблюдены, известно ли это кому-либо, или кто-то задается этим вопросом, или находится в блаженном неведении. В таком случае, возможно, принцип Юма является самоочевидным» [94, p. 87].

Есть еще один способ рассмотреть этот вопрос. Что мы должны сказать о таких абстракциях, как Аксиома V, для которых критерий *C* не выполняется? Есть (как минимум) два варианта. Один заключается в том, что Аксиома V действительно придает смысл своему внедренному термину, оператору объема. Аксиома V является, таким образом, ложной вследствие (чего-то аналогичного) несостоявшейся референции. Другой вариант заключается в том, что если критерий не выполняется, тогда никакой смысл не «присуждается». (Напомним, что принцип Юма и Аксиома V здесь рассматриваются как попытка стипулятивно оговорить значение). Напомним, что принцип Юма и Аксиома V – это попытки стипулировать значения операторов. Тогда если критерий *C* не выполняется, то и попытка стипулировать значение тоже не выполняется – т. е., никакое значение не стипулируется. В таком случае Аксиома V буквально лишена смысла. Принцип Юма же, напротив, предположительно, является самоочевидным. Т. е., принцип Юма, возможно, несомненен для тех, *кто полностью его понимает*. Другими словами, если кто-то понимает принцип Юма, то его термины имеют значение, и поэтому стипуляция была успешной. В таком случае, принцип Юма истинный. Этот кто-то может иметь разумное сомнение относительно того, понимает ли он принцип Юма. Но, если он понимает его, то он действительно его знает. С этой точки зрения, критерий *C* больше походит на пресуппозицию использования имплицитного определения.

Таким образом, рассмотренные задачи проекта Г. Фреге касаются и проекта неологицизма. Особенности использования методов неологицизма несколько трансформирует эти задачи, кроме того, приводят к новым проблемам в решении этих задач. Несмотря на различные подходы, неологицизм в такой интерпретации является проектом с теми же исходными задачами, что и логицизм Г. Фреге. Предложенные в рамках программы неологицизма решения, однако, имеют специфический характер и значительно отличаются от «решений» Г. Фреге.

4.2. Логицизм и неологицизм: сущность программ обоснования математики

В разделе 4.1 были выделены задачи, которые, как полагают исследователи работ Г. Фреге, он ставил перед собой; задачи, необходимость решения которых мотивировали его на создание проекта логицизма. Согласно С. Шапиро, и Г. Фреге, и апологеты неологицизма в той или иной степени стремятся предложить решение по каждой из указанных задач, и проекты логицизма и неологицизма развиваются в направлении поисков ответов на поставленные в рамках этих задач вопросов. Такая позиция относительно характеристики этих проектов является традиционной и разделяется большинством исследователей. Вопрос преемственности логицизма и неологицизма рассматривается в контексте того, удается ли представителям неологицизма решить поставленные Г. Фреге задачи. Однако, имеется и другая, альтернативная линия сравнения проектов логицизма и неологицизма.

Так, М. Тробок настаивает на том, что два этих проекта в корне различны. Она выделяет два способа интерпретации проектов – как логико-семантический или как эпистемологический проект. И если С. Шапиро допускает, что логицизм Г. Фреге стремится разрешить не только одну из выделенных им задач, но несколько, или даже все, то М. Тробок настаивает на том, что логицизм некорректно описывать и как эпистемологический, и как логико-семантический проект. В контексте этого заявления она и рассматривает логицизм и неологицизм, обосновывая, что два этих проекта имеют не только различные цели, но и действительно, отличаются по сути. Данный подход резко отличается от мэйнстрима в этом направлении, поэтому остановимся на нем подробнее (такая оценка логицизма Г. Фреге дается и другими авторами. Например, Р. Хек [125, p.

61] отмечает, что основная цель Г. Фреге – «определить фундаментальные арифметические понятия в терминах понятий чистой логики, а затем, в рамках формальной системы логики, доказать аксиомы для арифметики. <…> Однако, как бы ни была важна эта часть проекта, она сама по себе не отвечает на эпистемологический вопрос, и два вида вопросов остаются открытыми»).

М. Тробок в своей работе «Обсуждение (нео) логицизма: Г. Фреге и неофрегеанство» [162] задается вопросом, какое эпистемологическое значение имеет программа логицизма Г. Фреге. Этот результат она сопоставляет с собственной интерпретацией неологицизма, который, «якобы, следует по стопам Г. Фреге, но фактически идет в совершенно другом направлении». Две возможных интерпретации проектов – эпистемологическая и логико-семантическая – имеют отношение к мотивам Г. Фреге, которые мы тематизировали в прошлом разделе. Рассмотрение проекта как эпистемологического предполагает, что в нем доказательство предложений арифметики необходимо для определения эпистемологического источника нашего арифметического знания. Эпистемологический проект сосредотачивается на проблеме «обоснования источника знания»: выявлении внутренней структуры и основания нашего математического познания, эпистемологического источника. Если же мы описываем проект как логико-семантический, то это означает, что в проекте тематизируется поиск самого логического обоснования математики. Зачастую утверждается, что оригинальный маршрут Г. Фреге касался обоих этих вопросов, М. Тробок же выступает против такого истолкования его теории.

4.2.1. Логицизм Г. Фреге: эпистемологическое *vs.* логико-семантическое прочтение

Традиционная интерпретация философии математики Г. Фреге акцентируют именно задачу «обоснования источника знания». Согласно ней, главная задача Г. Фреге – обоснование источника знания – обуславливает необходимость аргументации тезиса об эпистемологической зависимости математического знания от логического (тем самым объясняется эпистемологический источник последнего). «Согласно Г. Фреге, математические объекты – это логические объекты. Следовательно, знание чисел не требует ничего, кроме знания логики и определений» [165, p. 1]. К такой интерпретации склоняются и представители неологицизма. Так, программа логицизма Г. Фреге, интерпретируемая таким образом, якобы показывает или же стремится показать, как математическое знание основано на нашей способности схватывать математические объекты.

Стоит ли принять такое прочтение проекта логицизма Г. Фреге?

Начнем с несколько исторических замечаний. Следуя по стопам Б. Больцано и его преемников, нацеленных на удаление интуиции и визуального представления из арифметики и анализа, Г. Фреге идет на шаг дальше. Исторически, стремление к получению строгих доказательств математических утверждений, вкупе с игнорированием интуитивно обоснованных результатов и отрицанием роли наших догадок, восходит к началу XIX века и продолжается в рамках работ, в первую очередь Б. Больцано и К. Вейерштрасса. В 1872 г. К. Вейерштрасс обнаруживает существование непрерывной функции, которая не имеет производной ни в одной точке, что противоречило интуиции математиков о непрерывной функции. И он приступает к ликвидации самоочевидности и интуиции из математических доказательств в, – как выразился И. Лакатос, – «революции строгости Вейерштрасса» [132, p. 55].

Следуя такому требованию строгости математических доказательств, следующий шаг Г. Фреге состоит в стремлении определить основание и обоснование основных математических доказательств. Он отстаивает (в § 2 «Grundlagen») требование независимости от дедуктивного подтверждения некоторых математических результатов с требованием усовершенствовать строгость Евклида, которая принесла дополнительное изучение V Аксиомы Евклида, и, соответствующие результаты: «это лежит глубоко в природе математики, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает последнее оправданию посредством индукции. Евклид доказывает многое из того, с чем и без этого с ним согласился бы каждый. Между тем, некоторые остаются неудовлетворёнными и евклидовой строгостью, когда переходят к исследованиям, связанным с аксиомой о параллельности».

Дальнейшие шаги Г. Фреге приводят его к самому основанию математики. Однако он не просто заинтересован в основе математики в смысле определения обоснования математических утверждений, но и в рациональном порядке такого обоснования, из которого и следует исходить. В § 2 «Grundlagen» он пишет: «после того, как мы убедились в том, что камень недвижим, безуспешно пытаясь переместить его, остается еще один вопрос, что это такое, что поддерживает его так надежно»? Дело не только в том, что математики должны быть строгими в своей субъективной уверенности, они должны также, действительно, в первую очередь, иметь объективное основание математических знаний.

Для того, чтобы свести математическое доказательство к строгим, самоочевидным шагам и убедиться в том, что оно не основано на интуиции, важно определить объективную базу, основу математики. Даже то, что кажется бесспорно истинным, как это было в случае с пятой Аксиомой Евклида, может оказаться открытым для обсуждения и дальнейшего анализа, а также выявления возможности получить другой результат (в случае с Аксиомой Евклида – получение другой геометрии, основанной на отрицании его Аксиомы параллельности). Целью является, следовательно, определить, что же это такое, что поддерживает арифметический валун так надежно, что делает истины арифметических утверждений объективно «непоколебимыми».

Хотя это требование надежного, объективного основания не оригинально (в качестве примера вспомним поиск Р. Декарта в его «Медитации» истинного порядка знания), способ, с помощью которого Г. Фреге пытается удовлетворить это требование, нов. Его основная идея состояла в том, чтобы показать, что математические теоремы являются истинами логики, «аналитическими», т. е. зависящими от общих законов логики и определений. И поскольку логика является «третейским судьей» всех вещей в том смысле, что все, существующее объективно, должно подчиняться законам логики, доказав сводимость арифметики к логике, мы докажем, что она действительно надежно обоснована, объективно истинна. Вопрос, на который стоит обратить внимание, касается существования эпистемологической коннотации такого проекта. М. Тробок аргументирует в пользу отрицательного ответа на него. Многие исследователи (например, М. Даммит [107], П. Китчер [131], П. Мартин-Леф [140]; в определенной степени, С. Шапиро [151]) находят, что аналитичность для Г. Фреге являлась эпистемологическим понятием, вопросом о том, как суждение познаваемо. В противовес, М. Тробок утверждает, что аналитичность у Г. Фреге является именно семантическим понятием: предлагаемое ею прочтение было бы, к полной неожиданности современного мейнстрима не-эпистемологическим. Согласно такой трактовке, Г. Фреге сосредоточился на вопросе обоснования, но не эпистемологии: проект логицизма концентрируется на оправдательной связи между арифметикой и логикой, где понятие оправдания логико-семантическое (в смысле объективного основания), а не субъективно-эпистемологическое. В «Grundlagen» (§ 3), Г. Фреге пишет: «когда предложение называют апостериорными или аналитическими в моём смысле, <…> это суждение о том, на чём в самых глубинных основаниях покоится оправдание признания за истинное… Проблема в том, чтобы найти доказательство предложения и свести математическую истину к первичным истинам. Если на этом пути наталкиваются только на общие логические законы и определения, то обладают аналитической истиной… Но если невозможно провести доказательство без использования истин, не имеющих общей логической природы, но относящихся к особой области науки, то предложение является синтетическим» [74, с. 142].

Хотя Г. Фреге использует такие термины, как оправдание (*justification*), которые для современного читателя звучать явно эпистемологически, его фактическое описание интересующих его объектов сводятся к логико-семантическим отношениям и их структуре. Вопреки тому, что сделали бы современные эпистемологи, Г. Фреге явно располагает вместе понятия апостериорности и аналитичности (различие заметно представлено в § 3) и четко отличает «вопрос о том, как мы приходим к содержанию суждения…от вопроса, каким образом мы оправдываем наше утверждение» [74, с. 141].

Понятия аналитичности и апостериорности соединяются в контексте определения «самых глубинных оснований, на которых покоится оправдание признания за истинное (предложений)». Г. Фреге, следовательно, не соответствует современной привычке размещать апостериорность в область эпистемологии и аналитичность в логико-семантическую область, а значит, относить их к абсолютно непересекающимся направлениям исследований. Кроме того, для Г. Фреге понятие оправдания явно принадлежит математике, а не сфере вопросов, касающихся познающего разума, и, таким образом, логико-семантических: «в этом случае вопрос переводится из области психологии в область математики, если он касается математической истины» [74, с. 141].

Это говорит о том, что мы должны различать два понятия оправдания. Цитата выше иллюстрирует первое, объективное логико-семантическое понятие оправдания. Более привычное понятие оправданности меньше касается природы истин и больше мыслительного процесса познающего, это субъектное оправдание, которое иногда связано со структурой его системы убеждений и иногда с нормативными аспектами генезиса его убеждений. Можно возразить, что есть промежуточная область обоснования, эпистемологическая нормативность, которая не является ни психологической в натуралистском смысле, ни чисто не-эпистемологической как независимой от познающего (например, Т. Бердж [100] полагает такую нормативность центральной для проекта Г. Фреге). М. Тробок же считает, что сущностью логицизма было сведение математики к логике с целью доказательства того, что она «неподвижна». Сведение математики к логике – не эпистемологический результат, в любом возможном смысле слова. Оно может иметь эпистемологические последствия, например, помогая математикам, увеличивая ясность понимания фундаментальных математических понятий, но само по себе это не эпистемологическое действие. В конце концов, эпистемологический путь, проделанный великими математиками, очень успешен в истории математики, не будучи в своем корне логицизмом. Различие между логико-семантическим и эпистемологическим понятиями обоснования будет тематизировано несколькими строками ниже, в связи с обращением к принципу Юма.

Исходной мыслью логицизма Г. Фреге является утверждение, что математика – а именно арифметика и анализ – сводится к логике. Поскольку математические утверждения сводятся к логике, мы можем определить их основания с помощью одной только логики. И задача состоит только в сведении арифметики, т. е. в определении основных арифметических терминов, таких как числа, в логических терминах и не имеет эпистемологической коннотации.

Например, С. Шапиро, хотя и представляет изначально программу исключительно как эпистемологическую, в одном месте заключает, что: «возможно, это понятие основания настолько же метафизическое, как и эпистемологическое, несмотря на использование таких понятий как “доказательство” и “оправдание”. Это не вопрос о том, знаем ли мы, например, что 7+5=12, если взять пример самого Г. Фреге (и Канта). Такого вопроса действительно не стоит, но мы действительно знаем это. И при этом, это не вопрос о том, как мы знаем, что 7+5=12. Мы знали это предложение задолго до начала работы по основаниям. Более того, наше собственное знание не нуждалось в том, чтобы пройти, и фактически не прошло, через предложенные определения. Мы просто получаем эту сумму. Г. Фреге интересовался объективными отношениями обоснования предложений, возможно, в некотором смысле, он следовал по линии отношения последствия основания Бернарда Больцано» [С. Шапиро. Цит. по: 162, .p. 88].

Такое понятие основания, задача которого определить объективные отношения между арифметическими и логическими истинами, исключительно логико-семантическое. Тезис о том, что числа – это логические объекты, как и логико-семантический анализ основных арифметических истин и определений, как таковой, не имеет эпистемологической коннотации в смысле определения того, каким образом мы воспринимаем такие отношения и, что более важно, как основные математические понятия и истины являются эпистемически доступными. Что можно сказать об эпистемологическом аспекте аналитичности?

В качестве подтверждения того, что сам Г. Фреге различал эпистемологический вопрос и проблему определения основания математики; М. Тробок приводит следующие цитаты Г. Фреге:

«вопрос о том, как мы приходим к содержанию суждения, в общем, нужно отделять от вопроса, каким образом мы оправдываем наше утверждение» [74, с. 141];

«…тогда, несмотря на то, что они не обязательно открывались бы посредством одного мышления, они были бы аналитическими суждениями; ибо здесь рассматривается не способ поиска, но разновидность оснований доказательства; или, как говорит Лейбниц, “Ведь здесь речь идёт не об истории наших открытий, которая различна у разных людей, но о естественной связи и естественном порядке истин, который всегда одинаков”» [74. с. 158].

М. Тробок отмечает, что интерес представляет контраст подробного изложения Г. Фреге логико-семантических отношений с его очень короткими, и для многих интерпретаторов, загадочными замечаниями, которые касаются эпистемологических вопросов. Он почти ничего не предлагает для аргументации того, как мы на самом деле схватываем математические объекты; решение загадки относительно того, что поддерживает «математический валун» так надежно было целью его проекта логицизма. Это решение должно быть найдено без апелляции к нашей интуиции или представлениям, но полагаться исключительно на разум.

Доказывая в «Grundlagen», что натуральные числа сводимы к логическим законам и определениям, Г. Фреге вводит принцип Юма:

$\forall F \forall G (n(F) = n(G) \Leftrightarrow F \approx G)$,

Где, напомним, F, G – понятия; $n(G)$ – число G*’s*; $\approx$ – отношение равночисленности.

Принцип Юма представляет для Г. Фреге возможный шаг в его проекте логицизма. Как мы схватываем принцип Юма, «Grundlagen» не объясняет. Очевидно то, что цель Г. Фреге заключается в характеристике уже известных (математических) объектов – натуральных чисел, а именно в том, чтобы предложить критерий их идентичности. Введение принципа Юма в последних абзацах «Grundlagen» (в частности, в § 62) связано с понятием способ представления (*mode of presentation*), и многие авторы (например, М. Даммит) интерпретируют его как эпистемологическое понятие. В альтернативном толковании, которое предлагает М. Тробок, способ представления не связан с вопросом схватывания математических знаний. Она апеллирует к тому факту, что на протяжении веков математики схватывали математические объекты, не зная их способа представления, предложенного Г. Фреге. Способ представления с точки зрения Г. Фреге объективен, и математики могут или не схватить его (как они это делали на протяжении веков) или преуспеть в этом (как в случае Г. Фреге).

Рассмотрим в качестве примера Землю и способ ее представления как объекта, который является планетой через свойство быть видимым в силу света звезд, отраженного от ее поверхности и через свойство иметь (не совершенную) сферическую формы. Несмотря на этот способ представления и тот факт, что человечеству со времен Пифагора известна формулировка о том, что Земля имеет сферическую форму, Земля снова и снова воспринималась плоской средневековыми астрономами (они не схватывали способ ее представления).

Этот способ представления, таким образом, толкуемый как способ, которым объект «представляет» себя миру, не раскрывает как таковой его эпистемическую доступность. В этом смысле он следует прочтению проекта Г. Фреге. По выражению М. Тробок, «проекту Г. Фреге не хватает эпистемологического обертона» [162, p. 90]. Более того, она выступает за то, что и сам принцип Юма не является эпистемологическим. И вот по какой причине.

Во-первых, принцип Юма был сформулирован спустя двадцать веков математического развития. С чисто математической точки зрения, математики, начиная с Древней Греции и заканчивая современными числовыми теоретиками, разработали теорию чисел в ее полном объеме. Конечно, как указывает Г. Фреге, все еще есть философско-математические проблемы, касающиеся «понятия, которое имеет основополагающее значение для большой науки», которые еще нужно открыть, и такое исследование понятия числа – это задача, которую математики и философы должны осуществить сообща. Но действительно, подход самого Г. Фреге является «более философским, чем многие математики могут счесть целесообразным» [74, с. 135]. Г. Фреге способен ввести принцип Юма из-за его знания математики в деталях; он заключает в принцип Юма критерий идентичности для хорошо известных объектов. Г. Фреге указывает на проблему Юлия Цезаря и когда Г. Фреге утверждает, что мы знаем, что Цезарь – это не число, ЭТО доказывает, что думая о числах, он имеет в виду очень конкретные (абстрактные) объекты, потому что он рассказывает об идентичности формы: число $F = x$, где x не является числом. Но для того, чтобы знать, что x – не число, т. е., что в этом отношении смешиваются разные сущности, мы должны знать, чем числа являются, и это что-то мы не могли бы познать, полагая только принцип Юма. Его вопрос о том, является ли Цезарь числом – это живописный способ постановки вопроса о том, имеет ли принцип Юма истинностное значение и, следовательно, имеет ли смысл так называемая «смешанная» идентичность (такая, как Цезарь = 0). Принцип Юма не предоставляет способ для разъяснения этого «экстремального примера». Однако, мы слишком хорошо знаем, что Цезарь – это не число. Как Г. Фреге отмечает: «естественно, никто не собирается путать [Цезаря] с [числом ноль]». М. Тробок отстаивает, что «вопреки тому, что кто-то может подозревать, здесь нет никакого порочного круга, поскольку то, что Цезарь не является числом – факт, неконтекстуально познанный нами до утверждения принципа Юма» [162, p. 91].

Во-вторых, крайне критичный подход Г. Фреге к имплицитным определениям в стиле Гильберта (обычно представленных в виде набора аксиом) обусловлен его взглядом на то, что является целью (имлицитного) определения: «аксиомы и теоремы никогда не смогут попробовать заложить смысл знаку или слову, которое встречается в них, это уже должно быть заложено». Сам принцип Юма, однако, имеет статус имплицитного определения, и вся критика Г. Фреге может быть перенесена и на него. Принцип Юма не предлагает эпистемологический маршрут для схватывания (натуральных) чисел, а, скорее, является способом определения основания для принятия математических суждений истинными.

4.2.2 Неофрегеанский логицизм

Современный неофрегеанский логицизм предпринимает попытку реабилитировать дух основной доктрины логицизма Г. Фреге, избегая при этом использования противоречивой Аксиомы V.

Целью неологицизма является выведение разделов математики из принципов абстракции, и это в первую очередь эпистемологическая программа. Как указывает С. Шапиро: «неологицизм в своем корне (в первую очередь) - эпистемологическая программа, пытающаяся определить, как математические знания могут быть даны. Мы можем знать факты о натуральных числах, получая их из принципа Юма» [151, p. 99].

Неофрегеанцы сами эксплицируют это: «неофрегеанский тезис об арифметике состоит в том, что знание ее фундаментальных законов (по сути аксиом Дедекинда-Пеано) – и, следовательно существования целого ряда объектов, которые удовлетворяют им – могут быть априори, основанными на принципе Юма» [120, p. 321].

Неофрегеанцы утверждают, что, следуя самому Г. Фреге, возможно определить посредством стипуляции абстрактные понятия о классах – это понятия, примеры которого являются абстрактными объектами определенного вида. Именно на принципах абстракции основывается тезис о том, что арифметика и анализ – это исключительно логика, и с их помощью неологицисты стремятся продемонстрировать, как логика может предоставить абстрактные объекты, и как можно иметь знание этих объектов. Неологицисты утверждают, что « <…> мы можем объяснить необходимость, по крайней мере, базовых арифметических истин и как эти истины могут быть известны априори» [152, p. 71]. В частности, принцип, на котором концентрируется неологицизм, принцип Юма, наделяется следующим статусом: «если такой объяснительный принцип<…> можно рассматривать как аналитический, то его что должно быть достаточно, по крайней мере, для того, продемонстрировать аналитичность арифметики. Даже если этот термин встречается с трудностями <…> останется то, что принцип Юма, как и любой принцип, выступающей для неявного определения некоторых понятий, будет доступен без существенной эпистемологической предпосылки <…>. Так что один ясный априорный маршрут в признании истинности… фундаментальных законов арифметики <…> будет освоен <…>. Так, <…> это будет априорный маршрут от владения логики второго порядка к полному пониманию и схватыванию истин основных законов арифметики. Такой эпистемологический маршрут <…> будет результатом, который по-прежнему стоит описывать как логицизм» [165, p. 279-80].

Идея, что принципы абстракции являются легитимным способом введения математических теорий, как уже неоднократно указывалось выше, является проблематичной, поскольку некоторые из них, как пресловутая Аксиома V, противоречивы. М. Тробок в этом отношении сосредотачивается на эпистемологическом аспекте: «мое главное беспокойство относительно этой программы – это возможность того, что огонь эпистемологических проблем неологицизма перекинется обратно на Г. Фреге; другими словами, что Г. Фреге ошибочно приписывают то, чего он на самом деле не утверждал, и чему он никогда не высказывал доверие. В отличие от неофрегеанцев, которые сами настаивают на эпистемологичности своего проекта и таким образом они, в отличие от Г. Фреге, явно принимают свою программу как принципиально эпистемологическую» [162, p. 93].

Согласно неофрегеанскому логицизму: «в силу стипуляции, что число *Fs* совпадает с числом *Gs* только в случае, если *Fs* находится во взамно-однозначном отношении с *Gs*, мы можем установить число как понятие о классах, т. е. то, что *принципа Юма* достаточно для того, чтобы объяснить понятие числа как понятие о классах» [120, p. 15]. Тем не менее, они также предлагают более сильное утверждение об априорном маршруте для схватывания понятия числа и вытекающих основных законов арифметики через Теорему Фреге. Принцип Юма якобы дает нам причину для рассмотрения математических знаний априорными, предлагая априорный путь получения математических знаний, относящийся к рационалистической эпистемологии. Согласно неофрегеанскому логицизму, логицизм Г. Фреге был правильным во всех основных отношениях, кроме двух моментов: Г. Фреге слишком высоко оценил значимость проблемы Цезаря и недооценил значимость Теоремы Фреге (вывод аксиом арифметики из Принципа Юма в логике второго порядка). Во избежание апеллирования к Аксиоме V, неофрегеанский логицизм не следует за Г. Фреге по стопам, он выступает за добавление принципа Юма к логике второго порядка в качестве дополнительной аксиомы, поддерживая, что Теорема Фреге дает основание для обоснования утверждения, что арифметика, выведенная на основании принципа Юма, аналитична. И, согласно М. Тробок, «результат – это провал обеих целей Г. Фреге, а именно: доказательства аналитичности арифметики и, следовательно, определения оснований математики на основе логики» [162, p. 94]. Неологицизм не доказывает аналитичность (по Г. Фреге) арифметики, поскольку принцип Юма не является законом логики. Это утверждение заменяется на более слабый тезис о том, что добавление принципа Юма к логике второго порядка в согласованной системе, которая достаточна для основания арифметики (все основные законы арифметика выводятся из этой системы) «является доказательством логицизма, в разумном понимании этого тезиса» [120]. Но если Принцип Юма – это не закон логики, в каком смысле можно утверждать, что логицизм доказан? Неофрегеанцы утверждают, что: « …факт существования чисел может быть основан на принципе Юма, и, что важно для неофрегеанства, это должно быть так, именно потому, что он предусматривает ответ на эпистемологический вызов, создаваемый дилеммой Бенасеррафа. <…> при условии, что факты о взаимно-однозначном соотношении понятий – в основном случае, понятий о классах, под которые подпадают только конкретные предметы – являются, как мы можем разумно предположить, *непроблематично* доступными, мы получаем доступ к соответствующим истинам, формулировка которых предполагает референцию к числам, через принцип Юма и без какой-либо необходимости постулировать какие-то загадочные экстрасенсорные способности или так называемую математическую интуицию» [119, p. 172-173].

Хотя К. Райт проницательно отметил, что в каждом эпистемологическом проекте есть предпосылки, которые должны быть приняты на веру, без доказательного обоснования (во избежание бесконечного регресса), М. Тробок не удовлетворяет ответ неофрегенства на вопрос о том, как мы схватываем принцип Юма. «Оставив его без ответа, эпистемологический проект не может предложить альтернативу таинственным экстрасенсорным способностям или так называемой математической интуиции, он просто заменяет мистический элемент на предположительно беспроблемное схватывание принципа Юма» [162, p. 94].

Б. Хейл и К. Райт предлагают нам рассматривать принцип Юма аналогично принципу направления (напомним, $(\forall a \forall b(\mathrm{d}(a) = \mathrm{d}\ (b) \Leftrightarrow a\ //b)))$. Этот принцип кажется принимаемым стипулятивно, и кажется, дает смысл направлению в силу чисто условия. Б. Хейл и К. Райт применяют подобные допущения к эпистемологии принципа Юма. «Число» получает свой смысл от стипуляции тем же путем, что и «направление». Но М. Тробок утверждает, что аналогия не сохраняется в эпистемологическом смысле, так как введение направления линий не предполагает никакого определения объектов (что мы знаем о свойствах объектов, соответствующих направлению линий, кроме того, что определяется принципом направления?) или некоторой теории о направлениях. Мы действительно *стипулятивно оговариваем* направления линий. Аналогия Г. Фреге заключается в том, что мы понимаем, что такое направления линий через принцип направления, в том же смысле, в каком мы можем знать, что такое числа через принцип Юма – но, как было указано, это не эпистемологический маршрут, как полагают неофрегеанцы (и другие). В таком случае, единственный выход по мнению М. Тробок для неофрегеанского логицизма может состоять в том, что мы могли бы действительно стипулировать принцип Юма, постулируя определенные понятия, а затем проверить их наличие непустыми объемами. Таким образом, этот способ стипуляциине будет нуждаться в том, чтобы числа были известны заранее и будет похож на имплицитные определения в манере Д. Гильберта. Как объясняют П. Эберт и С. Шапиро, существуют важные различия между манерой Д. Гильберта и неофрегеанской стипуляцией: «за исключением логической терминологии (связок и др.), ни один термин в манере имплицитных определений Гильберта, не приходит с ранее установленным смыслом или объемом. <…> Для Гильберта, выполнимости (или относительной непротиворечивости) набора аксиом достаточно для их истинности, в то время как для неологицистов важнейшим вопросом является уникальность объектов, относящихся к соответствующим используемым терминам» [111, p. 421].

Может ли прочтение через манеру Гильберта помочь принципу Юма? Такая интерпретация поднимет новую версию проблемы Юлия Цезаря: используя принцип Юма как имплицитные определения в указанном смысле, невозможно описать определенные, уникальные объекты; вспомним тонкое замечание Д. Гильберта, что «стол, стулья и пивные кружки» могут быть приняты в качестве аксиом, обычно выступающих для обозначения точек и линий. Ни одно имплицитное определение в манере Д. Гильберта не может однозначно определить объекты, на которые оно ссылается, и это не является его целью. Как П. Эберт и С. Шапиро справедливо замечают: «подключение к интуиции или наблюдениям провально для надежного <знания – П.О.>» [111, p. 421]. С другой стороны, история математики показывает примеры, которые работают именно по такому пути. Вспомним, например, положение Дж. Кардано о «мнимых числах»: сначала они были стипулированы как числа, чьи квадраты были отрицательными числами, и прошло почти 300 лет, прежде чем К. Гаусс определил их геометрическую интерпретацию и, следовательно, объяснил «истинную метафизику мнимых чисел» (1831). Может быть, похожий, действительно стипулятивный маршрут может быть открыт для Принципа Юма и натуральных чисел. В таком случае принцип Юма будет представлять собой эпистемический путь для знания арифметики и анализа. Однако, М. Тробок заключает, что такой проект, к сожалению, будет далек от целей Г. Фреге, учитывая его подход к определениям в манереД. Гильберта и соответствующей мета-теории, согласно которой сингулярные термины не должны однозначно определять объекты, на которые они ссылаются. С адаптированной концепцией аналитичности и имплицитными определениями основное ядро программы логицизма Г. Фреге не удастся сохранить, вопреки неофрегеанской цели.

4.3 Неологицизм – не логицизм?

Две различные интерпретации предоставляют аргументацию в пользу того, что проект неологицизма является «последователем» логицизма, и против этого.

Так, С. Шапиро, проанализировав четыре предлагаемых причины, мотивировавших Г. Фреге на создание логицизма, в контексте шотландского неологицизма приходит к выводу, что неологицисты действительно пытаются решить поставленные Г. Фреге задачи. Однако, и постановка вопросов (этих задач), и предлагаемые решения, судя по всему, несколько отходят (и, видимо, и должны отходить) от первоначальной задумки Г. Фреге. Кроме того, шотландский неологицизм сталкивается с рядом трудностей, и предлагаемое решение этих трудностей далеко от удовлетворительного. Более того, решение многих вопросов (и принятие этих решений в качестве удовлетворительных) зависит от ответов на фундаментальные эпистемологические и онтологические вопросы. Несмотря на проблематичность многих тезисов неологицизма, он все же следует по пути логицизма.

М. Тробок выступает против утверждения о наличии такой связи между логицизмом и неологицизмом. Она не только и не столько против принятия самой идеи неологицизма в силу проблематичности некоторых (основных) тезисов проекта, но против того, что логицизм и неологицизм стремятся решить одни и те же проблемы. Проект Г. Фреге трактуется как несовместимый с узким эпистемологическим прочтением его теории, а также представлен критический анализ неофрегеанства, претендующего на следование программе Г. Фреге в эпистемологическом плане. М. Тробок отмечает, что «этот проект предполагается следующим самому Г. Фреге в вопросе об эпистемологическом значении, и я утверждаю, что это предложение не верно: неофрегеанцам не удается выполнить цели Г. Фреге: доказать аналитичность арифметики, и следовательно, определить фундамент математики на основе логики» [162, p. 96]. Она отстаивает тезис, что Г. Фреге, разделяя эпистемологический вопрос и задачу объяснения основания математики, фокусировался только на последнем, даже исключительно на нем: «моя цель – не де-философизировать его стремление и не представить его фигуру просто как своеобразного математика, но локализовать его философский интерес адекватно. В частности, что касается принципа Юма, главной цели современных дебатов, я буду отстаивать то, что Г. Фреге не пришел к пониманию и не приглашал читателя понимать натуральные числа через принцип Юма» [162, p. 83]. Принцип Юма в такой трактовке не имеет эпистемологической функции: он предлагает не эпистемологический маршрут для схватывания (натуральных) чисел, а, скорее, способ для знания или определения основания для принятия математических суждений истинными. Неофрегеанцы, наоборот, говорят о принципе Юма и Теореме Фреге строго в эпистемологическом смысле, как предлагающем «чисто априорный путь к пониманию истины... фундаментальных законов арифметики». М. Тробок же приводит доводы в пользу пессимистического вывода о том, что конечный результат неологицизма может быть провальным относительно обеих целей Г. Фреге, а именно: доказательства аналитичности арифметики, и, следовательно, определения основ математики прочными в силу того, что они основаны на логике. Вместе с тем, она же предлагает возможные пути отступления для неофрегеанского логицизма, констатируя при этом, что «такой проект, к сожалению, будет далек от целей Г. Фреге» [162, p. 84].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении мы можем сформулировать ряд результатов, полученных в ходе диссертационного исследования.

Так, мы можем считать обоснованным наличие проблемной ситуации в изучении онтологических и эпистемологических вопросов, поставленных в рамках программы логицизма Г. Фреге. В настоящее время очевидно, что в полной мере реализовать задачи программы логицизма не удалось. Как уже было сказано, логицизм Г. Фреге стал отправной точкой в современной философии математики. Кроме сторонников Г. Фреге, пытавшихся построить свою программу из тех же исходных принципов и предполагаемых результатов, которых можно, в конечном счете, отнести к логицистам, сформировались и другие направления философии математики, принципиально иначе отвечающие на фундаментальные вопросы, поставленные в «Grundlagen» и в «Grundgesetze». Так в современной философии математики сформировались грандиозные философские программы – логицизм, интуиционизм и формализм. Однако, «со временем росло разочарование в выполнимости этих программ, и к 1960-м годам в настроениях математиков и логиков стала превалировать усталость» [84, с. 16], что отразилось в литературе этого времени – например, в статье Х. Патнэма с симптоматичным названием «Почему ничего из этого не работает». В 1950-60-х годах философия математики снова оказалась в глубоком кризисе, когда стало очевидно, что главные ее направления так и неспособны дать адекватное решение основных проблем в рамках дисциплины. Вместе с тем, в последние годы наблюдается небывалый всплеск интереса к философии математики в англоязычной литературе. Несмотря на некоторый скепсис, который наблюдается по отношению к самой философии математики, современные исследователи не теряют надежды все-таки ответить на традиционные вопросы этой дисциплины, причем новые направления в большей или меньшей степени отсылают нас к одной из традиционных школ. В данном исследовании было показано, что интерпретация взглядов Г.Фреге на природу математики как полностью ошибочных несостоятельна. Таким образом, очевидной становится проблема адекватного истолкования позитивной составляющей онтологических и эпистемологических аспектов логицистского построения арифметики, введения исходных объектов и истин математики в логицизме Г. Фреге. Была продемонстрирована перспективность исследования логицистских способов введения и особенностей функционирования на содержательном уровне базисных понятий и утверждений арифметики натуральных чисел. Данное исследование не претендует на оригинальную интерпретацию логицизма Г. Фреге, однако, его детальное изучение необходимо для дальнейшего исследования философии математики неологицизма и связи этих двух проектов. Несмотря на большое количество работ, посвященных интерпретациям логицизма, исследование в этом направлении продолжается. «Grundlagen» буквально растащен на цитаты и в западной литературе активно ведутся его исследования. Отметим, что «Grundgesetze» до недавнего времени не была переведена на английский язык. И, возможно, многие перспективы исследования логицизма станут более понятны после выхода в 2013 году перевода данной работы Г. Фреге, посвященной техническим деталям проекта логицизма. Еще один вектор исследования логицизма, идущий совсем в другом направлении, чем неологицизм, может быть связан с изучением самореферентности как причины парадоксов. Ряд авторов (С. Ябло, А. Гупта, Г. Прист и др.) демонстрируют, что самореферентность не является источником возникновения парадоксов (в т.ч. парадокса Рассела). При развитии этой идеи и интерпретации ее в логицизме Г. Фреге возможен пересмотр статуса самой Аксиомы V.

Также в работе обоснована перспективность изучения неологицизма К. Райта и Б. Хейла. Показано, как в рамках проекта неологицизма К. Райта достигается существенный математический результат: доказывается Теорема Фреге, согласно которой аксиомы второго порядка Пеано можно вывести в логике второго порядка из того, что известно как «принцип Юма». Таким образом, показано, как структура натурального числа вытекает из основного принципа о численности и демонстрируется возможность вывода основных понятий и положений арифметики из логики, дополненной единственной нелогической аксиомой – принципом Юма. Установлено, что для оценки возможности принятия философии математики неологицизма для обоснования математики, необходимо детальное изучение ряда технических деталей и более общих философских, методологических вопросов и вопросов логики. На настоящий момент отсутствуют основательные аргументы для принятия таких проблемных предложений, как использование принципов абстракции (необходимо установить критерий для отделения «хороших» принципов абстракции от «плохих») и имплицитных определений числа при построении основания математики, логики второго порядка и др. Успех неологицизма во многом зависит от принятия допущений, которые пока что не получили должного обоснования. Это обстоятельство во многом осложняет перспективность неологицизма. Полемика представителей неологицизма и их оппонентов широко представлена и тематизирует все указанные проблемы. Вместе с тем, отметим, что каждое предложение неологицизма встречает новую критику, на которую также следует ответ неологицизма, и т. д., и т. д. Действительно, количество работ, посвященных исследованию проблем философии математики неологицизма, кажется, растет в геометрической прогрессии. С одной стороны, это демонстрирует актуальность неологицизма (что интересно, так это обнаружение интересных связей проекта с, казалось бы, идущими совсем другим путем программами обоснования математики, как, например, связь неологицизма и структурализма) и перспективность его развития. С другой, становится ясным, что круг вопросов, требующих серьезного разрешения (и принятия весьма проблематичных положений), не сужается, а только расширяется, и неологицизм далек от того, чтобы его идеи были приняты в качестве основания математики.

Проведенный в работе анализ позволяет утверждать, что многие проблемы носят не только технический или философский характер, но и терминологический, и уточнение терминологии (определение более или менее единого понимания и правил употребления основных понятий) может стать основой для решения ряда проблем. В ходе исследования было показано, что один из самых проблематичных в рамках исследований по неологицизму вопрос об аналитичности принципа Юма может быть решен именно с помощью пересмотра традиционного понятия аналитичности и формулирования нового, более адаптированного к современности понятия.

Важно отметить, что вопрос преемственности логицизма и неологицизма, который стоит также остро, как и технические вопросы проекта, имеет разные способы решения. Общая идея, доказываемая в диссертации, такова: К. Райт и Б. Хейл, предлагая действительно работающее решение многих поставленных Г. Фреге задач, все же идут по пути, отличному от пути логицизма Г. Фреге. Неологицизм во многом перенимает техническую составляющую проекта Г. Фреге и стремится решить поставленные Г. Фреге задачи. Однако используемые ресурсы в силу их особенностей нельзя интерпретировать в качестве методологии логицизма. Добавление к методологическому аппарату логицизма – логике – имплицитных определений не соответствует философским установкам Г. Фреге в частности и его логицизма в целом.

Также одним из результатов проведенного исследования выступает демонстрация того, что даже если принципы абстракции (в т.ч. непосредственно принцип Юма) не имеют статуса аналитических истин в том смысле, который предлагают представители неологицизма, они тем не менее играют важную роль в нашей эпистемологической позиции относительно математики. Кроме того, даже если неологицизм не является, на самом деле, версией логицизма, результаты проведенного исследования дают понять, что логика играет решающую роль в неологицистском обосновании математических истин и математического знания. Как отмечает Р. Кук, «арифметика, казалось бы, является, в каком- то смысле, большой историей успеха абстракционизма, поскольку технические результаты, по крайней мере, кажутся по большей части решенными, все, что остается, – это разобраться в философских проблемах и вопросах, которые возникают в результате этой абстракционистской реконструкции» [160, p. xx].

Подводя итоги исследования, необходимо сказать, что основное исследование неологицизма, очевидно, еще только предстоит. Программа

К. Райта и Б. Хейла находится в постоянном развитии, предлагаются новые решения для проблем в рамках философии математики неологицизма, и дискуссии вокруг нее не прекращаются. В связи с этим, в заключение стоит отметить, что неологицизм еще приведет ко многим интересным, и, быть может, пока непредсказуемым результатам, а неоднозначная оценка этого проекта в литературе это только подтверждает.

Таким образом, перечисленные результаты дают основание заключить, что поставленные в диссертации задачи решены и цель диссертационного исследования достигнута.

Список использованных источников и литературы

1. Аналитическая философия : учеб. пособие / под ред. М. В. Лебедева, А. З. Черняка. – М.: Изд-во РУДН, 2006. – 622 с.

2. Арепьев Е. И. Преодоление кризиса теории множеств и становление аналитической философии математики / Е. И. Арепьев // Актуальные проблемы социогуманитарного знания : сборник научных трудов кафедры философии МПГУ.– М.: «Прометей», 2002. – Вып. XIV. – С. 12–21.

3. Арепьев Е. И. Философия математики и ее аналитическая трактовка в свете теоретико-множественного подхода к обоснованию математического знания. – Курск: Изд-во Курск, гос. пед. ун-та, 2001. – С. 1–22.

4. Арепьев Е. И. Онтологические и гносеологические компоненты оснований математики: геометрическая составляющая / Е. И. Арепьев // Философская Россия. – 2007. – № 3. – С. 144–151.

5. Барабашев А. Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 160 с.

6. Бирюков Б. В. У истоков отечественных исследований по поиску логического вывода / Б. В. Бирюков // Вопросы философии. – 2006. – №12. – С. 99–119.

7. Бирюков Б. В. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времён до эпохи кибернетики. – М.: Изд-во «Знание», 1985. – 192 с.

8. Бурбаки Н. Теория множеств / пер. Г. Н. Поварова, Ю. А. Шихановича. – М.: Изд-во «Мир», 1965. – 456 с.

9. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / пер. с нем. под ред. А. П. Юшкевича. – М., 1960. – 469 с.

10. Генцен Г. Исследования логических выводов / Г. Генцен // Математическая теория логического вывода : сборник переводов под. ред. А. В. Идельсона и Г. Е. Минце. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – С. 9–75.

11. Генцен Г. Непротиворечивость чистой теории чисел / Г. Генцен // Математическая теория логического вывода : сборник переводов под. ред. А. В. Идельсона и Г. Е. Минце. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – С. 77–154.

12. Горбатов В. В. Тождество, истина и парадокс анализа / В. В. Горбатов // Язык философии: традиции и новации : материалы межвузовской конференции. Москва, 07–08 декабря 2010 г. – М., 2010. – С. 34–41.

13. Грифцова И. Н. Логика как теоретическая и практическая дисциплина. К вопросу о соотношении формальной и неформальной логики. – М., 1998. – 110 с.

14. Грифцова И. Н. Логический анализ научной теории и не-фрегевская логика / И. Н. Грифцова // Логика и системные методы анализа научного знания. – Харьков, 1986. – С. 54–58.

15. Грязнов А. Ф. Аналитическая философия – М.: Высшая школа, 2006. – 375 с.

16. Гутнер Г. Б. Онтология математического дискурса: сущность и структура в математическом рассуждении. – М.: Изд-во Моск. культурол. Лицея, 1999. – 118 с.

17. Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат? – Казань, Тип.-литогр. Имп. ун-та, 1905. – 79 с.

18. Декарт Р. Рассуждения о методе. – Л., 1953. – 665 с.

19. Декарт Р. Сочинения: в 2-х томах. – М.: Мысль, 1989. – Т.1. – 654 с.

20. Декарт Р. Сочинения: в 2-х томах. – М.: Мысль, 1994. – Т.2. – 640 с.

21. Евклид. Начала. Книги I-VI // перевод и комент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М-Л.: ОГИЗ гос. изд. Технико-теоретической лит-ры, 1948. – 447 с.

22. Евклид. Начала. Книги VII-X // перевод и комент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М-Л.: ОГИЗ гос. изд. Технико-теоретической лит-ры, 1949. – 511 с.

23. Евклид. Начала. Книги XI-XV // перевод и комент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М-Л.: ОГИЗ гос. изд. Технико-теоретической лит-ры, 1950. – 331 с.

24. Жуков Н. И. Философские основания математики : учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Университетское, 1990. – 110 с.

25. Историко-математические исследования. – М.: «Янус-К», 1997. - Вторая серия. Вып. 2(37). – 336 с.

26. Катасонов В. Н. Метафизическая математика XVII в. – М.: Изд-во «Наука», 1993. – 139 с.

27. Катасонов В. Н. О внутренних границах науки / В. Н. Катасонов // Наука. Философия. Религия, 2007. – Кн. 2. – С. 165–185.

28. Катречко С. Л. О (концепте) числе(а): его онтологии и генезисе / С. Л. Катречко // Число : сб. статей. – М.: МАКС Пресс, 2009. – С. 116–132.

29. Катречко С. Л. Трансцедентальная философия математики / С. Л. Катречко // Вестн. Московского университета. Сер.7. Философия. – 2008. – № 2. – С. 88–105.

30. Канке В. А. Философия математики, физики, химии, биологии : учеб. пособие. – М.: КНОРУС, 2011. – 369 с.

31. Кант И. Критика чистого разума. – М.: Мысль, 1994. – 592 с.

32. Кантор Г. Основания арифметики / Г. Кантор // Труды по теории множеств. – М.: Изд-во «Наука», 1985. – 430 с.

33. Карри Х. Основания математической логики. – М.: Издательство «Мир», 1969. – 569 с.

34. Клайн М. Математика. Утрата определенности: пер. с англ. / под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. – М.: Мир, 1984. – 434 с.

35. Клини С. К. Математическая логика / пер. Ю. А. Гастаева. – М.: «Мир», 1973. – 480 с.

36. Кричевец А. Н. Проблемы идеального в контексте математики / А. Н. Кричевец // Ильенковские чтения. – М., 2007. – Ч. 1. – С. 26–32.

37. Куайн У. Слово и объект / пер. с англ. А. З. Черняк, Т. А. Дмитриев. – М.: Праксис; Логос, 2000. – 386 с.

38. Кудряшев А. Ф. Проблема обоснования знания: вехи исследования / А. Ф. Кудряшев // Научное обоснование и здравый смысл. – Уфа, 1996. – С. 156-162.

39. Кудряшев А. Ф. Социально-философские концепции в аспекте обоснования / А. Ф. Кудряшев // Фихте, Платон, Макиавелли и идея правового общества : материалы международной научной конференции. Уфа, 26-31 мая 2004 г. – Уфа, 2006. - С. 122–127.

40. Кузнецова И. С. Гносеологические проблемы математического знания. – Л., изд-во ЛГУ, 1984.– 136 с.

41. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2001. – 568 с.

42. Ладов В. А. Семантика и онтология: Проблема реальности в аналитической философии : учеб. пособие. – Томск: Изд-во Том. ун- та, 2010. – 134 с.

43. Ладов В. А. Аналитическое определение числа, парадокс Рассела и теория типов / В. А. Ладов, И. А. Эннс // Вестник Томского государственного университета. Серия: Философия. Социология. Политология. - 2012. – № 2(18). – С. 13–20.

44. Лакатос И. История науки и её рациональные реконструкции / И. Лакатос / прил. к кн.: Кун Т. Структура научных революций. – М.: АСТ, 2001. – С. 124–142.

45. Лейбниц Г. В. Сочинения : в 4 т. Т. 4 / ред. , авт. вступит. статьи и примеч. В. В. Соколов; АН СССР, Ин-т философии. – М.: Мысль, 1989. – 556 с.

46. Логика, онтология, язык / сост., пер. и предисл. В. А. Суровцева. – Томск: изд-во Том. ун-та, 2006. – 244 с.

47. Лосев А. Ф. Проблема символа и реалистическое искусство. – М.: «Искусство», 1976. – 320 с.

48. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики / пер. Н. И. Стяжкина, А. Л. Субботина. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 313 с.

49. Лукьянец В. С. Философские основания математического познания. – Киев, 1980. – 192 с.

50. Майоров Г. Г. Философия как искание Абсолюта. Опыты теоретические и исторические. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 416 с.

51. Микиртумов И. Б. Основные идеи «Философии арифметики» Гуссерля и логицизм Г. Фреге / И. Б. Микиртумов // Логико-философские штудии, 2013. – Т. 10, № 2. – С. 117–129.

52. Нейман Дж. Математические основы квантовой механики – М.: Наука, 1964. – 367 с.

53. Новиков П. С. Элементы математической логики. - М.: Изд-во «Наука», 1973. – 399 с.

54. Пащенко Т. В. О видах неологицизма / Т. В. Пащенко // Философия. Язык. Культура. : сборник материалов научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Москва, 10 марта 2010 г. – М., 2010. – С. 53–64.

55. Перминов В. Я. Развитие представления о надежности математического доказательства. – М.: Издательство Московского университета, 1986. – 240 с.

56. Перминов В. Я. Философия и основания математики. – М.: Изд-во «Прогресс-традиция», 2001. – 320 с.

57. Пуанкаре А. О науке. – М.: Изд-во «Наука», 1983. – 560 с.

58. Рассел Б. Введение в математическую философию. Избранные работы [Текст] / Б. Рассел; вступ. статья В. А. Суровцева; пер. с англ. В. В. Целищева, В. А. Суровцева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. – 264 с.

59. Рассел Б. История западной философии: В 3 кн.: 3-е изд., испр. / пер. с англ.; подгот. текста В. В. Целищева. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2001. – 1806 с.

60. Родин А. В. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. – М.: Наука, 2003. – 211 с.

61. Рузавин Г. И. Философские проблемы оснований математики. – М.: Наука, 1983. – 306 с.

62. Светлов В. А. Философия математики: Основные программы обоснования математики XX столетия. – М.: КомКнига, 2010. – 208 с.

63. Словарь философских терминов / научная редакция профессора В. Г. Кузнецова. – М.:ИНФРА-М, 2007. – XVI, 731 с.

64. Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук : учебник для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук / под.общ. ред. д-ра филос. наук, проф. В. В. Миронова. – М.: Гардарики, 2007. – 639 с.

65. Сокулер З. А. Современные исследования по философским вопросам математики. – М.: ИНИОН, 1983. – 61 с.

66. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 510 с.

67. Суровцев В. А. Автономия логики: источники, генезис и система философии раннего Витгенштейна. – Томск: Издательство Томского университета, 2001. – 306 с.

68. Суровцев В. А. Б. Рассел о бесконечности / В. А. Суровцев // Вестник Томского государственного университета. Серия: Философия. Социология. Политология. – 2010. – № 4(12). – С. 135–145.

69. Суровцев В. А. Ф. П. Рамсей и программа логицизма. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012. – 258 с.

70. Сухотин А. К. Философия математики: Учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 230 с.

71. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 128 с.

72. Фреге Г. Избранные работы / пер. с нем. А. Л. Никифорова. – М., ДИК, Русское феноменологическое общество, 1997. – 128 с.

73. Фреге Г. Логика и логическая семантика : сборник трудов / пер. с нем. Б. В. Бирюкова под ред. З. А. Кузичевой : учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Аспект Пресс, 2000. – 512 с.

74. Фреге Г. Логико-философские труды [Текст] / Г. Фреге / пер. с англ., нем., франц. В. А. Суровцева. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. – 283 с.

75. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966. – 557 с.

76. Фрэнк Пламптон Рамсей. Философские работы / пер. с англ. В. А. Суровцева. – М.: «Канон+» РООИ «Реабилитация», 2011. – 367 с.

77. Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. – М., 1980. – 448 с.

78. Целищев В. В. Неологицизм, аксиома бесконечности и логические константы / В. В. Целищев // Философия науки. – 2010. – № 2(45). – С. 21–33.

79. Целищев В. В. Неологицизм и проблема введения новых выражений / В. В. Целищев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. – 2010. – Т. 8, вып. 3. – С. 5–10.

80. Целищев В. В. Неологицизм и экзистенциальные допущения в логике / В. В. Целищев // Философия науки. – 2008. – № 3(38). – С. 46–58.

81. Целищев В. В. Неологицизм, существование и метафизика / В. В. Целищев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. – 2009. – Т. 7, вып. 2. – С. 3–9.

82. Целищев В.В. Онтология математики: объекты и структуры. – Новосибирск: Нонпарель, 2003. – 240 с.

83. Целищев В. В. Принципы абстракции и неологицизм / В. В. Целищев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. – 2008. – Т. 6, вып. 3. – С. 9–15.

84. Целищев В.В. Философия математики. – Новосибирск: Наука, 2002. – Ч. 1. – 212 с.

85. Целищев В. В., Силантьев И. В. Метафорическое представление математического знания / В. В. Целищев, И. В. Силантьев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия. – 2010. – Т. 8, вып. 4. – С. 5–21.

86. Чёрч А. Введение в математическую логику / пер. В. С. Чернявского, под. ред. В. А. Успенского. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 485 с.

87. Чусов А. В. Обоснование математики: логическая норма или предметно-конструктивная реальность / А. В. Чусов // Философия науки: исторические эпохи и теоретические методы. – Воронеж, 2006. – С. 175–230.

88. Шапошников В. А. Три парадигмы в философии математики / В. А. Шапошников // Эпистемология и философия науки. – 2008. – Т. 15, № 1. - С. 124–131.

89. Юшкевич А. П. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия. : пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 318 с.

90. Bays T. The Fruits of Logicism // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 2000. – Vol. 41. – P. 415–421.

91. Blackburn S. The Oxford dictionary of philosophy. – Oxford: Oxford University Press, 1994. – 416 p.

92. Boolos, G. Iteration Again // Logic, Logic and Logic. – Harvard University Press, 1999. – P. 88–104.

93. Boolos J. Is Hume's Principle Analytic? // Logic, Logic and Logic. – Harvard University Press, 1999. – P. 301–314.

94. Boolos G. Saving Frege from Contradiction // Logic, Logic and Logic. – Harvard University Press, – 1999. – P. 171–182.

95. Boolos G. The consistency of Frege's Foundations of arithmetic // On being and saying: Essays for Richard Cartwright, edited by Judith Jarvis Thompson. – Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1987. – P. 3–20.

96. Boolos J. The Standard Equality of Numbers // Logic, Logic and Logic. – Harvard University Press, 1999. – P. 202–219.

97. Bostock D. Logic and Arithmetic: Natural Numbers. – Oxford: Calendon Press, 1974. – 219 p.

98. Bueno O. Logicism Revisited // Principia. – 2001. – № 5. – P. 99–124.

99. Burge T. Frege on knowing the foundation // Mind. – 1998. – № 107. – P. 305–347.

100. Burge T. Truth, Thought, Reason – Essays on Frege. – Oxford: Clarendon Press, 2005. – 430 p.

101. Burgess J. Fixing Frege. – Princeton: Princeton U. P., 2005. – 257 p.

102. Cocchiarella N. Logical Studies in Early Analytic Philosophy. – Columbus: Ohio State U. P., 1987. – 293 p.

103. Coffa A. The semantic tradition from Kant to Carnap. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 445 p.

104. Cook R., Ebert P. Abstraction and identity // Dialectica. – 2005. – № 59. – P. 1–19.

105. Decock L. Neo-Fregeanism Naturalized: The Role of One-to-One Correspondence in Numerical Cognition // Behavioral and Brain Sciences. – 2008. – № 31 (6). – P. 648–649.

106. Demopoulos W. The neo-Fregean program in the philosophy of arithmetic // Intuition and the Axiomatic Method. – Springer, 2006. – P. 87–112.

107. Dummett M. Frege: Philosophy of mathematics. – Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1991. – 352 p.

108. Dummett M. Neo-Fregeans: in Bad Company // The Philosophy of Mathematics Today, ed. Matthias Schirn. – Oxford: Clarendon P., 1998. – P. 389–405.

109. Ebert, P. The context principle and implicit definitions: Towards an account of our apriori knowledge of arithmetic, Ph.D. thesis. – University of St. Andrews, 2005. – 158 p.

110. Ebert P., Rossberg, M. What is the purpose of Neo-Logicism? // Traveaux de Logique, edited by the CdRS at the University of Neuchâtel. – 2006. – № 18. – P. 33–61.

111. Ebert P., Shapiro S. The Good, the Bad and the Ugly // Synthese. – 2000. – №170. – P.415–441.

112. Eklund M. Neo-Fregean Ontology // Philosophical Perspectives. – 2006. – № 20. – P. 95–121.

113. Fine K. The Limits of Abstraction. – Oxford: Clarendon Press, 2002. – 216 p.

114. Ghiselin M. Metaphysics and the Origin of Species. – SUNY Press, 1997. – 398 p.

115. Govier T. A Practical Study of Argument. Enhanced Edition, 2010. – 432 p.

116. Hale B., Wright C. The Metaontology of Abstraction // Metametaphysics, ed. D. Chalmers. – Oxford: Oxford U. P., 2009. – P. 178–212.

117. Hale B. Abstraction and set theory // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 2000. – № 41. – P. 379–398.

118. Hale B., Wright, C. Implicit definition and the a priori // New essays on the a priori, edited by P. Boghossian and C. Peacocke. – Oxford, Oxford University Press, 2000. – P. 286–319.

119. Hale B., Wright C. Logicism in the Twenty-First Century // The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic, edited by Stewart Shapiro. – New York: Oxford University Press, 2005. – P. 172–173.

120. Hale B., Wright C. The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics. – Oxford: Clarendon Press, 2001. – 455 p.

121. Hale B., Wright C. The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics. Critical studies / Book reviews. Reviewed by Tennant N. // Philosophia Mathematica. – Oxford University Press. – 2003. – № 11(2). – P. 226–241.

122. Hurley P. A Concise Introduction to Logic (Study Guide). – Wadsworth Pub Co, 2000. – 680 p.

123. Heck R. Finitude and Hume's principle // Journal of Philosophical Logic. – 1997. – № 26. – P. 589–617.

124. Heck R. Frege's Theorem. – Oxford University Press, 2011. – 356 p.

125. Heck R. Frege's Theorem: An Introduction // The Harvard Review of Philosophy. – 1999. – № 7 (1). – P. 56–73.

126. Heck R. The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik // Journal of Symbolic Logic. – 1993. – № 58. – P. 579–600.

127. Hodes H. Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic // Journal of Philosophy. – 1984. – № 81. – P. 123–49.

128. Jeshion, R. Frege's notions of self-evidence // Mind. – 2001. – № 110. – P. 937–976.

129. Klement K. Frege and the Logic of Sense and Reference. – New York: Routledge, 2002. – 260 p.

130. Klement K. Neo-logicism and Russell's logicism // Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies. – 2012. – Vol. 32 (127). – P. 127–152.

131. Kitcher P. Frege's Epistemology // The Philosophical Review. – 1979. – № 88. – P. 235–262.

132. Lakatos I. Proofs and Refutations. – Cambridge: Cambridge Universtity Press, 1976. – 174 p.

133. Lambert K. Free Logic and the Concept of Existence // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1967. – № 1. – P. 133–144.

134. Linsky B., Zalta E. What is Neologicism? // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2006. – № 121. – P. 60–99.

135. Logicism, Intuitionism, and Formalism: What Has Become of Them? / Editors: Lindström, S., Palmgren, E., Segerberg, K., Stoltenberg-Hansen. – Springer, 2009. –512 p.

136. MacBride, F. The Julio César Problem // Dialectica. – 2005. – № 59. – P. 223–236.

137. MacBride F. Finite Hume // Philosophia mathematica. – 2000. – № 8. – P. 150–159.

138. 138.MacBride, F. Can nothing matter? // Analysis. – 2002. – № 62. – P. 125–134.

139. MacBride F. Speaking with shadows: A study of neo-logicism // British Journal for the Philosophy of Science – 2003. – № 54. – P. 103–163.

140. Martin-Löf P. On the Meaning of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws // Nordic Journal of Philosophical Logic. – 1996. – № 1. – P.11–60.

141. New Waves in Philosophy of Mathematics / Edited by Otavio Bueno, Oystein Linnebo. – Hampshire: Palgrave MacMillan, 2009. – 320 p.

142. Oliver A. Logic, Mathematics and Philosophy // The British Journal for the Philosophy of Science. – 2000. – № 51. – P. 857–873.

143. Parsons, C. Frege's theory of number // Philosophy in America, edited by Max Black, Ithaca, New York, Cornell University Press, 180–203; reprinted in Mathematics in Philosophy by C. Parsons. – Ithaca, New York, Cornell University Press, 1983. – P. 150–175.

144. Philosophia Mathematica. Special Issue: Abstraction Principles. – 2017 – Vol. № 25. – 158 p.

145. Rossberg M. First-order logic, second-order logic, and completeness // Vincent Hendricks et al. (eds.), First-Order Logic Revisited. – Berlin: Logos, 2004. – P. 303–321.

146. Rossberg M. Second-Order Logic: Ontological and Epistemological Problems // Doctoral Dissertation. – University of St Andrews, 2006. – 278 p.

147. Roy T. Cook. Frege's Cardinals and Neo-Logicism // Philosophia Mathematica. – 2016. – Vol. 24. – P. 60–90.

148. Rumfitt I. Hume's Principle and the Number of all Objects. – 2002. – Nous № 35(4). – P. 515–541.

149. Shapiro S. Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic. – Oxford University Press, 1991. –304 p.

150. Shapiro S. Prolegomenon to Any Future Neo-Logicist Set Theory // British Journal for the Philosophy of Science. – 2003. – № 54. – P. 59–91.

151. Shapiro S. Introduction to the Abstraction and Neo-Logicism Special Issue // Philosophia Mathematica. – 2000. – № 8(2). – P. 97–99.

152. Shapiro S. The Measure of Scottish Neo-Logicism // Logicism, Intuitionism, and Formalism, edited by Linström et al. Springer Dordrecht. – London, 2009. – Vol. 341. – P. 69–90.

153. Shapiro S., Weir A. Neo-logicist' logic is not epistemically innocent // Philosophia Mathematica. – 2000. – № 3 (8). – P. 163–189.

154. Shapiro S., Wright C. All Things Indefinitely Extensible // Absolute Generality, ed. A. Rayo and G. Uzquiano. – New York: Oxford U. P., 2007. – P. 255–304.

155. Sher G. A Conception of Tarskian Logic // Pacific Philosophical Quarterly. – 1989. – №70. – P. 341–68.

156. Sider T. NeoFregeanism and Quantifier Variance // Aristotelian Society. – 2007. – Supplementary Vol. № 81. – P. 201–232.

157. Schirn M. Frege's Logicism and the Neo-Fregean Project //Axiomathes. – 2014. – № 24. – P. 207–243.

158. Tennant, N. Anti-realism and logic: truth as eternal. – Oxford; New York: Clarendon Press; Oxford University Press, 1987. – 325 p.

159. Tennant N. On the Necessary Existence of Numbers // Noûs. –1997. – Vol. 31, № 3. – P. 307–336.

160. The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction / Edited by Roy T. Cook. The Western Ontario Series in Philosophy of Science. – Dordrecht: Springer, 2007. – № 71. – xxxviii + 454 p.

161. The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. – Oxford University Press, 2005. – 834 p.

162. Trobok M. Debating (Neo)logicism: Frege and the Neo-Fregeans // Between Logic and Reality: Modeling Inference, Action and Understanding (Logic, Epistemology, and the Unity of Science). – Springer, 2012. – P. 83–98.

163. Trueman R. A dilemma for neo-Fregeanism // Philosophia Mathematica. – 2014. – № 22 (3). – P. 361–379.

164. Weir A. Neo-Fregeanism: an Embarrassment of Riches // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 2003. – № 44. – P. 13–48.

165. Wright C. Frege's conception of numbers as objects. – Aberdeen University Press, 1983. – 194 p.

166. Wright, C. Neo-Fregean foundations for real analysis: Some reflections on Frege's constraint // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 2000. – № 41. – P.317–334.

167. Wright, C. On the philosophical significance of Frege's theorem // Language, thought, and logic, edited by Richard Heck. – Oxford, Oxford University Press, 1997. – P. 201–244.

168. Wright C. On the harmless impredicativity of N= (Hume's principle) // The philosophy of mathematics today, edited by Mathias Schirn. – Oxford: Oxford University Press, 1998. – P. 339–368.

169. Wright C. On quantifying into predicate position: steps towards a new (tralist) position // M. Leng et al. (eds.) Mathematical Knowledge. – Oxford: Oxford University Press, 2007. – P. 150–174.

170. Абстракция [Электронный ресурс] // iph.ras.ru: официальный сайт Института философии РАН. URL: http://iph.ras.ru/elib/0019.html (дата обращения: 10.05.2018).

171. Гуссерль Э. Логические исследования [Электронный ресурс] // filosof.historic.ru: цифровая библиотека по философии. URL: http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000064/st000.shtml (дата обращения: 10.05.2018).

172. Фреге Г. Логика и логическая семантика [Электронный ресурс] // sbiblio.com: Библиотека учебной и научной литературы. URL: http://sbiblio.com/biblio/archive/frege_log/00.aspx (дата обращения: 10.05.2018).

173. Фреге Г. Основоположения арифметики [Электронный ресурс] // philosophy.ru: философский портал. URL: http://philosophy.ru/library/frege/frege_math.html (дата обращения: 10.05.2018).

174. Целищев В.В. Поиски новой философии математики [Электронный ресурс] // filosof.historic.ru: цифровая библиотека по философии. URL: http://filosof.historic.ru/books/item/f00/s00/z0000700/index.shtml (дата обращения: 10.05.2018).

175. Definitions [Электронный ресурс] // plato.stanford.edu: Stanford Encyclopedia of Philosophy. URL: http://plato.stanford.edu/entries/definitions/#StiDef (дата обращения: 10.05.2018).

176. Dieterle J. Julius Caesar and the Number 2 [Электронный ресурс] // Electronic Journal of Analytic Philosophy. URL: https://ejap.louisiana.edu/EJAP/1997.spring/dieterle976.html (дата обращения: 10.05.2018).

177. Gao S. Why is Hume's Principle not good enough for Frege? [Электронный ресурс] // cs.cmu.edu. URL: http://www.cs.cmu.edu/~sicung/papers/frege.pdf (дата обращения: 10.05.2018).

178. Jones R. FOM: Boolos on the Analyticity of HP [Электронный ресурс] // cs.nyu.edu. URL: https://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2001-April/004874.html (дата обращения: 10.05.2018).

179. Klement K. Grundgesetzeand the Sense/Reference Distinction [Электронный ресурс] // it.umass.edu/web-hosting URL: http://people.umass.edu/klement/sbgg.pdf (дата обращения: 10.05.2018).

180. Logicism [Электронный ресурс] // plato.stanford.edu: Stanford Encyclopedia of Philosophy. URL: http://plato.stanford.edu/entries/logicism/ (дата обращения: 10.05.2018).

181. Philosophy of Mathematics [Электронный ресурс] // plato.stanford.edu: Stanford Encyclopedia of Philosophy. URL: http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/#Log (дата обращения: 10.05.2018).

182. RaatikainenP. Neo-logicism and its logic[Электронный ресурс] // URL: http://www.academia.edu/11579731/Neo-logicism_and_its_logic (дата обращения: 10.05.2018).

183. Rosen G., Yablo S. Solving the Caesar Problem – with Metaphysics [Электронный ресурс] // mit.edu: Massachusetts Institute of Technology. URL: http://www.mit.edu/~yablo/home/Papers_files/solvingcaesar.6-07.pdf (дата обращения: 10.05.2018).

184. Stipulative Definitions [Электронный ресурс] // atheism.about.com. URL: http://atheism.about.com/od/logicalarguments/a/def_stipulative.htm (дата обращения: 10.05.2018).

185. Stipulative Definitions [Электронный ресурс] // grammar.about.com. URL: http://grammar.about.com/od/rs/g/stipulativedefterm.htm (дата обращения: 10.05.2018).

186. The Many Worlds of Logic [Электронный ресурс] // URL: http://www.manyworldsoflogic.com (дата обращения: 10.05.2018).