ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертационной работе Рады Александровны Богдановой «Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Феноменологически симметричные двумерные геометрии задаются на двумерном дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией $f:\mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^s$, где $\mathfrak{S}_f \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, $s=1,2$, сопоставляющей любой паре $\langle i,j \rangle$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f$ одно ($s=1$) или два ($s=2$) действительных числа $f(i,j) \in \mathbb{R}^s$. Метрическая функция f, в отличие от обычной метрики, удовлетворяет только естественным математическим требованиям гладкости, невырожденности и определенности почти всюду в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$. Суть феноменологической симметрии двумерной геометрии состоит в существовании одной связи

$$\Phi(f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)) = 0 \tag{1}$$

для любой допустимой четверки $\langle i,j,k,l \rangle$, если метрическая функция f скалярная ($s=1$) и двух независимых связей

$$\Phi(f(i,j), f(i,k), f(j,k)) = 0, \tag{2}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, для любой допустимой тройки $\langle i,j,k \rangle$, если метрическая функция $f = (f^1, f^2)$ векторная ($s=2$). Многие из таких геометрий имеют содержательную физическую интерпретацию, поэтому большое значение имеет полная их классификация и исследование их свойств. Решению этих задач и разработке соответствующих аналитических методов исследования посвящена диссертационная работа Рады Александровны Богдановой.

Следует заметить, что в пятидесятых годах прошлого века обстоятельное изучение феноменологически симметричных геометрий (хотя так они тогда не назывались) было проведено Л.М. Блюменталем (см. L.M. Blumenthal, Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953) при следующих ограничениях: определенная всюду скалярная функция $f:\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет всем аксиомам обычной метрики (1. $f(i,j) \geq 0$ – положительная определенность; 2. $f(i,j) = f(j,i)$ – симметрия; 3. $f(i,j) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$; 4. $f(i,j) \leq f(i,k) + f(k,j)$ – неравенство треугольника). Самое же сильное ограничение в геометрии расстояний Блюменталя состояло в условии, что уравнение $\Phi = 0$, выражающее феноменологическую симметрию было задано в явном виде. В работе же Рады Александровны нет таких жестких ограничений ни на метрическую функцию, ни на уравнения (1) и (2). В частности, метрическая функция f может быть не только скалярной ($s=1$), но и векторной ($s=2$), аксиомы обычной метрики не обязательны, а уравнение $\Phi = 0$ предполагается только существующим, а не заданным заранее в явном виде.

Первая глава диссертации Рады Александровны носит общевводный характер, так как в ней определяются феноменологически симметричные геометрии произвольной размерности, задаваемые метрической функцией, которая может иметь любое число компонент $(s \geq 1)$. В следующих двух главах общие определения редуцируются применительно к двумерным геометриям, задаваемым скалярной (глава 2) и векторной (глава 3) метрическими функциями. В первой главе формулируется без доказательства теорема о том, что феноменологически симметричные геометрии наделены групповой симметрией максимальной степени, иными словами, являются геометриями с максимальной подвижностью. Основная цель введения общих формулировок и изложения соответствующих общих результатов – облегчить читателю переход к содержанию следующих двух глав, а также дать ему четкое представление о перспективах данного исследования.

Во второй главе из известной классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий (см. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР,1981, Т.260, С.803-805; Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. – Барнаул: БГПУ, 2004, 132 с.) Рада Александровна выделяет три особенные геометрии, называемые гельмгольцевыми. Их метрические функции могут быть записаны через обычные комплексные числа (плоскость Гельмгольца), двойные числа (псевдогельмгольцева плоскость) и дуальные числа (дуальногельмгольцева плоскость). Однако уравнения (1), выражающие феноменологическую симметрию, в явном виде неизвестны, а их существование подтверждается рангом соответствующей функциональной матрицы, который равен 4. Изучению аналитическими методами групповых свойств трех гельмгольцевых геометрий и посвящена вторая глава диссертации.

Движением в двумерной геометрии называется такое гладкое локально обратимое преобразование $\lambda : \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_2$ многообразия $\mathfrak{M}_2$, которое сохраняет задающую ее метрическую функцию:

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(i, j). \tag{3}$$

При известной метрической функции условие (3) становится функциональным уравнением на множество движений. Решая развитыми ею аналитическими методами уравнение (3), Рада Александровна, прежде всего, установила, что всякое движение гельмгольцевых геометрий задается линейным преобразованием, что заранее не предполагалось и не было очевидным. Все же множество движений оказалось группой, зависящей существенным образом от трех независимых параметров. Таким образом, феноменологически симметричные двумерные геометрии наделены групповой симметрией степени 3, то есть являются геометриями с максимальной подвижностью. При известной же группе преобразований условие (3) может рассматриваться как функциональное уравнение на ее двухточечные инварианты. Тем же аналитическим методом Рада Александровна нашла все двухточечные инварианты групп движений гельмгольцевых двумерных геометрий и установила, что они совпадают с соответствующими метрическими функциями с точностью до гладкого преобразования $\chi(f) \to f$. Заметим, что этот результат не верен для произвольной геометрии, но характерен именно для феноменологически симметричных геометрий.

В третьей главе Рада Александровна усовершенствованным ею аналитическим методом построила полную классификацию двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий как решение более общего функционального уравнения (2). Одна из этих геометрий имеет содержательную физическую интерпретацию в термодинамике, обнаруженную самой Радой Александровной. Поскольку двухкомпонентная функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ в уравнении (2) не задана явно, ее существование означает, что ранг отображения

$$\langle i,j,k\rangle \to \langle f^1(i,j), f^2(i,j), f^1(i,k), f^2(i,k), f^1(j,k), f^2(j,k)\rangle \subset \mathbb{R}^6 \tag{4}$$

не может быть произвольным. Как строго доказала Рада Александровна, он точно равен 4. Системы функционально-диффернциальных соотношений и вытекающих из них дифференциальных уравнений есть прямое следствие свойств функциональной матрицы отображения (4). Получив три различных выражения для двухкомпонентной метрической функции, Рада Александровна провела тщательное исследование на их взаимную эквивалентность. Эта новая задача сводится к решению более сложного, чем уравнение (3), функционального уравнения вида

$$f(\varphi(i), \varphi(j)) = \chi(g(i, j)), \tag{5}$$

где $f = (f^1, f^2)$, $g = (g^1, g^2)$ – сопоставляемые метрические функции, $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ – функция, вводящая новую систему координат в двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$, а $\chi = (\chi^1, \chi^2)$ – функция, устанавливающая так называемое масштабное преобразование одной из метрических функций. Эквивалентность будет тогда, когда функциональное уравнение (5) относительно φ и χ имеет нетривиальное решение. В полученной классификации неэквивалентными оказались только два выражения, что подтверждает полноту этой классификации, проведенной также и групповым методом, отличным от аналитического.

Для одной из двуметрических геометрий Рада Александровна находит решением функционального уравнения (3) группу движений, определяющей ее групповую симметрию максимальной степени равной 2. По группе движений затем определяется все ее двухточечные инварианты, которые, как и следовало ожидать, совпадают с метрической функцией с точностью до гладкого преобразования $\chi(f) \to f$.

Основная цель диссертационной работы – развитие аналитических методов исследования феноменологически симметричных двумерных геометрий – ее автором успешно достигнута, причем в перспективе эти методы могут быть использованы для независимой классификации феноменологически симметричных геометрий более высокой размерности, задаваемых метрической вектор-функцией f с любым числом компонент $(s \geq 1)$.

Доктор физико-математических наук,
профессор

Г.Г. Михайличенко

20.02.2014 г.

Подпись Михайличенко
заверяю. Специалист УК Г.Г.
Вахова А.С.
«20» 02 2014 г.