

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи



Сидорова Екатерина Филипповна

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ, ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
И ДЛИТЕЛЬНОСТИ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОМ
СИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, доцент
Нежелская Людмила Алексеевна

Томск – 2019

Оглавление

Введение.....	4
1 Математическая модель обобщенного синхронного потока второго порядка	20
1.1 Математическая модель потока событий	20
1.2 Сопровождающий процесс – марковский процесс	21
1.3 Вложенная цепь Маркова.....	25
1.4 Матрицы инфинитезимальных характеристик	27
1.5 Выводы по главе 1	29
2 Оптимальное оценивание состояний и оценивание параметров распределения в потоке событий в условиях его полной наблюдаемости	30
2.1 Оптимальная оценка состояний потока событий	31
2.1.1 Рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей	31
2.1.2 Вывод дифференциального уравнения Бернулли для вероятностей .	33
2.1.3 Явный вид апостериорных вероятностей и формула пересчета	36
2.1.4 Априорные вероятности состояний потока.....	40
2.1.5 Алгоритм оптимального оценивания состояний	44
2.2 Результаты численных расчетов оценки состояний.....	45
2.3 Оценка параметров распределения в коррелированном потоке	50
2.3.1 Нахождение переходных вероятностей	51
2.3.2 Явный вид стационарных вероятностей	54
2.3.3 Вероятностные характеристики коррелированного потока	56
2.3.4 Построение оценок в коррелированном потоке методом моментов	56
2.4 Оценка параметров распределения в рекуррентном потоке	61
2.4.1 Условия рекуррентности потока событий	64
2.4.2 Вероятностные характеристики потока	66
2.4.3 Построение оценок в рекуррентном потоке методом моментов	67
2.5 Результаты численных расчетов оценки параметров.....	71
2.6 Аппроксимация реального трафика потоком событий	76
2.7 Выводы по главе 2	83

3	Оптимальное оценивание состояний и оценивание длительности мертвого времени в потоке событий в условиях его частичной наблюдаемости.....	86
3.1	Оптимальная оценка состояний при наличии мертвого времени.....	87
3.1.1	Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности....	88
3.1.2	Апостериорные вероятности в условиях мертвого времени.....	89
3.1.3	Алгоритм оптимального оценивания состояний в условиях мертвого времени.....	92
3.2	Результаты численных расчетов оценки состояний при наличии мертвого времени.....	93
3.3	Оценка длительности мертвого времени в коррелированном потоке	99
3.3.1	Вывод одномерной плотности вероятности.....	100
3.3.2	Вероятностные характеристики коррелированного наблюдаемого потока	103
3.3.3	Построение оценок в коррелированном наблюдаемом потоке методом моментов	104
3.4	Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном потоке	106
3.4.1	Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий	107
3.4.2	Вероятностные характеристики наблюдаемого потока	109
3.4.3	Построение оценок в рекуррентном наблюдаемом потоке методом моментов	109
3.5	Среднее число потерянных событий в потоке.....	110
3.6	Результаты численных расчетов оценки длительности мертвого времени.....	111
3.7	Выводы по главе 3	115
	Заключение	117
	Список использованной литературы.....	119
	Приложение А (обязательное) Имитационная модель потока.....	140
	Приложение Б (рекомендуемое) Испытания имитационной модели	144
	Приложение В Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ	149

Введение

Актуальность темы исследования. Интенсивное развитие вычислительной техники, а также применение инноваций в сфере информационных технологий способствовали появлению новых задач, подобных тем, что были выдвинуты и изучены А. Эрлангом в начале XX века [135, 136]. С момента опубликования в период с 1908 по 1922 гг. работ известного датского ученого, посвященных задачам обслуживания поступающих на телефонную станцию заявок, проектированию и расчету систем обслуживания трафика, во многих сферах научных исследований постепенно стали обнаруживаться аналогичные рассмотренным проблемы, связанные с созданием и внедрением информационно-вычислительных сетей, модернизацией и сопровождением эксплуатации спутниковых и телекоммуникационных сетей связи, координацией процесса функционирования автоматизированных систем управления и т. п. Решение подобных вопросов вызывает интерес как отечественных, так и зарубежных специалистов в области теории массового обслуживания (ТМО), в англоязычной литературе называемой теорией очередей, или queueing theory. Основы и фундаментальные результаты ТМО изложены в трудах К. В. Базилевича, Б. В. Гнеденко, В. А. Говоркова, Г. И. Ивченко, И. Н. Коваленко, Г. А. Медведева, А. Я. Хинчина [2, 25, 26, 48, 66, 106, 108] и Д. Кендалла, Д. Кенига, Л. Клейнрока, Д. Кокса, А. Кофмана, Р. Крюона, Г. О'Делла, К. Пальма, Ф. Полячека, Д. Риордана, Т. Саати, Р. Сиски, Л. Такача, Т. Фрая, Д. Штойяна [52–54, 56, 94, 125–127, 140, 151, 176, 178–180, 188, 189].

Оригинальные исследования Г. П. Башарина, Г. Болча, А. А. Боровкова, В. М. Вишневого, А. М. Горцева, А. Н. Дудина, В. Н. Задорожного, В. А. Ивницкого, В. И. Клименок, Ю. В. Малинковского, М. А. Маталыцкого, А. Г. Меликова, А. А. Назарова, Л. А. Нежелской, В. В. Рыкова, К. Е. Самуйлова, А. Ф. Терпугова, К. Триведи, М. П. Фархадова, Г. Ш. Цициашвили [5–7, 9, 11, 14, 17, 18, 28–35, 40, 41, 47, 49, 64, 65, 69, 73–75, 92, 102, 110, 115, 118, 119, 133, 134, 142–144, 163, 170, 171, 191, 193, 196] способствовали развитию теории,

совершенствованию математического аппарата ТМО; работы Г. П. Башарина [4–6], Б. С. Лившица [61], А. Д. Харкевича, М. А. Шнепса [4] установили применимость к научному процессу метода статистического моделирования на ЭВМ.

Построение математических моделей ТМО, представленных различными моделями систем массового обслуживания (СМО), опосредовано исследованием реальных систем. С начала шестидесятих годов прошлого века ввиду исключительной актуальности задач оптимизации особый интерес вызывает направление исследования управляемых СМО [21, 28, 69, 93, 101]: системы с управляемым входящим потоком требований [47, 51, 148, 168]; системы с управляемыми длительностями обслуживания [40, 97, 195]; системы с управляемой (динамической) структурой [44, 58, 116, 181, 184]; системы с динамическими приоритетами [11, 12, 20, 37, 38, 42, 92, 166, 194]; системы с формированием очередей [67, 72, 99].

В качестве входящих потоков событий (сообщений, заявок, требований) до середины восьмидесятих годов рассматривались пуассоновские потоки [107], что было вызвано относительной простотой систем связи, изолированностью видов связи друг от друга, низкой пропускной способностью каналов передачи и, как следствие, их высокой загруженностью [150]. Впоследствии усложнение структуры цифровых систем интегрального обслуживания (ЦСИО), разнообразие программного и аппаратного обеспечения, интеграция разного рода систем коммуникации выявили неадекватность модели простейшего потока реальным информационным потокам и непригодность соответствующих моделей функционирования ЦСИО для анализа протекающих в них процессов. Таким образом, требования практики обнаружили необходимость и послужили стимулом к созданию новых математических моделей входящих потоков в виде дважды стохастических потоков событий [129, 145].

Анализ научной литературы свидетельствует о том, что дважды стохастический поток как поток, интенсивность которого есть случайный процесс, впервые определен в работах М. Бартлетта [114], Д. Кокса [125] и Дж. Кингмена [154]. Модели дважды стохастических потоков событий находят

широкое применение при изучении сетей связи [70, 134], в исследовании биофизических процессов [117, 121], в финансово-экономическом моделировании [62, 122, 123], в решении задач управления запасами [160] и при статистической обработке данных (в том числе специализированных) [120, 147].

Таким образом, задачи исследования дважды стохастических потоков событий как математических моделей реальных информационных потоков, являются прогрессивными и актуальными.

Степень разработанности темы исследования. Класс дважды стохастических потоков событий включает потоки с интенсивностью, представляющей собой либо непрерывный, либо кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Результаты изучения первых изложены в трудах М. Бартлетта [114], Д. Кокса [126, 127], Дж. Кингмена [154] и Д. Снайдера [187], вторых – в трудах Г. П. Башарина, В. А. Кокотушкина, В. А. Наумова [5, 6], Д. Лукантони [161] и М. Ньютса [169]; при этом работы [5] и [169], независимо опубликованные практически одновременно, в 1979 г., являются первыми работами в этом направлении исследования дважды стохастических потоков событий.

При изучении реального современного трафика первоначально возникает проблема выбора математической модели потока, адекватно его описывающей [8, 82, 86–88, 109, 155, 173–174]. Согласно достаточно большому числу исследований [132, 146, 177, 185] потоки с переключениями (потоки со ступенчатой функцией интенсивности), чаще называемые отечественными и зарубежными авторами МС-потоками (Markov chain) [5–7] либо МАР-потоками (Markovian Arrival Process) [130, 161, 162], являются наиболее характерными и подходящими математическими моделями потоков в реальных телекоммуникационных сетях, в частности, широкополосных сетях беспроводной связи вдоль протяженных транспортных магистралей [7, 17, 19, 41, 43, 89, 95, 102, 156, 182, 192, 193].

Обобщению МАР-потока событий посвящена работа [75], установлению взаимосвязи между МС- и МАР-потоками – работа [34]. В [34], кроме того,

предложена классификация МАР-потоков на МАР-потоки первого и второго порядков, в которых смена состояния интенсивности определяется одной и двумя независимыми случайными величинами соответственно. Среди МАР-потоков первого порядка различают *синхронные потоки* [14, 31, 73, 74], у которых состояние меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий, и собственно *МАР-потоки* [144, 177] как обобщение синхронных потоков; среди МАР-потоков второго порядка – *модулированные МАР-потоки* [9, 75, 170, 171], *обобщенные асинхронные потоки* [35, 143], являющиеся обобщением *асинхронных потоков (ММРР-потоков)* [16, 29, 33, 90, 111, 138, 141, 142, 159, 183, 186], у которых состояние меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий, и *обобщенные полусинхронные потоки* [3, 49] как обобщение *полусинхронных потоков* [32], которые сочетают свойства синхронных и асинхронных потоков.

Соотношение моделей МАР-потока и синхронного, полусинхронного и асинхронного потоков является предметом рассмотрения в [15]. Обширная литература относительно типов исследуемых потоков приведена в [33, 34].

Среди потоков с конечным числом состояний наиболее разработанными остаются дважды стохастические потоки с двумя состояниями.

Режим функционирования СМО непосредственно зависит от параметров МС (МАР)-потока и его состояний, которые на практике либо лишь частично известны, либо неизвестны, либо изменяются со временем. Вследствие этого при реализации управления обслуживанием входящего потока и адаптации реальной системы к нему первоначально возникает необходимость оценки в произвольный момент времени состояний потока (задача фильтрации) [3, 9, 14, 24, 29, 33, 55, 73, 74, 77–80, 91, 103, 138, 142, 144, 171, 186] и его параметров [16, 30–32, 35, 49, 75, 83–85, 90, 111, 141, 143, 159, 170, 171, 173, 174, 177, 183] по наблюдениям за моментами наступления событий.

При решении сформулированных задач следует учитывать, что математическая модель потока может содержать искажающие факторы, существенно влияющие на качество оценивания. Одним из таких факторов, в

частности, выступает мертвое время регистрирующих приборов [1, 104, 175], порождаемое каждым зарегистрированным событием – последующие события исходного потока, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны для наблюдения (теряются). Такой эффект характерен для большинства реальных систем. Например, в компьютерных сетях находит повсеместное использование протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта CSMA/CD. Момент обнаружения конфликта на входе некоторого узла сети связан с получением сетью сигнала «заглушки», в течение времени рассылки которого заявки, поступающие на обслуживание в данный узел, получают соответствующий отказ и направляются в источник повторных вызовов, на орбиту. Период занятости узла сети для вновь поступающих заявок трактуется как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт. Аналогичная ситуация имеет место при регистрации интенсивности ядерного излучения счетчиком Гейгера-Мюллера. Обладающая некоторым зарядом частица, попадая в счетчик, делает его на некоторое время недоступным для регистрации новых элементарных частиц. Вообще говоря, это время зависит как от характера зарегистрированной частицы, так и от энергии, которую она несет, однако, в ядерной физике зачастую ограничиваются предположением, что время постоянно.

В конкретных устройствах величина и формирование продолжительности мертвого времени обусловлены многими факторами [36]. Все устройства регистрации принято делить на две группы: первую составляют устройства с *непродлевающимся мертвым временем*, которое не зависит от поступления других событий в пределах его действия, вторую – с *продлевающимся мертвым временем*, которое возникает после каждого поступившего на вход системы события потока. Длительность периода ненаблюдаемости может быть как фиксированной [35], так и случайной [16] величиной для обеих групп, тем не менее, в прикладных исследованиях обычно ограничиваются использованием фиксированной: [16, 35, 49, 78, 79, 81, 83, 85, 144, 170, 171] и [24, 32, 90, 103].

Вопросам анализа влияния мертвого времени уделяется большое внимание: ввиду наличия в модели искажающего фактора возникают потери событий,

отрицательно сказывающиеся на процессе оценивании и состояний, и параметров потока. С тем чтобы выявить количество потерянных событий, требуется оценить значение длительности мертвого времени, для чего, как правило, применяются метод максимального правдоподобия или метод моментов [32, 49, 83, 85, 171].

Исследование СМО с входящими дважды стохастическими потоками событий, а также непосредственное изучение последних в условиях полной и частичной наблюдаемости проводились и проводятся такими учеными как Н. И. Головкин, М. А. Осипова, Г. Ш. Цициашвили в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения РАН [27, 110]; В. М. Вишневский, М. П. Фархадов – в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН [17–19, 102, 156, 192, 193]; В. И. Ивницкий в Московском государственном университете путей сообщения [47]; А. В. Зорин, М. А. Федоткин – в Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского [45, 46]; А. М. Горцев, К. И. Лившиц, А. Н. Моисеев, С. П. Моисеева, А. А. Назаров, Л. А. Нежелская, С. П. Сущенко, А. Ф. Терпугов – в Национальном исследовательском Томском государственном университете [9, 14, 23, 24, 28–35, 49, 60, 62, 68–70, 73–75, 91, 98, 134, 142–144, 160, 165, 167, 170, 171]; В. Н. Задорожный – в Омском государственном техническом университете [196, 197]; В. В. Рыков – в Российском государственном университете нефти и газа им. И. М. Губкина [11, 39, 89, 92, 93]; Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Ю. В. Гайдамака, А. В. Печинкин, К. Е. Самуйлов – в Российском университете Дружбы народов [4–7, 10, 13, 22, 95, 112, 115]. Подобными изысканиями занимались и занимаются Д. В. Ефросинин в Австрийском университете им. И. Кеплера [102]; А. З. Меликов – в Азербайджанской НАН [163, 164]; А. Н. Дудин, В. И. Клименок, Г. А. Медведев, Г. В. Царенков – в Белорусском государственном университете [40–43, 66, 109, 133, 134, 153, 156, 192]; О. М. Тихоненко – в Университете Кардинала Стефана Вышинского в Варшаве [65]; Ю. В. Малинковский – в Гомельском государственном университете [64]; М. А. Маталыцкий – в Гродненском университете [65]; М. Пагано – в Пизанском университете [89, 128]; А. Баник,

У. Гупта, Д. Лукантони, М. Ньютс – в США [113, 146, 161, 162, 168, 169] и другие представители научных школ стран Болгарии [131], Израиля [152], Индии [164], Кореи [124], Японии [190] и пр.

Таким образом, достаточно большое количество литературных источников освещает вопросы изучения и практического применения конкретных дважды стохастических потоков. Тем не менее, нельзя сказать, что построенными моделями исчерпывается весь класс потоков, которые адекватно аппроксимируют реальные потоки в сетях различной конфигурации. Более того, интенсивное развитие компьютерных сетей порождает реальные информационные потоки, принимающие самые разнообразные экзотические формы.

В настоящей диссертационной работе впервые исследуется относящийся к МАР-потокам второго порядка обобщенный синхронный дважды стохастический поток событий второго порядка, который является обобщением относящегося к МАР-потокам первого порядка синхронного потока событий [14, 31, 74].

Для рассматриваемого потока в условиях его полной и частичной наблюдаемости, то есть при наличии непродлевающегося мертвого времени, решаются следующие задачи: 1) оптимальное оценивание состояний по методу максимума апостериорной вероятности, которая представляет наиболее полную информацию о потоке, содержащуюся в наблюдаемой выборке, и обеспечивает минимум безусловной вероятности вынесения ошибочного решения [59, 105]; 2) оценивание параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями коррелированного и рекуррентного потоков по методу моментов, который обеспечивает формирование оценок, обладающих достаточно хорошими свойствами при больших объемах выборок наблюдаемых моментов наступления событий [57]. С использованием имитационной модели потока, учитывающей наличие мертвого времени, получены корректные и непротиворечивые численные результаты оценивания состояний потока и параметров распределения длительности интервала между его событиями.

Проведенные исследования являются не только актуальными на современном этапе, но и отвечают цели перспективного применения при решении

прикладных задач, в частности, при моделировании и анализе информационных потоков ввиду глобальной компьютеризации и развития наук в этом направлении.

Цель и задачи исследования. Целью работы является аналитическое и численное исследование обобщенного синхронного потока событий второго порядка, функционирующего в условиях его полной и частичной наблюдаемости.

В соответствии с целью были поставлены и решены следующие задачи:

- построение математической модели обобщенного синхронного дважды стохастического потока событий второго порядка, функционирующего в условиях его полной и частичной наблюдаемости;
- разработка алгоритмов оценивания состояний и параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка, рассматриваемом в условиях доступности наблюдению всех его событий, на основе критерия максимума апостериорной вероятности и метода моментов соответственно;
- разработка алгоритмов оценивания состояний и длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка, рассматриваемом в условиях частичной его наблюдаемости, на основе критерия максимума апостериорной вероятности и метода моментов соответственно;
- построение имитационной модели обобщенного синхронного потока второго порядка, учитывающей отсутствие или наличие искажающего фактора в виде непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности;
- программная реализация сформулированных алгоритмов: проведение статистических экспериментов на модели потока, имитирующей его функционирование в условиях полной наблюдаемости, для установления качества получаемых оценок;
- аппроксимация реального трафика обобщенным синхронным потоком событий второго порядка в условиях отсутствия мертвого времени;

– программная реализация сформулированных алгоритмов: проведение статистических экспериментов на модели потока с непродлевающимся мертвым временем для установления качества оценок по результатам текущих наблюдений за наблюдаемым потоком в течение некоторого интервала времени.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации, заключается в следующем:

1) впервые построена математическая модель дважды стохастического обобщенного синхронного потока событий второго порядка как в условиях отсутствия мертвого времени, так и в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности;

2) разработаны алгоритмы оптимальной оценки состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка в условиях полной наблюдаемости потока и в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности, основанные на методе максимума апостериорной вероятности;

3) разработаны алгоритм оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в обобщенном синхронном потоке второго порядка при полной наблюдаемости потока, а также алгоритм оценки длительности мертвого времени в случае его наличия, основанные на методе моментов;

4) разработан алгоритм аппроксимации реального трафика обобщенным синхронным потоком второго порядка при полной наблюдаемости трафика.

Теоретическая и практическая значимость диссертации.

Результаты диссертационной работы способствуют развитию теории дважды стохастических потоков событий. Для обобщенного синхронного потока событий второго порядка аналитически решены задачи оптимальной оценки состояний и оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями потока при его полной наблюдаемости; оптимальной оценки состояний и оценки длительности мертвого времени в наблюдаемом потоке при его частичной наблюдаемости.

Практическая ценность, в свою очередь, устанавливается возможностью использования разработанных алгоритмов оценивания состояний и параметров распределения в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка при анализе функционирования реальных систем и последующем проектировании СМО и сетей массового обслуживания (СеМО) как их математических моделей с входящим дважды стохастическим потоком. Кроме того, разработанный математический инструмент способствует адаптации моделей систем связи, телекоммуникационных и компьютерных сетей к информационным потокам сообщений, а также обработке результатов физических экспериментов, полученных с учетом мертвого времени регистрирующих приборов.

Сформулированные выводы используются в учебном процессе в институте прикладной математики и компьютерных наук (ИПМКН) Национального исследовательского Томского государственного университета в курсах лекций образовательных дисциплин «Имитационное моделирование» – для бакалавров 4-го года обучения ИПМКН, «Оценка состояний дважды стохастических потоков событий», «Оценка параметров дважды стохастических потоков событий», «Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков» – для магистрантов 2-го года обучения ИПМКН.

Методы исследования. В текущем исследовании использовались методы теории вероятностей, теории случайных марковских процессов и теории массового обслуживания, методы теории дифференциальных уравнений, математической статистики, математического анализа и линейной алгебры, методы оптимальных статистических решений и имитационного моделирования.

Проведение статистических экспериментов обусловлено работой программы расчета, реализованной средствами объектно-ориентированного языка программирования C# в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio в виде графического пользовательского интерфейса (graphical user interface, GUI); в основу положено имитационное моделирование обобщенного синхронного потока событий второго порядка при полной его наблюдаемости и при непродлеваемом мертвом времени фиксированной длительности.

Дополнительно к работе с реальными данными трафика применялись возможности языка программирования R в среде RStudio.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты исследования. Для обобщенного синхронного дважды стохастического потока событий второго порядка, рассматриваемого в условиях доступности наблюдению всех его событий:

- алгоритм оптимальной оценки состояний потока в произвольный момент времени, основанный на критерии максимума апостериорной вероятности;
- алгоритм расчета оценки безусловной вероятности вынесения ошибочного решения о состоянии потока и ее выборочной дисперсии;
- алгоритмы оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном и рекуррентном потоках, основанные на методе моментов, с использованием явных видов одномерной и совместной плотностей вероятностей;
- алгоритм аппроксимации реального трафика исследуемым потоком.

Для обобщенного синхронного потока событий второго порядка, рассматриваемого в условиях его частичной наблюдаемости:

- алгоритм оптимальной оценки состояний потока в произвольный момент времени по наблюдениям за моментами наступления событий в наблюдаемом потоке, основанный на критерии максимума апостериорной вероятности;
- алгоритм расчета оценки безусловной вероятности вынесения ошибочного решения о состоянии потока и ее выборочной дисперсии;
- алгоритмы оценки длительности непродлевающегося мертвого времени в коррелированном и рекуррентном потоках, основанные на методе моментов, с использованием явных видов одномерной плотности вероятности значений длительности интервала и совместной плотности вероятности значений

длительностей смежных интервалов между соседними событиями в наблюдаемых потоках событий.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгостью математического подхода к изложенным в работе доказательствам, корректностью применяемых методик исследования и проведения расчетов, многочисленными статистическими экспериментами, проведенными на имитационной модели обобщенного синхронного потока второго порядка в условиях его полной и частичной наблюдаемости, анализом численных результатов и, кроме того, согласованностью аналитических результатов диссертации с результатами для разработанной ранее модели дважды стохастического синхронного потока событий первого порядка.

Апробация результатов исследования. Основные положения докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. IV Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», секция «Прикладной вероятностный анализ»; г. Томск, 20-21 мая 2016 г.

2. V Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», секции «Прикладной вероятностный анализ»; г. Томск, 19-20 мая 2017 г.

3. VI Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», секции «Прикладной вероятностный анализ», «Computer science»; г. Томск, 24-26 мая 2018 г.

4. XII Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», секция «Информационные технологии в исследовании стохастических структур», подсекция «Системы и сети массового обслуживания»; пос. Катунь, Алтайский край, 4-8 июня 2018 г.

5. XVII Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ – 2018, секция «Queueing theory and applications»; г. Томск, 10-15 сентября 2018 г.

6. VII Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», секции «Управление и обработка информации», «Computer science»; г. Томск, 23-25 мая 2019 г.

7. XVIII Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ – 2019, секция «Queueing theory and applications»; г. Саратов, 26-30 июня 2019 г.

8. XXII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2019), секция «Queueing theory and reliability theory applications»; г. Москва, 23-27 сентября 2019 г.

Публикации. По материалам диссертации автором опубликовано 13 работ, из них 2 статьи в журналах Перечня ВАК, в том числе индексируемых Web of Science; 1 статья в прочем научном журнале; 2 статьи в сборниках материалов конференций, представленных в зарубежных научных изданиях, входящих в Scopus и / или Springer; 8 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийской с международным участием научных конференций. В работах достаточно полно отражены все основные результаты настоящего диссертационного исследования.

Личный вклад автора. Постановка изложенных в диссертации задач сделана научным руководителем, доктором физико-математических наук, доцентом Л. А. Нежелской. Автор лично участвовал в выводе аналитических выражений и формул, доказательстве лемм и теорем, в получении и анализе как аналитических, так и численных результатов. Программная реализация имитационной модели обобщенного синхронного потока второго порядка, поддерживающей режимы полной и частичной наблюдаемости потока, встраивание в нее сформулированных алгоритмов оценивания состояний и

параметров распределения выполнены лично автором. В совместных публикациях Л. А. Нежелской принадлежат формулировки проблем и указания основных направлений исследований.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и трех приложений. Общий объем работы составляет 149 страниц, включая приложения. Список литературы включает в себя 197 наименований. Иллюстративный материал представлен 35 рисунками (из них 3 в приложениях) и 42 таблицами (из них 11 в приложениях).

Используется тройная нумерация подразделов: первая цифра соответствует номеру главы, вторая – номеру раздела, третья – номеру подраздела. Формулы имеют тройную нумерацию: первая цифра – номер главы, вторая – номер раздела, третья – последовательный номер формулы в рамках раздела. Рисунки и таблицы имеют двойную нумерацию: первая цифра – номер главы, вторая – последовательный номер рисунка или таблицы в рамках главы. Теоремы, леммы, следствия и замечания имеют двойную нумерацию: первая цифра – номер главы, вторая – номер теоремы, леммы, следствия или замечания соответственно.

Краткое содержание диссертации

Во введении раскрывается актуальность темы диссертации, приводится обзор работ других авторов в рамках изучаемой тематики, формулируются цель и задачи исследования, излагаются научная новизна результатов и методы исследования, обосновываются теоретическая и практическая значимость работы.

В главе 1 дается математическое описание модели обобщенного синхронного потока событий второго порядка. Доказываются основные свойства потока и строятся матрицы инфинитезимальных характеристик.

В главе 2 решаются задачи оптимального оценивания состояний и оценивания параметров распределения в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка в условиях его полной наблюдаемости. Определяются выражения для апостериорных и априорных вероятностей состояний потока, выводятся формулы пересчета для апостериорных вероятностей в моменты наступления событий. Разрабатывается основанный на критерии максимума

апостериорной вероятности алгоритм оптимального оценивания состояний потока, функционирующего в условиях доступности наблюдению всех его событий. На имитационной модели рассматриваемого потока проводится ряд статистических экспериментов для установления частоты ошибочных решений. Находится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями потока и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов. Оцениваются параметры распределения в коррелированном и рекуррентном потоках с использованием метода моментов, сравнивается качество полученных оценок путем применения аппарата имитационного моделирования. Приводятся численные результаты проведенных экспериментов по оценке параметров распределения в условиях полной наблюдаемости потока. Реализуется алгоритм аппроксимации реального трафика исследуемым дважды стохастическим потоком событий.

В главе 3 описываются условия неполной наблюдаемости обобщенного синхронного потока второго порядка и схема формирования наблюдаемого потока при наличии мертвого времени фиксированной длительности. Находятся выражения для апостериорных вероятностей состояний на интервалах мертвого времени и на интервалах, когда поток вновь доступен наблюдению. Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний обобщенного синхронного потока второго порядка с непродлевающимся мертвым временем, основанный на методе максимума апостериорной вероятности. Устанавливается качество оценивания путем статистических испытаний на имитационной модели потока. Выводятся одномерная и совместная плотности вероятности, формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока. Решается задача оценки периода ненаблюдаемости в коррелированном и рекуррентном потоках методом моментов. Приводятся численные результаты статистических экспериментов по оценке длительности мертвого времени, полученные с использованием имитационной модели.

В заключении излагаются основные результаты диссертационного исследования. Подчеркивается, что поставленная цель достигнута, а сформулированные задачи решены полностью.

В приложении А устанавливается принцип построения имитационной модели обобщенного синхронного дважды стохастического потока событий второго порядка: приводятся блок-схемы модели, поддерживающей условия полной и частичной (ввиду наличия мертвого времени) наблюдаемости потока; схемы сопровождаются описанием.

В приложении Б устанавливаются работоспособность разработанной имитационной модели потока и корректность получаемых результатов.

В приложении В содержится копия акта о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ.

1 Математическая модель обобщенного синхронного потока второго порядка

В настоящей главе диссертации дается математическое описание модели обобщенного синхронного дважды стохастического потока второго порядка.

Впервые подробные формулировки приводятся в работах автора [76, 172].

1.1 Математическая модель потока событий

Исследуется обобщенный синхронный поток событий второго порядка (далее – поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями S_1 и S_2 ; здесь и далее S_i понимается как i -ое состояние $\lambda(t)$ и имеет место при $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Длительность интервала между событиями потока в i -ом состоянии определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$, где случайные величины $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$ независимы и распределены по законам $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ и $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$, соответственно. В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -ое либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$ в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)}$ приняла минимальное значение, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. В момент наступления события потока процесс $\lambda(t)$ остается в i -ом состоянии либо с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i)$, либо с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i)$ в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)}$ приняла минимальное значение, $i = 1, 2$. Верхний индекс l вероятности $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$ указывает на ее соответствие случайной величине $\xi_i^{(l)}$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$; при этом $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Таким образом, длительность

интервала между событиями потока в i -ом состоянии процесса $\lambda(t)$ есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i + \alpha_i)t}$, $i = 1, 2$.

Вариант возникающей ситуации приведен на рисунке 1.1, где S_1, S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ – моменты наступления событий в обобщенном синхронном потоке второго порядка.

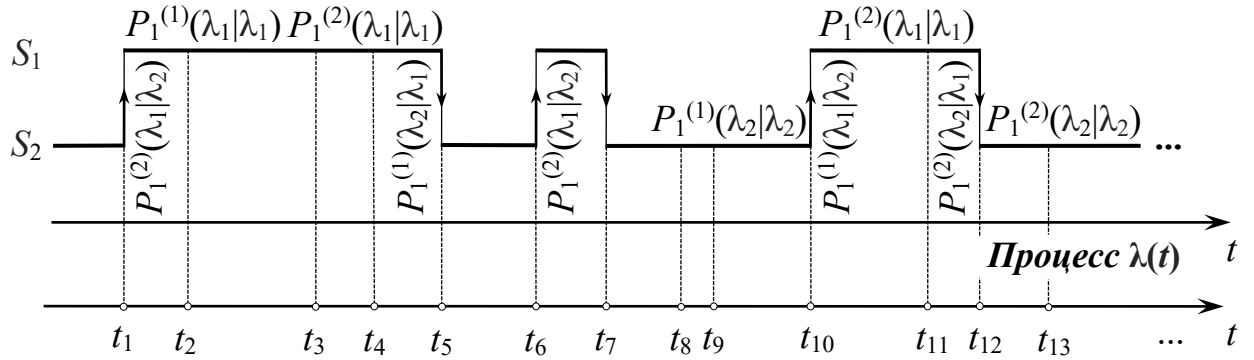


Рисунок 1.1 – Формирование обобщенного синхронного потока второго порядка

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, то есть наблюдение за ним начинается тогда, когда поток функционирует уже бесконечно долго; при этом процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаемы на интервале (t_0, t) , где t_0 – момент начала наблюдения, t – момент его окончания, моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, которые заключают в себе всю доступную информацию о потоке.

1.2 Сопровождающий процесс – марковский процесс

Лемма 1.1. Для обобщенного синхронного потока второго порядка кусочно-постоянный сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ является марковским.

Доказательство. В момент наступления события в первом состоянии S_1 «стартуют» две независимые случайные величины – одна $\xi_1^{(1)}$, вторая $\xi_1^{(2)}$. Длительность интервала между событиями определяется случайной величиной $\eta_i = \min(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ (здесь предполагается, что, в соответствии с терминологией

Д. Лукантони [161] и А. Н. Дудина [41], в момент окончания первого состояния наступает событие потока, после чего происходит розыгрыш пар состояний). Тогда $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$ – функция распределения длительности интервала между событиями; $\lambda_1 + \alpha_1$ – интенсивность потока в состоянии S_1 .

Некоторые возможные ситуации в реализации потока представлены на следующем рисунке 1.2.

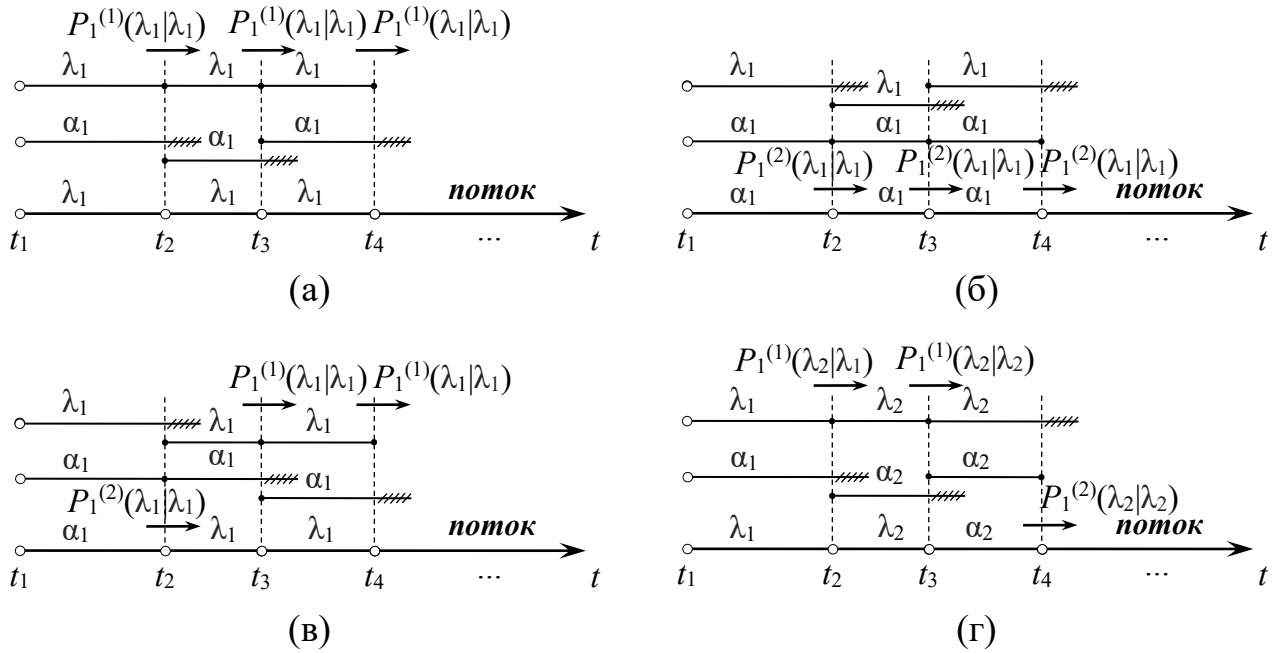


Рисунок 1.2 – Реализации обобщенного синхронного потока второго порядка

Рассмотрим подробнее состояние S_1 процесса $\lambda(t)$ (рисунок 1.3).

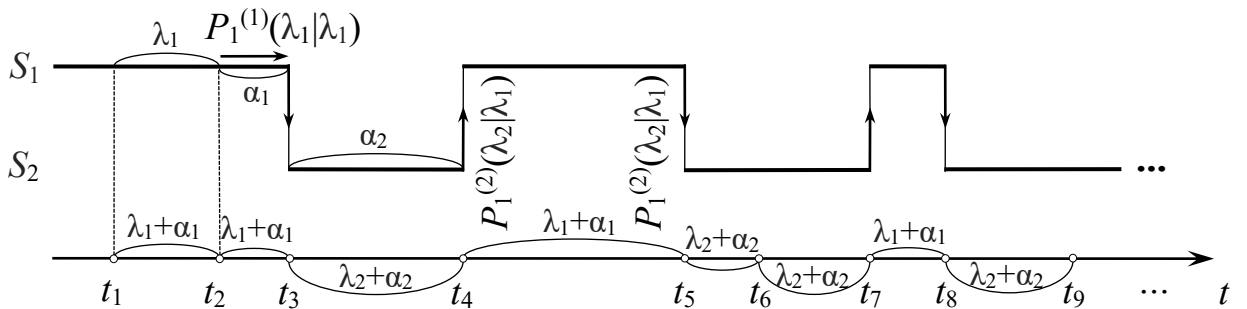


Рисунок 1.3 – Одна из реализаций процесса $\lambda(t)$

1. Пусть действует первая случайная величина $\xi_1^{(1)}$.

Возможны следующие ситуации, вызванные поведением $\xi_1^{(1)}$, изображенные на рисунке 1.4.

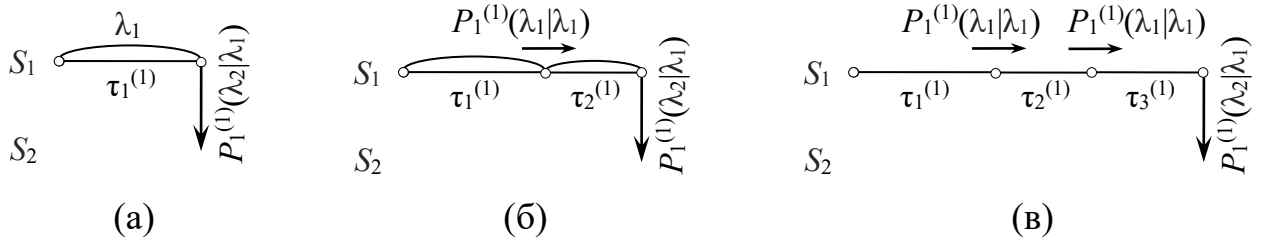


Рисунок 1.4 – Возможные ситуации в состоянии S_1 процесса $\lambda(t)$

Отметим, что поведение сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 (рисунок 1.4 (в)) соответствует ситуации на рисунке 1.2 (а) в реализации обобщенного синхронного потока событий второго порядка.

Таким образом, участок стационарности в состоянии S_1 имеет длину $\tau_1^{(1)}$ (рисунок 1.4 (а)), $\tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)}$ (рисунок 1.4 (б)), $\tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)} + \tau_3^{(1)}$ (рисунок 1.4 (в)) и т. д. При этом каждый из $\tau_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \dots$, представляет собой реализацию случайной величины $\xi_1^{(1)}$, распределенной по закону $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$.

Определим, какую функцию распределения будет иметь случайная величина $T_1^{(1)}$ – длительность участка стационарности в состоянии S_1 (суммарная, или интегральная длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии). Для этого применим схему В. Феллера [104]: если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – взаимно независимые случайные величины с экспоненциальным распределением $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, $\tau \geq 0$, то сумма $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ имеет плотность

$$g_n(\tau) = \lambda \frac{(\lambda\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda\tau}, \quad \tau > 0.$$

Далее (по В. Феллеру) число слагаемых n в сумме $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ является параметром, который рандомизируем с помощью распределения $P\{N = n\} = p_n$. Плотность результирующей суммы S_N со случайным числом слагаемых N есть $p_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n g_n(\tau)$ – плотность распределения случайной величины $T_1^{(1)}$ – длительности участка стационарности $\lambda(t)$ в состоянии S_1 .

Покажем, что $\{p_n\}$ имеет геометрическое распределение $p_n = p(1-p)^{n-1}$.

Рассмотрим одну из реализаций процесса $\lambda(t)$ (рисунок 1.5).

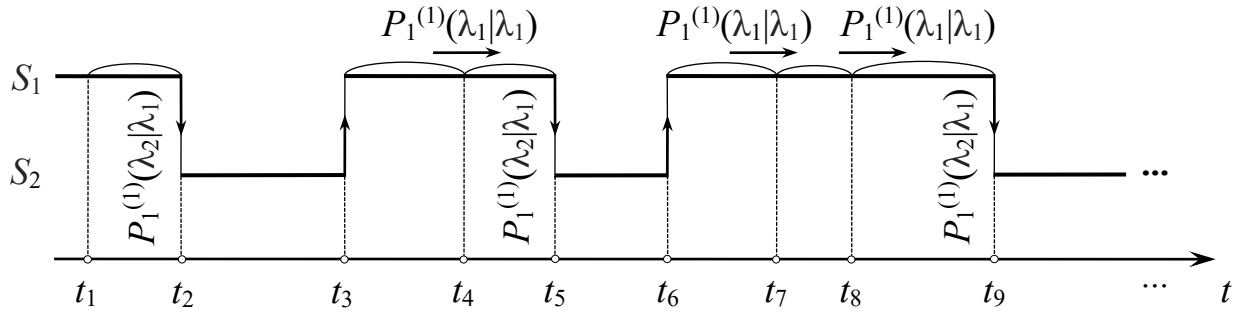


Рисунок 1.5 – Одна из реализаций потока событий

- 1) Вероятность одного интервала стационарности есть $p = P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ (рисунок 1.4 (а));
- 2) вероятность участка стационарности, представляющего собой сумму двух интервалов, есть $p(1 - p) = P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ (рисунок 1.4 (б));
- 3) вероятность участка стационарности, представляющего собой сумму трех независимых одинаково распределенных интервалов, есть $p(1 - p)^2 = P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)(P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1))^2$ (рисунок 1.4 (в));
- ...
- п) вероятность участка стационарности, состоящего из суммы n интервалов, равна $p_n = p(1 - p)^{n-1} = P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)(P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1))^{n-1}$; далее будем пользоваться обозначениями p и $(1 - p)$.

Тогда

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1 - p)^{n-1} \lambda_1 \frac{(\lambda_1 \tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1 \tau} = p \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((1 - p) \lambda_1 \tau)^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= p \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} e^{(1-p)\lambda_1 \tau} = p \lambda_1 e^{-p \lambda_1 \tau}. \end{aligned}$$

Итак, $p_1(\tau) = p \lambda_1 e^{-p \lambda_1 \tau}$ – плотность распределения случайной величины $T_1^{(1)}$ – длительности участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 (интегральной длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1). В этом случае функция распределения случайной величины $T_1^{(1)}$ запишется как

$$F_1^{(1)}(\tau) = P\{T_1^{(1)} < \tau\} = \int_0^\tau p_1(t)dt = \int_0^\tau p\lambda_1 e^{-p\lambda_1 t} dt = -e^{-p\lambda_1 t} \Big|_0^\tau = 1 - e^{-p\lambda_1 \tau}.$$

Или $F_1^{(1)}(\tau) = 1 - e^{-\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1)\tau}$.

2. Аналогичная ситуация имеет место, если начинает действовать вторая случайная величина $\xi_1^{(2)}$, причем действует она независимо от $\xi_1^{(1)}$.

Если повторить все рассуждения пункта 1 применительно к $\xi_1^{(2)}$, то найдем $F_1^{(2)}(\tau) = P\{T_1^{(2)} < \tau\} = 1 - e^{-\alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1)\tau}$ — функцию распределения случайной величины $T_1^{(2)}$ — результирующей суммы S_N случайного числа N случайных слагаемых, одинаково распределенных по закону $F(\tau) = 1 - e^{-\alpha_1 \tau}$.

Согласно постановке задачи, длительность интервала стационарности в первом состоянии определяется случайной величиной $T_1 = \min(T_1^{(1)}, T_1^{(2)})$. Тогда функция распределения суммарной (интегральной) длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии (участка стационарности) есть $F_1(\tau) = P\{T_1 < \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1))\tau}$, $\tau \geq 0$.

Выводы относительно момента наступления события в состоянии S_2 сопровождающего случайного процесса аналогичны описанной ситуации. Тогда $F_2(\tau) = P\{T_2 < \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_2))\tau}$, $\tau \geq 0$, — функция распределения длительности участка стационарности процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии.

Таким образом, показано, что длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i = 1, 2$, является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения вида $F_i(\tau) = 1 - e^{-(\lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j|\lambda_i) + \alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j|\lambda_i))\tau}$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Следовательно, процесс $\lambda(t)$ является марковским. *Лемма доказана.*

1.3 Вложенная цепь Маркова

Лемма 1.2. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, образуемая совокупностью моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, является вложенной цепью Маркова.

Доказательство. Обобщенный синхронный поток событий второго порядка, рассматриваемый в условиях стационарного режима функционирования, является стационарным ординарным потоком с последствием; в противном случае он являлся бы простейшим. Поведение потока после момента t_k наступления события не зависит от предыстории, а определяется состоянием S_i , $i=1,2$, процесса $\lambda(t)$ в момент времени t_k . Отметим следующие моменты.

1. В момент времени t_k , $k=1,2,\dots$, значение процесса $\lambda(t_k)=\lambda_i$, то есть процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии S_i , $i=1,2$; длительность интервала между моментами наступления событий t_k и t_{k+1} , $k=1,2,\dots$, есть случайная величина с функцией распределения $F_i(t)=1-e^{-(\lambda_i+\alpha_i)t}$, то есть в течение этого интервала времени имеет место обладающий свойством отсутствия последствия пуассоновский поток с параметром $\lambda_i+\alpha_i$, $i=1,2$.

2. Длительность участка стационарности процесса $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i=1,2$, является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $F_i(\tau)=1-e^{-(\lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j|\lambda_i)+\alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j|\lambda_i))\tau}$, $i,j=1,2$, $i \neq j$, следовательно, оставшаяся часть длительности пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i=1,2$, после момента t_k не зависит от того, как долго процесс $\lambda(t)$ находился в этом состоянии до момента времени t_k , $k=1,2,\dots$.

3. Следующий за моментом t_k момент перехода процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в j -ое, $i,j=1,2$, совпадает с моментом t_{k+1} наступления очередного события потока и определяется моментом окончания однократного пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i , $i=1,2$, и, тем более, не зависит от поведения потока до момента t_k , $k=1,2,\dots$.

В силу сформулированных предпосылок моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образуют вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$. Другими словами, наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k , $k=1,2,\dots$. Лемма доказана.

1.4 Матрицы инфинитезимальных характеристик

Определим вероятность того, что момент наступления события потока в первом состоянии сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ принадлежит полуинтервалу $[t; t + \Delta t)$ длительности Δt (рисунок 1.6).

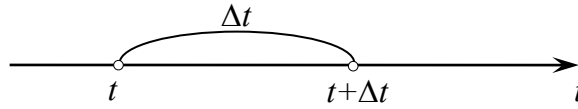


Рисунок 1.6 – Полуинтервал $[t; t + \Delta t)$

Пусть в момент t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$, а случайная величина η_1 – длительность интервала между событиями потока в первом состоянии. Тогда

$$\begin{aligned} P(t \leq \eta_1 < t + \Delta t) &= F(t + \Delta t) - F(t) = P(\eta_1 < t + \Delta t) - P(\eta_1 < t) = \\ &= (1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(t + \Delta t)}) - (1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}) = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t} e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t} = \\ &= e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t} (1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P(t \leq \eta_1 < t + \Delta t) &= P(\eta_1 < t + \Delta t \mid \eta_1 \geq t) P(\eta_1 \geq t) = P(\eta_1 < t + \Delta t \mid \eta_1 \geq t) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}, \\ e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t} (1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t}) &= P(\eta_1 < t + \Delta t \mid \eta_1 \geq t) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}, \\ P(\eta_1 < t + \Delta t \mid \eta_1 \geq t) &= 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t} = F(\Delta t) = P(\eta_1 < \Delta t). \end{aligned}$$

Таким образом, условная вероятность равна безусловной, то есть сопровождающий процесс $\lambda(t)$ обладает марковским свойством.

Опишем возможные события, которые могут произойти на рассматриваемом полуинтервале $[t; t + \Delta t)$.

1. На $[t; t + \Delta t)$ не наступит событие потока с интенсивностью α_1 , наступит событие потока с интенсивностью λ_1 и процесс $\lambda(t)$ в момент наступления события потока останется в первом состоянии с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_1)$; вероятность этой ситуации равна

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_1 \Delta t} (1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}) P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) &= \\ = (1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)) (\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)) P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) &= \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 \mid \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

2. На полуинтервале $[t; t + \Delta t)$ не наступит событие потока с интенсивностью λ_1 , наступит событие потока с интенсивностью α_1 и процесс $\lambda(t)$ в момент наступления события потока останется в первом состоянии с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$; вероятность вышеописанной ситуации равна

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_1 \Delta t} (1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}) P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = \\ = (1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)) (\alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)) P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность того, что на рассматриваемом полуинтервале

- наступит событие обобщенного синхронного потока второго порядка;
- процесс $\lambda(t)$ останется в первом состоянии,

есть сумма вероятностей ситуаций 1, 2: $\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t)$.

Следовательно, соответствующий элемент матрицы $\mathbf{D}_1$ инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ определяется в виде

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1),$$

то есть интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из первого состояния в первое (остаться в первом состоянии), сопровождающегося наступлением события потока, равна $\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$.

Аналогичным образом определяются остальные элементы матриц инфинитезимальных характеристик $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ процесса $\lambda(t)$ [71]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}, \\ \mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) & \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Если далее полагать возможность $\lambda(t)$ остаться в i -ом состоянии, $i=1,2$, как переход из i -го состояния в это же i -ое состояние, $i=1,2$, то содержательно элементы матриц инфинитезимальных характеристик можно корректно описать следующим образом (в данном случае имеет место «привязка» к переходам

процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в j -ое, $i, j = 1, 2$). Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ выступают интенсивности сопровождающихся с наступлением события потока переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние. Недиagonальные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ имеют смысл интенсивностей переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком [6].

1.5 Выводы по главе 1

В первой главе диссертационного исследования:

- построена математическая модель обобщенного синхронного потока событий второго порядка, описан вероятностный механизм смены состояний процесса $\lambda(t)$ и наступления события потока;
- доказана марковость сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ и установлено марковское свойство потока событий;
- определены матрицы инфинитезимальных характеристик $\lambda(t)$.

Таким образом, математическое описание модели обобщенного синхронного дважды стохастического потока событий второго порядка с уточнением основных его свойств и является результатом настоящей главы.

2 Оптимальное оценивание состояний и оценивание параметров распределения в потоке событий в условиях его полной наблюдаемости

Во второй главе осуществляется оптимальное оценивание состояний и оценивание параметров распределения в обобщенном синхронном потоке второго порядка в условиях, когда все его события, а именно моменты их наступления, доступны наблюдению.

Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытым) марковским процессом. Задача заключается в оценке состояний $\lambda(t)$ (потока) по наблюдениям за моментами наступления событий на интервале наблюдения. В качестве решающего правила при оценке состояний потока используется критерий максимума апостериорной вероятности, представляющей собой наиболее полную характеристику состояний потока, которую можно получить, располагая лишь выборкой наблюдений; сам критерий при этом минимизирует полную (безусловную) вероятность ошибки вынесения решения [105]. Получены аналитические выражения для апостериорных вероятностей, позволяющие сформулировать алгоритм оптимального оценивания состояний потока событий.

Методом моментов находятся оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями на основе наблюдений за дважды стохастическим потоком в общем случае (коррелированного потока) и в случаях выполнения условий рекуррентности, которые сформулированы по явному виду совместной плотности вероятности значений длительностей двух смежных интервалов между соседними событиями.

Приводятся численные результаты статистических экспериментов, полученные с использованием соответствующих расчетных аналитических формул и имитационной модели. Рассматривается аппроксимация реальных данных трафика с помощью исследуемой математической модели потока.

Результаты данной главы опубликованы в [77, 80, 82, 84, 172–174].

2.1 Оптимальная оценка состояний потока событий

Наблюдение за потоком осуществляется на интервале времени (t_0, t) . Необходимо по наблюдаемым моментам $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент времени t требуется определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i (m – количество наступивших за время t событий потока); при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$.

Решение о состоянии ненаблюдаемого скрытого процесса $\lambda(t)$ выносится, исходя из критерия максимума апостериорной вероятности, на основании сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; если $w(\lambda_i | t) < w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$.

2.1.1 Рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей

В данном разделе применяется известная методика [105] получения рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей с целью вывода уравнений для $w(\lambda_i | t)$, $i = 1, 2$: сначала рассматриваются дискретные наблюдения через достаточно малые равные промежутки времени Δt , а затем совершается предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$.

Пусть время t на интервале наблюдения $(0, t)$ меняется дискретно с шагом Δt , то есть $t^{(k)} = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$. Будем рассматривать двумерный случайный процесс $(\lambda(k\Delta t), r_k(\Delta t) = r[k\Delta t] - r[(k-1)\Delta t])$, который обозначим $(\lambda^{(k)}, r_k)$; $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ – значение $\lambda(t)$ в момент $t^{(k)} = k\Delta t$, $\lambda^{(k)} = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $r_k = r_k(\Delta t)$ – количество событий, наступивших на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$, $k = 0, 1, \dots$.

Лемма 2.1. Двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$ является марковским.

Доказательство. Компонента $\lambda^{(k)}$ является марковской, т. к. $\lambda(t)$ – марковский случайный процесс (лемма 1.1). Компонента r_k является также марковской, т. к. переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i , $i=1,2$, в состояние S_j , $j=1,2$ в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка возможен только внутри интервала $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$: он определяется моментом окончания состояния, причем этот момент не зависит от предыстории, т. к. длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i=1,2$, задается функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + \alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i))t}$, $i, j=1,2$, $i \neq j$.

Таким образом, обе компоненты процесса $\lambda^{(k)}$ и r_k являются марковскими.

Компонента $\lambda^{(k)}$ не влияет на r_k вследствие конструкции самого процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$: $\lambda^{(k)}$ – в будущем, а r_k по отношению к $\lambda^{(k)}$ – в прошлом (рисунок 2.1).

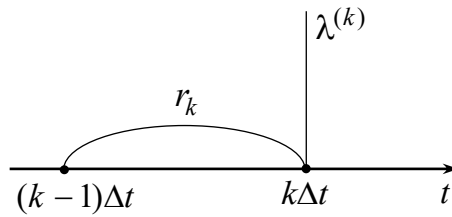


Рисунок 2.1 – Соотношение компонент процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$

Компонента r_k , вообще говоря, влияет на $\lambda^{(k)}$, т. к. с наступлением (ненаступлением) события связана смена (несмена) состояния процесса $\lambda^{(k)}$.

Таким образом, двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$ – марковский, т. к. его компоненты являются марковскими. *Лемма доказана.*

Введем $p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ – вероятность перехода процесса за один шаг Δt из состояния $(\lambda^{(k-1)}, r_{k-1})$ в состояние $(\lambda^{(k)}, r_k)$. При этом справедливо

$$p(\lambda^{(k)}, r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = p(\lambda^{(k)} | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) p(r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}, \lambda^{(k)}). \quad (2.1.1)$$

Замечание 2.1. В силу того, что процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$ является марковским, справедливы следующие соотношения для входящих в (2.1.1) вероятностей

$$p(\lambda^{(k)} | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}) = p(\lambda^{(k)} | \lambda^{(k-1)}),$$

$$p(r_k | \lambda^{(k-1)}, r_{k-1}, \lambda^{(k)}) = p(r_k | \lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}).$$

Обозначим $\lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ – последовательность ненаблюдаемых значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в момент времени $k\Delta t$, $\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Обозначим $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность наблюдений за время от нуля до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt , $k = \overline{0, m}$; $r_0 = 0$, т. к. на интервале $(-\Delta t, 0)$ наблюдение за потоком не производится.

Пусть $w(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ – совместная вероятность значений m -мерных случайных величин $\lambda^{(m)}$ и $\mathbf{r}_m$; $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m)$ – условная вероятность значений $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$; $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m)$ – условная вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация $\mathbf{r}_m$.

Тогда для двумерного марковского процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей [29]:

$$w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m)} = \lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)} = \lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}. \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Вывод дифференциального уравнения Бернулли для вероятностей

Рассмотрим вероятность $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)} | r_0(\Delta t), r_1(\Delta t), \dots, r_m(\Delta t))$. Компонента $r_k(\Delta t)$ вектора $\mathbf{r}_m$ зависит от текущего времени $t^{(k)} = k\Delta t$, $k = \overline{0, m}$; при этом $t^{(m)} = t$ – момент окончания наблюдений. Таким образом, $r_k(\Delta t) = r_k(t^{(k)})$, $k = \overline{0, m}$, $t^{(m)} = m\Delta t = t$. Следовательно, $\mathbf{r}_m = (r_0(t^{(0)}), r_1(t^{(1)}), \dots, r_m(t^{(m)})) = (r_0(t=0), r_1(\frac{t}{m}), r_2(2\frac{t}{m}), \dots, r_m(t)) = \mathbf{r}_m(t)$, то есть вектор наблюдений является функцией времени t $(t^{(k)} = \frac{k}{m}t)$.

В этой связи запишем $w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)} | \mathbf{r}_m(t)) = w(\lambda^{(m)} | t)$. Аналогично $w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)} | \mathbf{r}_{m+1}(t + \Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$.

Итак, с учетом вышеизложенного, равенства (2.1.1) и замечания 2.1 перепишем соотношение (2.1.2) в виде

$$w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 0$ в (2.1.3), то есть на интервале наблюдения $(t, t + \Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$, нет событий потока. Этот случай описывает поведение апостериорной вероятности на интервале времени между моментами t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, наступления событий. Пусть в (2.1.3) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

Тогда рекуррентное соотношение (2.1.3) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)} | t)$, $w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$ состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка примет вид

$$w(\lambda_1 | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}, \quad (2.1.4)$$

$$w(\lambda_2 | t + \Delta t) = 1 - w(\lambda_1 | t + \Delta t).$$

Лемма 2.2. На интервалах (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями обобщенного синхронного потока второго порядка апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Бернулли

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = w^2(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2) - w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2), \quad (2.1.5)$$

$$\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим одну из переходных вероятностей, например, $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)$ в формуле (2.1.4). Совместная вероятность события $(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)$ – процесс $\lambda(t)$ в

момент времени t принимает значение λ_1 , на интервале $(t, t + \Delta t)$ не наступает событие обобщенного синхронного потока второго порядка и в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_1 — представляется в виде

$$\begin{aligned} & p(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \\ & = p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) p(\lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \frac{p(\lambda^{(m)} = \lambda_1, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{p(\lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}.$$

Вместе с тем справедливо равенство

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \frac{p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1)}{p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1)},$$

из которого находим

$$\begin{aligned} & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \\ & = p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) - \end{aligned}$$

совместную условную вероятность того, что на интервале $(t, t + \Delta t)$ не наступит событие потока с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t} = (1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t))(1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)) = 1 - (\lambda_1 + \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t)$ и $\lambda(t)$ останется в первом состоянии с вероятностью единица; совместная вероятность этого события равна $1 - (\lambda_1 + \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t)$.

Аналогично рассуждая и применяя рассмотренную выше методику, получим остальные совместные условные вероятности

$$\begin{aligned} & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \\ & = p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) \equiv 0, \\ & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = \\ & = p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) \equiv 0, \\ & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = \\ & = p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = 1 - (\lambda_2 + \alpha_2) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Отметим, что переходные вероятности $p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2)$ и $p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1)$ тождественно равны нулю в силу особенностей

обобщенного синхронного потока второго порядка – переход $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, возможен только в момент наступления события.

С учетом явного вида совместных условных вероятностей числитель A_1 и знаменатель A_2 в (2.1.4) принимают вид

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \\
 &= w(\lambda_1 | t)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + o(\Delta t), \\
 A_2 &= \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = \\
 &= w(\lambda_1 | t)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + w(\lambda_2 | t)(1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t) + o(\Delta t) = \\
 &= w(\lambda_1 | t) - w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t + 1 - w(\lambda_1 | t) - w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t + o(\Delta t) = \\
 &= 1 - (w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1) + w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 + \alpha_2))\Delta t + o(\Delta t).
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Подставляя (2.1.6) в (2.1.4) и принимая во внимание, что $A_2^{-1} = 1 + (w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1) + w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 + \alpha_2))\Delta t + o(\Delta t)$, находим (2.1.4) в виде

$$\begin{aligned}
 &w(\lambda_1 | t + \Delta t) - w(\lambda_1 | t) = \\
 &= w(\lambda_1 | t)(w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 + \alpha_1) + w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 + \alpha_2) - (\lambda_1 + \alpha_1))\Delta t + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Выполняя необходимые преобразования, с учетом того, что $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$, разделив обе части последнего равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, приходим к (2.1.5). Лемма доказана.

2.1.3 Явный вид апостериорных вероятностей и формула пересчета

Решая уравнение Бернулли (2.1.5) в случае $\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$ с учетом начального условия при $t = t_k$, $k = 0, 1, \dots$, приходим к лемме.

Лемма 2.3. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для обобщенного синхронного потока событий второго порядка на интервалах времени (t_0, t_1) и (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, определяется формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w(\lambda_1 | t_k) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}{1 - w(\lambda_1 | t_k) + w(\lambda_1 | t_k) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}, \tag{2.1.7}$$

где $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Обозначим $a = \lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2$, $b = -(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)$.

Тогда уравнение Бернулли (2.1.5) перепишется в виде

$$\frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} - b w(\lambda_1 | t) = a w^2(\lambda_1 | t). \quad (2.1.8)$$

Поделив левую и правую части (2.1.8) на $w^2(\lambda_1 | t) \neq 0$ и сделав замену $z = \frac{1}{w(\lambda_1 | t)}$, $z' = -\frac{w'(\lambda_1 | t)}{w^2(\lambda_1 | t)}$, получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами [50]

$$\frac{dz}{dt} + b z = -a. \quad (2.1.9)$$

Решив уравнение (2.1.9) и сделав обратную замену, найдем

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{b}{c' e^{-bt} - a}. \quad (2.1.10)$$

Определим значение произвольной постоянной c' в (2.1.10) из начального условия: при $t = t_k$ имеем $w(\lambda_1 | t) = w(\lambda_1 | t_k)$. Осуществляя необходимые преобразования, получим аналитическую формулу для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ вида (2.1.7). *Лемма доказана.*

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 1$ в (2.1.3), то есть на интервале $(t, t + \Delta t)$ наступает событие потока, допустим, в момент времени t_k . Пусть $\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$.

Тогда рекуррентное соотношение (2.1.3) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)} | t)$, $w(\lambda^{(m+1)} | t + \Delta t)$ состояний потока запишется в виде

$$w(\lambda_1 | t + \Delta t) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}, \quad (2.1.11)$$

$$w(\lambda_2 | t + \Delta t) = 1 - w(\lambda_1 | t + \Delta t).$$

Лемма 2.4. В момент времени t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события в обобщенном синхронном потоке второго порядка для апостериорной вероятности первого состояния процесса $\lambda(t)$ справедлива формула пересчета

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{W}{(\lambda_2 + \alpha_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1.12)$$

$$W = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0) (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) - \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)),$$

при этом $w(\lambda_2 | t_k + 0) = 1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)$.

Доказательство. Момент t_k наступления события потока разбивает интервал $(t, t + \Delta t)$ на два смежных интервала (t, t_k) и $(t_k, t + \Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$ соответственно (рисунок 2.2).

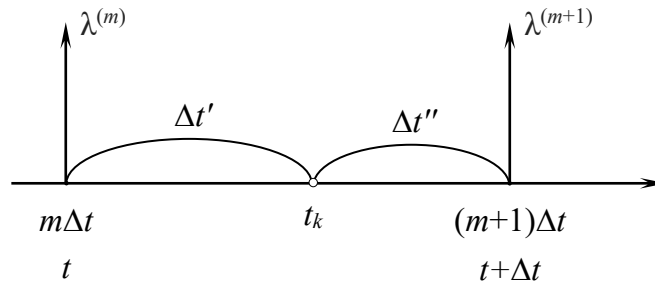


Рисунок 2.2 – Разбиение временного интервала

С учетом введенных обозначений (2.1.11) примет вид

$$w(\lambda_1 | t_k + \Delta t'') = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)} | t_k - \Delta t') p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}. \quad (2.1.13)$$

Рассмотрим одну из переходных вероятностей в (2.1.13), например, $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1)$. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 2.2, определим, что

$$\begin{aligned} p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) &= \\ &= p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = \\ &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) \Delta t + o(\Delta t) - \end{aligned}$$

совместная условная вероятность того, что на $(t, t + \Delta t)$ наступит событие с вероятностью $(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t}) = \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ и в момент наступления события $\lambda(t)$

перейдет из первого состояния в первое с вероятностью $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$; или на $(t, t + \Delta t)$ наступит событие с вероятностью $(1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}) = \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ и в момент наступления события $\lambda(t)$ перейдет из первого состояния в первое с вероятностью $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$.

Следуя изложенной в доказательстве леммы 2.2 методике, выпишем все остальные переходные вероятности в (2.1.13). Имеем

$$\begin{aligned} & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1) = \\ & = p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) \Delta t + o(\Delta t), \\ & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = \\ & = p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_1) = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) \Delta t + o(\Delta t), \\ & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) p(r_{m+1} = 1 | \lambda^{(m)} = \lambda_2, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2) = \\ & = p(r_{m+1} = 1, \lambda^{(m+1)} = \lambda_2 | \lambda^{(m)} = \lambda_2) = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

С учетом явного вида представленных вероятностей числитель B_1 и знаменатель B_2 в выражении (2.1.13) принимают вид

$$\begin{aligned} B_1 = & (w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) + \\ & + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))) \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$B_2 = (w(\lambda_1 | t_k - \Delta t') (\lambda_1 + \alpha_1) + w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') (\lambda_2 + \alpha_2)) \Delta t + o(\Delta t).$$

Подставляя (2.1.14) в (2.1.13) с учетом $w(\lambda_2 | t_k - \Delta t') = 1 - w(\lambda_1 | t_k - \Delta t')$ и осуществляя в (2.1.13) предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t' \rightarrow 0$, $\Delta t'' \rightarrow 0$), приходим к (2.1.12). Лемма доказана.

Замечание 2.2. В момент t_k , $k=1,2,\dots$, наступления очередного события потока апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t)$ терпит разрыв I-го рода, то есть имеет место конечный скачок. Вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ зависит от $w(\lambda_1 | t_k - 0)$, где $w(\lambda_1 | t_k - 0)$ – значение $w(\lambda_1 | t)$, определяемой уравнением (2.1.5), в момент $t = t_k$, когда t изменяется на интервале (t_{k-1}, t_k) , соседнем с (t_k, t_{k+1}) , $k=1,2,\dots$. Итак, в

значении $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ сосредоточена вся предыстория наблюдений за потоком, начиная с момента начала наблюдения $t_0 = 0$ до момента t_k .

2.1.4 Априорные вероятности состояний потока

Пусть t^0 – момент начала функционирования потока. Обозначим априорные вероятности того, что $\lambda(t) = \lambda_i$ в момент t , как $\pi_i(t | t^0)$, $i=1,2$.

Лемма 2.5. Априорные вероятности $\pi_i(t | t^0)$, $i=1,2$, состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщенного синхронного потока событий второго порядка удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \pi_1'(t | t^0) = -(\lambda_1 + \alpha_1)\pi_1(t | t^0) + \pi_1(t | t^0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) + \\ \quad + \pi_2(t | t^0)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)), \\ \pi_2'(t | t^0) = -(\lambda_2 + \alpha_2)\pi_2(t | t^0) + \pi_2(t | t^0)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) + \\ \quad + \pi_1(t | t^0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)). \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Доказательство. Пусть $\lambda(t) = \lambda_1$, то есть имеет место первое состояние сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$. Возможны следующие ситуации на полуинтервале $[t; t + \Delta t)$:

1) в момент t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1(t | t^0)$, и на $[t; t + \Delta t)$ не закончится первое состояние $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t}$; вероятность этой ситуации – $\pi_1(t | t^0) e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t} = \pi_1(t | t^0)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + o(\Delta t)$;

2) в момент t значение $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $\pi_1(t | t^0)$, на $[t; t + \Delta t)$ закончится первое состояние $\lambda(t)$, наступит событие и $\lambda(t)$ перейдет из первого состояния в первое с вероятностью $(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t})P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + (1 - e^{-\alpha_1 \Delta t})P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$; вероятность ситуации – $\pi_1(t | t^0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t)$;

3) в момент t значение $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $\pi_2(t | t^0)$, на $[t; t + \Delta t)$ закончится второе состояние $\lambda(t)$, наступит событие и $\lambda(t)$ перейдет из второго

состояния в первое с вероятностью $(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t})P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + (1 - e^{-\alpha_2 \Delta t})P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$; вероятность ситуации – $\pi_2(t | t^0)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t)$.

Аналогично для второго состояния процесса $\lambda(t)$, то есть при $\lambda(t) = \lambda_2$:

- 1) $\pi_2(t | t^0)(1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t) + o(\Delta t)$;
- 2) $\pi_2(t | t^0)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t)$;
- 3) $\pi_1(t | t^0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t)$.

Тогда вероятности того, что в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ будет находиться в первом и втором состоянии запишутся соответственно в виде

$$\begin{cases} \pi_1(t + \Delta t | t^0) = \pi_1(t | t^0)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + \pi_1(t | t^0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \\ + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))\Delta t + \pi_2(t | t^0)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t), \\ \pi_2(t + \Delta t | t^0) = \pi_2(t | t^0)(1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t) + \pi_2(t | t^0)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \\ + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))\Delta t + \pi_1(t | t^0)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Перенесем $\pi_1(t | t^0)$, $\pi_2(t | t^0)$ в каждом из уравнений в левую часть, поделим левые и правые части на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$; в результате получим (2.1.15). *Лемма доказана.*

Найдем $\pi_1(t | t^0)$, $\pi_2(t | t^0)$ как решение системы (2.1.15). Обозначим $u = \pi_1(t | t^0)$, $v = \pi_2(t | t^0)$, тогда (2.1.15) примет вид

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v, \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} , $i, j = 1, 2$ – соответствующие элементы матрицы A вида

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) - \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) & \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) \\ \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) & -\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) - \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) \end{bmatrix}.$$

С использованием метода исключения [50] приводим последнюю систему к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\frac{du}{dt} - a_{11}u}{a_{12}} = \frac{1}{a_{12}} \frac{du}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}u, \\
\frac{1}{a_{12}} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{du}{dt} &= a_{21}u + a_{22}v, \\
\frac{1}{a_{12}} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{du}{dt} &= a_{21}u + \frac{a_{22}}{a_{12}} \frac{du}{dt} - \frac{a_{22}a_{11}}{a_{12}}u, \\
\frac{d^2u}{dt^2} - (a_{22} + a_{11}) \frac{du}{dt} + (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})u &= 0.
\end{aligned}$$

Будем искать решение в виде $u(t) = e^{kt}$, $k - const$. Корни соответствующего характеристического уравнения $k^2 - (a_{22} + a_{11})k + (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = 0$ с учетом того, что $(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) \equiv 0$, имеют вид

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}((a_{22} + a_{11}) \pm |a_{22} + a_{11}|) = \begin{cases} 0, \\ (a_{22} + a_{11}), \end{cases}$$

где $(a_{22} + a_{11}) = -(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))$

Следовательно, преобразованное решение системы запишется в виде

$$\begin{cases} u(t) = c_1 + c_2 e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))t}, \\ v(t) = c_1 \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)} - \\ - c_2 e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))t}. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Возвращаясь к введенным ранее обозначениям, в соответствии с (2.1.16) найдем общее решение для искомых вероятностей

$$\begin{cases} \pi_1(t | t^0) = c_1 + c_2 e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))t}, \\ \pi_2(t | t^0) = c_1 \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)} - \\ - c_2 e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))t}. \end{cases} \quad (2.1.17)$$

Значения неопределенных констант c_1 и c_2 в (2.1.17) установим из условия:

$\pi_1(t^0 | t^0) = \pi$, $\pi_2(t^0 | t^0) = 1 - \pi$ в момент времени $t = t^0$.

Введем следующие обозначения

$$f = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2),$$

$$g = \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}.$$

Лемма 2.6. Априорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщенного синхронного потока событий второго порядка имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \pi_1(t | t^0) &= \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)} + \\ &+ \left(\pi - \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)} \right) \times \\ &\times e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))(t - t^0)}, \\ \pi_2(t | t^0) &= \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)} - \\ &- \left(\pi - \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)} \right) \times \\ &\times e^{-(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))(t - t^0)}. \end{aligned} \right. \quad (2.1.18)$$

Доказательство. Приведем систему равенств (2.1.17) к виду

$$\begin{cases} c_1 = \pi - c_2 e^{-f t^0}, \\ 1 - \pi = \left(\pi - c_2 e^{-f t^0} \right) g - c_2 e^{-f t^0}. \end{cases} \quad (2.1.19)$$

Из второго уравнения (2.1.19) определим $c_2 = \left(\pi - \frac{1}{g+1} \right) e^{f t^0}$, $c_1 = \frac{1}{g+1}$.

Следовательно, частное решение (2.1.15) имеет вид (2.1.18). *Лемма доказана.*

Для стационарного режима функционирования потока при $t \rightarrow \infty$ ($t^0 \rightarrow -\infty$) из системы (2.1.18) находим

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_1(t | t^0) = \pi_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_2(t | t^0) = \pi_2, \end{cases} \quad \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Следствие 2.1. Для обобщенного синхронного потока второго порядка априорные финальные вероятности при $t \rightarrow \infty$ (или $t^0 \rightarrow -\infty$) имеют вид

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}, \\ \pi_2 = \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}. \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Результаты лемм 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать теорему.

Теорема 2.1. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на временной оси для обобщенного синхронного потока событий второго порядка определяется выражениями

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w(\lambda_1 | t_k + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}{1 - w(\lambda_1 | t_k + 0) + w(\lambda_1 | t_k + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k)}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)},$$

$$w(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{W}{(\lambda_2 + \alpha_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0)(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$W = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) + w(\lambda_1 | t_k - 0) (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) - \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) - \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)),$$

$$w(\lambda_1 | t_k - 0) = \frac{w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1})}}{1 - w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) + w(\lambda_1 | t_{k-1} + 0) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t_k - t_{k-1})}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$.

Доказательство осуществляется объединением формул (2.1.7) и (2.1.12).

2.1.5 Алгоритм оптимального оценивания состояний

Полученные в разделе (подразделы 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4) аналитические формулы (2.1.7), (2.1.12), (2.1.20), а также теорема 2.1 позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$, а также алгоритм принятия решения о состоянии сопровождающего процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t , то есть алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка.

1) В начальный момент времени $t_0 = 0$ вычисляется априорная вероятность π_1 первого состояния процесса $\lambda(t)$ по формуле (2.1.20) и задается $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$;

2) в любой момент времени t , $t_0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, по формуле (2.1.7) для $k = 0$ производятся расчеты по нахождению апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$;

3) в момент t_1 по формуле (2.1.7) для $k = 0$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t)$, то есть $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$, далее, увеличив k на единицу, по формуле (2.1.12) для $k = 1$ производится пересчет апостериорной вероятности в момент t_1 , при этом $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ на следующем шаге;

4) в любой момент t , $t_1 < t < t_2$, где t_2 – момент наблюдения второго события, рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | t)$ по формуле (2.1.7) для $k = 1$;

5) в момент t_2 по формуле (2.1.7) для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$, далее, увеличив k на единицу, по формуле (2.1.12) для $k = 2$ производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_2 , при этом $w(\lambda_1 | t_2 + 0)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ на следующем шаге и т. д.

Параллельно, по ходу вычисления вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (потока) по критерию максимума апостериорной вероятности [105]: если $w(\lambda_1 | t) \geq w(\lambda_2 | t)$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, иначе $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

2.2 Результаты численных расчетов оценки состояний

Разработанный алгоритм оценивания реализован в имитационной модели потока на языке C# в среде Microsoft Visual Studio как непосредственное вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$, $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ и $w(\lambda_1 | t)$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, а также определение оценки $\hat{\lambda}(t)$ истинной

траектории процесса $\lambda(t)$, полученной путем имитационного моделирования обобщенного синхронного потока второго порядка [96].

С целью установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за дважды стохастическим потоком событий, проведен ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

- 1) для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2, l = 1, 2$, осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока на заданном отрезке $[0, T_m]$, где T_m – время моделирования (время наблюдения за потоком), – отдельная k -ая реализация (испытание модели);
- 2) производится расчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$ по формулам (2.1.7), (2.1.12), (2.1.20);
- 3) оценивается траектория $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$;
- 4) определяется значение d_k – суммарной протяженности интервалов, на которых значение $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$, – для k -го испытания;
- 5) вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_k = \frac{d_k}{T_m}$;
- 6) шаги 1–5 повторяются N раз, $k = \overline{1, N}$, для расчета оценки полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения о состояниях $\lambda(t)$ на $[0, T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений в N испытаниях. По этому набору вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения

$$\hat{P}_{oui} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{p}_k \text{ и ее выборочная дисперсия } \hat{D}_{oui} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\hat{p}_k - \hat{P}_{oui})^2.$$

Первый статистический эксперимент устанавливает зависимость оценок $\hat{P}_{oui}$ и $\hat{D}_{oui}$ от времени моделирования T_m при дополнительном изменении параметров λ_1 и α_1 . В таблицах 2.2 – 2.5 приведены результаты, полученные при $N = 100$ и значениях параметров потока событий, представленных в таблице 2.1, для каждого значения $T_m = 100, 200, \dots, 1000$.

Таблица 2.1 – Модельные данные

$\lambda_1 = 5; 7$ $\lambda_2 = 1$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,6$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,4$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,5$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,5$
$\alpha_1 = 4; 6$ $\alpha_2 = 1$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,3$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,7$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,8$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,2$

Таблица 2.2 – Результаты первого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5$, $\alpha_1 = 4$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{P}_{ош}$	0,1328	0,1302	0,1272	0,1275	0,1249	0,1264	0,1288	0,1263	0,1269	0,1260
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	0,5280	0,2089	0,1611	0,0067	0,0053	0,0057	0,0053	0,0049	0,0050	0,0042

Таблица 2.3 – Результаты первого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 7$, $\alpha_1 = 4$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{P}_{ош}$	0,1085	0,1103	0,1087	0,1111	0,1096	0,1054	0,1110	0,1101	0,1071	0,1094
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	0,3181	0,1285	0,0071	0,0065	0,0059	0,0062	0,0058	0,0037	0,0035	0,0036

Таблица 2.4 – Результаты первого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5$, $\alpha_1 = 6$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{P}_{ош}$	0,1065	0,1056	0,1002	0,1013	0,1010	0,1027	0,1007	0,1028	0,1017	0,1015
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	0,2080	0,0801	0,0106	0,0083	0,0054	0,0044	0,0046	0,0030	0,0032	0,0040

Таблица 2.5 – Результаты первого статистического эксперимента ($\lambda_1 = 7$, $\alpha_1 = 6$)

T_m	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{P}_{ош}$	0,0862	0,0908	0,0897	0,0917	0,0913	0,0905	0,0896	0,0902	0,0892	0,0893
$\hat{D}_{ош} \cdot 10^3$	0,1333	0,0457	0,0167	0,0092	0,0062	0,0045	0,0026	0,0025	0,0022	0,0023

Из анализа численных результатов таблиц 2.2 – 2.5 установлено, что:

1) оценка полной вероятности ошибки $\hat{P}_{ош}$ для всех вариантов расчета является достаточно стабильной при $T_m \geq 100$ ед. времени;

2) оценка $\hat{P}_{ош}$ при фиксированном T_m уменьшается с увеличением λ_1 и α_1 , что естественно в силу того, что состояния $\lambda(t)$ становятся лучше различимы;

3) оценка $\hat{D}_{oui}$ для всех вариантов расчета достаточно мала.

Во втором эксперименте исследуется зависимость оценок $\hat{P}_{oui}$ и $\hat{D}_{oui}$ от отношений λ_1/λ_2 и α_1/α_2 . В таблицах 2.7, 2.8 продемонстрированы результаты, полученные для исходных данных таблицы 2.6 при $N=100$ и $T_m=100$.

Таблица 2.6 – Модельные данные

$\lambda_1 = 6$ $\lambda_1/\lambda_2 = 3; \dots; 192$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,6$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,4$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,5$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,5$
$\alpha_1 = 6$ $\alpha_1/\alpha_2 = 3; \dots; 192$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,3$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,7$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,8$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,2$

Таблица 2.7 – Результаты второго статистического эксперимента ($\alpha_2 = 2$)

λ_1/λ_2	3	6	12	24	48	96	192
$\hat{P}_{oui}$	0,1744	0,1211	0,0873	0,0781	0,0713	0,0655	0,0593
$\hat{D}_{oui} \cdot 10^3$	0,4409	0,2591	0,2470	0,2407	0,1893	0,1706	0,1570

Таблица 2.8 – Результаты второго статистического эксперимента ($\lambda_2 = 2$)

α_1/α_2	3	6	12	24	48	96	192
$\hat{P}_{oui}$	0,1810	0,1584	0,1475	0,1482	0,1466	0,1401	0,1277
$\hat{D}_{oui} \cdot 10^3$	0,3971	0,4791	0,4720	0,4214	0,4431	0,5107	0,4115

Полученные численные результаты свидетельствуют о том, что оценивание тем лучше, чем больше значения λ_1/λ_2 и α_1/α_2 . В этом случае частота принятия ошибочных решений сокращается за счет того, что улучшается различимость состояний $\lambda(t)$. Заметим также, что с ростом отношения λ_1/λ_2 обеспечивается лучшее в смысле малости оценки вероятности принятия ошибочного решения качество оценивания состояний рассматриваемого потока, чем при увеличении отношения α_1/α_2 . Это объясняется заданным в таблице 2.6 набором вероятностей переходов процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в j -ое, $i, j = 1, 2$.

Представляет интерес рассмотрение частного случая задания вероятностей, определяющих переходы $\lambda(t)$, при котором происходит смена первого состояния процесса на второе, либо наоборот, в каждый момент наступления очередного события потока. В третьем эксперименте при соответствующих значениях $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 0, i = j, P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 1, i \neq j, i, j = 1, 2$, времени моделирования $T_m = 100$, количестве повторений $N = 100$ и значениях параметров $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0,75, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,45$ производятся расчеты для нахождения траектории оценки процесса $\hat{\lambda}(t)$, а также определяются численные значения $\hat{P}_{out}$ и $\hat{D}_{out}$.

Полученная в одном из N испытаний с помощью имитационной модели траектория $\lambda(t)$, соответствующая заданным значениям, приведена на рисунке 2.3, где λ_1, λ_2 – значения $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ – моменты наступления событий.

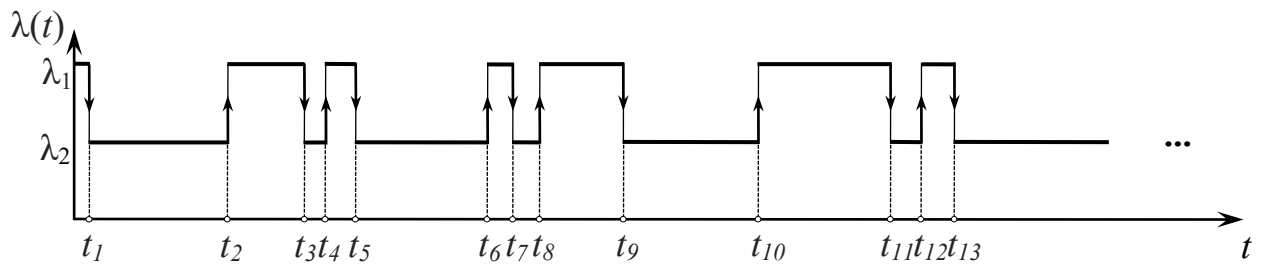


Рисунок 2.3 – Реализация обобщенного синхронного потока второго порядка

На рисунке 2.4 проиллюстрировано поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$, соответствующей полученной последовательности $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$.

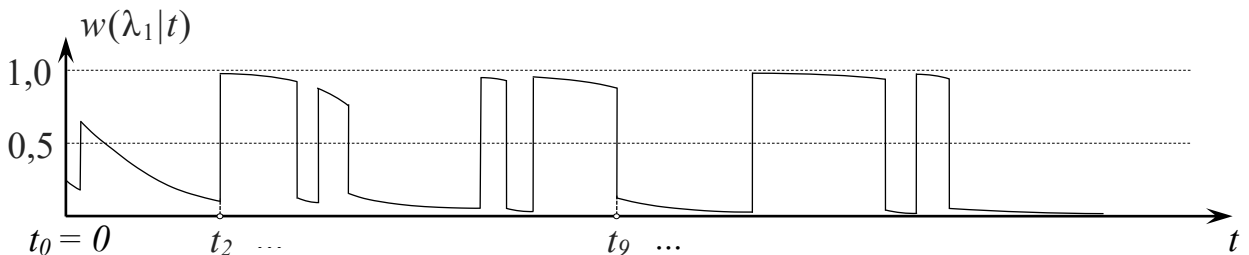
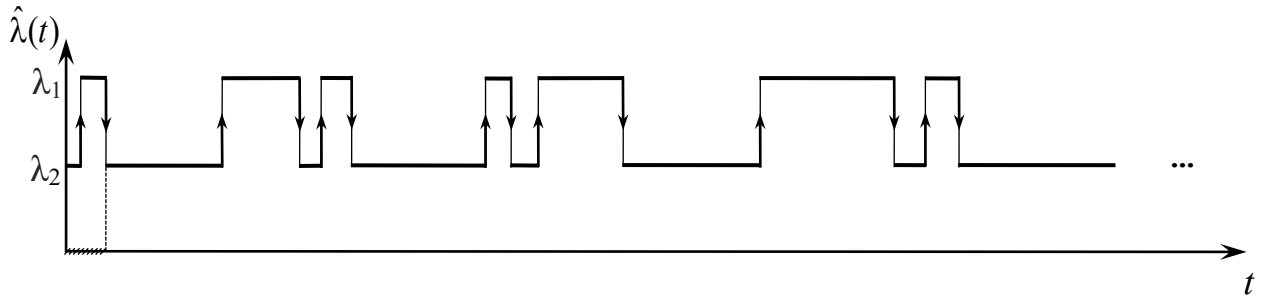


Рисунок 2.4 – Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$

Траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ построена на рисунке 2.5, где λ_1, λ_2 – значения $\lambda(t)$. Вынесение решения о состоянии $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,001$. Участки ошибочных решений обозначены на временной оси штриховкой.

Рисунок 2.5 – Поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$

Доля ошибочных решений для данного испытания составляет $\hat{p}_k = 0,0021$.

Выборочное среднее безусловной вероятности ошибки в серии из N испытаний $\hat{P}_{oui} = 0,0060$, а ее выборочная дисперсия – $\hat{D}_{oui} = 0,0847 \cdot 10^{-3}$.

Для сравнения: $\hat{P}_{oui} = 0,2030$ и $\hat{D}_{oui} = 0,971 \cdot 10^{-3}$ при тех же значениях параметров потока и вероятностях $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 0,5$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$.

Таким образом, в силу детерминированного механизма смены состояний потока [76] в каждый момент наступления события построенный алгоритм оптимального оценивания обеспечивает выборочное среднее полной вероятности ошибки при $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 0$, $i = j$, $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i \neq j$, близкое к нулю. Выборочная дисперсия при этом имеет существенно меньший порядок малости по сравнению с ситуациями аналогичных рассмотрений при отличных $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$.

2.3 Оценка параметров распределения в коррелированном потоке

Обозначим значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, как $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$. Для плотности вероятности значений τ_k вследствие функционирования потока в стационарном режиме справедливо $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, при любом $k \geq 1$, что позволяет без ограничения общности положить момент наступления события t_k равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

2.3.1 Нахождение переходных вероятностей

Введем в рассмотрение $p_{ij}(\tau)$ – условную вероятность того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ значение процесса $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, и событие потока в момент времени $\tau = 0$ наступило, $i, j = 1, 2$.

Лемма 2.7. Условные вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке событий второго порядка имеют вид

$$p_{11}(\tau) = e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, p_{12}(\tau) = 0, p_{21}(\tau) = 0, p_{22}(\tau) = e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \tau \geq 0. \quad (2.3.1)$$

Доказательство. В соответствии с определением потока событий вероятности $p_{12}(\tau)$ и $p_{21}(\tau)$ тождественно равны нулю, т. к. переход из состояния в состояние сопровождается наступлением события потока. Для $p_{11}(\tau)$ и $p_{22}(\tau)$ составим системы дифференциальных уравнений Δt -методом.

На интервале $(0, \tau + \Delta\tau)$ реализуется единственный возможный вариант – в момент времени τ имеет место состояние S_i процесса $\lambda(\tau)$ при том, что это же состояние S_i имеет место в момент $\tau = 0$ и на $(0, \tau)$ не наступало событий потока, на полуинтервале $[\tau; \tau + \Delta\tau)$ не наступит событие потока и процесс $\lambda(\tau)$ не закончит свое пребывания в состоянии S_i с вероятностью единица, $i = 1, 2$; вероятность ситуации равна $p_{ii}(\tau)e^{-\lambda_i\Delta\tau}e^{-\alpha_i\Delta\tau}$.

Тогда с учетом разложения экспоненты в ряд Тейлора в окрестности нуля справедливы равенства

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau + \Delta\tau) &= p_{11}(\tau)e^{-\lambda_1\Delta\tau}e^{-\alpha_1\Delta\tau} = p_{11}(\tau) - (\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau + \Delta\tau) &= p_{22}(\tau)e^{-\lambda_2\Delta\tau}e^{-\alpha_2\Delta\tau} = p_{22}(\tau) - (\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

Поделив обе части последних равенств на $\Delta\tau$ и устремив $\Delta\tau$ к нулю, получим следующие дифференциальные уравнения

$$p'_{11}(\tau) = -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(\tau), \quad p'_{22}(\tau) = -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(\tau) \quad (2.3.2)$$

с начальными условиями $p_{11}(0) = 1$ и $p_{22}(0) = 1$.

Интегрируя уравнения (2.3.2) в пределах от $\tau=0$ до τ , приходим к (2.3.1).
Лемма доказана.

Лемма 2.8. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка определяются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{11}(\tau) &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{12}(\tau) &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

Доказательство. Определим совместные вероятности того, что без наступления события на интервале $(0, \tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ переходит на этом интервале из i -го состояния в j -ое, $i, j = 1, 2$, на полуинтервале $[\tau; \tau + \Delta\tau)$ происходит окончание состояния S_j процесса $\lambda(\tau)$, и в результате розыгрыша пар в момент наступления события потока процесс $\lambda(\tau)$ переходит из j -го состояния в i -ое, $i, j = 1, 2$.

$$\begin{aligned}p_{11}(\tau) &(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) \Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{11}(\tau) &(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) \Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{12}(\tau) &((\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) \Delta\tau + o(\Delta\tau)) \equiv 0, \\ p_{12}(\tau) &((\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) \Delta\tau + o(\Delta\tau)) \equiv 0, \\ p_{21}(\tau) &((\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) \Delta\tau + o(\Delta\tau)) \equiv 0, \\ p_{21}(\tau) &((\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) \Delta\tau + o(\Delta\tau)) \equiv 0, \\ p_{22}(\tau) &(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) \Delta\tau + o(\Delta\tau), \\ p_{22}(\tau) &(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) \Delta\tau + o(\Delta\tau).\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

Отметим, каждая из совместных вероятностей (2.3.4) представима в виде

$$p_{ij}(\tau) (\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j)) \Delta\tau + o(\Delta\tau) = \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} \tilde{p}_{ij}^{(k)}(u) du = \tilde{p}_{ij}^{(k)}(\tau) \Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

где $\tilde{p}_{ij}^{(k)}(\tau)$ – соответствующая $p_{ij}(\tau)$ плотность вероятности, $i, j = 1, 2$, $k = 1, 2$.

Последнее равенство перепишем в виде

$$p_{ij}(\tau) (\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j)) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \tilde{p}_{ij}^{(k)}(\tau) + \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau}$$

и устремим $\Delta\tau$ к нулю, в результате чего окончательно получим

$$\tilde{p}_{ij}^{(k)}(\tau) = p_{ij}(\tau) \left(\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j) \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (2.3.5)$$

Плотности вероятности $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ того, что без наступления события потока на интервале $(0, \tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$, в предыдущих обозначениях согласно

(2.3.1) и (2.3.5) запишутся в виде $\tilde{p}_{ij}(\tau) = \sum_k \tilde{p}_{ij}^{(k)}(\tau)$, $k = 1, 2$, или

$\tilde{p}_{ij}(\tau) = \tilde{p}_{ij}^{(1)}(\tau) + \tilde{p}_{ij}^{(2)}(\tau)$, то есть в явном виде получаем (2.3.3). *Лемма доказана.*

Лемма 2.9. Вероятности перехода p_{ij} , $i, j = 1, 2$, для коррелированного обобщенного синхронного потока событий второго порядка задаются в виде

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \\ p_{12} &= \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \\ p_{21} &= \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2}, \\ p_{22} &= \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Доказательство. Поскольку τ – произвольный момент, то p_{ij} – вероятности перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$, за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до момента наступления очередного события – определяются в виде

$$p_{ij} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.3.7)$$

Подставляя (2.3.3) в (2.3.7), получаем

$$p_{ij} = \left(\lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + \alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i) \right) \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_i + \alpha_i)\tau} d\tau, \quad i, j = 1, 2,$$

отсюда следует (2.3.6). *Лемма доказана.*

2.3.2 Явный вид стационарных вероятностей

Введем в рассмотрение $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент $\tau=0$ пребывает в i -ом состоянии при условии, что $\tau=0$ есть момент наступления события потока, $i=1,2$; $\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$.

Лемма 2.10. Условные финальные вероятности $\pi_i(0)$, $i=1,2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке событий второго порядка задаются выражениями

$$\pi_1(0) = \frac{(\lambda_1 + \alpha_1)\varphi_2}{(\lambda_2 + \alpha_2)\varphi_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)\varphi_2}, \quad \pi_2(0) = \frac{(\lambda_2 + \alpha_2)\varphi_1}{(\lambda_2 + \alpha_2)\varphi_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)\varphi_2}, \quad (2.3.8)$$

где $\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$.

Доказательство. Вследствие того, что согласно лемме 1.2 $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная цепь Маркова, для $\pi_i(0)$, $i=1,2$, справедливы следующие уравнения

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= p_{11}\pi_1(0) + p_{21}\pi_2(0), \\ \pi_2(0) &= p_{12}\pi_1(0) + p_{22}\pi_2(0), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

где вероятности p_{ij} , $i, j=1,2$, определяются леммой 2.9 и имеют вид (2.3.6).

В результате подстановки (2.3.6) в (2.3.9) и с учетом условия нормировки, приходим к (2.3.8), т. к. выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) - (\lambda_2 + \alpha_2)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) &\equiv \\ &\equiv (\lambda_2 + \alpha_2)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)), \\ (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) - (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) &\equiv \\ &\equiv (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Леммы 2.8 и 2.10 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2. В коррелированном обобщенном синхронном дважды стохастическом потоке второго порядка плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями имеет вид

$$p(\tau) = \gamma(\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + (1 - \gamma)(\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad (2.3.10)$$

где $\gamma = \pi_1(0)$, $\pi_1(0)$ определяется в (2.3.8).

Доказательство. Пусть случайная величина η – длительность интервала между событиями, а $p(\tau)$ – плотность вероятности значений η . По определению

$$P(\tau \leq \eta < \tau + \Delta\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} p(u) du = p(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

Осуществимыми на интервале $(0, \tau + \Delta\tau)$ при $i, j = 1, 2$ являются ровно четыре варианта – в момент наступления события $\tau = 0$ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии S_i и на $(0, \tau + \Delta\tau)$ происходит его переход из i -го состояния в j -ое, несопровожаемый на интервале $(0, \tau)$ наступлением события потока и связанный с наступлением события на полуинтервале $[\tau; \tau + \Delta\tau)$; соответствующие рассмотренным возможным вариантам вероятности запишутся в виде

$$\pi_i(0)(\tilde{p}_{ij}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)), \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда имеет место следующее соотношение

$$p(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau) = \pi_1(0)[(\tilde{p}_{11}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + (\tilde{p}_{12}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau))] + \pi_2(0)[(\tilde{p}_{21}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + (\tilde{p}_{22}(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau))],$$

поделив обе его части на $\Delta\tau$ и устремив $\Delta\tau$ к нулю, получим формулу плотности вероятности длительности интервала между событиями в потоке

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (2.3.11)$$

Подставляя в (2.3.11) сначала (2.3.3), а затем явные выражения (2.3.9) для $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, проделывая необходимые преобразования следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11}(\tau) + \tilde{p}_{12}(\tau) &= [\lambda_1(P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)) + \\ &+ \alpha_1(P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} = (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) + \tilde{p}_{22}(\tau) &= [\lambda_2(P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2)) + \\ &+ \alpha_2(P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))] e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} = (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \end{aligned}$$

приходим к (2.3.10). Теорема доказана.

Отметим, что (2.3.10) представляет плотность вероятности $p(\tau)$ значений случайной величины – длительности интервала между событиями потока – τ , распределенной по гиперэкспоненциальному закону.

Последнее утверждение приводит к справедливости следующего замечания.

Замечание 2.3. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями обобщенного синхронного потока второго порядка имеет вид (2.3.10) тогда и только тогда, когда имеет место дополнительное условие на задание параметров распределения случайных величин $\xi_i^{(1)}$ и $\xi_i^{(2)}$, $i=1,2$: $(\lambda_1 + \alpha_1) \neq (\lambda_2 + \alpha_2)$. Последнее условие вполне может нарушаться в силу того, что λ_1 и λ_2 удовлетворяют условию $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, а α_1 и α_2 , вообще говоря, произвольные неотрицательные числа. Строгое равенство $(\lambda_1 + \alpha_1) = (\lambda_2 + \alpha_2)$ приводит к рассмотрению плотности вероятности $p(\tau)$ для простейшего потока.

В дальнейшем изложении принимается, что $(\lambda_1 + \alpha_1) \neq (\lambda_2 + \alpha_2)$.

2.3.3 Вероятностные характеристики коррелированного потока

Определим по известной $p(\tau)$ вида (2.3.10) вероятностные характеристики случайной величины τ – длительности интервала между соседними событиями коррелированного обобщенного синхронного потока второго порядка.

Нетрудно получить выражения для относящихся к числу наиболее важных и часто используемых точечных характеристик – математического ожидания (первого начального момента) и дисперсии (второго центрального момента) [71]:

$$\begin{aligned} M(\tau) &= \frac{\gamma}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1 - \gamma}{\lambda_2 + \alpha_2}, \\ D(\tau) &= 2 \left[\frac{\gamma}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} + \frac{1 - \gamma}{(\lambda_2 + \alpha_2)^2} \right] - \left[\frac{\gamma}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1 - \gamma}{\lambda_2 + \alpha_2} \right]^2, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

где $\gamma = \pi_1(0)$, $\pi_1(0)$ определяется в (2.3.8).

2.3.4 Построение оценок в коррелированном потоке методом моментов

Оценить методом моментов двенадцать параметров обобщенного синхронного потока второго порядка λ_i , α_i , $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$,

или с учетом $P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1 - P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1 - P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, восемь – λ_i , α_i , $P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i)$ либо $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i)$ либо $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, – располагая лишь информацией о виде плотности вероятности $p(\tau)$ не представляется возможным. Будем оценивать неизвестные параметры $(\lambda_1 + \alpha_1)$, $(\lambda_2 + \alpha_2)$, γ плотности $p(\tau)$.

Замечание 2.4. Обобщенный синхронный поток второго порядка является коррелированным потоком. В этой связи говорить о состоятельности получаемых методом моментов оценок не представляется возможным. При рассмотрении рекуррентного потока, как будет показано в следующем разделе, метод моментов обеспечивает состоятельность получаемых оценок [63].

Введем в рассмотрение выборку $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p(\tau | z_1, z_2, \gamma) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}$, зависящего от трех неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$, $\gamma = \pi_1(0)$, где $\pi_1(0)$ определяется в (2.3.8); при этом без ограничения общности доопределим $z_1 > z_2$. В силу близости теоретической и эмпирической функций распределения, то есть неограниченного сближения их значений, следует ожидать близости их числовых характеристик – моментов одного и того же порядка. Теоретический начальный момент l -го порядка $M\tau^l = \int_0^\infty \tau^l p(\tau | z_1, z_2, \gamma) d\tau$ близок к соответствующему выборочному моменту – статистике $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Таким образом, для оценки параметров z_1, z_2, γ необходимо иметь три уравнения моментов $M\tau^l = C_l$, $l = \overline{1, 3}$.

Другими словами, имеет место следующая система

$$\int_0^\infty \tau^l (\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}) d\tau = C_l, \quad l = \overline{1, 3}, \quad (2.3.13)$$

левая часть которой в результате интегрирования принимает вид

$$\int_0^\infty \tau^l (\gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}) d\tau = l! \frac{\gamma}{z_1^l} + l! \frac{(1 - \gamma)}{z_2^l}, \quad l = \overline{1, 3}.$$

На основании последнего исходная система (2.3.13) сводится к системе

$$\frac{\gamma}{z_1} + \frac{(1-\gamma)}{z_2} = C_1, \quad 2\frac{\gamma}{z_1^2} + 2\frac{(1-\gamma)}{z_2^2} = C_2, \quad 6\frac{\gamma}{z_1^3} + 6\frac{(1-\gamma)}{z_2^3} = C_3. \quad (2.3.14)$$

Для второго и третьего уравнений (2.3.14) имеют место преобразования

$$\begin{aligned} 2\frac{\gamma}{z_1^2} + 2\frac{(1-\gamma)}{z_2^2} &= 2\frac{\gamma}{z_1^2} + 2\frac{(1-\gamma)}{z_2^2} + \frac{1}{z_1}C_1 - \frac{1}{z_1}C_1 + \frac{1}{z_2}C_1 - \frac{1}{z_2}C_1 = \\ &= \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}C_1 + \frac{\gamma}{z_1^2} + \frac{(1-\gamma)}{z_2^2} - \frac{1}{z_1z_2} = \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 - \frac{1}{z_1z_2} = C_2, \\ 6\frac{\gamma}{z_1^3} + 6\frac{(1-\gamma)}{z_2^3} &= 6\frac{\gamma}{z_1^3} + 6\frac{(1-\gamma)}{z_2^3} + \frac{1}{z_1}C_2 - \frac{1}{z_1}C_2 + \frac{1}{z_2}C_2 - \frac{1}{z_2}C_2 = \\ &= \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}C_2 + 4\frac{\gamma}{z_1^3} + 4\frac{(1-\gamma)}{z_2^3} - 2\frac{1}{z_1z_2}C_1 = \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}C_2 + \frac{2}{3}C_3 - 2\frac{1}{z_1z_2}C_1 = C_3, \end{aligned}$$

которые позволяют привести соответствующие уравнения к виду

$$\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}C_1 - \frac{1}{2}C_2 = \frac{1}{z_1z_2}, \quad \frac{z_1+z_2}{z_1z_2}C_2 - \frac{1}{3}C_3 = 2\frac{1}{z_1z_2}C_1.$$

Домножив левые и правые части последних уравнений, а также первого уравнения (2.3.14) на произведение z_1z_2 , находим

$$\gamma z_2 + (1-\gamma)z_1 - C_1 z_1 z_2 = 0, \quad C_1(z_1+z_2) - \frac{1}{2}C_2 z_1 z_2 = 1, \quad C_2(z_1+z_2) - \frac{1}{3}C_3 z_1 z_2 = 2C_1. \quad (2.3.15)$$

Замены $z_1+z_2 = x_1$ и $z_1z_2 = x_2$ позволяют получить из (2.3.15) систему двух линейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных x_1 и x_2 :

$$C_1 x_1 - \frac{1}{2}C_2 x_2 = 1, \quad C_2 x_1 - \frac{1}{3}C_3 x_2 = 2C_1,$$

решение которой запишется в виде $x_1 = \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}$, $x_2 = \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}$.

Оценки $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ согласно обратной теореме Виета есть корни уравнения

$$z^2 - x_1 z + x_2 = 0 \quad (2.3.16)$$

при известных значениях коэффициентов x_1 и x_2 .

Из условия $z_1 > z_2$ имеем

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \pm \sqrt{\left(\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}} \right\}. \quad (2.3.17)$$

Замечание 2.5. Оценки $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ как действительные положительные корни (2.3.16) существуют тогда и только тогда, когда выполняются все три условия:

$$1) \quad \left(\frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} \right)^2 - 4 \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0; \quad \text{отметим, что } \hat{z}_1 \neq \hat{z}_2 \quad \text{на}$$

основании замечания 2.3, и действительные положительные корни, получаемые при равном нулю дискриминанте, исключаются из рассмотрения;

$$2) \quad \frac{2(3C_1C_2 - C_3)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0 \quad \text{как необходимое и достаточное условие}$$

положительности $\hat{z}_1$ и, кроме того, необходимое, но недостаточное для $\hat{z}_2 > 0$;

$$3) \quad \frac{6(2C_1^2 - C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} > 0 \quad \text{как дополнительное (достаточное) условие для } \hat{z}_2 > 0.$$

Оценка $\hat{\gamma}$ определяется однозначно из первого уравнения системы (2.3.15)

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{z}_1(1 - C_1\hat{z}_2)}{\hat{z}_1 - \hat{z}_2}. \quad (2.3.18)$$

Итак, система (2.3.15) имеет единственное решение $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$.

$$\text{Рассмотрим } \gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}, \quad 1 - \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1}, \quad \gamma_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)\varphi_2, \quad \gamma_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)\varphi_1,$$

где $\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$.

В данном случае располагаем $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ – выборкой из распределения

$$p(\tau | z_1, z_2, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} z_1 e^{-z_1 \tau} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \text{зависящего от четырех}$$

неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$, $z_1 > z_2$, γ_1, γ_2 . Для первых четырех начальных моментов, как и ранее, вместо приближенных запишем точные равенства, в которых вместо истинных значений параметров подставим их оценки: $M\tau^l = C_l$, $l = \overline{1, 4}$. Тогда система, аналогичная системе (2.3.15), относительно неизвестных параметров $z_1, z_2, \gamma_1, \gamma_2$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1 - C_1(\gamma_2 + \gamma_1)z_1 z_2 &= 0, \quad C_1(z_1 + z_2) - \frac{1}{2}C_2 z_1 z_2 = 1, \\ C_2(z_1 + z_2) - \frac{1}{3}C_3 z_1 z_2 &= 2C_1, \quad C_3(z_1 + z_2) - \frac{1}{4}C_4 z_1 z_2 = 3C_2. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Теорема 2.3. Система четырех уравнений моментов (2.3.19) относительно неизвестных параметров $z_1, z_2, \gamma_1, \gamma_2$ плотности вероятности $p(\tau)$ несовместна.

Доказательство. Выполним в (2.3.19) замены $z_1 + z_2 = x_1, \quad z_1 z_2 = x_2, \quad \gamma_1 z_2 + \gamma_2 z_1 = x_3, \quad (\gamma_2 + \gamma_1)z_1 z_2 = x_4$, позволяющие привести ее к линейному виду

$$x_3 - C_1 x_4 = 0, \quad C_1 x_1 - \frac{1}{2}C_2 x_2 = 1, \quad C_2 x_1 - \frac{1}{3}C_3 x_2 = 2C_1, \quad C_3 x_1 - \frac{1}{4}C_4 x_2 = 3C_2. \quad (2.3.20)$$

Запишем матрицу A и расширенную матрицу $\tilde{A}$ системы четырех линейных неоднородных уравнений (2.3.20) относительно четырех неизвестных $x_l, l = \overline{1, 4}$, и найдем их ранги

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -C_1 \\ C_1 & -\frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 \\ C_2 & -\frac{1}{3}C_3 & 0 & 0 \\ C_3 & -\frac{1}{4}C_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -C_1 & 0 \\ C_1 & -\frac{1}{2}C_2 & 0 & 0 & 1 \\ C_2 & -\frac{1}{3}C_3 & 0 & 0 & 2C_1 \\ C_3 & -\frac{1}{4}C_4 & 0 & 0 & 3C_2 \end{bmatrix},$$

$Rang(A) = 3, \quad Rang(\tilde{A}) = 4, \quad Rang(A) \neq Rang(\tilde{A})$. Следовательно, согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли [100] система несовместна, то есть решения системы (2.3.20) не существует. *Теорема доказана.*

Последняя теорема 2.3 определяет, что знание лишь вида плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями коррелированного потока не позволяет оценить четыре неизвестных параметра $z_1, z_2, \gamma_1, \gamma_2$, а тем более все параметры потока событий, то есть для оценивания более трех параметров информации, содержащейся в $p(\tau)$, недостаточно. Плотность вида (2.3.10) позволяет оценить методом моментов только $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1), \quad z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2), \quad \gamma$.

2.4 Оценка параметров распределения в рекуррентном потоке

Расположение на временной оси двух смежных интервалов (t_k, t_{k+1}) и (t_{k+1}, t_{k+2}) длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ и $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $\tau_k \geq 0$, $\tau_{k+1} \geq 0$, соответственно, ввиду стационарности потока произвольно, что дает возможность, положив $k=1$, рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2) и (t_2, t_3) со значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$ и $\tau_2 = t_3 - t_2$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события, $\tau_2 = 0$ – моменту t_2 наступления следующего события, а совместная плотность вероятности значений τ_1 и τ_2 есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Теорема 2.4. Обобщенный синхронный поток второго порядка в общем случае является коррелированным, и совместная плотность $p(\tau_1, \tau_2)$ имеет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = \left[1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2} \right] \times \\ \times \gamma(1 - \gamma) \left((\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_1} - (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_1} \right) \times \\ \times \left((\lambda_1 + \alpha_1) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_2} - (\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_2} \right) + p(\tau_1) p(\tau_2), \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \quad (2.4.1)$$

где $\gamma = \pi_1(0)$; $\pi_1(0)$ и $p(\tau_k)$ определяются в (2.3.8) и (2.3.10) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Доказательство. Пусть случайная величина η_1 – длительность интервала (t_1, t_2) между событиями потока, η_2 – длительность смежного с ним интервала (t_2, t_3) , $p(\tau_1, \tau_2)$ – совместная плотность вероятности значений η_1 и η_2 .

По определению

$$P(\tau_1 \leq \eta_1 < \tau_1 + \Delta\tau_1, \tau_2 \leq \eta_2 < \tau_2 + \Delta\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \Delta\tau_1} \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \Delta\tau_2} p(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ = p(\tau_1, \tau_2) \Delta\tau_1 \Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_1 \Delta\tau_2).$$

Осуществимыми на смежных интервалах $(0, \tau_1 + \Delta\tau_1)$ и $(0, \tau_2 + \Delta\tau_2)$ при $i, j, k = 1, 2$ являются варианты: в момент наступления события $\tau_1 = 0$ процесс $\lambda(\tau)$ находится в состоянии S_i и на $(0, \tau_1 + \Delta\tau_1)$ происходит его переход из i -го состояния в j -ое, несопровождаемый на интервале $(0, \tau_1)$ наступлением следующего события исследуемого потока и связанный с наступлением события

на полуинтервале $[\tau_1; \tau_1 + \Delta\tau_1]$; на $(0, \tau_2 + \Delta\tau_2)$ происходит переход процесса $\lambda(\tau)$ из j -го состояния в k -ое без наступления событий на интервале $(0, \tau_2)$ и с наступлением следующего события потока на полуинтервале $[\tau_2; \tau_2 + \Delta\tau_2]$; соответствующие рассмотренным возможным вариантам вероятности равны

$$\pi_i(0)(\tilde{p}_{ij}(\tau_1)\Delta\tau_1 + o(\Delta\tau_1))(\tilde{p}_{jk}(\tau_2)\Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_2)), \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда имеет место следующее соотношение

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2)\Delta\tau_1\Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_1\Delta\tau_2) = & \pi_1(0)[(\tilde{p}_{11}(\tau_1)(\tilde{p}_{11}(\tau_2) + \tilde{p}_{12}(\tau_2))\Delta\tau_1\Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_1\Delta\tau_2)) + \\ & + (\tilde{p}_{12}(\tau_1)(\tilde{p}_{21}(\tau_2) + \tilde{p}_{22}(\tau_2))\Delta\tau_1\Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_1\Delta\tau_2))] + \\ & + \pi_2(0)[(\tilde{p}_{21}(\tau_1)(\tilde{p}_{11}(\tau_2) + \tilde{p}_{12}(\tau_2))\Delta\tau_1\Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_1\Delta\tau_2)) + \\ & + (\tilde{p}_{22}(\tau_1)(\tilde{p}_{21}(\tau_2) + \tilde{p}_{22}(\tau_2))\Delta\tau_1\Delta\tau_2 + o(\Delta\tau_1\Delta\tau_2))], \end{aligned}$$

поделив обе его части на $\Delta\tau_1\Delta\tau_2$ и устремив $\Delta\tau_1\Delta\tau_2$ к нулю, получим формулу совместной плотности вероятности длительностей смежных интервалов

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^2 \pi_i(0) \sum_{j=1}^2 \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_2), \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0. \quad (2.4.2)$$

Подставляя в (2.4.2) сначала $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$ и $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$, вычисленные по (2.3.3) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, а затем (2.3.8) для $\pi_i(0)$, $i = 1, 2$, и, используя обозначения

$$z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1), \quad z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2), \quad \gamma_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)\varphi_2, \quad \gamma_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)\varphi_1, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1},$$

$\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$, запишем

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2) = & \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) z_1 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + \right. \\ & \left. + (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) z_2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} \right] + \\ & + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) z_1 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + \right. \\ & \left. + (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) z_2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} \right]; \\ \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = & \lambda_1 (1 - P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1)) + \alpha_1 (1 - P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) = \\ = & (\lambda_1 + \alpha_1) - \frac{\gamma_2}{\lambda_2 + \alpha_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2) &= \lambda_2 (1 - P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2)) + \alpha_2 (1 - P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) = \\ &= (\lambda_2 + \alpha_2) - \frac{\gamma_1}{\lambda_1 + \alpha_1}.\end{aligned}$$

Тогда, с учетом (2.3.10) при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, находим

$$\begin{aligned}p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2) &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\left(z_1 - \frac{\gamma_2}{z_2} \right) z_1 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + \gamma_2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} \right] + \\ &+ \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\gamma_1 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + \left(z_2 - \frac{\gamma_1}{z_1} \right) z_2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} \right] - \left[z_1^2 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \right)^2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + \right. \\ &\left. + z_1 z_2 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} + z_1 z_2 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + z_2^2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right)^2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} \right];\end{aligned}$$

обозначив правую часть последнего равенства через A , проведем следующие достаточно трудоемкие преобразования выражения $p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2)$:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_2} z_1^2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{z_1}{z_2} e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + (\gamma_1 + \gamma_2) e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} + \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_1 + \gamma_2) e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1} z_2^2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{z_2}{z_1} e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} z_1^2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} - z_1 z_2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} - z_1 z_2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} z_2^2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} \right],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}-(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{z_1}{z_2} e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} + (\gamma_1 + \gamma_2) e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} &= -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{z_2} e^{-z_1 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \\ (\gamma_1 + \gamma_2) e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{z_2}{z_1} e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{z_1} e^{-z_2 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \\ z_1^2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} - z_1 z_2 e^{-z_1 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} &= z_1 e^{-z_1 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \\ z_2^2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_2 \tau_2} - z_1 z_2 e^{-z_2 \tau_1} e^{-z_1 \tau_2} &= -z_2 e^{-z_2 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}).\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}A &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \left[-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{z_2} e^{-z_1 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{z_1} e^{-z_2 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}) + \right. \\ &\quad \left. + z_1 e^{-z_1 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}) - z_2 e^{-z_2 \tau_1} (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}) \right] = \\ &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \left[1 - \frac{\gamma_1}{z_1 z_2} - \frac{\gamma_2}{z_1 z_2} \right] (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}).\end{aligned}$$

Итак,

$$p(\tau_1, \tau_2) - p(\tau_1)p(\tau_2) = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)^2} \left[1 - \frac{\gamma_1}{z_1 z_2} - \frac{\gamma_2}{z_1 z_2} \right] (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}).$$

Сделав обратные замены, приходим к (2.4.1). *Теорема доказана.*

Полагая в (2.4.1) параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получим совместную плотность вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ для синхронного дважды стохастического потока [31].

2.4.1 Условия рекуррентности потока событий

Рассмотрим случаи, когда обобщенный синхронный поток второго порядка становится рекуррентным. Из формулы (2.4.1) для совместной плотности $p(\tau_1, \tau_2)$ определим условия, при которых она факторизуется, то есть $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$.

$$1. \quad \text{Если } \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2} = 1,$$

то совместная плотность (2.4.1) факторизуется; при этом из (2.3.10) следует, что

$$\gamma = 1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \quad 1 - \gamma = 1 - \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2},$$

$$p(\tau_k) = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1) \tau_k} + (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2) \tau_k},$$

$\tau_k \geq 0$, $k = 1, 2$, то есть

$$p(\tau) = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1) \tau} + (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2) \tau}, \quad \tau \geq 0. \quad (2.4.3)$$

Остальные условия факторизации $p(\tau_1, \tau_2)$ получим, анализируя выражение

$$\gamma(1 - \gamma) = \frac{(\lambda_1 + \alpha_1) \varphi_2 (\lambda_2 + \alpha_2) \varphi_1}{[(\lambda_1 + \alpha_1) \varphi_2 + (\lambda_2 + \alpha_2) \varphi_1]^2}$$

при $\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$.

2. Если $\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0$, то есть реализуется один (или несколько) из совместных вариантов

$$2.1 \quad \lambda_2 = 0 \text{ и } P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0;$$

$$2.2 \quad P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0 \text{ и } \alpha_2 = 0;$$

$$2.3 \quad P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0 \text{ и } P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) = 0 \text{ (поток в силу его особенностей,}$$

попав во второе состояние, не выйдет из него с вероятностью единица),

то $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ при условии невыполнения одновременного равенства нулю λ_2 и α_2 (при такой постановке поток во втором состоянии не существует);

согласно (2.3.10) $\gamma = 0$, $1 - \gamma = 1$, $p(\tau_k) = (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau_k}$, $\tau_k \geq 0$, $k = 1, 2$, то есть

$$p(\tau) = (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \tau \geq 0. \quad (2.4.4)$$

3. Если $\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0$, то есть реализуются один из двух совместных вариантов (согласно постановке задачи $\lambda_1 > 0$)

$$3.1 \quad P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0 \text{ и } \alpha_1 = 0;$$

$$3.2 \quad P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0 \text{ и } P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0 \text{ (поток, в силу его особенностей,}$$

попав в первое состояние, не выйдет из него с вероятностью единица),

то совместная плотность факторизуется $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$; согласно (2.3.10)

$\gamma = 1$, $1 - \gamma = 0$, $p(\tau_k) = (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau_k}$, $\tau_k \geq 0$, $k = 1, 2$, то есть

$$p(\tau) = (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \tau \geq 0. \quad (2.4.5)$$

Покажем, что при выполнении одного из условий 1 – 3 или их комбинации факторизуется и n -мерная плотность $p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ для любого $n > 2$.

Теорема 2.5. Если справедливо $\frac{\varphi_1}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{\varphi_2}{\lambda_2 + \alpha_2} = 1$, $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_2 = 0$, то

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{k=1}^n p(\tau_k), \quad (2.4.6)$$

где $p(\tau_k)$ определяются в (2.3.10) для $\tau = \tau_k$, $k = \overline{1, n}$, $n > 2$;

$\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$, и

обобщенный синхронный поток второго порядка является рекуррентным.

Доказательство. Для потока событий, функционирующего в стационарном режиме, на основании сформулированных условий запишем $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$, $p(\tau_2, \tau_3) = p(\tau_2)p(\tau_3)$, ..., $p(\tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_k)p(\tau_{k+1})$, ...; $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Тогда имеет место

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) &= p(\tau_1, \tau_2)p(\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n | \tau_1, \tau_2) = \\ &= p(\tau_1)p(\tau_2)p(\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n | \tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n | \tau_1). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Согласно лемме 1.2 дальнейшее после момента t_k поведение потока не зависит от его предыстории, то есть $p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n | \tau_1) = p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$. В этом случае (2.4.7) преобразуется к следующему виду

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = p(\tau_1)p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n). \quad (2.4.8)$$

Аналогичным образом для $p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$ получим

$$\begin{aligned} p(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) &= p(\tau_2, \tau_3)p(\tau_4, \tau_5, \dots, \tau_n | \tau_2, \tau_3) = \\ &= p(\tau_2)p(\tau_3)p(\tau_4, \tau_5, \dots, \tau_n | \tau_2, \tau_3) = p(\tau_2)p(\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n | \tau_2), \end{aligned}$$

где в силу справедливости для рассматриваемого потока марковского свойства $p(\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n | \tau_2) = p(\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n)$. С учетом последнего (2.4.8) принимает вид

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = p(\tau_1)p(\tau_2)p(\tau_3, \tau_4, \dots, \tau_n).$$

Проводя процедуру n раз, приходим к (2.4.6). *Теорема доказана.*

Следствие 2.2. Рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка – дважды стохастический поток с ограниченным последствием.

Замечание 2.6. Плотности (2.4.4) и (2.4.5) совпадают с плотностью вероятности значений длительности интервала между соседними событиями пуассоновского потока с параметрами $(\lambda_2 + \alpha_2)$ и $(\lambda_1 + \alpha_1)$ соответственно; другими словами, при выполнении второго или третьего условий рекуррентности поток событий вырождается в простейший.

2.4.2 Вероятностные характеристики потока

По известной совместной плотности вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ вида (2.4.1) найдем числовую характеристику связи случайных величин τ_1 и τ_2 –

длительностей двух смежных интервалов в коррелированном потоке событий, а именно ковариацию τ_1 и τ_2 (второй смешанный центральный момент) [71]

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tau_1, \tau_2) = M\{(\tau_1 - M(\tau_1))(\tau_2 - M(\tau_2))\} = \gamma(1-\gamma) & \left[\frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \alpha_2} \right]^2 \times \\ \times \left[1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Коэффициент корреляции τ_1 и τ_2 , определяемый на основе ковариации и дисперсий как $r_{\tau_1 \tau_2} = \text{cov}(\tau_1, \tau_2)(D(\tau_1)D(\tau_2))^{-1/2}$, для коррелированного обобщенного синхронного потока второго порядка задается величиной

$$\begin{aligned} r_{\tau_1 \tau_2} = & \left[1 - \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)}{\lambda_2 + \alpha_2} \right] \times \\ \times \gamma(1-\gamma) & \left[\frac{1}{\lambda_1 + \alpha_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \alpha_2} \right]^2 \left[2 \left[\frac{\gamma}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} + \frac{1-\gamma}{(\lambda_2 + \alpha_2)^2} \right] - \left[\frac{\gamma}{\lambda_1 + \alpha_1} + \frac{1-\gamma}{\lambda_2 + \alpha_2} \right]^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Согласно первому условию рекуррентности, введенные в подразделе 2.3.3 числовые характеристики случайной величины τ – длительности интервала между соседними событиями рекуррентного обобщенного синхронного потока второго порядка, определяемой плотностью вида (2.4.3), будут иметь вид

$$\begin{aligned} M(\tau) &= \frac{\beta_1}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} + \frac{\beta_2}{(\lambda_2 + \alpha_2)^2}, \\ D(\tau) &= 2 \left[\frac{\beta_1}{(\lambda_1 + \alpha_1)^3} + \frac{\beta_2}{(\lambda_2 + \alpha_2)^3} \right] - \left[\frac{\beta_1}{(\lambda_1 + \alpha_1)^2} + \frac{\beta_2}{(\lambda_2 + \alpha_2)^2} \right]^2, \\ \beta_1 &= (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)), \beta_2 = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)); \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

ковариация τ_1, τ_2 и коэффициент корреляции тождественно равны нулю.

2.4.3 Построение оценок в рекуррентном потоке методом моментов

Оценить методом моментов двенадцать неизвестных параметров, определяющих рекуррентный обобщенный синхронный поток событий второго порядка (или восемь с учетом ограничений на задание вероятностей переходов), располагая только информацией о виде $p(\tau)$, не представляется возможным.

Вследствие этого будем оценивать неизвестные параметры плотности вероятности вида (2.4.3).

Рассмотрим $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p(\tau | z_1, z_2, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 e^{-z_1 \tau} + \beta_2 e^{-z_2 \tau}$, зависящего от четырех неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$, $z_1 > z_2$, $\beta_1 = (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))$, $\beta_2 = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))$.

Оценки параметров $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2$ определяются как решение системы $M\tau^l = C_l, l = \overline{1, 4}$.

Теоретический начальный момент l -го порядка определяется формулой

$$M\tau^l = \int_0^{\infty} \tau^l (\beta_1 e^{-z_1 \tau} + \beta_2 e^{-z_2 \tau}) d\tau = l! \frac{\beta_1}{z_1^{l+1}} + l! \frac{\beta_2}{z_2^{l+1}}, l = \overline{1, 4},$$

позволяющей записать систему уравнений относительно $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2$ вида

$$\frac{\beta_1}{z_1^2} + \frac{\beta_2}{z_2^2} = C_1, \quad 2 \frac{\beta_1}{z_1^3} + 2 \frac{\beta_2}{z_2^3} = C_2, \quad 6 \frac{\beta_1}{z_1^4} + 6 \frac{\beta_2}{z_2^4} = C_3, \quad 24 \frac{\beta_1}{z_1^5} + 24 \frac{\beta_2}{z_2^5} = C_4. \quad (2.4.12)$$

Для второго, третьего, четвертого уравнений (2.4.12) справедливы преобразования

$$\begin{aligned} 2 \frac{\beta_1}{z_1^3} + 2 \frac{\beta_2}{z_2^3} &= 2 \frac{\beta_1}{z_1^3} + 2 \frac{\beta_2}{z_2^3} + \frac{1}{z_1} C_1 - \frac{1}{z_1} C_1 + \frac{1}{z_2} C_1 - \frac{1}{z_2} C_1 = \\ &= \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_1 + \frac{\beta_1}{z_1^3} + \frac{\beta_2}{z_2^3} - \frac{\beta_1}{z_1^2 z_2} - \frac{\beta_2}{z_1 z_2^2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 - \left(\frac{\beta_1}{z_1^2 z_2} + \frac{\beta_2}{z_1 z_2^2} \right) = C_2, \\ 6 \frac{\beta_1}{z_1^4} + 6 \frac{\beta_2}{z_2^4} &= 6 \frac{\beta_1}{z_1^4} + 6 \frac{\beta_2}{z_2^4} + \frac{1}{z_1} C_2 - \frac{1}{z_1} C_2 + \frac{1}{z_2} C_2 - \frac{1}{z_2} C_2 = \\ &= \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_2 + 4 \frac{\beta_1}{z_1^4} + 4 \frac{\beta_2}{z_2^4} - 2 \frac{\beta_1}{z_1^3 z_2} - 2 \frac{\beta_2}{z_1 z_2^3} = C_3, \\ 24 \frac{\beta_1}{z_1^5} + 24 \frac{\beta_2}{z_2^5} &= 24 \frac{\beta_1}{z_1^5} + 24 \frac{\beta_2}{z_2^5} + \frac{1}{z_1} C_3 - \frac{1}{z_1} C_3 + \frac{1}{z_2} C_3 - \frac{1}{z_2} C_3 = \\ &= \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_3 + 18 \frac{\beta_1}{z_1^5} + 18 \frac{\beta_2}{z_2^5} - 6 \frac{\beta_1}{z_1^4 z_2} - 6 \frac{\beta_2}{z_1 z_2^4} = C_4, \end{aligned}$$

которые позволяют привести соответствующие уравнения системы (2.4.12) к виду

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_1 - \frac{1}{2} C_2 = \frac{\beta_1}{z_1^2 z_2} + \frac{\beta_2}{z_1 z_2^2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_2 - \frac{1}{3} C_3 = 2 \frac{C_1}{z_1 z_2}, \quad \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} C_3 - \frac{1}{4} C_4 = 3 \frac{C_2}{z_1 z_2}.$$

Домножив левые и правые части последних уравнений, а также первого уравнения системы (2.4.12) на произведение $z_1 z_2$, приведем (2.4.12) к виду

$$\begin{aligned} z_2 \frac{\beta_1}{z_1} + z_1 \frac{\beta_2}{z_2} &= z_1 z_2 C_1, \quad (z_1 + z_2) C_1 - \frac{1}{2} z_1 z_2 C_2 - \left(\frac{\beta_1}{z_1} + \frac{\beta_2}{z_2} \right) = 0, \\ (z_1 + z_2) C_2 - \frac{1}{3} z_1 z_2 C_3 &= 2 C_1, \quad (z_1 + z_2) C_3 - \frac{1}{4} z_1 z_2 C_4 = 3 C_2. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Замены $z_1 + z_2 = x_1$ и $z_1 z_2 = x_2$ позволяют получить систему двух линейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных из третьего и четвертого уравнений системы (2.4.13):

$$C_2 x_1 - \frac{1}{3} C_3 x_2 = 2 C_1, \quad C_3 x_1 - \frac{1}{4} C_4 x_2 = 3 C_2,$$

решение которой запишется в виде $x_1 = \frac{12 C_2 C_3 - 6 C_1 C_4}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4}$, $x_2 = \frac{36 C_2^2 - 24 C_1 C_3}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4}$.

Оценки $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ согласно обратной теореме Виета есть корни квадратного уравнения (2.3.16), где $x_1 = \frac{12 C_2 C_3 - 6 C_1 C_4}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4}$, $x_2 = \frac{36 C_2^2 - 24 C_1 C_3}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4}$.

Согласно введенному условию $z_1 > z_2$ имеем

$$\hat{z}_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{12 C_2 C_3 - 6 C_1 C_4}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4} \pm \sqrt{\left(\frac{12 C_2 C_3 - 6 C_1 C_4}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4} \right)^2 - 4 \frac{36 C_2^2 - 24 C_1 C_3}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4}} \right\}. \quad (2.4.14)$$

Замечание 2.7. Оценки $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ как действительные положительные корни (2.3.16) существуют тогда и только тогда, когда выполняются все три условия

- 1) $\left(\frac{12 C_2 C_3 - 6 C_1 C_4}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4} \right)^2 - 4 \frac{36 C_2^2 - 24 C_1 C_3}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4} > 0;$
- 2) $\frac{12 C_2 C_3 - 6 C_1 C_4}{4 C_3^2 - 3 C_2 C_4} > 0;$

$$3) \quad \frac{36C_2^2 - 24C_1C_3}{4C_3^2 - 3C_2C_4} > 0.$$

Оценки $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ определяются однозначно из первых двух уравнений (2.4.13)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2\hat{z}_1^3 C_1 - \hat{z}_1^3 \hat{z}_2 C_2}{2(\hat{z}_1 - \hat{z}_2)}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{z}_1 \hat{z}_2^3 C_2 - 2\hat{z}_2^3 C_1}{2(\hat{z}_1 - \hat{z}_2)}. \quad (2.4.15)$$

Таким образом, (2.4.13) имеет единственное решение (2.4.14), (2.4.15), которое определяет состоятельные оценки $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ [63].

Рассмотрим $\gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}$, $1 - \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1}$, $\gamma_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)\varphi_2$, $\gamma_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)\varphi_1$, где

$$\varphi_1 = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1), \quad \varphi_2 = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2).$$

Тогда имеем $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p(\tau | z_1, z_2, \beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2) = (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)})e^{-z_1 \tau} + \beta_2 e^{-z_2 \tau}$, зависящего от неизвестных параметров $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$, $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$, $z_1 > z_2$, $\beta_1^{(1)} = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, $\beta_1^{(2)} = \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, $\beta_1 = \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}$, $\beta_2 = (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))$. Запишем пять уравнений моментов

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}}{z_1^2} + \frac{\beta_2}{z_2^2} &= C_1, \quad (z_1 + z_2)C_1 - \frac{1}{2}z_1 z_2 C_2 - \left(\frac{\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}}{z_1} + \frac{\beta_2}{z_2} \right) = 0, \\ (z_1 + z_2)C_2 - \frac{1}{3}z_1 z_2 C_3 &= 2C_1, \quad (z_1 + z_2)C_3 - \frac{1}{4}z_1 z_2 C_4 = 3C_2, \\ (z_1 + z_2)C_4 - \frac{1}{5}z_1 z_2 C_5 &= 4C_3. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Теорема 2.6. Система уравнений (2.4.16) относительно неизвестных параметров $z_1, z_2, \beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2$ плотности $p(\tau)$ вида (2.4.3) несовместна.

Доказательство. Выполним в (2.4.16) замены $z_1 + z_2 = x_1$, $z_1 z_2 = x_2$,

$$\frac{\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}}{z_1^2} + \frac{\beta_2}{z_2^2} = x_3, \quad \frac{\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}}{z_1} + \frac{\beta_2}{z_2} = x_4, \text{ приводящие (2.4.16) к линейному виду}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= C_1, \quad C_1 x_1 - \frac{1}{2}C_2 x_2 - x_4 = 0, \\ C_2 x_1 - \frac{1}{3}C_3 x_2 &= 2C_1, \quad C_3 x_1 - \frac{1}{4}C_4 x_2 = 3C_2, \quad C_4 x_1 - \frac{1}{5}C_5 x_2 = 4C_3. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Ранги матрицы и расширенной матрицы системы пяти линейных неоднородных уравнений относительно четырех неизвестных x_l , $l = \overline{1, 4}$, равны 4 и 5. Следовательно, согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли [100] система несовместна, то есть решения (2.4.17) не существует. *Теорема доказана.*

Последняя теорема определяет невозможность оценивания методом моментов более четырех параметров распределения в рекуррентном потоке ввиду недостаточности содержащейся в $p(\tau)$ информации. Знание вида (2.4.3) одномерной плотности вероятности $p(\tau)$ позволяет получить состоятельные оценки только четырех неизвестных параметров $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2$ [63].

Оценивание параметров плотности вида (2.4.4), (2.4.5) в работе не проводится в силу замечания 2.6 и теоремы 2.7, согласно которым состоятельная оценка [63] в обоих случаях по методу моментов определяется как оценка параметра экспоненциального распределения – $z_2 = (\lambda_2 + \alpha_2)$ в (2.4.4) и $z_1 = (\lambda_1 + \alpha_1)$ в (2.4.5).

2.5 Результаты численных расчетов оценки параметров

Численные результаты оценивания параметров распределения получены с помощью программы, используемой в разделе 2.2. В основу работы программы положено имитационное моделирование потока событий с тем, чтобы получить статистики C_l , $l = \overline{1, 4}$, с последующим вычислением соответствующих модельным данным оценок $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}$ по формулам (2.3.17), (2.3.18) или $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ по формулам (2.4.14), (2.4.15).

В первом статистическом эксперименте отслеживается временной интервал установления стационарного режима функционирования коррелированного и рекуррентного потоков. Результаты работы модели (таблица 2.10) получены при одних и тех же значениях параметров, зафиксированных в таблице 2.9, для каждого значения времени моделирования T_m в $N=100$ независимых реализациях обобщенного синхронного потока второго порядка; для каждой

реализации определялись оценки $\hat{\theta}^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$, соответствующих параметров θ (согласно формулам (2.3.17), (2.3.18) для коррелированного потока, согласно (2.4.14), (2.4.15) – для рекуррентного потока), на основании которых вычислялись выборочное среднее значение $\hat{M}\{\hat{\theta}\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}^{(k)}$, оценка смещения $|\hat{M}\{\hat{\theta}\} - \theta|$ и выборочная квадратическая ошибка $\sqrt{\hat{V}\{\hat{\theta}\}}$ как корень квадратный из выборочной вариации $\hat{V}\{\hat{\theta}\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{\theta}^{(k)} - \theta)^2$, где $\theta \in \{z_1, z_2, \gamma\}$, $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$ или $\theta \in \{z_1, z_2, \beta_1, \beta_2\}$, $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}$.

Таблица 2.9 – Модельные данные

$\lambda_1 = 5,6$	коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка, $l = 1, 2$
$\lambda_2 = 2,4$	$P_1^{(l)}(\lambda_i \lambda_i) = 0,15$, $P_1^{(l)}(\lambda_j \lambda_i) = 0,85$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$
$\alpha_1 = 3,1$	рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка, $l = 1, 2$
$\alpha_2 = 0,7$	$P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,85$, $P_1^{(l)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,15$, $P_1^{(l)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,15$, $P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,85$

Таблица 2.10 – Результаты первого статистического эксперимента

θ	T_m	300	400	500	600	700	800	900	1000
коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка									
$z_1 = 8,7$	$\hat{M}\{\hat{z}_1\}$	9,4732	8,8685	8,9751	8,5591	8,7149	8,9234	8,6733	8,8603
	$ \hat{M}\{\hat{z}_1\} - z_1 $	0,7732	0,1685	0,2751	0,1409	0,0149	0,2234	0,0267	0,1603
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$	1,4775	1,0442	0,8134	0,7732	0,6568	0,7197	0,6233	0,5226
$z_2 = 3,1$	$\hat{M}\{\hat{z}_2\}$	2,4875	2,4071	2,4079	2,3681	2,3786	2,4300	2,3924	2,4417
	$ \hat{M}\{\hat{z}_2\} - z_2 $	0,6125	0,6929	0,6921	0,7319	0,7214	0,6700	0,7076	0,6583
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$	0,6667	0,7018	0,6907	0,6774	0,6247	0,6336	0,6133	0,5598
$\gamma = 0,5$	$\hat{M}\{\hat{\gamma}\}$	0,4705	0,4999	0,4916	0,5140	0,5069	0,4916	0,5041	0,4884
	$ \hat{M}\{\hat{\gamma}\} - \gamma $	0,0295	0,0001	0,0084	0,0140	0,0069	0,0084	0,0041	0,0116
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\gamma}\}}$	0,0638	0,0522	0,0394	0,0357	0,0312	0,0351	0,0357	0,0301
рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка									
$z_1 = 8,7$	$\hat{M}\{\hat{z}_1\}$	9,8515	9,2953	9,4632	8,3462	9,2001	9,2796	9,0358	8,7579
	$ \hat{M}\{\hat{z}_1\} - z_1 $	1,1515	0,5953	0,7632	0,3538	0,5001	0,5796	0,3358	0,0579
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$	1,8032	1,5967	1,5852	0,9274	0,8660	0,9118	0,8835	0,8242

Продолжение таблицы 2.10

$z_2 = 3,1$	$\hat{M}\{\hat{z}_2\}$	2,5015	2,3687	2,4505	2,4174	2,4805	2,4270	2,4425	2,3238
	$ \hat{M}\{\hat{z}_2\} - z_2 $	0,5985	0,7313	0,6495	0,6826	0,6195	0,6730	0,6575	0,7762
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$	0,7558	0,7868	0,7094	0,7126	0,6915	0,6862	0,6652	0,5963
$\beta_1 = 7,395$	$\hat{M}\{\hat{\beta}_1\}$	8,5468	8,0760	8,1565	7,0727	7,8463	8,0241	7,7247	7,5386
	$ \hat{M}\{\hat{\beta}_1\} - \beta_1 $	1,1518	0,6810	0,7615	0,3223	0,4513	0,6291	0,3297	0,1436
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\beta}_1\}}$	1,8118	1,5869	1,4402	0,9049	0,8750	0,8886	0,8510	0,8348
$\beta_2 = 0,465$	$\hat{M}\{\hat{\beta}_2\}$	0,4670	0,3903	0,4283	0,3509	0,4192	0,3982	0,3940	0,3604
	$ \hat{M}\{\hat{\beta}_2\} - \beta_2 $	0,0020	0,0747	0,0367	0,1141	0,0458	0,0668	0,0710	0,1046
	$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\beta}_2\}}$	0,1867	0,1757	0,1732	0,1747	0,1417	0,1376	0,1316	0,1354

Анализ представленных в таблице 2.10 результатов эксперимента приводит к утверждению о зависимости получаемых оценок от времени моделирования, а именно: с увеличением значения T_m выборочные средние стабилизируются, а качество самих оценок улучшается в смысле уменьшения значений выборочной квадратической ошибки. Последнее объясняется концепцией метода моментов.

По сопоставимым параметрам сравним качество оценок $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$ параметров z_1 , z_2 и скорость установления стационарного режима в обоих случаях моделирования потока событий (рисунки 2.6, 2.7).

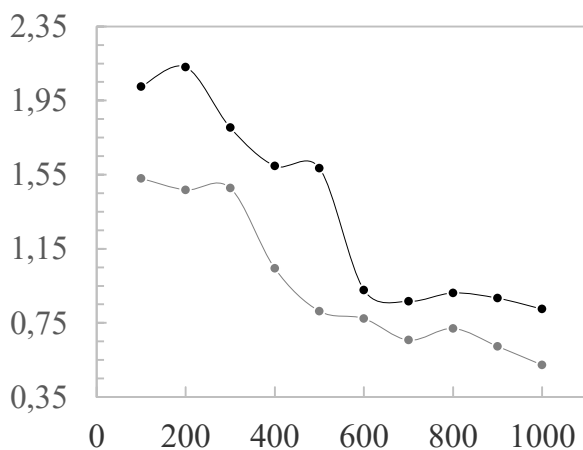


Рисунок 2.6 – График зависимости

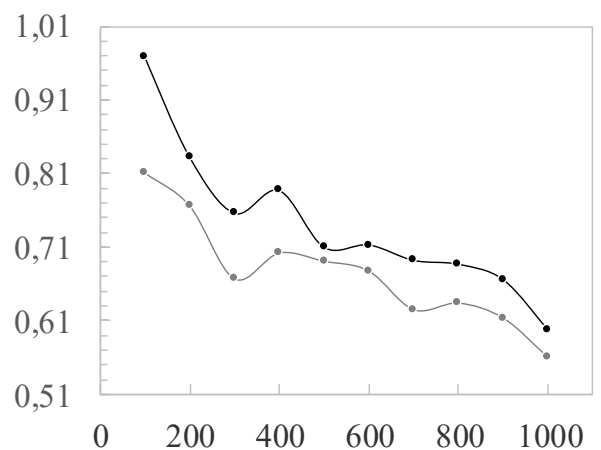
$$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$$
 от времени T_m


Рисунок 2.7 – График зависимости

$$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$$
 от времени T_m

Последние графические результаты (рисунки 2.6, 2.7) позволяют сделать вывод о лучшем в смысле малости значений выборочной квадратической ошибки оценивании параметров $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ коррелированного потока (светлым маркером на приведенных иллюстрациях), нежели $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ рекуррентного потока (темным маркером). Такая закономерность объясняется тем, что в рекуррентном потоке оцениваются четыре неизвестных параметра (2.4.3), в коррелированном – три параметра (2.3.10) (увеличение количества оцениваемых параметров влечет за собой ухудшение вероятностных характеристик). При этом выборочные квадратические ошибки $\sqrt{\hat{V}\{\hat{\theta}\}}$ для всех вариантов расчета являются достаточно стабильными при $T_m > 700$ ед. времени как для коррелированного ($\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$), так и для рекуррентного ($\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}$) потоков. Как следствие, для дальнейших экспериментов $T_m = 1000$ ед. времени.

Во втором статистическом эксперименте исследуются зависимости $\hat{M}\{\hat{\theta}\}$ и $\sqrt{\hat{V}\{\hat{\theta}\}}$, $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\gamma}\}$ или $\hat{\theta} \in \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}$, от изменений параметров $\lambda_i, \alpha_i, i = 1, 2$, при фиксированных $T_m = 1000, N = 100$ и исходных данных таблицы 2.9. Результаты приведены в следующих таблицах 2.11, 2.12.

Таблица 2.11 – Результаты эксперимента Таблица 2.12 – Результаты эксперимента

λ_1	5,6	5,8	6,0	6,2
α_1	3,1	3,3	3,5	3,7
коррелированный поток				
z_1	8,7	9,1	9,5	9,9
$\hat{M}\{\hat{z}_1\}$	9,0338	9,0830	9,5753	10,0315
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$	0,5439	0,5408	0,5009	0,4735
z_2	3,1	3,1	3,1	3,1
$\hat{M}\{\hat{z}_2\}$	2,4160	2,3879	2,3959	2,4118
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$	0,6852	0,7132	0,7069	0,6818
γ	0,5	0,5	0,5	0,5
$\hat{M}\{\hat{\gamma}\}$	0,4895	0,5021	0,4989	0,4916
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\gamma}\}}$	0,0224	0,0225	0,0204	0,0201

λ_2	2,4	2,5	2,6	2,7
α_2	0,7	0,8	0,9	1,0
коррелированный поток				
z_1	8,7	8,7	8,7	8,7
$\hat{M}\{\hat{z}_1\}$	8,7112	9,0730	8,6678	8,8717
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$	0,6440	0,5144	0,4602	0,4203
z_2	3,1	3,3	3,5	3,7
$\hat{M}\{\hat{z}_2\}$	2,4023	2,5431	2,6778	2,8877
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$	0,7028	0,6578	0,6249	0,6244
γ	0,5	0,5	0,5	0,5
$\hat{M}\{\hat{\gamma}\}$	0,5002	0,4828	0,5053	0,4997
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\gamma}\}}$	0,0251	0,0258	0,0249	0,0187

Продолжение таблицы 2.11

рекуррентный поток				
z_1	8,7	9,1	9,5	9,9
$\hat{M}\{\hat{z}_1\}$	8,8180	9,0938	10,2305	10,3914
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$	0,9322	0,8021	0,9655	0,8963
z_2	3,1	3,1	3,1	3,1
$\hat{M}\{\hat{z}_2\}$	2,3743	2,3440	2,4831	2,4400
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$	0,7385	0,7726	0,6259	0,6668
β_1	7,395	7,735	8,075	8,415
$\hat{M}\{\hat{\beta}_1\}$	7,5638	7,7930	8,8275	8,9843
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\beta}_1\}}$	0,9122	0,7659	0,9697	0,8900
β_2	0,465	0,465	0,465	0,465
$\hat{M}\{\hat{\beta}_2\}$	0,3570	0,3435	0,4183	0,3880
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\beta}_2\}}$	0,1409	0,1495	0,0829	0,0943

Продолжение таблицы 2.12

рекуррентный поток				
z_1	8,7	8,7	8,7	8,7
$\hat{M}\{\hat{z}_1\}$	8,6262	8,6853	9,1458	9,0902
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_1\}}$	0,7374	0,6997	0,6766	0,6351
z_2	3,1	3,3	3,5	3,7
$\hat{M}\{\hat{z}_2\}$	2,3131	2,4277	2,6953	2,7640
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{z}_2\}}$	0,9007	0,8941	0,8122	0,8431
β_1	7,395	7,395	7,395	7,395
$\hat{M}\{\hat{\beta}_1\}$	7,4181	7,4450	7,7588	7,6180
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\beta}_1\}}$	0,6562	0,6084	0,5396	0,4903
β_2	0,465	0,495	0,525	0,555
$\hat{M}\{\hat{\beta}_2\}$	0,3270	0,3546	0,4562	0,4311
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{\beta}_2\}}$	0,1624	0,1696	0,1067	0,1107

Результаты таблиц 2.11, 2.12 указывают на то, что увеличение значений каждого из параметров λ_i , α_i , $i=1,2$, при фиксированных остальных влечет улучшение качества оценок $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{\gamma}$ для коррелированного и $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ – для рекуррентного потоков в смысле уменьшения значений выборочной квадратической ошибки, что является вполне естественным.

Третий эксперимент проведен на имитационной модели с целью получения статистических оценок вероятностных характеристик (2.3.12), (2.4.9), (2.4.10) для коррелированного и (2.4.11) – для рекуррентного потоков: выборочное среднее

$$\hat{M}\{\tau\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k, \quad \text{выборочная дисперсия} \quad \hat{D}\{\tau\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\tau_k - \hat{M}\{\tau\})^2, \quad \text{выборочная}$$

ковариация и выборочный коэффициент корреляции согласно формулам

$$\text{cov}\{\tau_1, \tau_2\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_{1k} \tau_{2k} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_{1k} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_{2k} \right) \quad \text{и} \quad \hat{r}_{\tau_1 \tau_2} = \frac{\text{cov}\{\tau_1, \tau_2\}}{\sqrt{\hat{D}\{\tau_1\} \hat{D}\{\tau_2\}}}.$$

Для характеристик $M\{\tau\}$, $D\{\tau\}$ рекуррентного потока (2.4.11), кроме того, применялась описанная в [63] процедура построения двусторонних доверительных интервалов $I_\beta(\hat{\theta})$, $\hat{\theta} \in \{\hat{M}\{\tau\}, \hat{D}\{\tau\}\}$, при доверительной вероятности $\beta = 0,9$.

Правомерность последней в данном случае устанавливается центральной предельной теоремой [71] при достаточно больших n ($n \rightarrow \infty$), т. к. $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ есть выборка взаимно независимых случайных величин из распределения с конечными математическим ожиданием и дисперсией (подчеркнем, для коррелированного потока условие взаимной независимости $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ не удовлетворяется, вследствие чего построение доверительных интервалов является неправомерным). Для фиксированных реализаций, заданных наборами параметров в таблице 2.9, получены результаты, приведенные в таблице 2.13.

Таблица 2.13 – Результаты третьего статистического эксперимента

$M\{\tau\}$	$\hat{M}\{\tau\}$	$I_\beta(\hat{M}\{\tau\})$	$D\{\tau\}$	$\hat{D}\{\tau\}$	$I_\beta(\hat{D}\{\tau\})$	$\text{cov}\{\tau_1, \tau_2\}$	$\hat{\text{cov}}\{\tau_1, \tau_2\}$	$r_{\tau_1\tau_2}$	$\hat{r}_{\tau_1\tau_2}$
коррелированный обобщенный синхронный поток событий второго порядка									
0,2188	0,2194	—	0,0694	0,0701	—	-0,0075	-0,0076	-0,1087	-0,1088
рекуррентный обобщенный синхронный поток событий второго порядка									
0,1461	0,1457	(0,1442; 0,1471)	0,0323	0,0323	(0,0310; 0,0336)	0	$3 \cdot 10^{-6}$	0	$9 \cdot 10^{-5}$

Значения таблицы 2.13 позволяют говорить о применимости статистик для решения задачи оценивания параметров распределений методом моментов и обоснованности использования аппарата имитационного моделирования для получения численных результатов. Здесь также отмечается корректность и непротиворечивость построенной модели, имитирующей функционирование и коррелированного, и рекуррентного потоков в условиях полной наблюдаемости.

2.6 Аппроксимация реального трафика потоком событий

Наиболее интересными с практической точки зрения являются результаты, полученные с использованием имитационной модели потока и возможностей языка программирования R в среде RStudio для реальных данных трафика, собранных Леландом и Уилсоном [139, 157, 158] по нескольким локальным сетям Ethernet в Bellcore Morristown Research and Engineering Center и сформированных в виде записей, каждая из которых содержит по миллиону поступлений пакетов.

Рассматривались записи **BC-pAug89**, начатая в 11:25 9 августа 1989 года и длящаяся около 3142,82 секунды (до тех пор, пока не был зарегистрирован миллион пакетов), и **BC-pOct89**, начатая в 11:00 5 октября 1989 года и длящаяся около 1759,62 секунды. Размеры пакетов не учитывались; определяющими являлись моменты их поступлений, образующие реальный коррелированный информационный поток.

Изучалась задача оценки параметров распределения длительности интервала между моментами поступления пакетов (событий) информационного потока. Предполагается, что поток есть композиция (суперпозиция) нескольких дважды стохастических потоков, другими словами, на некоторых участках поток может быть аппроксимирован одним дважды стохастическим потоком, на другом – другим или тем же с отличающимися входными значениями параметров.

Для полученных из **BC-pAug89** и **BC-pOct89** последовательностей длительностей интервалов, следуя методу скользящего окна, через шаг фиксированной длины 1000 было выделено по 981 подпоследовательности объема 10000, для каждой из которых вычислялись оценки $\hat{z}_1^{real(k)}$, $\hat{z}_2^{real(k)}$, $\hat{\gamma}^{real(k)}$ с помощью статистик $C_l^{(k)}$, $k = \overline{1, 981}$ (k определяет номер подпоследовательности), $l = \overline{1, 3}$, и с использованием формул (2.3.17), (2.3.18). Далее среди подпоследовательностей выбиралось по одной, для которой качество аппроксимации коррелированным обобщенным синхронным потоком второго порядка было наилучшим в смысле минимаксного критерия: $\delta_{rm}^0 = \min_k \delta_{rm_k} \{\hat{\theta}\}$, где $\delta_{rm_k} \{\hat{\theta}\}$ имеет смысл относительной погрешности и определяется как $\delta_{rm_k} \{\hat{\theta}\} = \max_{\theta} [\hat{\theta}^{real(k)} - \theta^{model} \mid \hat{\theta}^{real(k)}]$, $k = \overline{1, 981}$, $\hat{\theta}^{real(k)} \in \{\hat{z}_1^{real(k)}, \hat{z}_2^{real(k)}, \hat{\gamma}^{real(k)}\}$, $\theta^{model} \in \{z_1^{model}, z_2^{model}, \gamma^{model}\}$ – значения параметров, принятые в качестве «истинных» и полученные по формулам (2.3.17), (2.3.18) с использованием данных реального трафика объема миллион поступлений пакетов.

Полученные результаты, имеющие место для подпоследовательности из записи **BC-pAug89**, отражены в таблице 2.14, в которой, кроме того, для выявления

целесообразности и правомерности применения аппарата имитационного моделирования дополнительно приводятся значения $\hat{z}_1^{simulation}$, $\hat{z}_2^{simulation}$, $\hat{\gamma}^{simulation}$, определенные посредством процедуры оценивания соответствующих параметров на основе одной из многочисленных реализаций модели обобщенного синхронного потока второго порядка, а именно той (при соответствующих входных параметрах λ_i , α_i , $P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$), для которой выбранный показатель качества $\delta_{rms}^1 = \max\{\delta_{ms}\{\hat{\theta}\}, \delta_{rs_k}\{\hat{\theta}\}\}$, $\delta_{ms}\{\hat{\theta}\} = |\theta^{model} - \hat{\theta}^{simulation}| / \theta^{model}$, $\delta_{rs_k}\{\hat{\theta}\} = |\hat{\theta}^{real(k)} - \hat{\theta}^{simulation}| / \hat{\theta}^{real(k)}$, k – номер выбранной подпоследовательности (с минимальным значением δ_{rm}^0), $\hat{\theta}^{simulation} \in \{\hat{z}_1^{simulation}, \hat{z}_2^{simulation}, \hat{\gamma}^{simulation}\}$, достигает заданной точности $\delta_{rms}^1 < 0,008$. Таким образом, в данном рассмотрении имеет место критерий качества аппроксимации: $\delta = \max\{\delta_{rm}^0, \delta_{rms}^1\} < 0,008$.

Таблица 2.14 – Аппроксимация реального трафика

$\hat{z}_1^{real}$	z_1^{model}	$\hat{z}_1^{simulation}$	$\hat{z}_2^{real}$	z_2^{model}	$\hat{z}_2^{simulation}$	$\hat{\gamma}^{real}$	γ^{model}	$\hat{\gamma}^{simulation}$
390,7382	390,6379	390,1250	44,6496	44,5111	44,3187	0,9757	0,9722	0,9697
$\delta_{rm}\{\hat{z}_1\}$	$\delta_{ms}\{\hat{z}_1\}$	$\delta_{rs}\{\hat{z}_1\}$	$\delta_{rm}\{\hat{z}_2\}$	$\delta_{ms}\{\hat{z}_2\}$	$\delta_{rs}\{\hat{z}_2\}$	$\delta_{rm}\{\hat{\gamma}\}$	$\delta_{ms}\{\hat{\gamma}\}$	$\delta_{rs}\{\hat{\gamma}\}$
0,000257	0,001313	0,001569	0,003102	0,004323	0,007411	0,002972	0,002571	0,006149

На другом участке рассмотрения реального трафика (отличного от выбранного k -го) также имеет место удовлетворительное качество аппроксимации в смысле малости выбранного показателя качества δ_{rm}^0 коррелированным потоком, определяемым другим набором параметров; например, для следующей (отличной от k -ой) исследованной из **BC-pAug89** подпоследовательности показатель качества равен $\delta_{rm}^0 = 0,003981$. Для соответствующих двум непересекающимся участкам подпоследовательностям из **BC-pOct89** имеют место результаты: $\delta_{rm}^0 = 0,002718$ и $\delta_{rm}^0 = 0,002031$.

Полученные при этом графики для эмпирических плотностей вероятности значений длительности интервала между моментами поступления пакетов,

отвечающих выбранным выборкам, и соответствующих аналитически заданных плотностей вида (2.3.10) приведены на рисунках 2.8, 2.9 – для **BC-pAug89**, рисунках 2.10, 2.11 – для **BC-pOct89**; построение осуществлялось с помощью встроенных функций R (по оси ординат отложены значения плотностей вероятности, по оси абсцисс – значения переменной τ).

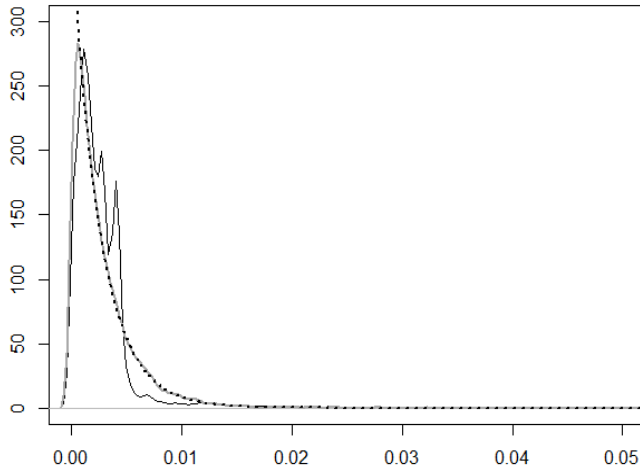


Рисунок 2.8 – BC-pAug89: графики эмпирических (по реальным данным – темным маркером, по модельным – светлым маркером) и аналитической (пунктиром) плотностей вероятностей

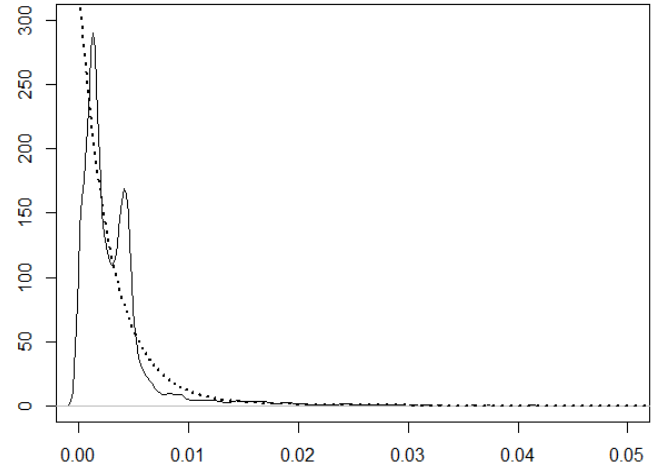


Рисунок 2.9 – BC-pAug89: графики эмпирической (по реальным данным – темным маркером) и аналитической (пунктиром) плотностей вероятностей

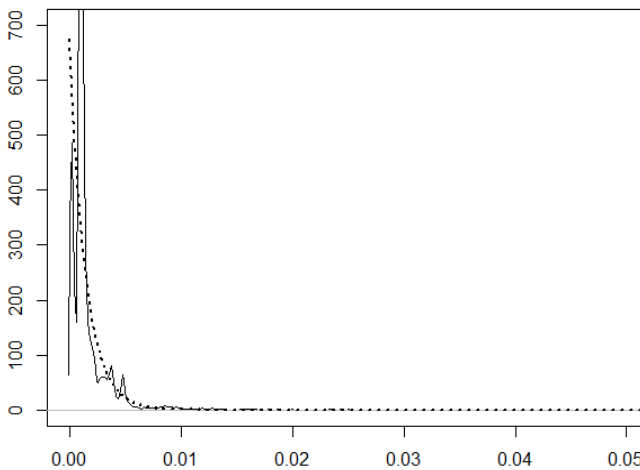


Рисунок 2.10 – BC-pOct89: графики эмпирической (по реальным данным – темным маркером) и аналитической (пунктиром) плотностей вероятностей

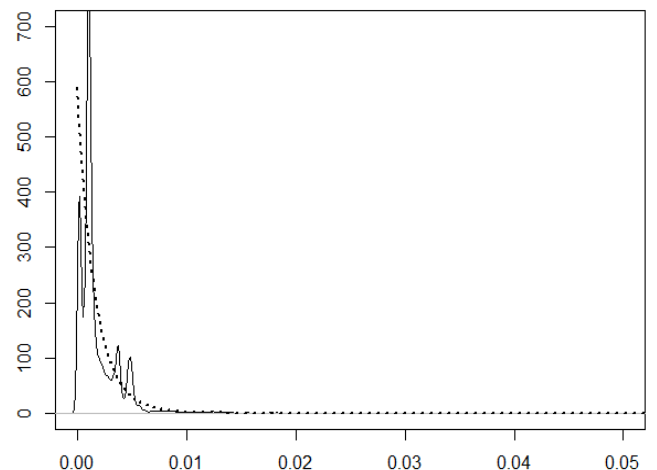


Рисунок 2.11 – BC-pOct89: графики эмпирической (по реальным данным – темным маркером) и аналитической (пунктиром) плотностей вероятностей

Таблица 2.15 содержит значения математического ожидания и дисперсии, вычисленных на основании известной плотности вероятности (2.3.10), а также выборочного среднего и выборочной дисперсии как статистических оценок этих вероятностных характеристик случайной величины τ – длительности интервала между моментами прибытия пакетов.

Таблица 2.15 – Результаты работы с реальным трафиком

	$M\{\tau\}$	$\hat{M}\{\tau\}$	$\frac{ M\{\tau\} - \hat{M}\{\tau\} }{M\{\tau\}}$	$D\{\tau\} \cdot 10^5$	$\hat{D}\{\tau\} \cdot 10^5$	$\frac{ D\{\tau\} - \hat{D}\{\tau\} }{D\{\tau\}}$
BC-pAug89	0,003113	0,003041	0,023129	3,111125	3,050189	0,019586
	0,003521	0,003548	0,007668	2,747071	2,865587	0,043142
BC-pOct89	0,001806	0,001836	0,016611	0,113963	0,121034	0,062046
	0,001966	0,001959	0,003561	0,818885	0,836732	0,021794

По данным отмечается соответствие исследуемого коррелированного потока потоку поступлений, имеющему место на некотором интервале времени – наблюдается адекватность математической модели обобщенного синхронного потока второго порядка реальному информационному потоку.

С целью получения рекуррентного потока, отвечающего [157], использовалась методика перетасовывания, подробно описанная в [149] и успешно примененная в [137]. Рандомизация набора длительностей интервалов между временными моментами приводит к разрушению корреляции между ними.

По сформированным по каждой из миллионных записей **BC-pAug89** и **BC-pOct89** таким образом последовательностям далее, как и ранее, согласно методу скользящего окна, было выделено по 981 подпоследовательности объема 10000. На рисунках 2.12 – 2.15 и 2.16 – 2.19 светлым маркером отмечены полученные по ним оценки параметров $\hat{z}_1^{sh(k)}$, $\hat{z}_2^{sh(k)}$, $\hat{\beta}_1^{sh(k)}$, $\hat{\beta}_2^{sh(k)}$, вычисленные на основе соответствующих статистик $C_l^{(k)}$, $l = \overline{1, 4}$, по формулам (2.4.14), (2.4.15); им в сравнение темным маркером ставятся оценки $\hat{z}_1^{(k)}$, $\hat{z}_2^{(k)}$, $\hat{\beta}_1^{(k)}$, $\hat{\beta}_2^{(k)}$, полученные по выборкам объема 10000, сформированным методом скользящего окна по первоначальным исходным реальным данным (до

применения процедуры перетасовывания), $k = \overline{1, N}$, $N = 981$ (по оси ординат отложены значения оценок, по оси абсцисс – номер подпоследовательности).

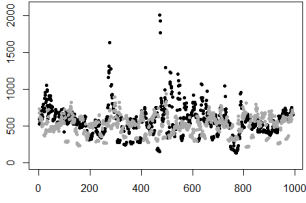


Рисунок 2.12 –

VC-pAug89: оценки

$$\hat{z}_1^{sh(k)} \text{ и } \hat{z}_1^{(k)}$$

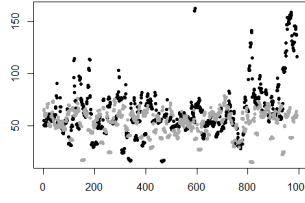


Рисунок 2.13 –

VC-pAug89: оценки

$$\hat{z}_2^{sh(k)} \text{ и } \hat{z}_2^{(k)}$$

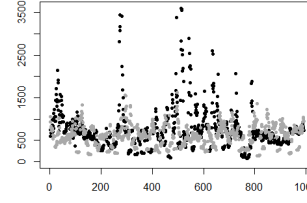


Рисунок 2.14 –

VC-pAug89: оценки

$$\hat{\beta}_1^{sh(k)} \text{ и } \hat{\beta}_1^{(k)}$$

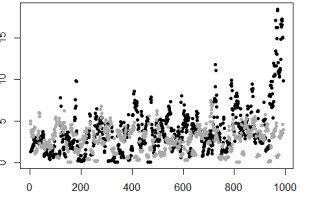


Рисунок 2.15 –

VC-pAug89: оценки

$$\hat{\beta}_2^{sh(k)} \text{ и } \hat{\beta}_2^{(k)}$$

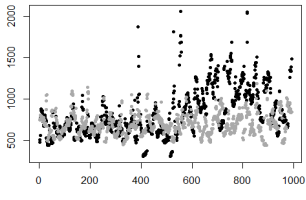


Рисунок 2.16 –

VC-pOct89: оценки

$$\hat{z}_1^{sh(k)} \text{ и } \hat{z}_1^{(k)}$$

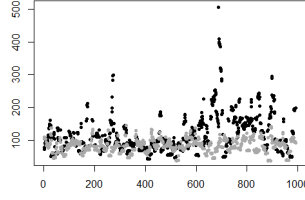


Рисунок 2.17 –

VC-pOct89: оценки

$$\hat{z}_2^{sh(k)} \text{ и } \hat{z}_2^{(k)}$$

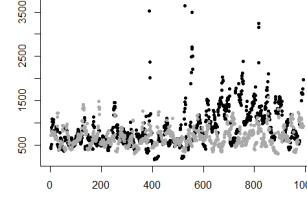


Рисунок 2.18 –

VC-pOct89: оценки

$$\hat{\beta}_1^{sh(k)} \text{ и } \hat{\beta}_1^{(k)}$$

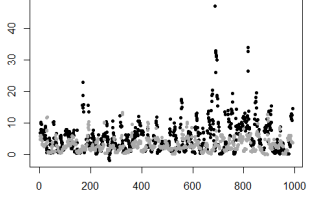


Рисунок 2.19 –

VC-pOct89: оценки

$$\hat{\beta}_2^{sh(k)} \text{ и } \hat{\beta}_2^{(k)}$$

Отметим сильно флуктуирующий характер каждой из полученных оценок $\hat{z}_1^{(k)}$, $\hat{z}_2^{(k)}$, $\hat{\beta}_1^{(k)}$, $\hat{\beta}_2^{(k)}$ (отдельно подчеркнем выбросы значительной величины для $\hat{z}_1^{(k)}$, $\hat{\beta}_1^{(k)}$, опущенных при построении рисунков 2.12, 2.14), в то время как для $\hat{z}_1^{sh(k)}$, $\hat{z}_2^{sh(k)}$, $\hat{\beta}_1^{sh(k)}$, $\hat{\beta}_2^{sh(k)}$ такая тенденция несвойственна – наличествуют относительно небольшие отклонения от выборочных средних значений, вычисленных по каждой совокупности, $k = \overline{1, N}$, $N = 981$.

Для каждой из **VC-pAug89** и **VC-pOct89** среди всех выделенных по ним подпоследовательностей с разрушенными корреляциями выбиралось по одной, для которой качество аппроксимации рекуррентным потоком было наилучшим в смысле критерия $\delta_{rm}^0 = \min_k \max_{\theta} [\hat{\theta}^{real(k)} - \theta^{model} | / \hat{\theta}^{real(k)}]$, $k = \overline{1, N}$, $N = 981$,

$$\hat{\theta}^{real(k)} \in \{\hat{z}_1^{real(k)}, \hat{z}_2^{real(k)}, \hat{\beta}_1^{real(k)}, \hat{\beta}_2^{real(k)}\}, \theta^{model} \in \{z_1^{model}, z_2^{model}, \beta_1^{model}, \beta_2^{model}\}.$$

Аналогично предыдущему рассмотренному случаю в таблице 2.16 приведены результаты аппроксимации при критерии качества $\delta = \max\{\delta_{rm}^0, \delta_{rms}^1\}$.

Таблица 2.16 – Аппроксимация реального трафика

$\hat{z}_1^{real}$	z_1^{model}	$\hat{z}_1^{simulation}$	z_2^{real}	$\hat{z}_2^{model}$	$\hat{z}_2^{simulation}$
388,3658	389,3541	393,3584	49,2536	48,7826	48,0699
$\delta_{rm}\{\hat{z}_1\}$	$\delta_{ms}\{\hat{z}_1\}$	$\delta_{rs}\{\hat{z}_1\}$	$\delta_{rm}\{\hat{z}_2\}$	$\delta_{ms}\{\hat{z}_2\}$	$\delta_{rs}\{\hat{z}_2\}$
0,002545	0,010284	0,012855	0,009563	0,014610	0,024033
$\hat{\beta}_1^{real}$	β_1^{model}	$\hat{\beta}_1^{simulation}$	$\hat{\beta}_2^{real}$	β_2^{model}	$\hat{\beta}_2^{simulation}$
378,5851	378,6359	376,1599	1,3239	1,3429	1,3512
$\delta_{rm}\{\hat{\beta}_1\}$	$\delta_{ms}\{\hat{\beta}_1\}$	$\delta_{rs}\{\hat{\beta}_1\}$	$\delta_{rm}\{\hat{\beta}_2\}$	$\delta_{ms}\{\hat{\beta}_2\}$	$\delta_{rs}\{\hat{\beta}_2\}$
0,000134	0,006539	0,006406	0,014352	0,006181	0,020621

Анализ результатов таблиц 2.14, 2.16 выявляет ухудшение аппроксимации в смысле увеличения δ . Такая закономерность обусловлена в первую очередь тем, что процедура перетасовывания способствует существенному сокращению корреляционной зависимости между длительностями интервалов, однако не позволяет полностью ее разрушить для реального потока.

Показатель качества δ_{rm}^0 в текущем определении достиг точности $\delta_{rm}^0 = 0,014612$ для **BC-pAug89** и $\delta_{rm}^0 = 0,004976$ для **BC-pOct89**. Полученные при этом с помощью возможностей пакета RStudio графики для соответствующих эмпирических плотностей вероятности и аналитически заданных плотностей вида (2.4.3) продемонстрированы на рисунках 2.20, 2.21 (по оси ординат отложены значения плотностей вероятности, по оси абсцисс – значения переменной τ).

В таблице 2.17 приводятся числовые характеристики и их оценки случайной величины τ – длительности интервала между событиями рекуррентного потока.

Таблица 2.17 – Результаты работы с реальным трафиком

	$M\{\tau\}$	$\hat{M}\{\tau\}$	$\frac{ M\{\tau\} - \hat{M}\{\tau\} }{M\{\tau\}}$	$D\{\tau\} \cdot 10^5$	$\hat{D}\{\tau\} \cdot 10^5$	$\frac{ D\{\tau\} - \hat{D}\{\tau\} }{D\{\tau\}}$
BC-pAug89	0,003062	0,003056	0,001960	2,659021	2,575102	0,031560
BC-pOct89	0,001841	0,001821	0,010864	1,255121	1,254798	0,000257

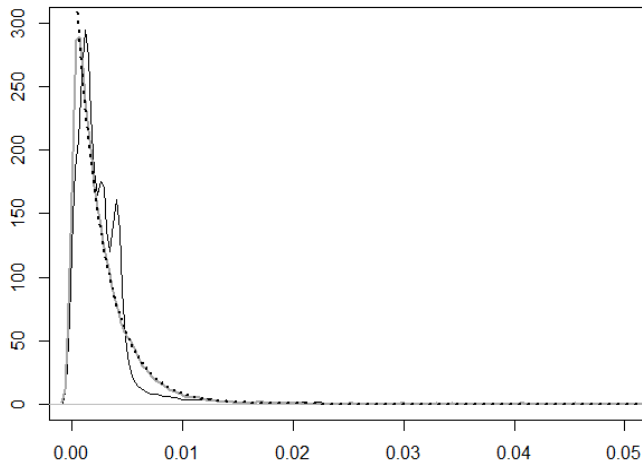


Рисунок 2.20 – ВС-рAug89: графики эмпирических (по реальным данным – темным маркером, по модельным – светлым маркером) и аналитической (пунктиром) плотностей вероятностей

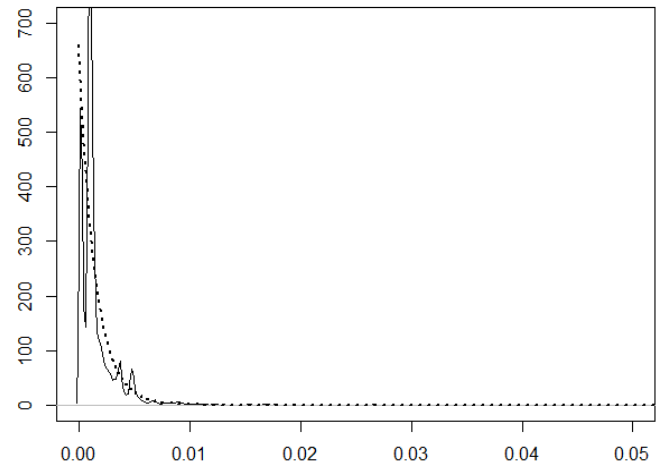


Рисунок 2.21 – ВС-рOct89: графики эмпирической (по реальным данным – темным маркером) и аналитической (пунктиром) плотностей вероятностей

Таким образом, в совокупности полученные результаты свидетельствуют о том, что информационные потоки в реальных системах, действительно, на различных участках могут описываться (аппроксимироваться) различными дважды стохастическими потоками событий в соответствии с выбранными критериями качества, при этом имитационная модель потока, используемая в текущем исследовании не только не противоречит входным данным, как было выявлено при проведении статистических экспериментов, но и соответствует реальным потокам поступлений (в данном случае зафиксированным Леландом и Уилсоном [139, 157, 158]), что обеспечивает сообразность ее использования для получения наблюдаемых моментов наступления событий и решения на их основе выделенных ранее для дважды стохастических потоков задач.

2.7 Выводы по главе 2

Во второй главе для обобщенного синхронного потока второго порядка:

– получено рекуррентное соотношение (2.1.2), связывающее апостериорные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ в моменты t и $t + \Delta t$;

- сформулирован алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка на основе критерия максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояний потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений; предложенный алгоритм обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибочного решения;
- сформулированы и доказаны леммы о поведении апостериорных вероятностей на интервалах между моментами наступления событий (2.1.7) и в моменты их наступления – формула пересчета (2.1.12);
- найдены априорные финальные вероятности в виде (2.1.20) и доказана теорема о поведении апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на оси времени;
- разработаны алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии сопровождающего процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком событий в произвольный момент времени t ;
- проведены статистические эксперименты для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$; результаты приведены в таблицах 2.2 – 2.5, 2.7, 2.8, на рисунках 2.3 – 2.5, после иллюстративного материала дается анализ результатов и их обоснование;
- выведены одномерная и совместная плотности вероятности в виде (2.3.10) и (2.4.1); сформулированы условия рекуррентности потока и доказана теорема 2.5 о его рекуррентности;
- построены методом моментов оценки параметров плотности (2.3.10) в виде (2.3.17), (2.3.18) – для коррелированного потока, состоятельные оценки параметров плотности (2.4.3) в виде (2.4.14), (2.4.15) – для рекуррентного потока;
- определены вероятностные характеристики и для коррелированного потока, и для рекуррентного потока;
- установлено приемлемое качество оценивания путем экспериментов с использованием построенной имитационной модели потока; результаты приведены в таблицах 2.10 – 2.13, на рисунках 2.6, 2.7;

– разработан алгоритм аппроксимации реального трафика обобщенным синхронным потоком событий второго порядка и продемонстрирована возможность приближения реальных информационных потоков исследуемой моделью дважды стохастического потока; результаты приведены в таблицах 2.14 – 2.17, на рисунках 2.8 – 2.11, 2.20 – 2.21.

В качестве основного результата главы следует выделить, что полученные аналитические формулы позволили не только сформулировать алгоритмы оценки состояний и параметров распределения в обобщенном синхронном потоке второго порядка, основанные на критерии максимума апостериорной вероятности и методе моментов соответственно, но и получить численные результаты работы модели, а также предложить критерий аппроксимации реальных данных.

3 Оптимальное оценивание состояний и оценивание длительности мертвого времени в потоке событий в условиях его частичной наблюдаемости

В третьей главе осуществляется оптимальное оценивание состояний и оценивание длительности мертвого времени, выступающего неизвестным параметром распределения, в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка в условиях его частичной наблюдаемости (в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности).

Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ для обобщенного синхронного потока второго порядка является принципиально ненаблюдаемым (скрытым) марковским процессом. Предлагается основанный на критерии максимума апостериорной вероятности алгоритм оптимального оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени по выборке моментов наступления событий в наблюдаемом потоке. Находятся явные выражения для апостериорных вероятностей состояний на тех временных интервалах, где поток ненаблюдаем, а также на временных интервалах, где поток событий вновь доступен наблюдению. На основании полученных формул сформулирован алгоритм расчета апостериорных вероятностей и алгоритм принятия решения о состоянии потока.

Получен явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке, а также явный вид совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов. Выписаны условия рекуррентности исследуемого потока.

Методом моментов решается задача оценивания длительности мертвого времени и для коррелированного, и для рекуррентного потоков событий.

Проводится численное исследование качества оценивания и состояний потока, и периода ненаблюдаемости на модели потока, имитирующей его функционирование при наличии непродлевающего мертвого времени, с привлечением аналитических формул и численных методов.

Результаты данной главы опубликованы в [78, 79, 81, 83, 85].

3.1 Оптимальная оценка состояний при наличии мертвого времени

Рассматривается обобщенный синхронный поток событий второго порядка, математическая модель которого приводится в главе 1, в условиях неполной наблюдаемости. Каждое зарегистрированное в момент t_k событие порождает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока теряются. Наступившие в течение мертвого времени события не вызывают продления его периода, то есть рассматривается непродлевающееся мертвое время, по окончании которого первое наступившее событие вновь вызывает период ненаблюдаемости той же длительности T и т. д.

Пример возникающей ситуации приведен на рисунке 3.1, где S_1, S_2 – состояния ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке, штриховкой обозначены периоды мертвого времени фиксированной длительности T ; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – события, недоступные наблюдению.

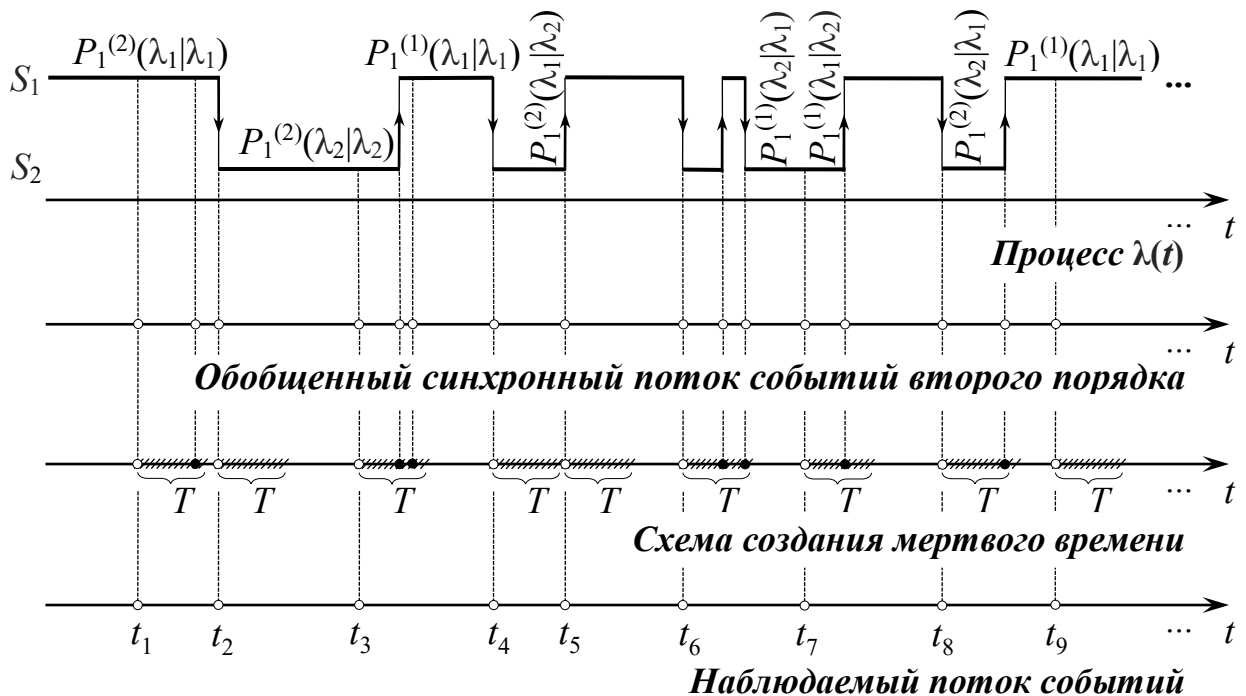


Рисунок 3.1 – Формирование наблюдаемого потока событий

Схема формирования наблюдаемого потока при непродлевающемся мертвом времени справедлива далее на протяжении всего исследования.

Необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений. Рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале (t_0, t) , где t_0 – момент начала наблюдения, t – момент окончания наблюдения (момент принятия решения о состоянии потока), пренебрегаем и без потери общности полагаем $t_0 = 0$.

Для вынесения решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ в момент времени t требуется определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i | t) = w(\lambda_i | t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i | t_1, \dots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i (m – количество наступивших за время t событий наблюдаемого потока); при этом $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$, как и в разделе 2.1 главы 2, выносится по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения вероятностей $w(\lambda_i | t)$ и $w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$.

3.1.1 Исходные предпосылки для вывода апостериорной вероятности

Момент вынесения решения t о состоянии процесса $\lambda(t)$ принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots$, между соседними событиями наблюдаемого потока. Для интервала (t_0, t_1) момент t лежит между моментом начала наблюдений t_0 и моментом наступления первого событий потока t_1 . Длительность интервала (t_k, t_{k+1}) есть величина $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \dots$.

С другой стороны, т. к. событие, наблюдаемое в момент времени t_k , порождает период мертвого времени длительности T , то $\tau_k = T + \varsigma_k$, где ς_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени $t_k + T$ и моментом наступления следующего события потока t_{k+1} , то есть имеет место разбиение исходного интервала (t_k, t_{k+1}) на два смежных: первый – полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, второй – интервал $(t_k + T, t_{k+1})$. Подчеркнем, что условия

нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ и интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ принципиально разные. На полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ поток принципиально недоступен наблюдению, в то время как на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$ поток наблюдаем. Кроме того, для нахождения $w(\lambda_1 | t)$ необходимо точно знать значение длительности мертвого времени T либо предварительно осуществить его оценку, в противном случае отсутствие такой информации делает невозможным нахождение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в явном виде. Еще раз уточним, что в настоящем исследовании предполагается, что значение T фиксированно и известно точно.

3.1.2 Апостериорные вероятности в условиях мертвого времени

Рассматривается полуинтервал $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, на котором событие имеет место в граничной точке t_k ; на самом полуинтервале события отсутствуют.

Теорема 3.1. Поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для обобщенного синхронного потока событий второго порядка на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 | t) = \pi_1 + [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \pi_1]e^{-a(t-t_k)}, \quad (3.1.1)$$

где $t_k < t \leq t_k + T$; π_1 задается (2.1.20), $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ определяется формулой (2.1.12), $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$.

Доказательство. В течение периода мертвого времени фиксированной длительности T , то есть на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$ обобщенный синхронный поток второго порядка является ненаблюдаемым. В связи с этим поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на $(t_k, t_k + T]$ аналогично поведению априорной вероятности $\pi_1(t | t^0)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ (лемма 2.6), разница заключается в задании начального значения $w(\lambda_1 | t)$ в момент времени t_k наступления события наблюдаемого потока.

Обозначим апостериорные вероятности того, что в момент времени $t + \Delta t$ ($t_k < t + \Delta t \leq t_k + T$), где Δt достаточно малая величина, имеет место состояние S_i процесса $\lambda(t)$ ($\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$) в виде $w(\lambda_i | t + \Delta t)$; в момент t — $w(\lambda_i | t)$.

Пусть $\lambda(t) = \lambda_1$ в момент времени $t + \Delta t$. Возможны следующие ситуации:

1) в момент времени t значение $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $w(\lambda_1 | t)$ и на полуинтервале $[t; t + \Delta t)$ не закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$ с вероятностью $e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t}$; вероятность этой ситуации равна $w(\lambda_1 | t) e^{-\lambda_1 \Delta t} e^{-\alpha_1 \Delta t} = w(\lambda_1 | t)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + o(\Delta t)$;

2) в момент времени t значение $\lambda(t) = \lambda_1$ с вероятностью $w(\lambda_1 | t)$ и на $[t; t + \Delta t)$ закончится первое состояние процесса $\lambda(t)$, наступит событие потока и процесс перейдет из первого состояния в первое с вероятностью $(1 - e^{-\lambda_1 \Delta t})P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + (1 - e^{-\alpha_1 \Delta t})P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)$; вероятность ситуации равна $w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t)$;

3) в момент времени t значение $\lambda(t) = \lambda_2$ с вероятностью $w(\lambda_2 | t)$ и на $[t; t + \Delta t)$ закончится второе состояние процесса $\lambda(t)$, наступит событие потока и процесс перейдет из второго состояния в первое с вероятностью $(1 - e^{-\lambda_2 \Delta t})P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + (1 - e^{-\alpha_2 \Delta t})P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$; вероятность ситуации равна $w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t)$.

Аналогичные ситуации имеют место для случая $\lambda(t) = \lambda_2$ в момент $t + \Delta t$.

1) $w(\lambda_2 | t)(1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t) + o(\Delta t)$;

2) $w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t)$;

3) $w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t)$.

Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} w(\lambda_1 | t + \Delta t) = w(\lambda_1 | t)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)\Delta t) + w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \\ + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1))\Delta t + w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))\Delta t + o(\Delta t), \\ w(\lambda_2 | t + \Delta t) = w(\lambda_2 | t)(1 - (\lambda_2 + \alpha_2)\Delta t) + w(\lambda_2 | t)(\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \\ + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2))\Delta t + w(\lambda_1 | t)(\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1))\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Перенесем $w(\lambda_1 | t)$ и $w(\lambda_2 | t)$ в левые части первого и второго уравнений соответственно, поделим левые и правые части уравнений системы на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\begin{cases} \frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} = -(\lambda_1 + \alpha_1) w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_1 | t) (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \\ + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) + w(\lambda_2 | t) (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)) \\ \frac{dw(\lambda_2 | t)}{dt} = -(\lambda_2 + \alpha_2) w(\lambda_2 | t) + w(\lambda_2 | t) (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2) + \\ + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2)) + w(\lambda_1 | t) (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Апостериорные вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и $w(\lambda_2 | t)$ определяются из системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.1.2) при начальных условиях $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $w(\lambda_2 | t = t_k) = 1 - w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$, либо из линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, которое может быть получено из (3.1.2) с учетом условия $w(\lambda_2 | t) = 1 - w(\lambda_1 | t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} + [(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)) + \\ + (\lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2))] w(\lambda_1 | t) = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2). \end{aligned}$$

Используя равенства $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(l)}(\lambda_i | \lambda_j) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $l = 1, 2$, запишем последнее уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw(\lambda_1 | t)}{dt} + [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \\ + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)] w(\lambda_1 | t) = \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Таким образом, вероятность $w(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$, определяется (3.1.3) с начальным условием $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$, $k = 1, 2, \dots$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a &= \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2), \\ b &= \lambda_2 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2) + \alpha_2 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2) \end{aligned}$$

и проинтегрируем [50] уравнение (3.1.3) методом разделения переменных.

Имеем $w(\lambda_1 | t) = \frac{b}{a} + c e^{-at}$, где значение произвольной постоянной c находится из начального условия: $c = [w(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{b}{a}] e^{at_k}$.

В результате получим

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{b}{a} + \left[w(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(t-t_k)},$$

где, согласно формуле (2.1.20), $\frac{b}{a} = \pi_1$. Теорема доказана.

Рассмотрим интервал $(t_k + T, t_{k+1})$, на котором поток событий вновь доступен наблюдению.

Замечание 3.1. На интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, смежном с полуинтервалом $(t_k, t_k + T]$, вычисление вероятности $w(\lambda_1 | t)$ для обобщенного синхронного потока событий второго порядка осуществляется по формуле

$$w(\lambda_1 | t) = \frac{w(\lambda_1 | t_k + T) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}}{1 - w(\lambda_1 | t_k + T) + w(\lambda_1 | t_k + T) e^{-(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)(t - t_k - T)}}, \quad (3.1.4)$$

$t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$; то есть начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$: $w(\lambda_1 | t_k + T)$ в (3.1.4) вычисляется по формуле (3.1.1) при $t = t_k + T$, $k = 1, 2, \dots$.

В момент времени t_k наступления очередного события наблюдаемого потока, которое порождает период мертвого времени, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ рассчитывается по формуле пересчета (2.1.12).

3.1.3 Алгоритм оптимального оценивания состояний в условиях мертвого времени

С применением полученных аналитических формул сформулируем алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка с непродлевающимся мертвым временем (процесса $\lambda(t)$) в произвольный момент времени t :

- 1) в момент начала наблюдений за потоком $t_0 = 0$ задается $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$, где π_1 вычисляется по формуле (2.1.20);
- 2) по формуле (2.1.7) для $k = 0$ в любой момент t , $t_0 < t < t_1$, где t_1 – момент наблюдения первого события потока, рассчитывается $w(\lambda_1 | t)$, при этом начальное условие $w(\lambda_1 | t_0 + 0)$ для $w(\lambda_1 | t)$ определено на предыдущем шаге;
- 3) в момент t_1 по (2.1.7) для $k = 0$ вычисляется $w(\lambda_1 | t_1) = w(\lambda_1 | t_1 - 0)$;
- 4) k увеличивается на единицу; с использованием формулы пересчета (2.1.12) для апостериорной вероятности для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t_1 + 0)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ в формуле (3.1.1);
- 5) в любой момент t , $t_1 < t < t_1 + T$, по (3.1.1) для $k = 1$ вычисляется $w(\lambda_1 | t)$;
- 6) по формуле (3.1.1) для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t = t_1 + T)$ – начальное условие для $w(\lambda_1 | t)$ на следующем шаге алгоритма;
- 7) для $k = 1$ по формуле (3.1.4) вычисляется $w(\lambda_1 | t)$ в любой момент времени t , $t_1 + T < t < t_2$, где t_2 – момент наблюдения второго события потока;
- 8) в момент t_2 по (3.1.4) для $k = 1$ рассчитывается $w(\lambda_1 | t_2) = w(\lambda_1 | t_2 - 0)$;
- 9) алгоритм переходит на шаг 4, шаги 4 – 8 последовательно повторяются для $k = 2$ и т. д.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится (согласно критерию максимума апостериорной вероятности [105]) путем сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda_i | t) \geq w(\lambda_j | t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, в противном случае – $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$.

3.2 Результаты численных расчетов оценки состояний при наличии мертвого времени

Основанный на полученных формулах алгоритм оценивания встроен в имитационную модель потока, используемую в 2.2 и 2.4; осуществляется вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_1 | t)$, $t_0 \leq t < t_1$; $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ и

$w(\lambda_1 | t)$, $t_k < t \leq t_k + T$; $w(\lambda_1 | t)$, $t_k + T < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, и определение оценок $\hat{\lambda}(t)$ траекторий истинного процесса $\lambda(t)$ на основе выборки $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ моментов наступления событий в наблюдаемом потоке, полученной в результате работы имитационной модели.

Частота ошибочных решений о состоянии сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за потоком устанавливается аналогичным образом, как и в разделе 2.2 (в случае отсутствия непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности), по ряду статистических экспериментов с использованием формул (2.1.7), (2.1.12), (2.1.20), (3.1.1), (3.1.4): по сформированной выборке долей ошибочных решений $\hat{p}_k = \frac{d_k}{T_m}$, $k = \overline{1, N}$,

вычисляются выборочное среднее полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения $\hat{P}_{oui}$ и ее выборочная дисперсия $\hat{D}_{oui}$ по формулам $\hat{P}_{oui} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{p}_k$ и $\hat{D}_{oui} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\hat{p}_k - \hat{P}_{oui})^2$ соответственно.

Первый статистический эксперимент проведен с целью установления времени моделирования T_m , обеспечивающего удовлетворение свойства стационарности потока событий. Результаты работы имитационной модели получены для значений параметров, приведенных в таблице 3.1, в условиях полной наблюдаемости потока ($T=0$ – таблица 3.2, рисунок 3.2) и в условиях наличия мертвого времени ($T=1$ – таблица 3.3, рисунок 3.3). Количество испытаний фиксированно, $N=100$.

Таблица 3.1 – Модельные данные

$\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = 0,25$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,2$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,8$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,4$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,6$
$\alpha_1 = 4$ $\alpha_2 = 0,25$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,3$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,7$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,9$

Таблица 3.2 – Результаты первого статистического эксперимента ($T = 0$)

T_m	1	10	20	30	40	50	60	70	80	...	1000
$\hat{P}_{ои}$	0,1849	0,0830	0,0716	0,0617	0,0645	0,0638	0,0603	0,0569	0,0574	...	0,0552
$\hat{D}_{ои} \cdot 10^3$	2,4681	1,6610	0,9100	0,4771	0,3600	0,3790	0,2841	0,1560	0,2101	...	0,0012

Таблица 3.3 – Результаты первого статистического эксперимента ($T = 1$)

T_m	1	10	20	30	40	50	60	70	80	...	1000
$\hat{P}_{ои}$	0,2188	0,0822	0,0726	0,0675	0,0704	0,0897	0,0642	0,0729	0,0646	...	0,0635
$\hat{D}_{ои} \cdot 10^3$	3,1527	2,0270	1,1331	0,7093	0,6412	0,5932	0,3091	0,2780	0,1911	...	0,0021

На рисунках 3.2, 3.3 отражена зависимость оценки полной вероятности ошибки $\hat{P}_{ои}$ от времени T_m при значениях мертвого времени $T = 0$ и $T = 1$.

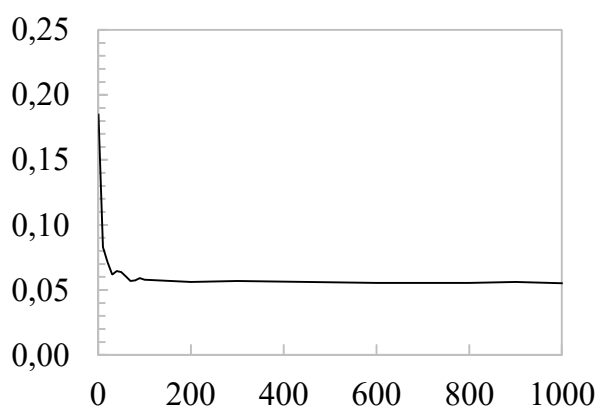


Рисунок 3.2 – График зависимости $\hat{P}_{ои}$ от времени T_m при $T = 0$

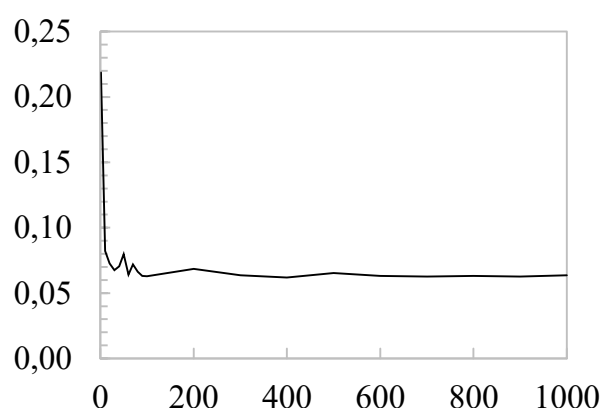


Рисунок 3.3 – График зависимости $\hat{P}_{ои}$ от времени T_m при $T = 1$

Анализ численных результатов таблиц 3.2, 3.3 и их графического представления (рисунки 3.2, 3.3), позволяет сделать следующие выводы:

- 1) при увеличении значения времени моделирования T_m оценки $\hat{P}_{ои}$ (в каждом из рассмотренных условий функционирования потока) стабилизируются;
- 2) в случае полной наблюдаемости потока (рисунок 3.2) оценка полной вероятности ошибки $\hat{P}_{ои}$ является достаточно стабильной при $T_m \geq 100$ ед. времени, в случае наличия мертвого времени (рисунок 3.3) – при $T_m \geq 500$;

как следствие, для дальнейших экспериментов значение времени моделирования выбрано равным $T_m = 1000$ ед. времени;

3) $\hat{D}_{oui}$ достаточно мала при $T_m \geq 100$ ед. времени как для случая полной наблюдаемости потока, так и для случая наличия мертвого времени.

Т. к., согласно матрице $\mathbf{D}_0$ (раздел 1.4), переход процесса $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$, невозможен без наступления события, то во втором статистическом эксперименте исследуется зависимость оценок $\hat{P}_{oui}$ и $\hat{D}_{oui}$ от отношений λ_1/λ_2 и α_1/α_2 . При $T = 1$, $T_m = 1000$, $N = 100$ и исходных данных таблицы 2.6 получены результаты, приведенные в таблицах 3.4, 3.5.

Таблица 3.4 – Результаты второго статистического эксперимента ($\alpha_2 = 2$)

λ_1/λ_2	3	6	12	24	48	96	192
$\hat{P}_{oui}$	0,2038	0,1439	0,1104	0,0914	0,0821	0,0765	0,0745
$\hat{D}_{oui} \cdot 10^3$	0,0045	0,0032	0,0033	0,0022	0,0022	0,0027	0,0022

Таблица 3.5 – Результаты второго статистического эксперимента ($\lambda_2 = 2$)

α_1/α_2	3	6	12	24	48	96	192
$\hat{P}_{oui}$	0,2030	0,1855	0,1737	0,1689	0,1658	0,1641	0,1629
$\hat{D}_{oui} \cdot 10^3$	0,0044	0,0039	0,0042	0,0038	0,0041	0,0039	0,0040

Результаты эксперимента свидетельствуют о лучшем оценивании состояний потока при больших значениях отношений λ_1/λ_2 и α_1/α_2 . Такая тенденция связана с тем фактом, что состояния $\lambda(t)$ (потока) становятся лучше различимы, за счет чего частота принятия ошибочных решений значительно сокращается. Отметим, что данные таблицы 3.4 определяют лучшее в смысле малости оценки полной вероятности ошибки качество оценивания состояний рассматриваемого потока, нежели данные таблицы 3.5; другими словами, увеличение значения отношения λ_1/λ_2 обеспечивает меньшее значение оценки вероятности принятия ошибочного решения, чем увеличение значения отношения α_1/α_2 . Последнее

связано с заданным набором параметров, определяющим поток (таблица 2.6). Заметим, что сравнение приведенных в таблицах 3.4, 3.5 результатов статистического эксперимента с приведенными в таблицах 2.7, 2.8 результатами аналогичного эксперимента, проведенного в 2.4 для тех же исходных данных в условиях отсутствия мертвого времени, $T = 0$, позволяет отметить увеличение значения $\hat{P}_{oui}$ при $T \neq 0$ для каждого варианта расчета, что естественно и объясняется потерей полезной информации для вынесения решения о состоянии потока за счет наличия мертвого времени.

В третьем статистическом эксперименте обнаруживается зависимость $\hat{P}_{oui}$ от значения длительности мертвого времени T , при этом рассматриваются ситуации увеличения значений λ_1 и α_1 , определяющих интенсивность наступления событий в первом состоянии процесса $\lambda(t)$. В таблицах 3.7, 3.8 приведены результаты, полученные при $T_m = 1000$, $N = 100$ и значениях параметров, заданных в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Модельные данные

$\lambda_1 = 4; 6$ $\lambda_2 = 0,5$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,2$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,8$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,9$
$\alpha_1 = 4; 6$ $\alpha_2 = 0,5$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,1$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,9$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,2$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,8$

Таблица 3.7 – Результаты третьего статистического эксперимента ($\lambda_1 = 4$, $\alpha_1 = 4$)

T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\hat{P}_{oui}$	0,0871	0,1091	0,1146	0,1178	0,1204	0,1216	0,1223	0,1243
$\hat{D}_{oui} \cdot 10^3$	0,0026	0,0022	0,0022	0,0023	0,0021	0,0025	0,0021	0,0031

Таблица 3.8 – Результаты третьего статистического эксперимента ($\lambda_1 = 6$, $\alpha_1 = 6$)

T	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
$\hat{P}_{oui}$	0,0610	0,0817	0,0856	0,0886	0,0898	0,0910	0,0925	0,0935
$\hat{D}_{oui} \cdot 10^3$	0,0009	0,0014	0,0012	0,0017	0,0017	0,0012	0,0014	0,0016

Построенный согласно данным таблиц 3.7, 3.8 график зависимости оценки $\hat{P}_{oui}$ от значений длительности мертвого времени T приведен на рисунке 3.4.

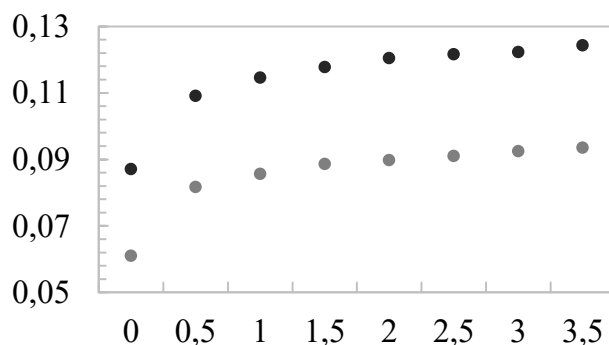


Рисунок 3.4 – График зависимости $\hat{P}_{oui}$ от T при $\lambda_1 = \alpha_1 = 4$ – темным маркером, при $\lambda_1 = \alpha_1 = 6$ – светлым маркером

Результаты таблиц 3.7, 3.8 и их графическое представление (рисунок 3.4) демонстрируют, что при одном и том же T отмечается тенденция к уменьшению $\hat{P}_{oui}$ в случае увеличения λ_1 и α_1 , т. к. условия различимости состояний улучшаются; последнее согласуется с результатами предыдущего эксперимента.

Рассмотрение значений $\hat{P}_{oui}$ в обоих случаях задания интенсивностей ($\lambda_1 + \alpha_1 = 8$, $\lambda_1 + \alpha_1 = 12$) в зависимости от $T = 0; 0,5; \dots; 3,5$ приводит к росту $\hat{P}_{oui}$ с увеличением T – увеличение продолжительности мертвого времени всегда означает уменьшение количества полезной информации, что отрицательно сказывается на качестве оценивания (что также можно видеть при сопоставлении рисунков 3.2, 3.3). При этом заметим, что поведение оценок $\hat{P}_{oui}(\lambda_1 + \alpha_1 = 8)$ (темным маркером на рисунке 3.4) и $\hat{P}_{oui}(\lambda_1 + \alpha_1 = 12)$ (светлым маркером на рисунке 3.4) в целом аналогично.

Ввиду вероятностного механизма смены состояний потока в каждый момент наступления события особый интерес для исследования представляет рассмотрение частного случая задания вероятностей $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$, определяющих переходы $\lambda(t)$ из состояния S_i в состояние S_j , $i, j = 1, 2$: $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 0$, $i = j$, $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, $i \neq j$; соответствующие результаты

получены в четвертом эксперименте при значениях параметров $T = 1$, $T_m = 1000$, $N = 100$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0,75$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0,45$.

На рисунке 3.5 в качестве иллюстрации приведено поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$ для отдельной реализации потока; λ_1, λ_2 – значения $\hat{\lambda}(t)$. Штриховкой отмечены участки ошибочных решений о состоянии $\lambda(t)$ (потока), $\Delta t = 0,001$.

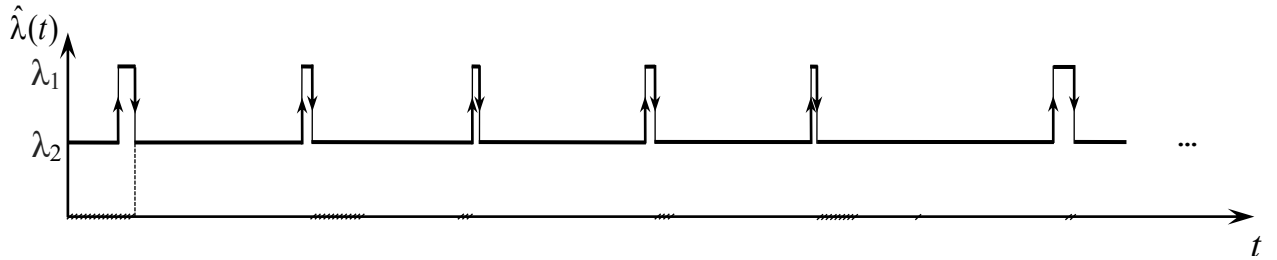


Рисунок 3.5 – Поведение оценки $\hat{\lambda}(t)$

В данном эксперименте выборочное среднее полной вероятности ошибки – $\hat{P}_{oui} = 0,1821$, выборочная дисперсия – $\hat{D}_{oui} = 0,0049 \cdot 10^{-3}$. Существенное ухудшение качества оценивания в смысле малости оценки полной вероятности ошибки по сравнению с результатами, приведенными в разделе 2.2 в случае $T = 0$ при том же наборе параметров, объясняется наличием мертвого времени.

3.3 Оценка длительности мертвого времени в коррелированном потоке

Согласно доказанной в первой главе лемме 1.2 последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная во временную ось цепь Маркова.

Идентично сформулированному в разделе 2.3 для плотности вероятности значений $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, справедливо $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, $k \geq 1$, что позволяет без ограничения общности рассматривать момент наступления события в наблюдаемом потоке как $\tau = 0$; индекс T подчеркивает зависимость плотности от длительности мертвого времени.

Рассмотрим интервал $(0, \tau)$ длительности $\tau = T + t$ между соседними событиями наблюдаемого потока; t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени фиксированной длительности T и моментом наступления следующего события, $t > 0$.

3.3.1 Вывод одномерной плотности вероятности

Введем $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из i -го состояния S_i (имеет место в момент $\tau = 0$) в j -ое S_j (имеет место в момент $\tau = T$), $i, j = 1, 2$; $\pi_i(0 | T)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ пребывает в состоянии S_i , $i = 1, 2$, при условии, что $\tau = 0$ есть момент наступления события наблюдаемого потока и порождения мертвого времени длительности T .

На интервале $(0, t)$, когда обобщенный синхронный поток событий второго порядка вновь наблюдаем, его поведение описывается условной вероятностью $p_{jk}(t)$ того, что на $(0, t)$ нет событий потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что $\lambda(0) = \lambda_j$, $j, k = 1, 2$; соответствующую $p_{jk}(t)$ плотность запишем как $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$. Тогда искомая плотность вероятности $p_T(\tau)$ запишется в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0 | T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Для исследуемого потока справедливы следующие леммы.

Лемма 3.1. Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка с мертвым временем имеют вид

$$\begin{aligned} q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-\varphi T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-\varphi T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-\varphi T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-\varphi T}, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

где $\varphi_i = \lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_i) + \alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\pi_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi}$, $\pi_2 = \frac{\varphi_1}{\varphi}$.

Доказательство. Для введенных переходных вероятностей имеют место системы дифференциальных уравнений

$$q'_{i1}(\tau) = -\varphi_1 q_{i1}(\tau) + \varphi_2 q_{i2}(\tau), \quad q'_{i2}(\tau) = \varphi_1 q_{i1}(\tau) - \varphi_2 q_{i2}(\tau), \quad i = 1, 2,$$

с начальными условиями $q_{11}(0) = q_{22}(0) = 1$, $q_{12}(0) = q_{21}(0) = 0$. Интегрируя полученные системы [50] и заменяя в решении момент τ на T , приходим к (3.3.2). Лемма доказана.

Найдем p_{jk} – вероятность перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_j в состояние S_k , $j, k = 1, 2$, за время, которое пройдет от момента $t = 0$ до момента наступления следующего события потока.

Лемма 3.2. В коррелированном обобщенном синхронном потоке событий второго порядка с непродлевающимся мертвым временем вероятности перехода p_{jk} , $j, k = 1, 2$, определяются формулами

$$p_{11} = 1 - \frac{\varphi_1}{z_1}, \quad p_{12} = \frac{\varphi_1}{z_1}, \quad p_{21} = \frac{\varphi_2}{z_2}, \quad p_{22} = 1 - \frac{\varphi_2}{z_2}, \quad (3.3.3)$$

где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; φ_1 , φ_2 определены в (3.3.2).

Доказательство. Условные вероятности $p_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, идентичны по своему смысловому значению вероятностям $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, рассмотренным в лемме 2.7, для исследуемого потока в случае отсутствия мертвого времени, то есть определяются теми же формулами (2.3.1) при $\tau = t$. Согласно определению потока установлена $p_{jj}(t)(\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j))\Delta t + o(\Delta t)$ – совместная вероятность того, что без наступления события наблюдаемого потока на интервале $(0, t)$ процесс $\lambda(t)$ переходит на этом интервале из j -го состояния S_j в j -ое S_j , $j = 1, 2$, на полуинтервале $[t, t + \Delta t)$ происходит окончание состояния S_j процесса $\lambda(t)$, и в результате розыгрыша пар в момент наступления события $\lambda(t)$ переходит из состояния S_j в S_k , $j, k = 1, 2$, которая представима в виде

$$p_{jj}(t)(\lambda_j P_1^{(1)}(\lambda_k | \lambda_j) + \alpha_j P_1^{(2)}(\lambda_k | \lambda_j))\Delta t + o(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \tilde{p}_{jk}(u) du = \tilde{p}_{jk}(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

где $\tilde{p}_{jk}(t)$ – соответствующая $p_{jk}(t)$ плотность вероятности, $j, k = 1, 2$.

Тогда плотности $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления события на $(0, t)$ и наступления события наблюдаемого потока в момент t процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_j в состояние S_k , $j, k = 1, 2$, определяются (2.3.3) при $\tau = t$.

В силу произвольности t вероятности p_{jk} , $j, k = 1, 2$, определяются в виде

$$p_{jk} = \int_0^{\infty} \tilde{p}_{jk}(t) dt \quad (3.3.4)$$

Подставляя (2.3.3) при $\tau = t$ в (3.3.4) и выполняя интегрирование [50], получим (3.3.3). *Лемма доказана.*

Лемма 3.3. Условные стационарные вероятности $\pi_i(0 | T)$, $i = 1, 2$, в коррелированном обобщенном синхронном потоке событий второго порядка с мертвым временем задаются выражениями

$$\pi_1(0 | T) = \frac{z_1\varphi_2 + \pi_1(z_1z_2 - z_1\varphi_2 - z_2\varphi_1)(1 - e^{-\varphi T})}{z_1\varphi_2 + z_2\varphi_1 + (z_1z_2 - z_1\varphi_2 - z_2\varphi_1)(1 - e^{-\varphi T})}, \quad \pi_2(0 | T) = 1 - \pi_1(0 | T), \quad (3.3.5)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1, \pi_2$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

Доказательство. Поскольку в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова (лемма 1.2), для вероятностей $\pi_i(0 | T)$, $i = 1, 2$, справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \pi_1(0 | T) &= \pi_1(0 | T)\pi_{11}(T) + \pi_2(0 | T)\pi_{21}(T), \\ \pi_2(0 | T) &= \pi_1(0 | T)\pi_{12}(T) + \pi_2(0 | T)\pi_{22}(T), \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где $\pi_{ik}(T)$ – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока, $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в состояние S_k , $i, k = 1, 2$.

В силу марковости процесса $\lambda(t)$ (лемма 1.1) вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{jk} , определенные в (3.3.2) и (3.3.3) соответственно, $i, j, k = 1, 2$, позволяют записать для $\pi_{ik}(T)$, $i, k = 1, 2$, следующие выражения:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(T) &= q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, \quad \pi_{12}(T) = q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, \\ \pi_{11}(T) + \pi_{12}(T) &= 1, \\ \pi_{21}(T) &= q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \quad \pi_{22}(T) = q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \\ \pi_{21}(T) + \pi_{22}(T) &= 1. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Подставляя в (3.3.7) переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, найденные в виде (3.3.2) в лемме 3.1, получим

$$\begin{aligned}\pi_{1k}(T) &= p_{1k} - \pi_2(p_{1k} - p_{2k})(1 - e^{-\varphi T}), \\ \pi_{2k}(T) &= p_{2k} + \pi_1(p_{1k} - p_{2k})(1 - e^{-\varphi T}), \quad k = 1, 2.\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

Далее, подставляя сначала (3.3.3) в (3.3.8), а затем результат соответствующих преобразований – в (3.3.6), приходим к (3.3.5). *Лемма доказана.*

На основании лемм 3.1 – 3.3 сформулируем теорему.

Теорема 3.2. В коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени, плотность вероятности длительности интервала между событиями имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}\tag{3.3.9}$$

где $\gamma(T) = \pi_1 - \pi_1\varphi_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 - z_1\varphi_2 - z_2\varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}}$, $\gamma(T) > 0$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

Доказательство. Подставляя в (3.3.1) сначала (2.3.3) при $\tau = t$, затем (3.3.2) и, наконец, (3.3.5), проделывая достаточно трудоемкие преобразования с учетом $t = \tau - T$, приходим к (3.3.9). *Теорема доказана.*

Замечание 3.2. Равенство $z_1 = z_2 = z$, которое вполне может выполняться в силу того, что λ_1, λ_2 удовлетворяют условию $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, а α_1, α_2 , вообще говоря, произвольные неотрицательные числа, приводит к плотности вероятности $p_T(\tau) = ze^{-z(\tau-T)}$; дважды стохастический поток вырождается в простейший.

В дальнейшем принимается $z_1 \neq z_2$.

Отметим, что (2.3.10) – частный случай (3.3.9) при $T = 0$.

3.3.2 Вероятностные характеристики коррелированного наблюдаемого потока

Нетрудно по известной $p_T(\tau)$ вида (3.3.9) получить выражения для математического ожидания и дисперсии [71] длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке:

$$M(\tau) = T + \gamma(T) \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2},$$

$$D(\tau) = -\gamma^2(T) \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} + 2\gamma(T) \frac{z_2 - z_1}{z_1^2 z_2} + \frac{1}{z_2^2},$$
(3.3.10)

где $\gamma(T)$ задана в (3.3.9); $\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

3.3.3 Построение оценок в коррелированном наблюдаемом потоке методом моментов

Для оценки периода ненаблюдаемости обратимся к методу моментов [63]: имеем $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p_T(\tau) = \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}$, $\tau \geq T$, зависящего от параметра T . Чтобы найти $\hat{T}$, необходимо решить уравнение моментов $M\tau = C_1$, где $M\tau = \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau$, $C_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$, принимающее вид

$$T + \gamma(T) \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2} = C_1,$$
(3.3.11)

где $\gamma(T)$ задана в (3.3.9); z_1, z_2 определены в (3.3.3).

Решение (3.3.11) возможно только с применением численных методов.

Замечание 3.3. Для функции $f(T) = M\tau$ справедливо:

$$f(0) = \frac{1}{z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2} > 0, \quad f'(T) = 1 + \varphi_1 \varphi_2 \frac{(z_1 - z_2)^2 e^{\varphi T}}{(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T})^2} > 0, \quad \text{где}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1, \pi_2$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3); $f(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T \geq 0$.

Согласно замечанию 3.3 оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{\text{ЧМ}}$ (численное решение (3.3.11)) на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, определяется единственным образом: $\hat{T}_{\text{ЧМ}} = \hat{T}$, если $f(0) < C_1 < f(\tau_{\min})$; $\hat{T}_{\text{ЧМ}} = \tau_{\min}$, если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C_1$; $\hat{T}_{\text{ЧМ}} = 0$, если $f(0) \geq C_1$.

Рассмотрим подход, обеспечивающий аналитическое решение $\hat{T}$: воспользуемся замечанием, сформулированным в [63] и позволяющим

использовать одноименные центральные моменты, например, дисперсию

$D\tau = \int_T^\infty \tau^2 p_T(\tau) d\tau - (M\tau)^2$ и выборочную дисперсию $C_2 - C_1^2$, где $C_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^2$. В

данном случае преобразованное уравнение моментов $D\tau = C_2 - C_1^2$ для оценивания длительности T запишется в виде

$$(z_2 - z_1)^2 \gamma^2(T) - 2z_2(z_2 - z_1)\gamma(T) - z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) = 0, \quad (3.3.12)$$

где $\gamma(T)$ задана в (3.3.9); z_1, z_2 определены в (3.3.3).

Решение (3.3.12) с учетом замечания 3.2 определяется рассмотрением следующих возможных вариантов.

При $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) > 0$:

$$1) \quad z_1 > z_2, 1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2 > 0, \text{ тогда } \hat{\gamma}(T) = \frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2)}}{z_2 - z_1};$$

$$2) \quad z_2 > z_1, \text{ тогда } \hat{\gamma}(T) = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2)}}{z_2 - z_1};$$

$$3) \quad z_2 > z_1, 1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2 < 0, \text{ тогда } \hat{\gamma}_{1,2}(T) = \frac{z_2 \mp \sqrt{z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2)}}{z_2 - z_1}.$$

При $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) = 0$:

$$1) \quad z_1 > z_2, \text{ тогда } \hat{\gamma}(T) = \frac{z_2}{z_2 - z_1} < 0, \text{ и корень исключается;}$$

$$2) \quad z_2 > z_1, \text{ тогда } \hat{\gamma}(T) = \frac{z_2}{z_2 - z_1}.$$

При $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) < 0$: действительных корней нет, следовательно, выборка увеличивается.

$$\text{Таким образом, с учетом (3.3.9), } \hat{T} = \frac{1}{\Phi} \ln \left| 1 - \frac{\Phi_1}{z_1} - \frac{\Phi_2}{z_2} - \pi_1 \Phi_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 (\pi_1 - \hat{\gamma}(T))} \right|$$

при единственном корне (3.3.12), и полученная аналитически оценка мертвого

времени $\hat{T}_A$ есть: $\hat{T}_A = \hat{T}$, если $0 < \hat{T} < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \tau_{\min}$, если $\hat{T} \geq \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = 0$, если $\hat{T} \leq 0$.

При двух действительных корнях уравнения моментов –

$$\hat{T}_{1,2} = \frac{1}{\varphi} \ln \left| 1 - \frac{\varphi_1}{z_1} - \frac{\varphi_2}{z_2} - \pi_1 \varphi_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 (\pi_1 - \hat{\gamma}_{1,2}(T))} \right|,$$
 единственная оценка $\hat{T}_A$

устанавливается путем выполнения алгоритма: $\hat{T}_A = 0,5 (\hat{T}_1 + \hat{T}_2)$, если $0 < \hat{T}_2 < \hat{T}_1 < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \hat{T}_1$, если $\hat{T}_2 < 0 < \hat{T}_1 < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \hat{T}_2$, если $0 < \hat{T}_2 < \tau_{\min} < \hat{T}_1$; $\hat{T}_A = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_2 < 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_1$ или $\tau_{\min} < \hat{T}_2 < \hat{T}_1$; $\hat{T}_A = 0$, если $\hat{T}_2 < \hat{T}_1 \leq 0$.

Замечание 3.4. Применение $\tau_{\min}$ при оценивании длительности мертвого времени T дает улучшенную оценку метода моментов.

3.4 Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном потоке

Для совместной плотности вероятности значений $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ и $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $\tau_k \geq 0$, $\tau_{k+1} \geq 0$, справедливо $p_T(\tau_k, \tau_{k+1}) = p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $k \geq 1$, что позволяет без ограничения общности рассматривать моменты наступления события и следующего события в наблюдаемом потоке событий как $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$ соответственно; индекс T подчеркивает зависимость от длительности мертвого времени.

Рассмотрим два смежных интервала длительностей $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$; $t^{(i)}$ – значение длительности интервала между соответствующими моментом окончания мертвого времени и моментом наступления следующего события наблюдаемого потока, $t^{(i)} > 0$, $i = 1, 2$.

Поскольку, согласно лемме 1.2, последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ запишется в виде

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0 | T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & (3.4.1) \\ 0, & \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T, \end{cases}$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$ определяются (2.3.3) при замене в выражениях для $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, значений τ на $t^{(1)}$ или $t^{(2)}$.

На основании вышеприведенного сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.3. Обобщенный синхронный дважды стохастический поток событий второго порядка, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени длительности T , в общем случае является коррелированным потоком, и совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ имеет вид

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \gamma(T)(1 - \gamma(T)) \left[1 - \frac{\Phi_1}{z_1} - \frac{\Phi_2}{z_2} \right] e^{-\Phi T} \times \quad (3.4.2)$$

$$\times (z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}) (z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}), \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$

где $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ заданы в (3.3.9) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$; Φ_1, Φ_2, Φ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

Доказательство. Подставляя в (3.4.1) сначала $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$ и $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, определенные в (2.3.3) для $\tau = t^{(1)}$ и $\tau = t^{(2)}$, затем $q_{ij}(T)$ и $q_{ks}(T)$, определенные в (3.3.2), и, наконец, $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, определенные в (3.3.6), проделывая необходимые достаточно трудоемкие преобразования, приходим к (3.4.2). Из вида (3.4.2) следует коррелированность потока с мертвым временем. *Теорема доказана.*

3.4.1 Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Опишем случаи, при которых наблюдаемый поток становится рекуррентным.

1. Если $\frac{\Phi_1}{z_1} + \frac{\Phi_2}{z_2} = 1$, где Φ_1, Φ_2 определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3), то

совместная плотность (3.4.2) факторизуется, то есть $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$, и из (3.3.9) в результате преобразований следует, что

$$\gamma(T) = \frac{\beta_1}{z_1 \Phi} (z_2 - (\beta_2 - \Phi_1) e^{-\Phi T}), \quad 1 - \gamma(T) = \frac{\beta_2}{z_2 \Phi} (z_1 - (\beta_1 - \Phi_2) e^{-\Phi T}),$$

$$p_T(\tau_k) = \frac{\beta_1}{\Phi} (z_2 - (\beta_2 - \Phi_1) e^{-\Phi T}) e^{-z_1(\tau_k - T)} + \frac{\beta_2}{\Phi} (z_1 - (\beta_1 - \Phi_2) e^{-\Phi T}) e^{-z_2(\tau_k - T)},$$

$\tau_k \geq T$, $k=1,2$, то есть

$$p_T(\tau) = \frac{\beta_1}{\varphi} (z_2 - (\beta_2 - \varphi_1)e^{-\varphi T}) e^{-z_1(\tau-T)} + \frac{\beta_2}{\varphi} (z_1 - (\beta_1 - \varphi_2)e^{-\varphi T}) e^{-z_2(\tau-T)}, \quad \tau \geq T, \quad (3.4.3)$$

где $\beta_i = \lambda_i P_1^{(1)}(\lambda_i | \lambda_i) + \alpha_i P_1^{(2)}(\lambda_i | \lambda_i)$, $i=1,2$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

Следующие два условия факторизации плотности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ вытекают из анализа произведения $\gamma(T)(1 - \gamma(T))$.

2. Если $\varphi_2 = 0$, где φ_2 определяется в (3.3.2), то $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$ при условии невыполнения одновременного равенства нулю λ_2 , α_2 (в такой постановке поток во втором состоянии не существует), и, согласно (3.3.9), $\gamma(T) = 0$, $1 - \gamma(T) = 1$, $p_T(\tau_k) = (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k=1,2$, то есть

$$p_T(\tau) = (\lambda_2 + \alpha_2)e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)(\tau - T)}, \quad \tau \geq T. \quad (3.4.4)$$

3. Если $\varphi_1 = 0$, где φ_1 определяется в (3.3.2), то, согласно (3.3.9), $p_T(\tau_k) = (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k=1,2$, то есть

$$p_T(\tau) = (\lambda_1 + \alpha_1)e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, \quad \tau \geq T. \quad (3.4.5)$$

Теорема 3.4. Если выполняются равенства $\frac{\varphi_1}{z_1} + \frac{\varphi_2}{z_2} = 1$, $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 = 0$,

то $p_T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{k=1}^n p_T(\tau_k)$, где $p_T(\tau_k)$ заданы в (3.4.3) для $\tau = \tau_k$, $k = \overline{1, n}$,

$n \geq 2$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3), β_1, β_2 – в (3.4.3).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.5 и основано на применении установленного условия рекуррентности для $p_T(\tau_1, \tau_2)$ с учетом того, что $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная цепь Маркова.

Замечание 3.5. Плотности вероятностей вида (3.4.4), (3.4.5) совпадают с плотностью вероятности длительности интервала между событиями функционирующего при непродлевающемся мертвом времени пуассоновского потока с параметрами $(\lambda_2 + \alpha_2)$, $(\lambda_1 + \alpha_1)$ соответственно.

Далее будем рассматривать $p_T(\tau)$, найденную в виде (3.4.3).

3.4.2 Вероятностные характеристики наблюдаемого потока

Явный вид (3.4.2) совместной вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ позволяет найти ковариацию [71] длительностей двух смежных интервалов в наблюдаемом потоке:

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = M\{(\tau_1 - M(\tau_1))(\tau_2 - M(\tau_2))\} = \gamma(T)(1 - \gamma(T)) \left[1 - \frac{\varphi_1}{z_1} - \frac{\varphi_2}{z_2} \right] \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} e^{-\varphi T},$$

а также коэффициент корреляции длительностей интервалов:

$$r_{\tau_1 \tau_2} = \gamma(T)(1 - \gamma(T)) \left[1 - \frac{\varphi_1}{z_1} - \frac{\varphi_2}{z_2} \right] \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} e^{-\varphi T} \left[-\gamma^2(T) \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} + 2\gamma(T) \frac{z_2 - z_1}{z_1^2 z_2} + \frac{1}{z_2^2} \right]^{-1},$$

где $\gamma(T)$ задана в (3.3.9); $\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

В соответствии с первым условием рекуррентности математическое ожидание и дисперсия длительности интервала между соседними событиями потока определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} M(\tau) &= T + \gamma(T) \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2}, \\ D(\tau) &= -\gamma^2(T) \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_1^2 z_2^2} + 2\gamma(T) \frac{z_2 - z_1}{z_1^2 z_2} + \frac{1}{z_2^2}, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

где $\gamma(T)$ задана в (3.4.3); $\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

3.4.3 Построение оценок в рекуррентном наблюдаемом потоке

методом моментов

Пусть за время наблюдения за потоком реализовалось n независимых интервалов длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = \overline{1, n}$ (здесь доступны наблюдению $n+1$ событие). Введем статистику $C_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$, являющуюся оценкой

$M\tau = \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau$; нахождение $\hat{T}$ связано с решением уравнения моментов

$M\tau = C_1$, преобразованного к виду (3.3.11), где $\gamma(T)$ задана в (3.4.3); z_1, z_2 определены в (3.3.3).

Полученное уравнение моментов аналитически неразрешимо.

Замечание 3.6. Для $f(T) = M\tau$ при z_1, z_2 и β_1, β_2 , определенных в (3.3.3) и

$$(3.4.3) \quad \text{соответственно: } f(0) = \frac{\beta_1}{z_1^2} + \frac{\beta_2}{z_2^2} > 0, \quad f'(T) = 1 + \varphi_1 \varphi_2 \frac{(z_1 - z_2)^2}{z_1^2 z_2^2} e^{-\varphi T} > 0.$$

Следовательно, $f(T)$ является возрастающей функцией переменной T , $T \geq 0$.

Согласно замечанию 3.6, оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{CM}$ в исследуемом потоке событий как численное решение уравнения моментов (3.3.11) при заданной в (3.4.3) величине $\gamma(T)$ на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, является состоятельной [63] и определяется единственным образом: $\hat{T}_{CM} = \hat{T}$, если $f(0) < C_1 < f(\tau_{\min})$; $\hat{T}_{CM} = \tau_{\min}$, если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C_1$; $\hat{T}_{CM} = 0$, если $f(0) \geq C_1$.

Рассмотрим (3.3.12), где $\gamma(T)$ задана в (3.4.3); z_1, z_2 определены в (3.3.3). Решение $\hat{\gamma}(T)$ или $\hat{\gamma}_{1,2}(T)$, найденное способом, аналогичным примененному в подразделе 3.3.3, с учетом всех ситуаций — $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) > 0$, $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) = 0$, $z_2^2 + z_1^2(1 + C_1^2 z_2^2 - C_2 z_2^2) < 0$ — позволяет получить явный вид оценки $\hat{T}$: $\hat{T} = \frac{1}{\varphi} \ln \left| \beta_1 \frac{\beta_2 - \varphi_1}{z_2 \beta_1 - z_1 \varphi \hat{\gamma}(T)} \right|$ при единственном корне (3.3.12) и $\hat{T}_A = \hat{T}$, если $0 < \hat{T} < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \tau_{\min}$, если $\hat{T} \geq \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = 0$, если $\hat{T} \leq 0$; $\hat{T}_{1,2} = \frac{1}{\varphi} \ln \left| \beta_1 \frac{\beta_2 - \varphi_1}{z_2 \beta_1 - z_1 \varphi \hat{\gamma}_{1,2}(T)} \right|$ — при двух корнях (3.3.12) и $\hat{T}_A = 0,5 (\hat{T}_1 + \hat{T}_2)$, если $0 < \hat{T}_2 < \hat{T}_1 < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \hat{T}_1$, если $\hat{T}_2 < 0 < \hat{T}_1 < \tau_{\min}$; $\hat{T}_A = \hat{T}_2$, если $0 < \hat{T}_2 < \tau_{\min} < \hat{T}_1$; $\hat{T}_A = \tau_{\min}$, если $\hat{T}_2 < 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_1$ или $\tau_{\min} < \hat{T}_2 < \hat{T}_1$; $\hat{T}_A = 0$, если $\hat{T}_2 < \hat{T}_1 \leq 0$.

3.5 Среднее число потерянных событий в потоке

На основе известных плотностей вероятности $p(\tau)$ вида (2.3.10) и $p_T(\tau)$ вида (3.3.9) с учетом формул (2.3.12) и (3.3.10), определены выражения для среднего числа событий в единицу времени в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка в условиях полной наблюдаемости Λ и при

непродлеваемом мертвом времени Λ_T соответственно. Последние результаты позволяют записать среднее число потерянных событий в единицу времени:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{\pi_1 \pi_2 (z_1 - z_2)^2 (1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2)(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T})}{(z_1 \pi_2 + z_2 \pi_1)(1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}) - \varphi}, \quad (3.5.1)$$

$$\text{где } \Lambda = z_1 \pi_1 + z_2 \pi_2, \quad \Lambda_T = \frac{z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}}{(z_1 \pi_2 + z_2 \pi_1)(1 - e^{\varphi T}) + T(z_1 z_2 - z_1 \varphi_2 - z_2 \varphi_1 - z_1 z_2 e^{\varphi T}) - \varphi};$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi, \pi_1, \pi_2$ определены в (3.3.2), z_1, z_2 – в (3.3.3).

По (2.4.11) и (3.4.6) находятся выражения для среднего числа событий в единицу времени в рекуррентном потоке в условиях полной наблюдаемости Λ и при непродлеваемом мертвом времени Λ_T , позволяющие выписать среднее число потерянных в потоке событий в единицу времени:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{\frac{z_1 z_2}{\varphi} \left[T z_1 z_2 e^{\varphi T} - \left(\beta_1 + \beta_2 - \frac{z_1 z_2}{\varphi} \right) (1 - e^{\varphi T}) \right]}{\varphi - \left(z_1 + z_2 - \frac{z_1 z_2}{\varphi} \right) (1 - e^{\varphi T}) + T z_1 z_2 e^{\varphi T}}, \quad (3.5.2)$$

$$\text{где } \Lambda = \frac{z_1 z_2}{\varphi}, \quad \Lambda_T = \frac{z_1 z_2 e^{\varphi T}}{\varphi - \left(z_1 + z_2 - \frac{z_1 z_2}{\varphi} \right) (1 - e^{\varphi T}) + T z_1 z_2 e^{\varphi T}}; \quad \varphi \text{ определена в (3.3.2),}$$

z_1, z_2 – в (3.3.3), β_1, β_2 – в (3.4.3).

3.6 Результаты численных расчетов оценки длительности мертвого времени

В разделе исследуются численные значения оценок периода ненаблюдаемости $\hat{T}_{CM}$ и $\hat{T}_A$, полученные как для коррелированного, так и для рекуррентного потоков с использованием имитационной модели обобщенного синхронного дважды стохастического потока событий второго порядка с непродлевающимся мертвым временем. Для проверки качества оценок по $N = 100$ независимым реализациям при фиксированном в таблице 3.9 наборе параметров вычислялись выборочное среднее значение $\hat{M}\{\hat{T}\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{T}^{(k)}$, оценка смещения

$|\hat{M}\{\hat{T}\} - T|$ и выборочная квадратическая ошибка $\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}\}}$ как корень квадратный из выборочной вариации $\hat{V}\{\hat{T}\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{T}^{(k)} - T)^2$, где $\hat{T} \in \{\hat{T}_{CM}, \hat{T}_A\}$, для каждого значения времени моделирования (времени наблюдения за потоком событий) T_m и $T = 0,3$ (таблица 3.10), $T = 0,5$ (таблица 3.11), $T = 0,7$ (таблица 3.12), $T = 0,9$ (таблица 3.13). Истинное значение длительности T известно как значение параметра имитационной модели потока.

Таблица 3.9 – Модельные данные

$\lambda_1 = 6,5$	коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка, $l = 1, 2$
$\lambda_2 = 2,2$	$P_1^{(l)}(\lambda_i \lambda_i) = 0,25, P_1^{(l)}(\lambda_j \lambda_i) = 0,75, i, j = 1, 2, i \neq j$
$\alpha_1 = 5,6$	рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка, $l = 1, 2$
$\alpha_2 = 1,5$	$P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,75, P_1^{(l)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,25, P_1^{(l)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,25, P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,75$

Таблица 3.10 – Результаты статистического эксперимента ($T = 0,3$)

T_m	30	50	70	90	...	500	600	700	800	900	1000
коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{CM}\}$	0,2952	0,2964	0,2955	0,2989	...	0,2985	0,2992	0,2996	0,2992	0,2995	0,2996
$ \hat{M}\{\hat{T}_{CM}\} - T $	0,0047	0,0036	0,0045	0,0011	...	0,0015	0,0008	0,0004	0,0008	0,0005	0,0004
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{CM}\}}$	0,0071	0,0061	0,0065	0,0026	...	0,0024	0,0012	0,0009	0,0012	0,0009	0,0010
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,1836	0,2002	0,2011	0,2066	...	0,2318	0,2272	0,2545	0,2288	0,2399	0,2394
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,1164	0,0998	0,0989	0,0934	...	0,0682	0,0728	0,0455	0,0712	0,0601	0,0606
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,2144	0,1865	0,1841	0,1701	...	0,1222	0,1086	0,0983	0,1089	0,1035	0,0884
рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{CM}\}$	0,2937	0,2961	0,2966	0,2975	...	0,2988	0,2991	0,2993	0,2992	0,2993	0,2994
$ \hat{M}\{\hat{T}_{CM}\} - T $	0,0063	0,0038	0,0034	0,0025	...	0,0012	0,0009	0,0007	0,0008	0,0007	0,0006
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{CM}\}}$	0,0101	0,0071	0,0048	0,0035	...	0,0020	0,0013	0,0010	0,0010	0,0009	0,0008
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,2234	0,2210	0,2394	0,2431	...	0,2511	0,2662	0,2747	0,2710	0,2708	0,2836
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,0766	0,0790	0,0606	0,0569	...	0,0489	0,0338	0,0253	0,0290	0,0292	0,0164
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,1302	0,1112	0,1038	0,0843	...	0,0563	0,0487	0,0403	0,0405	0,0460	0,0370

Таблица 3.11 – Результаты статистического эксперимента ($T = 0,5$)

T_m	30	50	70	90	...	500	600	700	800	900	1000
коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}$	0,4955	0,4990	0,4982	0,4963	...	0,4983	0,4990	0,4991	0,4991	0,4986	0,4992
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\} - T $	0,0045	0,0010	0,0018	0,0037	...	0,0017	0,0010	0,0009	0,0009	0,0014	0,0008
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}}$	0,0053	0,0038	0,0043	0,0041	...	0,0027	0,0021	0,0019	0,0016	0,0021	0,0012
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,2999	0,3131	0,3256	0,3017	...	0,3460	0,3984	0,3825	0,4002	0,3850	0,4240
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,2001	0,1869	0,1744	0,1983	...	0,1540	0,1016	0,1175	0,0998	0,1250	0,0760
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,3644	0,3056	0,3489	0,3217	...	0,2630	0,2189	0,2080	0,1939	0,2035	0,1322
рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}$	0,4893	0,4947	0,4933	0,4961	...	0,4989	0,4989	0,4988	0,4991	0,4989	0,4990
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\} - T $	0,0107	0,0053	0,0067	0,0039	...	0,0011	0,0011	0,0012	0,0009	0,0011	0,0010
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}}$	0,0142	0,0090	0,0092	0,0053	...	0,0021	0,0019	0,0017	0,0018	0,0016	0,0016
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,3594	0,3401	0,4064	0,4041	...	0,4174	0,4329	0,4228	0,4279	0,4258	0,4397
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,1406	0,1599	0,0936	0,0959	...	0,0826	0,0671	0,0772	0,0721	0,0742	0,0603
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,2764	0,2368	0,1582	0,1671	...	0,1317	0,1146	0,1278	0,1167	0,1160	0,0983

Таблица 3.12 – Результаты статистического эксперимента ($T = 0,7$)

T_m	30	50	70	90	...	500	600	700	800	900	1000
коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}$	0,6916	0,6922	0,6968	0,6958	...	0,6971	0,6986	0,6986	0,6987	0,6991	0,6990
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\} - T $	0,0084	0,0078	0,0032	0,0042	...	0,0029	0,0014	0,0014	0,0013	0,0009	0,0010
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}}$	0,0155	0,0107	0,0057	0,0065	...	0,0038	0,0031	0,0024	0,0019	0,0011	0,0010
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,3917	0,3113	0,3580	0,4045	...	0,5212	0,4224	0,4554	0,4434	0,4829	0,4479
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,3083	0,3887	0,3420	0,2955	...	0,1788	0,2776	0,2446	0,2566	0,2171	0,2521
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,5185	0,5038	0,4607	0,4344	...	0,3571	0,3747	0,3875	0,3741	0,3160	0,3183
рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}$	0,6889	0,6926	0,6923	0,6957	...	0,6971	0,6972	0,6986	0,6987	0,6989	0,6985
$ \hat{M}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\} - T $	0,0111	0,0074	0,0077	0,0043	...	0,0029	0,0028	0,0014	0,0013	0,0011	0,0015
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{\text{чМ}}\}}$	0,0161	0,0112	0,0121	0,0059	...	0,0040	0,0034	0,0028	0,0021	0,0018	0,0020
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,4667	0,4809	0,5019	0,4557	...	0,4900	0,5297	0,5277	0,5457	0,5495	0,5770
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,2333	0,2191	0,1981	0,2443	...	0,2100	0,1703	0,1723	0,1543	0,1505	0,1230
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,3504	0,3373	0,3058	0,3183	...	0,2934	0,2428	0,2296	0,2308	0,2462	0,2265

Таблица 3.13 – Результаты статистического эксперимента ($T = 0,9$)

T_m	30	50	70	90	...	500	600	700	800	900	1000
коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{CM}\}$	0,8917	0,8959	0,8939	0,8942	...	0,8984	0,8982	0,8984	0,8986	0,8984	0,8991
$ \hat{M}\{\hat{T}_{CM}\} - T $	0,0083	0,0041	0,0061	0,0058	...	0,0016	0,0018	0,0016	0,0014	0,0016	0,0009
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{CM}\}}$	0,0146	0,0087	0,0090	0,0108	...	0,0026	0,0027	0,0021	0,0020	0,0017	0,0015
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,4809	0,5479	0,4986	0,5294	...	0,6174	0,5624	0,6431	0,6323	0,6260	0,5988
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,4191	0,3521	0,4014	0,3706	...	0,2826	0,3376	0,2569	0,2677	0,2740	0,3012
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,6364	0,5680	0,6016	0,5855	...	0,4931	0,4933	0,4364	0,4273	0,4414	0,4502
рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка											
$\hat{M}\{\hat{T}_{CM}\}$	0,8804	0,8915	0,8942	0,8944	...	0,8983	0,8980	0,8984	0,8985	0,8987	0,8984
$ \hat{M}\{\hat{T}_{CM}\} - T $	0,0196	0,0085	0,0058	0,0056	...	0,0017	0,0020	0,0016	0,0015	0,0013	0,0016
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_{CM}\}}$	0,0227	0,0153	0,0110	0,0079	...	0,0031	0,0024	0,0025	0,0022	0,0021	0,0026
$\hat{M}\{\hat{T}_A\}$	0,6289	0,5993	0,6011	0,5745	...	0,6518	0,6923	0,7283	0,7115	0,7170	0,7484
$ \hat{M}\{\hat{T}_A\} - T $	0,2711	0,3007	0,2989	0,3255	...	0,2482	0,2077	0,1717	0,1885	0,1830	0,1516
$\sqrt{\hat{V}\{\hat{T}_A\}}$	0,5059	0,4503	0,4758	0,4526	...	0,3759	0,3344	0,3167	0,3134	0,3049	0,2774

В каждом из вариантов с увеличением T_m выборочные средние $\hat{M}\{\hat{T}_{CM}\}$ стабилизируются, а качество $\hat{T}_{CM}$ улучшается в смысле уменьшения значений оценки смещения и выборочной квадратической ошибки, в то время как для $\hat{M}\{\hat{T}_A\}$ отмечается колебательный характер с неявной тенденцией к уменьшению. Последнее объясняется использованием центрального момента для составления (3.3.12). Анализ данных таблиц 3.10 – 3.13 в совокупности демонстрирует отрицательное влияние увеличения периода T на качество оценок, получаемых методом моментов, что естественно в силу потери событий исходного потока.

В таблице 3.14 приведены значения Λ , Λ_T и Δ , вычисленные по формулам (3.5.1) и (3.5.2) для коррелированного и рекуррентного потоков соответственно. Для демонстрации корректности модели и, как следствие, применимости выбранного аппарата исследования при $T_m = 1000$ по одной из реализаций потока при исходных данных таблицы 3.9 вычислялось выборочное среднее

$\hat{M}\{\tau\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k$, где τ_k – длительность интервала между событиями в наблюдаемом потоке, что позволило записать статистические оценки $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}_T$ как величины, обратные $\hat{M}\{\tau\}$, в соответствующих условиях рассмотрения обобщенного синхронного потока второго порядка (в условиях полной и частичной наблюдаемости); $\hat{\Delta} = \hat{\Lambda} - \hat{\Lambda}_T$.

Таблица 3.14 – Результаты статистического эксперимента

T	Λ	$\hat{\Lambda}$	$\frac{ \Lambda - \hat{\Lambda} }{\Lambda}$	Λ_T	$\hat{\Lambda}_T$	$\frac{ \Lambda_T - \hat{\Lambda}_T }{\Lambda_T}$	Δ	$\hat{\Delta}$	$\frac{ \Delta - \hat{\Delta} }{\Delta}$
коррелированный обобщенный синхронный поток второго порядка									
0,3	5,6671	5,6651	0,000353	1,9076	1,9099	0,001206	3,7595	3,7553	0,001117
0,5		5,6689	0,000318	1,3772	1,3701	0,005155	4,2899	4,2988	0,002075
0,7		5,6245	0,007517	1,0795	1,0748	0,004354	4,5875	4,5497	0,008240
0,9		5,6439	0,004094	0,8878	0,8892	0,001577	4,7793	4,7547	0,005147
рекуррентный обобщенный синхронный поток второго порядка									
0,3	7,7190	7,7011	0,002319	2,1206	2,1110	0,004527	5,5983	5,5701	0,005037
0,5		7,7068	0,001581	1,4759	1,4690	0,004675	6,2434	6,2121	0,005013
0,7		7,7167	0,000298	1,1369	1,1411	0,003694	6,5821	6,5757	0,000972
0,9		7,7004	0,002410	0,9257	0,9258	0,000108	6,7932	6,7747	0,002723

3.7 Выводы по главе 3

В третьей главе для обобщенного синхронного потока второго порядка:

- определены условия неполной наблюдаемости – введено понятие мертвого времени и указан принцип формирования наблюдаемого потока;
- сформулирована и доказана теорема о поведении апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ на интервалах ненаблюдаемости потока (3.1.1);
- разработаны алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (потока) в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени;
- проведены статистические эксперименты для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$; результаты приведены в

таблицах 3.2 – 3.5, 3.7, 3.8, на рисунках 3.2 – 3.5, после иллюстративного материала дается анализ результатов и их обоснование;

- выведены одномерная и совместная плотности вероятности в виде (3.3.9) и (3.4.2); сформулированы условия рекуррентности потока;
- выписаны уравнения моментов (3.3.11) и (3.3.12) и предложены алгоритмы, обеспечивающие единственные оценки $\hat{T}_{чМ}$ и $\hat{T}_A$ длительности мертвого времени и для коррелированного потока, и для рекуррентного потока;
- определены вероятностные характеристики потока событий;
- установлено приемлемое качество оценивания путем испытаний модели потока; результаты сравнения $\hat{T}_{чМ}$ и $\hat{T}_A$ приведены в таблицах 3.10 – 3.14.

Таким образом, в главе на основании формул для апостериорных вероятностей состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка с непродлевающимся мертвым временем сформулирован алгоритм оптимальной оценки состояний, который позволяет проводить оценивание в режиме реального времени; построены уравнения моментов, позволяющие аналитически и численно оценить длительность непродлевающегося мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий в наблюдаемом потоке, сформулированы алгоритмы нахождения единственных оценок.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрен обобщенный синхронный дважды стохастический поток второго порядка в условиях его полной наблюдаемости и при непродлеваемом мертвом времени фиксированной длительности.

В первом случае предложен основанный на критерии максимума апостериорной вероятности алгоритм оптимального оценивания состояний потока, использующий явные аналитические выражения для апостериорных и априорных вероятностей, а также формулы пересчета, справедливые в моменты времени наступления событий. Сформулирован алгоритм установления частоты ошибочных решений о состоянии сопровождающего случайного процесса по результатам текущих наблюдений за потоком событий, и выявлена приемлемая величина оценки полной вероятности ошибки по численным результатам испытаний имитационной модели потока событий.

Получена плотность вероятности значений длительности интервала между событиями изучаемого потока, определен явный вид совместной плотности вероятности длительностей смежных интервалов между событиями потока, сформулированы условия рекуррентности. Методом моментов найдены оценки параметров распределения в коррелированном и в рекуррентном потоках. Численные результаты статистических экспериментов, проведенных на имитационной модели потока при доступности для наблюдения всех его событий, отвечают физической интерпретации и демонстрируют приемлемое качество оценивания в смысле малости выбранных показателей.

Кроме того, приведен пример работы с реальными данными трафика в рамках аппроксимации его исследуемым потоком. Пример отражает практическую применимость аналитических результатов оценивания и результатов имитационного моделирования к реальным информационным потокам, математическими моделями которых выступают дважды стохастические потоки.

Теоретические и практические результаты решения задач оценивания состояний и длительности мертвого времени в потоке при частичной его

наблюдаемости (в условиях функционирования при непродлеваемом мертвом времени) обобщают и уточняют предыдущие выводы.

В данной постановке разработаны алгоритм расчета апостериорной вероятности на интервалах наблюдаемости и на интервалах мертвого времени, а также алгоритм принятия решения о состоянии сопровождающего процесса в произвольный момент времени на основании выборки моментов наступления событий в наблюдаемом потоке. Проведен ряд статистических экспериментов, обнаруживающих приемлемое качество оценивания состояний при наличии непродлеваемого мертвого времени и адекватное соотношение полученных результатов с результатами оценивания для случая его отсутствия.

Найдены численная и аналитическая оценки длительности мертвого времени – параметра одномерной плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями – в коррелированном и рекуррентном потоках; условия рекуррентности выписаны из явного вида совместной плотности вероятности. Результаты статистических исследований указывают на достаточную эффективность метода моментов и определяют предпочтение в использовании точечной оценки, получаемой численно из уравнения, использующего теоретический и эмпирический моменты первого порядка.

Таким образом, совокупность выводов диссертационного исследования выявляет наличие качественно новых результатов решения задач оценивания состояний, параметров распределения и длительности мертвого времени в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка, которые в комплексе с программной реализацией разработанных алгоритмов могут быть использованы при решении важных прикладных задач, таких как моделирование потоков, функционирующих в реальных телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях в условиях полной либо частичной наблюдаемости.

Перспектива дальнейшего исследования связана с проектированием адаптивных СМО с входящим дважды стохастическим потоком (обобщенным синхронным потоком событий второго порядка) с последующим определением их вероятностных характеристик.

Список использованной литературы

1. Апанасович В. В. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте / В. В. Апанасович, А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский. – Минск: Университетское, 1988. – 256 с.
2. Базилевич К. В. Трафик и работа приборов соединения автоматических телефонных станций / К. В. Базилевич, В. А. Говорков. – М.: Связьтехиздат, 1933. – 176 с.
3. Бахолдина М. А. Вероятность ошибки при оценивании состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 1 (34). – С. 18–34.
4. Башарин Г. П. Массовое обслуживание в телефонии / Г. П. Башарин, А. Д. Харкевич, М. А. Шнепс. – М.: Наука, 1968. – 240 с.
5. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1979. – Ч. 1, № 6. – С. 92–99.
6. Башарин Г. П. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи / Г. П. Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1980. – Ч. 2, № 1. – С. 55–61.
7. Башарин Г. П. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, Н. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 12. – С. 16–28.
8. Беккерман Е. Н. Аппроксимация МС-потокм реального потока событий / Е. Н. Беккерман, С. Г. Катаев, С. С. Катаева, Д. Ю. Кузнецов // Вест. Том. гос. ун-та. – 2005. – № S14. – С. 248–253.
9. Березин Д. В. Численные результаты оптимальной оценки состояний модулированного МАР-потокм событий / Д. В. Березин, Л. А. Нежелская // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 151–157.

10. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
11. Бронштейн О. И. Об оптимальных приоритетах в системах массового обслуживания / О. И. Бронштейн, В. В. Рыков // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1965. – № 6. – С. 28–37.
12. Бронштейн О. И. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах / О. И. Бронштейн, И. М. Духовный. – М.: Наука, 1976. – 220 с.
13. Бузюкова И. Л. Имитационная модель узла управления услугами интеллектуальной сети / И. Л. Бузюкова, А. С. Бязров, Ю. В. Гайдамака // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2010. – № 7. – С. 18–22.
14. Бушланов И. В. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 9. – С. 40–51.
15. Василевская Т. П. О соотношении моделей МАР-потока событий и асинхронного, полусинхронного и синхронного дважды стохастических потоков событий / Т. П. Василевская, М. Е. Завгородняя, И. С. Шмырин // Вест. Том. гос. ун-та. – 2004. – № S9–2. – С. 138–144.
16. Васильева Л. А. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях присутствия мертвого времени // Вест. Том. гос. ун-та. – 2002. – № S1–1. – С. 9–13.
17. Вишневский В. М. Оценка пропускной способности локальной беспроводной сети при высокой нагрузке и помехах / В. М. Вишневский, А. Н. Ляхов // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 8. – С. 81–96.
18. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
19. Вишневский В. М. Открытая сеть массового обслуживания с коррелированными входными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей / В. М. Вишневский, А. А. Ларионов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) :

материалы XV Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – Ч. 1. – С. 36–50.

20. Волковинский М. И. Анализ приоритетных очередей с учетом времени переключения / М. И. Волковинский, А. Н. Кабалевский. – М.: Энергоиздат, 1981. – 167 с.

21. Воробьев Н. М. Об управлении системой массового обслуживания одного вида // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1967. – № 3. – С. 86–93.

22. Гайдамака Ю. В. Оценка времени установления соединения для услуги IPTV / Ю. В. Гайдамака, Э. Р. Зарипова // Вест. РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». – 2014. – № 1. – С. 23–29.

23. Гарайшина И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 200 с.

24. Глухова Е. В. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий при наличии продлевающегося мертвого времени / Е. В. Глухова, А. Ф. Терпугов // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 1995. – Т. 38, № 3. – С. 22–31.

25. Гнеденко Б. В. Приоритетные системы обслуживания / Б. В. Гнеденко [и др.]. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 447 с.

26. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4-е, испр. / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.

27. Головкин Н. И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головкин, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 50–64.

28. Горцев А. М. Управление и адаптация в системах массового обслуживания / А. М. Горцев, А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.

29. Горцев А. М. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Техника средств связи. Серия: Системы связи. – 1989. – Вып. 7. – С. 46–54.

30. Горцев А. М. Оценивание параметров знакопеременного пуассоновского потока событий / А. М. Горцев, И. С. Климов // Радиотехника. – 1994. – № 8. – С. 3–9.
31. Горцев А. М. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вест. Том. гос. ун-та. – 2002. – № S1–1. – С. 24–29.
32. Горцев А. М. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 1. – С. 31–41.
33. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний / А. М. Горцев, В. Л. Зуевич // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2 (11). – С. 44–65.
34. Горцев А. М. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежелская // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1 (14). – С. 13–21.
35. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени / А. М. Горцев, М. А. Леонова, Л. А. Нежелская // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4 (21). – С. 14–25.
36. Гулаков И. Р. Пропускная способность квантовой оптической системы связи / И. Р. Гулаков, А. О. Зеневич, А. М. Тимофеев // Приборы и методы измерений. – 2012. – № 1 (4). – С. 104–109.
37. Даниэлян Э. А. Время ожидания в модели с категориальными во времени приоритетами // Кибернетика. – 1980. – № 6. – С. 103–109.
38. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами : пер. с англ. / под ред. В. В. Калашникова. – М.: Мир, 1973. – 279 с.

39. Димитров Б. Н. Периодические пуассоновские процессы и распределения с почти отсутствующей памятью / Б. Н. Димитров, В. В. Рыков, З. Л. Круглый // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 10. – С. 85–100.
40. Дудин А. Н. О задаче оптимального управления многоскоростной системой массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 9. – С. 43–51.
41. Дудин А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок. – Минск: Изд-во БГУ, 2000. – 175 с.
42. Дудин А. Н. Расчет характеристик однолинейной системы обслуживания с групповым марковским потоком, полумарковским обслуживанием и конечным буфером / А. Н. Дудин, В. И. Клименок, Г. В. Царенков // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 8. – С. 87–101.
43. Дудин А. Н. Расчет необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях / А. Н. Дудин, В. И. Клименок // Информатизация образования. – 2005. – № 4. – С. 56–68.
44. Зиновьева Л. И. Система массового обслуживания с гистерезисом и резервным прибором, управляемым временем ожидания // Математическая статистика и ее приложения. – Томск: Изд-во ТГУ, 1980. – № 6. – С. 152–146.
45. Зорин А. В. Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени / А. В. Зорин, М. А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 7. – С. 102–111.
46. Зорин А. В. Оптимальный алгоритм обслуживания с разделением времени и переналадками для дважды стохастических входных и ветвящихся вторичных потоков // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2008. – № 1. – С. 100–107.
47. Ивницкий В. А. Однолинейная система со случайной интенсивностью потока и скоростью обслуживания // Литовский математический сборник. – 1996. – Т. 6, № 1. – С. 41–50.
48. Ивченко Г. И. Теория массового обслуживания / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.

49. Калягин А. А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий / А. А. Калягин, Л. А. Нежелская // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 23–32.
50. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
51. Каштанов В. А. Исследование полумарковских систем массового обслуживания при управляемом входящем потоке BSMAP-поток / В. А. Каштанов, Е. В. Кондрашова // Управление большими системами. – 2015. – Т. 57. – С. 6–36.
52. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. – 1959. – Т. 3, № 6. – С. 97–111.
53. Кениг Д. Методы теории массового обслуживания / Д. Кениг, Д. Штойян. – М.: Радио и связь, 1981. – 127 с.
54. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
55. Коротаев И. А. Адаптивная оценка интенсивности дважды стохастического потока событий // Управляемые системы массового обслуживания. – Томск, 1984. – Вып. 3. – С. 50–57.
56. Кофман А. Массовое обслуживание / А. Кофман, Р. Крюон. – М.: Мир, 1965. – 302 с.
57. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
58. Кухта Т. К. Системы с переменным числом каналов / Т. К. Кухта, Н. Д. Шваб // Кибернетика. – 1975. – № 2. – С. 146–148.
59. Левин А. А. Теоретические основы статистической радиотехники / А. А. Левин. – М.: Сов. радио, 1968. – 504 с.
60. Лезарев А. В. Средняя длительность периода занятости в однолинейной системе массового обслуживания с дважды стохастическим

синхронным входящим потоком / А. В. Лезарев, А. Ф. Терпугов // Вест. Том. гос. ун-та. – 2004. – № 284. – С. 149–152.

61. Лившиц Б. С. Теория телетрафика / Б. С. Лившиц, А. П. Пшеничников, А. Д. Харкевич. – М.: Связь, 1979. – 224 с.

62. Лившиц К. И. Математическая модель деятельности некоммерческого фонда при дважды стохастическом потоке платежей / К. И. Лившиц, Л. Ю. Сухотина, И. Ю. Шифердекер // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2007. – № 1. – С. 36–43.

63. Малинковский Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика (часть 2. Математическая статистика) / Ю. В. Малинковский. – Гомель: УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. – 146 с.

64. Малинковский Ю. В. Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями в форме произведения смещенных геометрических распределений / Ю. В. Малинковский, Е. В. Коробейникова // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 43–56.

65. Маталыцкий М. А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применения: Монография / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, Е. В. Колузаева. – Гродно: Изд-во ГрГУ, 2011. – 820 с.

66. Медведев Г. А. Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска / Автоматика и вычислительная техника. – 1968. – № 4. – С. 27–30.

67. Мова М. В. Организация приоритетного обслуживания в АСУ / М. В. Мова, Л. А. Пономаренко, А. М. Калиновский. – Киев: Техника, 1997. – 159 с.

68. Моисеев А. Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А. Н. Моисеев, А. А. Назаров. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240 с.

69. Назаров А. А. Адаптация в управляемых системах массового обслуживания / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов // Автоматика и телемеханика. – 1976. – Вып. 7. – С. 76–79.

70. Назаров А. А. Применение общего подхода к анализу однолинейной марковской модели сети связи с асинхронным дважды стохастическим входящим потоком / А. А. Назаров, С. А. Цой // Научное творчество молодежи : материалы IX Всерос. конф. Анжеро-Судженск, 15–16 апреля 2005 г. – Томск, 2005. – С. 45–47.

71. Назаров А. А. Теория вероятностей и случайных процессов / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

72. Небеев А. В. Исследование многоканальных систем передачи информации методом оптимизации стратегии распределительного устройства / А. В. Небеев, В. П. Ревельс // Проблемы передачи информации. – 1970. – Т. 6, вып. 3. – С. 96–99.

73. Нежелская Л. А. Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стохастического потока с инициативными событиями // Микросистема-91 : тезисы докладов Всесоюз. науч.-техн. конф. – Суздаль, 1991. – С. 26–28.

74. Нежелская Л. А. Рекуррентные формулы для апостериорных вероятностей при оценке состояний синхронного МС-потока событий // Распределенные микропроцессорные управляющие системы и локальные вычислительные сети : материалы Всесоюз. науч.-техн. конф. – Томск, 1991. – С. 181–182.

75. Нежелская Л. А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1. – С. 57–67.

76. Нежелская Л. А. Имитационное моделирование обобщенного синхронного потока второго порядка / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2016. – Т. 299 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 20–21 мая 2016 г. – С. 104–109.

77. Нежелская Л. А. Алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2017. – Т. 301 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы V Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 19–20 мая 2017 г. – С. 105–113.

78. Нежелская Л. А. Апостериорные вероятности состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка при наличии мертвого времени / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Двенадцатой конф. с междунар. участием. 04–08 июня 2018 г. – Томск, 2018. – С. 123–124.

79. Нежелская Л. А. Оптимальная оценка состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка в условиях неполной наблюдаемости / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 45. – С. 30–41.

80. Нежелская Л. А. Оптимальное оценивание состояний обобщенного синхронного потока событий второго порядка / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2018) : материалы XVII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Томск, 10–15 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 113–118.

81. Нежелская Л. А. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного синхронного потока событий второго порядка с непродлевающимся мертвым временем / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2018. – Т. 302 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VI Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 24–26 мая 2018 г. – С. 140–148.

82. Нежелская Л. А. Аппроксимация реального трафика одним из дважды стохастических потоков событий / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск,

2019. – Т. 303 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 23–25 мая 2018 г. – С. 3–14.

83. Нежелская Л. А. Оценивание длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий методом моментов / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2019. – Т. 62, № 9. – С. 94–100.

84. Нежелская Л. А. Оценивание параметров плотности вероятности значений длительности интервала между событиями в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2019) : материалы XVIII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Саратов, 26–30 июня 2019 г. – Томск, 2019. – Ч. 2. – С. 358–363.

85. Нежелская Л. А. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в коррелированном обобщенном синхронном потоке второго порядка / Л. А. Нежелская, Е. Ф. Сидорова // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2019. – № 48. – С. 21–30.

86. Никольский Н. Н. Адаптивный алгоритм контроля доступа вызовов в сетях пакетной телефонии для кодеков с переменной интенсивностью передачи информации : автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. техн. наук / Н. Н. Никольский. – Москва, 2007. – 22 с.

87. Ниссенбаум О. В. Аппроксимация сетевого трафика моделью альтернирующего потока событий / О. В. Ниссенбаум, И. П. Пахомов // Прикладная дискретная математика. – 2009. – № 1. – С. 78–79.

88. Ниссенбаум О. В. Адаптивный алгоритм отслеживания аномальной активности в компьютерной сети на основании характерных изменений оценок альтернирующего потока / О. В. Ниссенбаум, А. С. Присяжнюк // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2010. – № 3. – С. 55–58.

89. Пагано М. Модели телетрафика / М. Пагано, В. В. Рыков, Ю. С. Хохлов. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 178 с.

90. Паршина М. Е. Численное решение уравнений метода моментов для альтернирующего потока событий в системе с продлевающимся «мертвым» временем // Современные математические методы исследования информационно-вычислительных сетей : материалы междунар. конф. – Минск: Изд-во БГУ, 2001. – С. 166–171.
91. Поттосина С. А. Оптимальная нелинейная фильтрация МС-потоков / С. А. Поттосина, А. Ф. Терпугов // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 1993. – Т. 36, № 12. – С. 54–60.
92. Рыков В. В. Об оптимальных динамических приоритетах в СМО / В. В. Рыков, Э. Е. Лемберг // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1967. – № 1. – С. 25–34.
93. Рыков В. В. Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». – 1975. – Т. 12. – С. 43–153.
94. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения : пер. с англ. / под ред. И. Н. Коваленко. – М.: Сов. радио, 1971. – 520 с.
95. Самуйлов А. К. Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети / А. К. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7, № 11. – С. 77–81.
96. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло / И. М. Соболев. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
97. Соловьев А. Д. Задача об оптимальном обслуживании // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1970. – № 5. – С. 40–49.
98. Терпугов А. Ф. Дважды стохастический поток событий с независимыми значениями интенсивности / А. Ф. Терпугов, Н. Е. Царабаева // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. – 2001. – Т. 44, № 1. – С. 3–7.

99. Ушаков И. А. Оптимальное управление в многоканальной система массового обслуживания с несколькими потоками требований / И. А. Ушаков, В. П. Чернышев // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1976. – № 5. – С. 95–100.
100. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: учебное пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
101. Файнберг М. А. Управление в системах массового обслуживания / М. А. Файнберг, Е. А. Файнберг // Зарубежная радиоэлектроника. – 1975. – № 3. – С. 3–34.
102. Фархадов М. П. Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчета характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания / М. П. Фархадов, Н. В. Петухова, Д. В. Ефросинин, О. В. Семенова // Проблемы управления. – 2010. – № 6. – С. 53–57.
103. Федосов Е. Н. Фильтрация интенсивности дважды стохастического потока в системах с продлевающимся «мертвым временем» // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика : сб. ст. – Томск: Изд-во ТГУ, 1999. – С. 157–161.
104. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М.: Мир, 1967. – Т. 2. – 752 с.
105. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления / Э. М. Хазен. – М.: Сов. радио, 1968. – 256 с.
106. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. – 1955. – Т. 49. – С. 3–122.
107. Хинчин А. Я. О пуассоновских потоках случайных событий // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – Т. 1, № 3. – С. 320–327.
108. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.
109. Царенков Г. В. ВМАР-поток как модель трафика реальной сети // Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей : материалы междунар. науч. конф. – Минск, 2005. – С. 209–214.

110. Цициашвили Г. Ш. Оценка параметров мультипликативных распределений сетей массового обслуживания / Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // Проблемы передачи информации. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 115–120.
111. Шмырин И. С. Оптимальная оценка параметров потока событий с переключениями // Вест. Том. гос. ун-та. – 2000. – № 271. – С. 63–66.
112. Adamu A. Discrete Markov chain model for analyzing probability measures of P2P streaming network / A. Adamu, Y. Gaidamaka, A. Samouylov // Smart Spaces and Next Generation Wired/Wireless Networking. – 2011. – P. 428–439.
113. Banik A. D. BMAP/G/1/N queue with vacations and limited service discipline / A. D. Banik, U. C. Gupta, S. S. Pathak // Applied mathematics and computation. – 2006. – Vol. 180, № 2. – P. 707–721.
114. Bartlett M. S. The spectral analysis of point processes // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 1963. – Vol. 25, № 2. – P. 264–296.
115. Basharin G. P. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks / G. P. Basharin, Y. V. Gaidamaka, K. E. Samouylov // Automatic Control and Computer Science. – 2013. – Vol. 47, is. 2. – P. 62–69.
116. Benes V. E. Programming and control problems arising from optimal routing in telephone networks // Bell System Technical journal. – 1966. – Vol. 45, № 9. – P. 1373–1438.
117. Best J. Doubly stochastic processes: an approach for understanding central nervous system activity // Selected Topics on Applied Mathematics, Circuits, Systems and Signals. – WSEARS Press, 2009. – P. 155–158.
118. Bolch G. Queueing networks and Markov chains: modeling and performance evaluation with computer science applications / G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer, K. S. Trivedi. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2006. – 896 p.
119. Borovkov A. A. Asymptotic methods in queueing theory / A. A. Borovkov. – New York: Wiley, 1984. – 304 p.

120. Bouzas P. R. Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis / P. R. Bouzas, M. J. Valderrama, A. M. Aguilera, N. Ruiz-Fuentes // *Computational Statistics and Data Analysis*. – 2006. – Vol. 50 (10). – P. 2655–2667.
121. Card H. C. Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning // *Neural Networks, IEEE Transactions*. – 1998. – Vol. 9, is. 1. – P. 229–231.
122. Centanni S. A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes / S. Centanni, M. Minozzo // *Journal of the American Statistical Association*. – 2006. – № 101. – P. 1582–1597.
123. Centanni S. Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultra-high-frequency financial data / S. Centanni, M. Minozzo // *Stat. Model.* – 2006. – № 6. – P. 97–118.
124. Choi B. D. Priority queueing system with fixed length packet-train arrivals / B. D. Choi, B. I. Choi, Y. Lee, D. K. Sung // *IEE Proceedings-Communications*. – 1998. – Vol. 145, № 2. – P. 331–341.
125. Cox D. R. Some statistical methods connected with series of events // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*. – 1955. – Vol. 17, № 2. – P. 129–164.
126. Cox D. R. The theory of stochastic processes / D. R. Cox, H. D. Miller. – New York: Wiley, 1965. – 398 p.
127. Cox D. Point processes / D. Cox, V. Isham. – Chapman and Hall, 1980. – 181 p.
128. Czachorski T. On stochastic models of Internet traffic / T. Czachorski, J. Domanska, M. Pagano // *Communications in Computer and Information Science*. – 2015. – Vol. 564. – P. 289–303.
129. Daley D. J. An introduction to the theory of point processes / D. J. Daley, D. Vere-Jones. – New York: Springer-Verlag, 1988. – 471 p.
130. Diamond J. E. The MAP/PH/1 retrial queue / J. E. Diamond, A. S. Alfa // *Communications in Statistics Stochastic Models*. – 1998. – Vol. 14. – P. 1151–1177.
131. Dimitrov M. The workload in the MAP/G/1 queue with state-dependent services in heavy traffic // *Информационные технологии и математическое*

моделирование (ИТММ–2018) : материалы XVII Междунар. конф. им. А. Ф. Терпугова. Томск, 10–15 сентября 2018 г. – Томск, 2018. – С. 3–8.

132. Dubois J.-P. Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes // International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering (ICEEC 2004) : proc. of the int. conf. – Cairo, Egypt, 2004. – P. 116–119.

133. Dudin A. N. Optimal admission control in a queueing system with heterogeneous traffic / A. N. Dudin, V. I. Klimenok // Operations Research Letters. – 2003. – Vol. 31, № 2. – P. 108–118.

134. Dudin A. N. The MMAP/M/R/0 queueing system with reservation of servers operating in a random environment / A. N. Dudin, A. A. Nazarov // Problems of Information Transmission. – 2015. – Vol. 51, № 3. – P. 289–298.

135. Erlang A. K. The theory of probabilities and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. Seria B. – 1909. – Vol. 20. – P. 33–39.

136. Erlang A. K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // Elektroteknikeren. – 1917. – Vol. 13. – P. 5–13.

137. Erramilli A. Experimental queueing analysis with long-range dependent packet traffic / A. Erramilli, O. Narayan, W. Willinger // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1996. – Vol. 4, № 2. – P. 209–223.

138. Fernandez-Alcala R. Recursive linear estimation for doubly stochastic Poisson processes / R. Fernandez-Alcala, J. Navarro-Moreno, J. C. Ruiz-Molina, A. Oya // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. – 2007. – Vol. 2166. – P. 894–897.

139. Fowler H. J. Local area network traffic characteristics, with implications for broadband network congestion management / H. J. Fowler, W. E. Leland // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1991. – Vol. 9, № 7. – P. 1139–1149.

140. Fry T. C. The theory of probability as applied to problems of congestion, probability and its engineering uses / T. C. Fry. – New York: Van Nostrand, 1928. – 321 p.

141. Genaro A. Estimating doubly stochastic Poisson process with affine intensities by Kalman filter / A. Genaro, A. Simonis // *Statistical Papers*. – 2015. – Vol. 56, is. 3. – P. 723–748.
142. Gortsev A. M. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors / A. M. Gortsev, L. A. Nezhel'skaya, T. I. Shevchenko // *Russian Physics Journal*. – 1993. – Vol. 36, № 12. – P. 1153–1167.
143. Gortsev A. M. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events / A. M. Gortsev, L. A. Nezhelskaya // *Discrete Mathematics and Applications*. – 2011. – Vol. 21, № 3. – P. 283–290.
144. Gortsev A. M. Optimal state estimation in MAP-event flows with unextendable dead time / A. M. Gortsev, L. A. Nezhel'skaya, A. A. Solov'ev // *Automation and Remote Control*. – 2012. – Vol. 73, is. 8. – P. 1316–1326.
145. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes / J. Grandell. – BerlinHeidelberg: Springer-Verlag, 1976. – 240 p.
146. Heyman D. Modelling multiple IP traffic streams with rate limits / D. Heyman, D. Lucantoni // *IEEE ACM Transactions on Networking*. – 2003. – Vol. 11. – P. 948–958.
147. Hossain M. M. Approximate methods in Bayesian point process spatial models / M. M. Hossain, A. B. Lawson // *Computational Statistics and Data Analysis*. – 2009. – Vol. 53 (8). – P. 2831–2842.
148. Ireland R. Optimal control of customer-flow through a system of parallel queues / R. Ireland, M. E. Thomas // *International Journal of Systems Science*. – 1972. – Vol. 2, is. 4. – P. 401–410.
149. Karagiannis T. SELFIS: A tool for self-similarity and long-range dependence analysis / T. Karagiannis, M. Faloutsos // In: *1st Workshop on Fractals and Self-Similarity in Data Mining: Issues and Approaches (in KDD)*, Edmonton, Canada. – 2002.
150. Kelly F. P. Networks of queues // *Advances in Applied Probability*. – 1976. – Vol. 8, is. 2. – P. 416–432.

151. Kendall D. G. Some problems in the theory of queues // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. – 1951. – Vol. 13, № 2. – P. 151–185.

152. Khamisy A. Discrete-time priority queues with two-state Markov Modulated arrivals / A. Khamisy, M. Sidi // Stochastic Models. – 1992. – Vol. 8, is. 2. – P. 337–357.

153. Kim C. The MAP/PH/1/N queue with flows of customers as a model for traffic control in telecommunication networks / C. Kim, S. Dudin, V. Klimenok // Performance Evaluation. – 2009. – Vol. 66, № 9. – P. 564–579.

154. Kingman J. F. C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1964. – Vol. 60, is. 4. – P. 923–930.

155. Klemm A. Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process / A. Klemm, C. Lindermann, M. Lohmann // Performance Evaluation. – 2008. – Vol. 54. – P. 149–173.

156. Klimenok V. Tandem queueing system with correlated input and cross-traffic / V. Klimenok, A. Dudin, V. Vishnevsky // Communications in Computer and Information Science. – 2013. – Vol. 370. – P. 416–425.

157. Leland W. E. High time-resolution measurement and analysis of LAN traffic: implications for LAN interconnection / W. E. Leland, D. V. Wilson // Proceedings of the IEEE INFOCOM'91, Bal Harbour, FL. – 1991. – P. 1360–1366.

158. Leland W. On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version) / W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger, D. Wilson // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1994. – Vol. 2, № 1. – P. 1–15.

159. Lindgren G. Recursive estimation of parameters in Markov-modulated Poisson processes / G. Lindgren, U. Hoist // IEEE Transactions on Communications. – 1995. – Vol. 43, № 11. – P. 2812–2820.

160. Livshits K. Steady state probabilistic characteristics of the on/off production rate control production-inventory system with MMPP demand arrivals / K. Livshits, A. Kitaeva, E. Ulyanova // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912. – P. 248–262.

161. Lucantoni D. M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.
162. Lucantoni D. M. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue / D. M. Lucantoni, M. F. Neuts // Communications in Statistics Stochastic Models. – 1994. – Vol. 10. – P. 575–598.
163. Melikov A. Z. Approximate method for analysis of queuing models with jump priorities / A. Z. Melikov, L. A. Ponomarenko, Ch. S. Kim // Automation and Remote Control. – 2013. – Vol. 74, is. 1. – P. 62–75.
164. Melikov A. Perishable queuing inventory systems with delayed feedback / A. Melikov, A. Krishnamoorthy, M. Shahmaliyev // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912. – P. 55–70.
165. Mikheev P. Modeling of a multi-link transport connection by a network of queuing systems / P. Mikheev, A. Pichugina, S. Suschenko // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 912. – P. 274–289.
166. Miller R. Priority queues // Annals of Mathematical Statistics. – 1960. – Vol. 31. – P. 86–103.
167. Moiseev A. Investigation of the high intensive Markov-modulated Poisson process / A. Moiseev, A. Nazarov // On Application Of Information And Communication Technology And Statistics In Economy And Education (ICAICTSEE-2012) : proc. of the int. conf. – Sofia: University Of National and World Economy, 2012. – P. 72–77.
168. Neuts M. F. A queue subject to extraneous phase channels // Advances in Applied Probability. – 1971. – Vol. 3, № 1. – P. 78–119.
169. Neuts M. F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – Vol. 16. – P. 764–779.
170. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // Communications in Computer and Information Science. – 2015. – V. 564. – P. 141–151.

171. Nezhel'skaya L. A. Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 59, № 5. – P. 651–662.

172. Nezhelskaya L. Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability / L. Nezhelskaya, E. Sidorova // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912 : Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Selected Papers of the 17th Int. Conf. ITMM 2018, WRQ 2018. Tomsk, Russia, September 10–13, 2018. – P. 157–171.

173. Nezhelskaya L. A. Estimation of the probability density parameters of the values of inter-event interval duration in recurrent synchronous generalized flow of the second order by the method of moments / L. A. Nezhelskaya, M. Pagano, E. F. Sidorova // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2019) : материалы Междунар. науч. конф. Москва, 23–27 сентября 2019 г. – Москва, 2019. – С. 156–163.

174. Nezhelskaya L. Estimation of the probability density parameters of the interval duration between events in correlated synchronous generalized flow of the second order / L. Nezhelskaya, M. Pagano, E. Sidorova // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109 : Revised Selected Papers of the 18th Int. Conf. ITMM 2019. Saratov, Russia, June 10–13, 2019. – P. 202–216.

175. Normey-Rico J. E. Control of dead-time process / J. E. Normey-Rico. – London: Springer-Verlag, 2007. – 462 p.

176. O'Dell G. F. Theoretical principles of the traffic capacity of automatic switches // Post Office Electrical Engineers' Journal. – 1920. – Vol. 13. – P. 209–223.

177. Okamura H. Markovian arrival process parameter estimation with group data / H. Okamura, T. Dohi, K. S. Trivedi // IEEE/ACM Transactions on Networking (TON). – 2009. – Vol. 17, № 4. – P. 1326–1339.

178. Palm C. Analysis of the Erlang traffic formula for busy-signal arrangements // Ericsson Technics. – 1938. – Vol. 5, № 9. – P. 39–58.

179. Pollaczek F. Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés // *Mémorial des sciences mathématiques*. – 1957. – Vol. 136. – P. 1–123.
180. Riordan J. Stochastic service systems / J. Riordan. – New York: John Wiley & Sons, 1962. – 139 p.
181. Romani J. A queueing model with a variable number of channels // *Trabajos de estadística*. – 1957. – Vol. 8, № 3. – P. 175–189.
182. Ross K. W. Multiservice loss networks for broadband telecommunications networks / K. W. Ross. – New York: Springer-Verlag, 1995. – 343 p.
183. Rydén T. Parameter estimation for Markov modulated Poisson processes // *Stochastic Models*. – 1994. – Vol. 10, № 4. – P. 795–829.
184. Singh V. F. Queue-dependent servers // *Journal of Engineering Mathematics*. – 1973. – Vol. 7, № 2. – P. 123–126.
185. Slimane S. B. A doubly stochastic Poisson model for self-similar traffic / S. B. Slimane, T. Le-Ngoc // *Proceedings IEEE International Conference on Communications ICC'95, Seattle, WA, USA*. – 1995. – P. 456–460.
186. Snyder D. Filtering and detection for doubly stochastic Poisson processes // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 1972. – Vol. IT-18. – P. 91–102.
187. Snyder D. L. Random point processes in time and space / D. L. Snyder, M. I. Miller. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. – 481 p.
188. Syski R. Introduction to congestion theory in telephone systems / R. Syski. – Edinburgh and London: Oliver and Boyd, 1960. – 742 p.
189. Takács L. M. Introduction to the theory of queues / L. M. Takács. – New York: Oxford University Press, 1962. – 584 p.
190. Takine T. An analysis of a discrete-time queue for broadband ISDN with priorities among traffic classes / T. Takine, B. Sengupta, T. Hasegawa // *IEEE Transactions on Communications*. – 1994. – Vol. 42, is. 234. – P. 1837–1845.
191. Trivedi K. S. Probability and statistics with reliability, queuing and computer science applications / K. S. Trivedi. – New York: John Wiley & Sons, 2001. – 848 p.

192. Vishnevsky V. M. Methods of performance evaluation of broadband wireless networks along the long transport routes / V. M. Vishnevsky, A. N. Dudin, D. V. Kozyrev, A. A. Larionov // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 638. – P. 354–365.

193. Vishnevsky V. M. Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks / V. M. Vishnevsky, O. V. Semenova. – London: Academic Publishing, 2012. – 316 p.

194. Yadin M. Queueing systems with a removable service station / M. Yadin, P. Naor // Journal of the Operational Research Society. – 1963. – Vol. 14, is. 4. – P. 393–405.

195. Yadin M. On queueing systems with a variable service capacities / M. Yadin, P. Naor // Naval Research Logistics Quarterly. – 1967. – Vol. 14, is. 1. – P. 43–53.

196. Zadorozhnyi V. N. Methods of simulation queueing systems with heavy tails / V. N. Zadorozhnyi, T. R. Zakharenkova // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 638. – P. 382–396.

197. Zadorozhnyi V. N. Estimation of prioritized disciplines efficiency based on the metamodel of multi-flows queueing systems / V. N. Zadorozhnyi, T. R. Zakharenkova, D. A. Tulubaev // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 912. – P. 290–304.

Приложение А

(обязательное)

Имитационная модель потока

Имитационная модель обобщенного синхронного потока второго порядка разработана на языке C# в среде Microsoft Visual Studio по формулам, полученным методом обратных функций [96], согласно которому формула моделирования длительностей интервалов между соседними событиями в потоке имеет вид: $\tau = -\frac{1}{\beta_i} \ln(1 - \gamma)$, $\beta_i \in \{\lambda_i, \alpha_i\}$, где γ – равномерно распределенная на $(0;1)$ случайная величина, λ_i , α_i – параметры экспоненциального распределения случайных величин $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)}$, $i = 1, 2$, соответственно.

Применение математического аппарата имитационного моделирования для исследования сложных систем, изучаемых в рамках ТМО, позволяет проводить желаемое число экспериментов и испытаний с различными входными параметрами и оценивать характеристики системы в определенные моменты времени. При этом для имитационного моделирования, как вида компьютерного моделирования, характерно воспроизведение (имитация) на ЭВМ процесса функционирования рассматриваемых систем с наглядным (визуальным) представлением результатов.

Процесс моделирования системы можно условно разделить на три последовательно (но не строго поступательно) выполняемых этапа – между этапами существует как прямая, так и обратная связь, которая, в свою очередь, обеспечивает уточнение, корректировку и учет дополнительной информации:

- 1) построение математической модели системы;
- 2) разработка алгоритма и построение имитационной модели;
- 3) исследование исходной системы с помощью построенной модели, а именно: проведение статистических экспериментов, обработка и интерпретация результатов имитационного моделирования.

Иллюстрация процесса приведена в виде схемы (рисунок А.1):

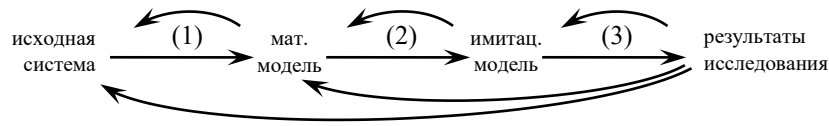


Рисунок А.1 – Схема процесса моделирования системы

На рисунке А.2 представлена блок-схема имитационной модели обобщенного синхронного потока событий второго порядка, на рисунке А.3 приводится усложнение модели в рамках введения мертвого времени.

При построении схем использованы обозначения:

- $l1, l2$ и $a1, a2$ – параметры $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}$ и $\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}$ соответственно;
- $P1, P2, P3, P4$ и $P5, P6, P7, P8$ – вероятности $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1), P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1), P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_2), P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_2)$ и $P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1), P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_2), P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_2)$ соответственно;
- Tm – время моделирования (время наблюдения за потоком);
- t – момент наступления события потока;
- $tau1, tau2$ – длительности интервалов между событиями потока, определяемые в соответствии с разными случайными величинами;
- f – текущее состояние сопровождающего процесса $\lambda(t)$ (потока);
- $u1, u2, x1, x2, x3$ – значения сгенерированной с помощью датчика псевдослучайных чисел равномерно распределенной на $(0;1)$ случайной величины;
- n – количество событий, наступивших в исходном обобщенном синхронном потоке второго порядка;
- $tdead$ – момент окончания периода ненаблюдаемости.

Результатом испытания имитационной модели в обоих случаях является последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots < T_m$, образующая вектор $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k, \dots)$ размерности n – в условиях доступности наблюдению всех событий исходного потока, размерности p – в условиях наличия искажающего фактора, $p < n$; t_k – момент наступления k -го события в наблюдаемом потоке, $k = \overline{1, n}$ или $k = \overline{1, p}$. В обозначениях $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k, \dots)$.

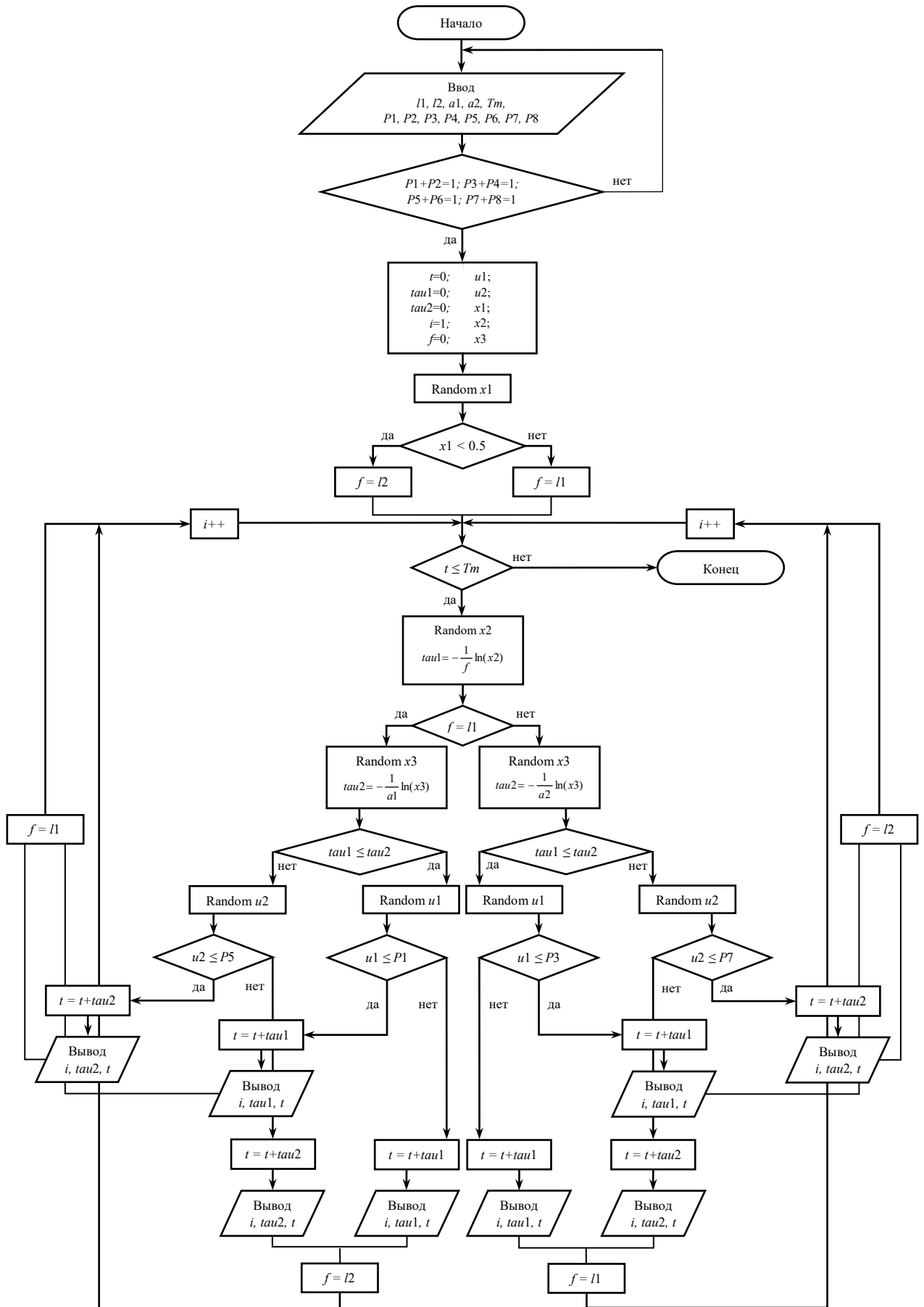


Рисунок А.2 – Блок-схема имитационной модели
обобщенного синхронного потока событий второго порядка

Таким образом, алгоритм имитационного моделирования потока в условиях его полной наблюдаемости подразумевает:

- 1) ввод параметров, определяющих поток, и проверку их корректности согласно условиям $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i) + P_1^{(l)}(\lambda_i | \lambda_i) = 1, i, j = 1, 2, l = 1, 2, i \neq j$;
- 2) розыгрыш начального состояния потока с применением датчика псевдослучайных чисел при проверке условия;
- 3) генерирование значения длительности интервала между событиями потока в текущем i -ом состоянии как минимума значений, вычисленных согласно полученной в соответствии с [96] формуле при подстановке в нее параметров λ_i, α_i распределения случайных величин $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, i = 1, 2$;
- 4) определение момента наступления очередного события как элемента t и установление соответствующего состояния потока;
- 5) повторение шагов 3 – 4, пока момент времени наступления текущего события потока t не превысит значение времени моделирования T_m .

При построении модели потока, функционирующего в условиях частичной наблюдаемости, к полученной последовательности $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n < T_m$ применяется описанная в главе 3 схема создания мертвого времени (рисунок А.3).

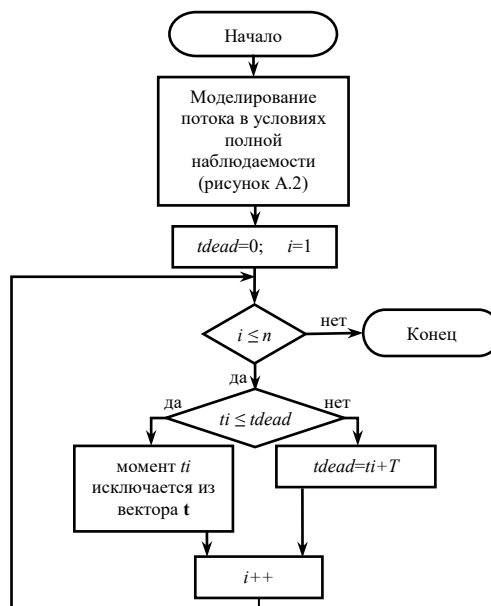


Рисунок А.3 – Блок-схема имитационной модели потока, учитывающей наличие непродлевающегося мертвого времени

Приложение Б

(рекомендуемое)

Испытания имитационной модели

Адекватность применяемой в диссертации модели потока, корректность и непротиворечивость численных результатов оценивания, получаемых посредством ее использования, устанавливаются следующими экспериментами.

Первый эксперимент заключается в проверке сообразности результатов (таблица Б.2) в условиях полной наблюдаемости потока (отсутствия мертвого времени), то есть $T = 0$. Фиксируются значение времени моделирования (времени наблюдения за потоком) $T_m = 100$ и исходные данные, приведенные в таблице Б.1.

Таблица Б.1 – Модельные данные

$\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = 2$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,2$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,8$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,4$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,6$
$\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 1$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,7$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,3$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,9$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,1$

Таблица Б.2 – Результаты первого эксперимента

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	...	t_{327}
t_{flow}	0,0587	0,1506	0,3252	0,7289	1,0930	1,2034	1,2867	1,7695	1,8594	...	99,6587
S	S_1	S_2	S_2	S_1	S_2	S_2	S_1	S_1	S_2	...	S_1
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	...	t_{327}
t	0,0587	0,1506	0,3252	0,7289	1,0930	1,2034	1,2867	1,7695	1,8594	...	99,6587

Здесь и далее t_{flow} – значения моментов времени наступления событий в исследуемом потоке, S – состояние $\lambda(t)$, в которое процесс переходит (или в котором остается) в момент наступления очередного события, t – значения моментов наступления событий в наблюдаемом потоке. В эксперименте (таблица Б.2) моменты наступления событий в наблюдаемом потоке полностью совпадают с моментами наступления событий в исходном обобщенном синхронном потоке второго порядка, что естественно в силу постановки задачи.

Приведенные в таблице Б.3 результаты второго эксперимента, поставленного для исходных данных таблицы Б.1, $T_m = 100$, $T = 0,5$, позволяют отметить существенное сокращение числа событий в наблюдаемом потоке (в сравнении с первым экспериментом) за счет введения непродлевающего мертвого времени фиксированной длительности. В таблице Б.3 и далее в таблице Б.5 темной штриховкой отмечены события исходного потока, потерянные в соответствующие моменты времени. Таблица Б.5 содержит результаты, полученные для исходных данных, представленных в таблице Б.4. В совокупности данные таблиц Б.3 и Б.5 отражают зависимость между параметрами потока (λ_1 , λ_2 , α_1 , α_2 и вероятностями $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$) и количеством событий в исходном потоке, наступающих в процессе реализации испытания модели, а также количеством событий в наблюдаемом потоке.

Таблица Б.3 – Результаты второго эксперимента

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	...	t_{329}
t_{flow}	0,1192	0,2187	0,5474	0,7168	0,9811	1,5483	1,7438	2,3463	2,4658	...	99,5303
S	S_2	S_2	S_2	S_2	S_1	S_2	S_1	S_1	S_1	...	S_2
	t_1			t_2		t_3		t_4		...	t_{128}
t	0,1192			0,7168		1,5483		2,3463		...	99,5303

Таблица Б.4 – Модельные данные

$\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 3$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,2$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,8$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,4$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,6$
$\alpha_1 = 4$ $\alpha_2 = 2$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,3$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,7$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,1$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,9$

Таблица Б.5 – Результаты второго эксперимента

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	...	t_{511}
t_{flow}	0,1259	0,6695	0,7668	0,9543	1,1119	1,2198	1,7522	1,8425	1,9982	...	99,1119
S	S_2	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	...	S_1
	t_1	t_2				t_3	t_4			...	t_{150}
t	0,1259	0,6695				1,2198	1,7522			...	98,8273

Полученные в таблицах Б.3 и Б.5 численные результаты свидетельствуют о том, что в связи с увеличением значений параметров потока λ_i и α_i , $i=1,2$, отмечается увеличение количества наступивших в потоке событий, однако в наблюдаемом потоке количество событий в относительном отношении сократилось ($128/329 > 150/511$) ввиду наличия мертвого времени.

Оценка значения длительности интервала между событиями в потоке при наличии мертвого времени определяется в третьем эксперименте следующим образом. При фиксированных значениях параметров потока, времени моделирования $T_m = 100$ и количестве повторений эксперимента $N = 100$ для k -ой реализации определяется оценка (выборочное среднее) значения длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке $\hat{\tau}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{r=1}^{n_k} \tau_r^{(k)}$,

где $k = \overline{1, N}$, $\tau_r^{(k)}$ – значение длительности r -ого интервала между событиями в k -ой реализации потока, n_k – количество интервалов за время T_m . На основании полученного набора $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N$ вычисляется оценка среднего значения длительности интервала между событиями в обобщенном синхронном потоке второго порядка при неполной его наблюдаемости $\hat{\tau} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \hat{\tau}_r$. Результаты,

полученные для заданных в таблице Б.6 значений, приведены в таблице Б.7.

Таблица Б.6 – Модельные данные

$\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 3$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,5$	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,5$
	$P_1^{(1)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,4$	$P_1^{(1)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,6$
$\alpha_1 = 4$ $\alpha_2 = 2$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0,6$	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_1) = 0,4$
	$P_1^{(2)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0,5$	$P_1^{(2)}(\lambda_1 \lambda_2) = 0,5$

Таблица Б.7 – Результаты третьего эксперимента

T	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\hat{\tau}$	0,4641	0,5656	0,6687	0,7689	0,8663	0,9683	1,0646	1,1645	1,2634	1,3614	1,4627
$\hat{\tau}/T$	1,5470	1,4140	1,3374	1,2815	1,2376	1,2104	1,1829	1,1645	1,1485	1,1345	1,1252

Оценка среднего значения длительности интервала между событиями в наблюдаемом потоке $\hat{\tau}$ при заданном наборе параметров прямо пропорциональна значению мертвого времени T , чему полностью соответствуют результаты работы имитационной модели (таблица Б.7). Отметим, что при увеличении T значение отношения $\hat{\tau}/T$ уменьшается и стремится к некоторой константе.

Предметом исследования следующих двух экспериментов являются оценки значений длительностей пребывания $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i = 1, 2$. Для k -ой реализации находятся $\hat{T}_i^{(k)}$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, N}$, – суммы значений длительностей всех интервалов, в течение которых имеют место состояния S_i процесса $\lambda(t)$, $i = 1, 2$. С использованием полученной выборки $\hat{T}_i^{(1)}, \hat{T}_i^{(2)}, \dots, \hat{T}_i^{(N)}$ оценки определяются как $\hat{T}_i = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \hat{T}_i^{(r)}$, $i = 1, 2$. В экспериментах устанавливаются зависимости $\hat{T}_i$, $i = 1, 2$, от количества реализаций N и значений $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$, соответственно; расчеты производились при $T_m = 100$.

В качестве исходных данных для проведения четвертого эксперимента взяты данные таблицы Б.8; отметим, что в данном случае рассматривается частный случай задания вероятностей $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$, согласно которому имеют место переходы $\lambda(t)$ из первого состояния во второе, либо наоборот, в каждый момент наступления события. Результаты имитационного моделирования в рамках описанного эксперимента представлены в таблице Б.9.

Таблица Б.8 – Модельные данные

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$	$P_1^{(l)}(\lambda_i \lambda_i) = 0$	$i = 1, 2, l = 1, 2$
$\alpha_1 = 0,8, \alpha_2 = 0,6$	$P_1^{(l)}(\lambda_j \lambda_i) = 1$	$i, j = 1, 2, i \neq j, l = 1, 2$

Таблица Б.9 – Результаты четвертого эксперимента

N	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{T}_1$	37,2548	36,5535	36,9937	36,9760	37,1792	37,2124	36,9136	37,1121	37,0087	37,0662
$\hat{T}_2$	62,2352	62,9068	62,4192	62,4939	62,2719	62,2993	62,5643	62,5034	62,5825	62,4177

Анализируя результаты, отраженные в таблице Б.9, отмечаем колебательное поведение $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, однако, при существенном увеличении количества реализаций каждая из оценок устанавливается в пределах своего стационарного значения, соответствующего входным параметрам потока (таблица Б.8).

Полученные при исходных данных таблицы Б.10 результаты пятого эксперимента приведены в таблице Б.11, в первой строке которой указаны значения вероятностей $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P$, $0 \leq P \leq 1$. В настоящем эксперименте количество реализаций фиксированно, $N = 100$.

Таблица Б.10 – Модельные данные

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$	$P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_1) = 0; 0,1; \dots; 1$	$P_1^{(l)}(\lambda_2 \lambda_1) = 1 - P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_1)$
$\alpha_1 = 0,8, \alpha_2 = 0,6$	$P_1^{(l)}(\lambda_2 \lambda_2) = 0, l = 1, 2$	$P_1^{(l)}(\lambda_1 \lambda_2) = 1, l = 1, 2$

Таблица Б.11 – Результаты пятого эксперимента

P	0	0,1	0,2	0,3	...	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\hat{T}_1$	37,0357	39,8866	43,0757	46,6970	...	60,1916	67,2245	74,4207	85,8957	99,3231
$\hat{T}_2$	62,4241	60,6946	57,4286	53,8189	...	40,3793	33,2874	26,1034	14,7441	0,3131

Полученные на имитационной модели численные результаты эксперимента свидетельствуют о сильной чувствительности оценок значений длительностей пребывания $\lambda(t)$ в i -ом состоянии, $i = 1, 2$, к изменениям значений $P_1^{(l)}(\lambda_1 | \lambda_1)$ и $P_1^{(l)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $l = 1, 2$, согласно которым $\lambda(t)$ либо переходит из первого состояния во второе, либо остается в первом (в зависимости от значений $\xi_1^{(l)}$, $l = 1, 2$). Рассмотренный эксперимент может быть проделан в аналогичных условиях при измененных значениях λ_i , α_i , $i = 1, 2$, и $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P$, $0 \leq P \leq 1$, в результате чего будет иметь место аналогичная ситуация, а именно: сильная зависимость $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ от значений $P_1^{(l)}(\lambda_2 | \lambda_2)$ и $P_1^{(l)}(\lambda_1 | \lambda_2)$, $l = 1, 2$. Этот факт позволяет обобщить результат и сделать вывод о сильной чувствительности оценок $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ к вариациям значений вероятностей $P_1^{(l)}(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$, $l = 1, 2$.

Приложение В

Акт о внедрении результатов диссертации в учебный процесс НИ ТГУ

“УТВЕРЖДАЮ”

Проректор по образовательной

деятельности НИ ТГУ

В. В. Демин

« 18 » октября 20 19 г.

АКТ

о внедрении результатов кандидатской диссертации Сидоровой Е. Ф. в учебный процесс НИ ТГУ

Настоящим подтверждается, что результаты диссертации Е. Ф. Сидоровой “Оценивание состояний, параметров распределения и длительности мертвого времени в обобщенном синхронном потоке событий второго порядка”, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.01 – “Системный анализ, управление и обработка информации”, используются в учебном процессе в институте прикладной математики и компьютерных наук (ИПМКН) Национального исследовательского Томского государственного университета в курсах лекций образовательных дисциплин “Имитационное моделирование” – для бакалавров 4-го года обучения ИПМКН, “Оценка состояний дважды стохастических потоков событий”, “Оценка параметров дважды стохастических потоков событий”, “Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков” – для магистрантов 2-го года обучения ИПМКН.

Председатель методической комиссии ИПМКН,
д. т. н., профессор

Ю. Л. Костюк

КОПИЯ ВЕРНА
Сверено с оригиналом
Ведущий документовед
управления делами
Н.Г. Михеева