

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«ГОРНО-АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

на правах рукописи



Богданова Рада Александровна

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕКОТОРЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ
СИММЕТРИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ**

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Г.Г. Михайличенко

Горно-Алтайск – 2014

Оглавление

Основные обозначения	4
Введение	5
1 Основные определения	37
1.1 Феноменологическая и групповая симметрии одномерной геометрии	37
1.2 Феноменологическая симметрия в геометрии	46
1.3 Групповая симметрия в геометрии	52
1.4 Эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии	55
1.5 Примеры: плоскость и пространство Евклида	58
1.6 Методы классификации феноменологически симметричных геометрий и анализ полученных результатов	67
2 Группы движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий	71
2.1 Определение феноменологически симметричных двумерных геометрий и их классификация	71
2.2 Группа движений как решение функционального уравнения	81
2.3 Группа движений плоскости Гельмгольца	86
2.4 Группа движений псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей	91

2.5	Метрическая функция как двухточечный инвариант группы движений	99
3	Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии	109
3.1	Определение двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий	109
3.2	Аналитические методы классификации	116
3.3	Анализ полученного результата	127
3.4	Группа движений и ее двухточечный инвариант	133
3.5	Физическая интерпретация	139
	Заключение	143
	Литература	144

Основные обозначения

$\mathfrak{M}_{sn}$	sn –мерное многообразие;
i, j, k	точки многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$;
$x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}$	локальные координаты точки $i \in \mathfrak{M}_{sn}$;
$U(i)$	окрестность точки i ;
$f(i, j), \lambda(i, j)$ и т.п.	есть сокращенные обозначения некоторых функций $f(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{sn}),$ $\lambda(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{sn})$ и т.п.;
$\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i^1}$	есть частная производная функции $f(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{sn})$ по координате x_i^1 ;
$\triangleq$	равенство по определению.

Уточним приведенные выше обозначения для случаев $n = 1, s = 2$ и $n = 2, s = 1$:

$\mathfrak{M}_2$	двумерное многообразие;
x_i, y_i	локальные координаты точки $i \in \mathfrak{M}_2$;
$f(i, j), \lambda(i, j)$ и т.п.	есть некоторые функции соответственно $f(x_i, y_i, x_j, y_j), \lambda(x_i, y_i, x_j, y_j)$ и т.п.;
$\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i}$	есть частная производная функции $f(x_i, x_j, y_i, y_j)$ по координате x_i ;
$\lambda_x(i), \lambda_y(i)$ и т.п.	соответственно частные производные функции $\lambda(x_i, y_i)$ по координатам x_i, y_i , то есть $\frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i},$ $\frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial y_i}.$

Эти обозначения и примененные помимо них в тексте приведены по монографиям Г.Г. Михайличенко [35], [37] и способствуют краткости изложения.

Введение

Актуальность темы. В настоящей работе осуществлено развитие аналитических методов классификации некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий. На *феноменологическую симметрию* в геометрии впервые особое внимание обратил Ю.И. Кулаков [16], сделав ее основным принципом *теории физических структур* (см. [17], [19]). Феноменологически симметричные геометрии представляют собой синтез двух классических подходов к построению геометрии: групповой и метрический, которые на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Ф. Клейна, А. Пуанкаре, С. Ли, А. Кэли и др.) являются предметом и инструментом исследования в теории функций, представлений групп Ли, римановой геометрии и других разделов математики. Сущность феноменологической симметрии состоит в том, что в n -мерном пространстве между всеми взаимными расстояниями для $n + 2$ произвольных точек имеется функциональная связь (см. [3], [43], [16], [19]). Первоначально феноменологическая симметрия была установлена при анализе строения второго закона Ньютона в механике и закона Ома в электродинамике (см. [15], [18]), а затем перенесена в геометрию. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы" Ф. Клейна [13], согласно которой геометрия есть теория инвариантов некоторой группы преобразований данного многообразия.

Начиная с 60-ых годов XX века наряду с такими направлениями как метрическая геометрия или "геометрия расстояний" (представленная в фундаментальных трудах Н. Busemann [44], [45], А. Д. Александрова [1], L. M. Blumenthal [43], Ю. Г. Решетняка [41], Ю. Д. Бураго [4], В. В. Phadke [45], W. Ballmann [42], А. Papadopoulos [49], M. Bridson [46], А. Naeffiger [46] и их учеников), геометрия постоянной кривизны или мак-

симметричной подвижности (представленная в работах Д.В. Алексеевского, Э. Б. Винберга, А. С. Солодовникова [2]), появилась феноменологически симметричная геометрия в рамках более общей концепции – теории физических структур, которая в настоящее время активно развивается Новосибирской (Ю. И. Кулаков, А. А. Симонов и др.), Горно-Алтайской (Г. Г. Михайличенко, В. А. Кыров и др.) и Московской (Ю. С. Владимиров, А. В. Карнаухов и др.) научными школами. Метрические (К. Менгер, L.M. Blumenthal [43]) и групповые (Г. Гельмгольц [9], Ф. Клейн [13], А. Пуанкаре [40]) задания геометрии оказываются в известном смысле эквивалентными, что отмечено Г.Г. Михайличенко и G.P. Wene в работах [29] и [50]. То есть феноменологически симметричные геометрии наделены групповой симметрией в смысле Клейна, о которой говорится в "Эрлангенской программе" (1873 г.). В частности, феноменологически симметричные n -мерные геометрии – это геометрии Клейна с максимальной подвижностью, равной $n(n + 1)/2$, в которых имеется функциональная связь между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n + 2$ точек.

Заметим, что в работах по геометрии расстояний (см. L.M. Blumenthal, К. Менгера) было установлено, что если метрическое пространство таково, что для любой четверки точек этого пространства шесть чисел – расстояний между ними удовлетворяет тому же тождеству, что и расстояния между четырьмя точками на евклидовой плоскости, то при некоторых естественных дополнительных ограничениях это пространство совпадает с обычной евклидовой плоскостью. Аналогичный результат верен для сферы и плоскости Лобачевского.

Существенным отличием феноменологической симметрии от геометрии расстояний является то, что вид зависимости между всеми вза-

имными расстояниями для произвольных $n + 2$ точек не предполагается заранее известным.

Классификация и исследование феноменологически симметричных геометрий является одной из главных задач теории физических структур. Их решение используется в современной теоретической физике для обоснования размерности и метрики пространства-времени, развития нового подхода к описанию физических взаимодействий и их объединения, формулировки нового взгляда на спинорные свойства элементарных частиц (см. [5], [6], [7]). Аналитические методы используются при решении *специальных функциональных и функционально-дифференциальных уравнений*, что представляет собой одну из давних проблем математического анализа, которой уделяли большое внимание многие математики (в их числе Эйлер, Даламбер, Гаусс, Коши, Абель и Дарбу), разрабатывая методы их решения.

Двумерные феноменологически симметричные геометрии (см. [34], [37], [47]) строятся на двумерном дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}_2$, класс гладкости которого предполагается достаточным для всех дальнейших построений. Точки этого многообразия $\mathfrak{M}_2$ удобно, в целях сокращения записи обозначать строчными буквами латинского алфавита: i, j, k и т.д. Текущая точка $i \in \mathfrak{M}_2$ задается локальными координатами x_i, y_i . В основе построения двумерной геометрии лежит отображение $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow \mathbb{R}^s$, где $\mathfrak{S}_f \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющее паре точек s действительных чисел. В случае $s = 1$ отображение f есть скалярная функция, называемая *метрической функцией*. В случае $s = 2$ отображение f является вектор-функцией, а геометрия задаваемая этой функцией называется *двуметрической*.

Например, координатное представление метрической функции f в

случае $s = 1$ для двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ имеет следующий вид:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

и аксиомы, которым она удовлетворяет, следующие [37]:

Аксиома 2.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множество.

Аксиома 2.1.2. Функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 2.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2^3$ множества троек $\langle i, k, l \rangle$ и $\langle k, l, j \rangle$ локальное координатное представление функции f удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f(i, k), f(i, l))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f(k, j), f(l, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0.$$

Метрическую функцию f , удовлетворяющую условиям аксиомы 2.1.3 будем называть *невыврожденной метрической функцией*.

На основе функции f строится отображение $F : \mathfrak{S}_F \rightarrow \mathbb{R}^6$, сопоставляющее четверке $\langle i, j, k, l \rangle$ из $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}_2^4$ точку $z = (f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) \in \mathbb{R}^6$, где область его определения $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^4$ подмножество.

Аксиома 2.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$ которой и некоторой ее окрестности $U(\langle i, j, k, l \rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$, определенная в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $F(\langle i, j, k, l \rangle)$, что в ней $\text{grad}\Phi \neq \vec{0}$ и множество $F(U(\langle i, j, k, l \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) = 0$$

для всех четверок из $U(\langle i, j, k, l \rangle)$.

Одним из определяющих свойств *метрической функции* является ее инвариантность относительно некоторой группы Ли преобразований [39] исходного многообразия. Действительно, по этой функции, решая соответствующие *функциональные уравнения* в рамках аналитического подхода, можно найти полную группу движений, относительно которой эта функция является двухточечным инвариантом.

В работе "О фактах, лежащих в основании геометрии"[9] Г. Гельмгольцем было высказано предположение о том, что метрическая функция двумерной геометрии не может быть произвольной, если твердое тело в своем движении имеет три степени свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для любых четырех точек i, j, k, l должна существовать функциональная связь, так как при ее отсутствии число степеней свободы четырехточечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия двумерной геометрии невозможна при произвольной метрической функции. Этот факт был установлен Г.Г. Михайличенко [34], [47]. Заметим еще, что задачу определения всех двумерных геометрий, в которых "положение фигуры задается тремя условиями впервые четко сформулировал А. Пуанкаре в своей известной работе "Об основных гипотезах геометрии"[40].

В качестве примера приведем феноменологически симметричную плоскость Евклида. Известно, что в декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между любыми двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается метрической функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

Возьмем на плоскости Евклида четыре произвольные точки i, j, k, l

и запишем для них по этой метрической функции шесть квадратов взаимных расстояний: $f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)$. Хорошо известно [3], что они функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ 1 & f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) \\ 1 & f(i, k) & f(j, k) & 0 & f(k, l) \\ 1 & f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

геометрический смысл которого состоит в том, что трехмерный объем тетраэдра (вырожденного) с вершинами, лежащими на двумерной плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И. Кулакова [16] это соотношение, справедливое для любой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$, выражает *феноменологическую симметрию* плоскости Евклида.

По метрической функции плоскости Евклида можно найти группу ее движений (см. задачу 2.2.1 из §2.2 второй главы):

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned} \right\}$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные. Множество всех движений выражает групповую симметрию плоскости Евклида. В работе [29] Г.Г. Михайличенко установил, что групповая и феноменологическая симметрии в геометрии равносильны (здесь имеются в виду геометрии, задаваемые метрической функцией).

В числе важнейших понятий обсуждаемой здесь теории отметим понятие ранга феноменологической симметрии геометрий ($m = n + 2$): это количество точек n - мерного пространства, для которых $m(m - 1)/2$ расстояний связаны упомянутым выше функциональным соотношением.

К настоящему времени построены полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий соответствующих рангов 3, 4 и 5, а также двуметрических ($s = 2$), триметрических ($s = 3$) и четырехметрических ($s = 4$) феноменологически симметричных геометрий минимального ранга, равного 3 (см. работы Г.Г. Михайличенко [36], [37], В.Х. Лева [26], В.А. Кырова [20]). Другие классификации еще не построены, так как не найдены новые более эффективные методы решения подобных задач.

Основными же методами классификации феноменологически симметричных геометрий являются сейчас групповой и аналитический методы, которые были предложены и разработаны Г.Г. Михайличенко в рамках теории физических структур ([27], [33]), как феноменологически симметричной геометрии двух множеств.

Основу группового метода классификации составляет установленная Г.Г. Михайличенко эквивалентность групповой и феноменологической симметрий ([29], [33]).

Групповой метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в определении всех локальных групп Ли преобразований многообразия и соответствующих им алгебр Ли, между которыми (геометриями и группами Ли) имеется взаимно однозначное соответствие (см. [28], [31]). В данном методе метрические функции феноменологически симметричных геометрий являются двухточечными инвариантами соответствующих групп преобразований исходного многообразия. Задача классификации таких геометрий предполагает предварительную полную классификацию групп преобразований с определенным числом параметров (см. [31], [32]). Однако с ростом размерности многообразия, числа компонент метрической вектор-функции f и ранга феноменологи-

ческой симметрии проведение полной классификации групп преобразований становится технически сложными, например, не удастся построить классификацию шестипараметрических групп преобразований трехмерного многообразия.

Аналитический метод классификации состоит в получении функционально-дифференциальных соотношений из свойств соответствующей функциональной матрицы и переходу от них к системе дифференциальных уравнений. Ее решения делятся на невырожденные, согласующиеся с системой исходных аксиом и вырожденные — им не удовлетворяющие. Невырожденные решения есть метрические функции, задающие на гладком многообразии феноменологически симметричные геометрии, которые определяются с точностью до обратимой замены локальных координат в многообразии и гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$. Таким образом, основа аналитического метода исследования состоит в применении методов классического математического анализа к специфическим задачам, возникающим при классификации феноменологически симметричных геометрий и исследовании их свойств.

Гибкое сочетание аналитического и группового методов было применено В.Х. Левом при воспроизведении классификации двумерных и построении классификации трехмерных геометрий [26].

В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий, опирающийся на гипотезу о вложении (см. [24],[25]), которую поясним следующим примером. Двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга 4, задаваемые на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (1.30) §1.5, вложены в трехмерные феноменологически симметричные геометрии ранга 5, задаваемые на гладком трехмерном

многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (1.41) §1.5, то есть $f(i, j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \chi(g(x_i, y_i, x_j, y_j), z_i, z_j)$, где $g(i, j) = g(x_i, y_i, x_j, y_j)$ есть метрическая функция двумерной феноменологически симметричной геометрии ранга 4. Справедливость гипотезы подтверждается сопоставлением классификаций двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко [37] и В.Х. Лева [26]). В частности, метрическая функция плоскости Евклида (1.35) есть ограничение на метрическую функцию пространства Евклида (1.44) (см. §1.5).

Вопрос о необходимости применения разных методов классификации феноменологически симметричных геометрий является существенным, поскольку, во-первых, не во всех случаях при построении таких геометрий можно ограничиться только одним методом; во-вторых, применение разных методов в проведении классификации геометрии позволяет судить о полученных ранее результатах с иной точки зрения. Например, двумерные феноменологически симметричные геометрии, также как двуметрические и триметрические геометрии, были построены групповым методом, а трехмерные феноменологически симметричные геометрии методом, предложенным В.Х. Левом. С другой стороны, классификация двумерных геометрий была вначале построена групповым методом, а затем воспроизведена В.Х. Левом [26] методом, отличным от группового. Эти соображения естественно приводят к задаче воспроизведения классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий аналитическим методом, который опирается на анализ ранга некоторых функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла с точностью до гладкой замены локальных координат, позволяющей редуцировать, возникающие из

них системы функциональных уравнений к максимально простому виду. Развитие аналитического метода и его использование было осуществлено автором настоящего исследования (см. главы 2, 3) и опубликовано в работах [51], [52].

Цель работы состоит в исследовании аналитическими методами проблем классификации и определения групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий.

Исходя из поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Развить в рамках аналитического подхода методы классификации и применить их к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, опираясь на исследование ранга и геометрического смысла возникающих функционально-дифференциальных соотношений (глава 3 §3.2).

2. Осуществить анализ полученных результатов классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий и сравнить их с результатами других авторов (глава 3 §3.3).

3. Найти группу движений двуметрической феноменологически симметричной двумерной геометрии, имеющей содержательную физическую интерпретацию в термодинамике и вычислить все их двухточечные инварианты (глава 3 §§3.4, 3.5).

4. Развить методы решения функциональных уравнений на множество движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей (глава 2 §§2.3, 2.4).

5. Найти аналитическими методами группы движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей как решение функциональных уравнений и определить все их двухточечные

инварианты (глава 2 §§2.3, 2.4, 2.5).

Методы исследований. Результаты диссертации получены применением методов математического анализа, теории дифференциальных и функциональных уравнений, а также теории непрерывных групп Ли преобразований. В первой главе для общего случая приводятся аксиомы и определения, описывающие свойства многообразия и метрической функции, задающей на нем геометрию. Во второй главе задача определения множества всех движений приводит к разработке аналитических методов решения соответствующих функциональных уравнений. В третьей главе развивается аналитический метод с целью его применения к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Решением соответствующих функциональных уравнений найдены группы движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей (теоремы 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2);

2. Найдены все двухточечные инварианты групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей (теоремы 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, как результаты решения задач 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4);

3. Новым методом, то есть расширенным аналитическим (существенно использующим исследование ранга функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла: в первую очередь имеется в виду гладкая допустимая замена локальных координат, позволяющая редуцировать дифференциальные уравнения к максимально простому виду), построена классификация двуметрических феноменологически сим-

метричных двумерных геометрий (теоремы 3.1.1, 3.2.1), в которой в отличие от построений Л.М. Блюменталя заранее не задается вид функциональной связи между расстояниями. Метрическая функция оказывается вектор-функцией, каждая компонента которой не обязательно удовлетворяет обычным аксиомам метрики. Указанная редукция дифференциальных уравнений позволяет сопоставлять полученные нами решения с результатами других авторов.

4. Решением соответствующих функциональных уравнений определена группа движений двуметрической феноменологически симметричной двумерной геометрии, имеющей содержательную физическую интерпретацию в термодинамике и найдены все ее двухточечные инварианты.

Теоретическая и практическая значимость результатов.

Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области геометрии, теории функций и отображений, теории конечных непрерывных групп и теоретической физики. Большая часть результатов связана с новой проблематикой и может служить основой для дальнейших исследований вопросов классификации феноменологически симметричных геометрий. Все теоремы и леммы в тексте диссертации, а также решения задач приведены с полными доказательствами. В дополнение к сказанному, материалы диссертации могут быть использованы при организации спецкурсов по дополнительным вопросам математического анализа, дифференциальной геометрии, теоретической физики, предназначенных для магистров и аспирантов высших учебных заведений. Круг проблем, освещенных в работе, допускает естественное обобщение на пространства более высоких размерностей. Таким образом, исследования в намеченном здесь направлении могут быть продолжены.

Основные положения, выносимые на защиту:

- разработанные методы решения функциональных уравнений на множество движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей;
- полная система двухточечных инвариантов групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей;
- новый метод классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, то есть расширенный аналитический метод, существенно использующий исследование ранга и геометрического смысла, возникающих функционально-дифференциальных соотношений;
- анализ сопоставления полученных результатов в отношении классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий с результатами других авторов.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается использованием общепринятых в математике методов исследования, а также согласованностью с научными данными, представленными в работах других авторов этого направления.

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертации получены автором лично под руководством д.ф.-м.н., профессора Г.Г. Михайличенко.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались:

- на семинарах по теории физических структур в Горно-Алтайском государственном университете (рук-ль: д.ф.-м.н., профессор Г.Г. Михайличенко);

- на семинарах кафедры математического анализа Горно-Алтайского государственного университета (рук-ль: д.ф.-м.н., доцент А.В. Тетенев);
 - на семинарах кафедры теории функций Томского государственного университета (рук-ль: д.ф.-м.н., профессор С.П. Гулько);
 - на семинарах кафедры геометрии Томского государственного университета (рук-ль: д.ф.-м.н., доцент Н.Р. Щербаков);
- а также на международных и российских конференциях:
- Международная конференция "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск, 27 – 30 апреля 2008;
 - Всероссийская научно-практическая конференция "Математическое образование в регионах России". Барнаул, 21 ноября 2008;
 - Международная молодежная конференция "Современные методы в механике": Математика и ее применение в задачах механики. Томск, 19 – 20 сентября 2012;
 - Международная школа-семинар "Ломоносовские чтения на Алтае": Анализ, геометрия и топология. Барнаул, 20 – 23 ноября 2012 г.

Методы решения функциональных уравнений, разработанные автором и представленные в диссертационном исследовании, использовались при выполнении работ по гранту РФФИ № 12-01-90806 - мол-рф-нр "Исследование построения классификации двуметрических двумерных геометрий"(01.07.2012 – 29.12.2012).

Публикации. По теме диссертации подготовлено и опубликовано всего 10 работ, из них две статьи в рецензируемых изданиях из списка ВАК, две статьи в сборниках научных трудов и 6 публикаций в материалах международных и всероссийских научных конференций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из списка обозначений, введения, трех глав, заключения и списка литерату-

ры. Первая глава содержит шесть параграфов, вторая пять параграфов и третья пять параграфов. Работа изложена на 152 страницах. Список литературы содержит 60 наименований.

Перейдем к краткому изложению содержания работы и точным формулировкам исходных аксиом и основных результатов. Будем использовать номера аксиом, определений, формул, задач и теорем, введенные в основном тексте диссертационной работы.

Содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, дается обзор научной литературы по изучаемой проблеме. На примере евклидовой плоскости пояснено, что значит феноменологическая и групповая симметрии в обычной геометрии и как следует понимать эквивалентность этих симметрий. Далее дается краткое изложение основных определений и результатов диссертации, чтобы можно было получить полное представление о ее содержании до ознакомления с подробностями доказательств.

Первая глава носит подготовительный характер и необходима для общего знакомства с феноменологической и групповой симметриями в геометрии. В ней по работам Г.Г. Михайличенко ([29], [30], [48]) даются строгие формулировки исходных аксиом и определений, а также теорем о феноменологической и групповой симметриях в геометрии. В §1.5 на примерах плоскости и пространства Евклида поясняются групповая и феноменологическая симметрии, а также их эквивалентность. В заключительном §1.6 проводится обзор имеющихся к настоящему времени методов классификации феноменологически симметричных геометрий и формулируется задача о классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий аналитическим методом,

решение которой представлено в третьей главе.

Краткое изложение содержания §§1.1 – 1.4.

В §1.1 приведены основные аксиомы, определения и теоремы о феноменологической и групповой симметрии одномерной геометрии с целью уточнения используемых в настоящей работе обозначений.

Содержание §§1.2 – 1.4 изложено по работам Г.Г. Михайличенко [29], [30], [48].

§1.2. Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_{sn}$, наделенное структурой гладкого sn -мерного многообразия, где s и n - натуральные числа, точки которого здесь и далее будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle$ из области определения $\mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i, j) = (f^1(i, j), \dots, f^s(i, j)) \in R^s$.

Для некоторого кортежа $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in \mathfrak{M}_{sn}^n$ длины n введем функции $g_n = g_n(k_1, \dots, k_n)$ и $q_n = q_n(k_1, \dots, k_n)$. С их помощью сопоставим точке $i \in \mathfrak{M}_{sn}$ точки $(f(i, k_1), \dots, f(i, k_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1, i), \dots, f(k_n, i)) \in R^{sn}$ соответственно, если $\langle i, k_1 \rangle, \dots, \langle i, k_n \rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle k_1, i \rangle, \dots, \langle k_n, i \rangle \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций g_n и q_n могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}_{sn}$.

В отношении вектор-функции $f = (f^1, \dots, f^s)$, заданной на sn -мерном гладком многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

Аксиома 1.2.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ подмножество.

Аксиома 1.2.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 1.2.3. В $\mathfrak{M}_{sn}^n$ плотно множество таких кортежей длины

n , для которых отображение g_n и отображение q_n имеют максимальный ранг, равный sn , в точках плотного в $\mathfrak{M}_{sn}$ подмножества.

Определение 1.2.1. Вектор-функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$, для которой выполняются аксиомы **1.2.1**, **1.2.2**, **1.2.3**, будем называть **метрической вектор-функцией** или просто **метрической функцией**, не требуя для ее s компонент выполнения аксиом обычной метрики [14].

Заметим, что ограничение в аксиомах **1.2.1**, **1.2.2**, **1.2.3** открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

На основе исходной метрической вектор-функции f построим отображение F , сопоставляющее кортежу $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n+2$ из $\mathfrak{M}_{sn}^m = (\mathfrak{M}_{sn})^m$ точку $z = (f(i, j), f(i, k), \dots, f(v, w)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ чисел для следующих пар его точек: $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \dots, \langle i, w \rangle, \langle j, k \rangle, \dots, \langle v, w \rangle$ если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Открытую и плотную в $\mathfrak{M}_{sn}^m$ область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1.2.2. Будем говорить, что вектор-функция $f = (f^1, \dots, f^s) \in R^s$ задает на sn -мерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$, если, кроме аксиом **1.2.1**, **1.2.2**, **1.2.3**, дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.2.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждого элемента которого, то есть кортежа $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n+2$ и некоторой его окрестности $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \rightarrow R^s$, определенная в некоторой области $E \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$, что в ней

$\text{rang}\Phi = s$ и множество $F(U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(z) = \Phi(f(i, j), f(i, k), \dots, f(v, w)) = 0 \quad (1.23)$$

для всех кортежей из $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$.

Аксиома **1.2.4** составляет содержание принципа феноменологической симметрии.

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция f задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m - 1)/2 - s$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство **теоремы 1.2.1** можно найти в монографии Г.Г. Михайличенко [35] и его работе [33].

§1.3. Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \rightarrow U' \quad (1.28)$$

называется *локальным движением*, если оно сохраняет метрическую функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$. Последнее означает, что для любой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $\langle \lambda(i), \lambda(j) \rangle$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(i, j), \quad (1.29)$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \dots, f^s$ метрической функции f , в котором $\lambda(i) = \lambda(x_i^1, \dots, x_i^{sn})$, $\lambda(j) = \lambda(x_j^1, \dots, x_j^{sn})$.

Множество всех движений (1.28) есть локальная группа преобразований, для которой метрическая функция f согласно равенству (1.29)

является двухточечным инвариантом. Если метрическая функция f задана явно, то равенство (1.29) является *функциональным уравнением*, решая которое можно найти полную группу локальных движений (1.28). Если же известна группа движений (1.28), то решая функциональное уравнение (1.29) можно найти метрическую функцию, как двухточечный инвариант этой группы преобразований.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что метрическая функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, *наделенную групповой симметрией* степени $sn(n+1)/2$, если, кроме аксиом 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.3.1. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$ -мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что функция $f(i, j)$ по каждой из своих s компонент является двухточечным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме 1.3.1, определяет локальную подвижность жестких фигур в sn -мерном пространстве $\mathfrak{M}_{sn}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Будем также говорить, что метрическая функция f допускает $sn(n+1)/2$ -мерную локальную группу локальных движений.

Теорема 1.3.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция f задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $st(m-1)/2 - s$, где $m = n+2$, на*

плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.

Полное доказательство **теоремы 1.3.1** приведено в монографии Г.Г. Михайличенко [35] и его работе [33].

В §1.4 приводятся формулировки следующих теорем Г.Г. Михайличенко:

Теорема 1.4.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $t = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n + 1)/2$.*

Теорема 1.4.2. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых метрической вектор-функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$, задающей на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $t = n + 2$, или геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n + 1)/2$, не превышает этой степени.*

Во второй главе диссертации находятся группы движений Гельмгольцевых геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей) как решения соответствующих функциональных уравнений (1.29), а также двухточечные инварианты этих групп. При решении функциональных уравнений (1.29) на функции λ не накладываются никакие сильные ограничения.

В §2.1 в соответствие с содержанием §1.2 первой главы дается определение феноменологически симметричных двумерных геометрий ($s = 1, n = 2$) и приводится их классификация, построенная Г.Г. Михайличенко.

§2.2 является вводным для §§2.3–2.4 второй главы. В нем на примере

плоскости Евклида, задаваемой метрической функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

дана иллюстрация методов решения функционального уравнения (1.29) на множество движений, развитие которых позволило доказать теоремы 2.3.1 из §2.3, 2.4.1 и 2.4.2 из §2.4 для трех Гельмгольцевых геометрий, задаваемых метрическими функциями

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta \operatorname{ar}(\operatorname{c}) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.13)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.14)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.15)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$ – параметры семейства. Двумерная геометрия с метрической функцией (2.15) была названа плоскостью Гельмгольца, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко упоминает Гельмгольц в своей работе [9]. Соответственно, метрическая функция (2.13) задает псевдогельмгольцеву плоскость, а метрическая функция (2.14) – дуальногельмгольцеву плоскость.

В §2.3 формулируется и доказывается решением соответствующего функционального уравнения следующая теорема:

Теорема 2.3.1. *Все движения плоскости Гельмгольца образуют однопараметрическое семейство трехпараметрических групп ее преобразований*

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.30)$$

где $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a}) = 1$. Здесь γ – положительная константа (параметр семейства).

В §2.4 формулируются и доказываются, путем решения соответствующих функциональных уравнений, следующие две теоремы:

Теорема 2.4.1. *Все движения псевдогельмгольцевой плоскости образуют однопараметрическое семейство трехпараметрических групп ее преобразований*

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.46)$$

где $(a^2 - b^2) \exp(2\beta \operatorname{ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a}) = 1$. Здесь β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства).

При этом выбирается функция arth , если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция arch , если аргумент по величине больше единицы.

Теорема 2.4.2. *Все движения дуальногельмгольцевой плоскости образуют трехпараметрическую группу ее преобразований*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.57)$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$.

В §2.5 решается обратная задача нахождения метрической функции f по заданной группе преобразований гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ для плоскости Евклида и геометрий Гельмгольца (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей). В этом параграфе сформулированы следующие четыре задачи:

Задача 2.5.1. Для группы движений плоскости Евклида

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned} \right\}$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные, найти все двухточечные инварианты функции $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Задача 2.5.2. Для трехпараметрической группы преобразований плоскости Гельмгольца (2.30) найти все двухточечные инварианты функции $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Задача 2.5.3. Для трехпараметрической группы преобразований псевдогельмгольцевой плоскости (2.46) найти все двухточечные инварианты функции $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Задача 2.5.4. Для трехпараметрической группы преобразований дуальногельмгольцевой плоскости (2.57) найти все двухточечные инварианты функции $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Результаты решения задач 2.5.1 – 2.5.4 сформулированы в виде следующих теорем:

Теорема 2.5.1. *Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \equiv R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией плоскости Евклида, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Теорема 2.5.2. *Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

где $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a}) = 1$, γ – положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования

$\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией плоскости Гельмгольца, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Теорема 2.5.3. *Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

где $(a^2 - b^2) \exp(2\beta \operatorname{ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a}) = 1$, β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией псевдогельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

При этом выбирается функция arth , если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция arch , если аргумент по величине больше единицы.

Теорема 2.5.4. *Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией дуальногельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Каждый найденный в задачах 2.5.1 – 2.5.4 двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ задает на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

В третьей главе расширенным аналитическим методом (существенно использующим исследование ранга функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла: в первую очередь имеется в виду гладкая допустимая замена локальных координат, позволяющая редуцировать дифференциальные уравнения к максимально простому виду), построена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий (теоремы 3.1.1, 3.2.1). В качестве дополнения найдены группа движений одной из них, решением соответствующей системы функциональных уравнений этих групп, и их двухточечные инварианты, а также дана физическая интерпретация.

Краткое изложение содержания §§3.1–3.5.

§3.1. Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_2$, наделенное структурой гладкого двумерного многообразия, а также гладкая функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^2$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ два вещественных числа $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) \in R^2$. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$, через $U(\langle i, j \rangle)$ – окрестность пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Если x, y – локальные координаты гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то для вектор-функции (или отображения) $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) = (f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)), \quad (3.1)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты точек i и j пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении вектор-функции f будем предполагать выполнение следующих аксиом:

Аксиома 3.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ подмножество.

Аксиома 3.1.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 3.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множества пар локальное координатное представление (3.1) вектор-функции $f(i, j)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \quad (3.2)$$

Заметим, что при условии (3.2) ранг касательного отображения для отображения (3.1) равен 2, то есть максимален.

Определение 3.1.1. Вектор-функцию f , удовлетворяющую первым трем аксиомам 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, приведенным выше, будем называть *метрической вектор-функцией* (или *метрической функцией*).

На основе исходной метрической вектор-функции f строится отображение F , сопоставляющее тройке $\langle i, j, k \rangle$ из $\mathfrak{M}_2^3$ кортеж $\langle f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k) \rangle$, принадлежащий некоторому открытому подмножеству $E \subset \mathbb{R}^6$, если пары $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \langle j, k \rangle \in \mathfrak{S}_f$. То есть

$$\mathfrak{M}_2^3 \supseteq \mathfrak{S}_F \ni \langle i, j, k \rangle \xrightarrow{F} \langle f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k) \rangle \in E \subset \mathbb{R}^6, \quad (3.3)$$

где $\mathfrak{S}_F$ – есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^3$ подмножество, которое является областью определения построенной функции F .

Далее, пусть имеется еще одно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^2$, где $E \subset \mathbb{R}^6$, которое сопоставляет точке $z \in E \subseteq \mathbb{R}^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in \mathbb{R}^2$.

Аксиома 3.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждой тройки $\langle i, j, k \rangle$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^2$, определенное в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k \rangle)$,

что в ней ранг якобиевой матрицы отображения Φ равен 2 и множество $F(U(\langle i, j, k \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = (0, 0) \quad (3.4)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – функция шести переменных, для всех троек из $U(\langle i, j, k \rangle)$.

Определение 3.1.2. Будем говорить, что метрическая вектор-функция f задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ *двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3*, если, кроме аксиом **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3**, она удовлетворяет еще аксиоме **3.1.4**.

Далее формулируется и доказывается **теорема 3.1.1**:

Теорема 3.1.1.

*1. Если ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве, то метрическая вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющая аксиомам **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3** задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную ранга 3 двумерную геометрию (то есть удовлетворяет аксиоме **3.1.4**).*

*2. Система аксиом **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3** и **3.1.4** совместна, то есть существует модель соответствующей аксиоматической теории - набор вектор-функций $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.*

Доказательство первого пункта теоремы основано на **лемме 3.1.1**, суть которой состоит в том, что если вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ и аналогичные ей удовлетворяют аксиомам **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3**, то ранг матрицы отображения F не менее 4, а также **замечания 3.1.1**. Согласно **замечанию 3.1.1** понижение ранга матрицы до четырех вследствие феноменологической симметрии равносильно тому, что каждый

из двух первых столбцов матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (то есть столбцов с номерами 3,4,5,6). Требование разложимости по базисным столбцам первого столбца налагает ограничения на производные функции $f^1(i, j)$ и аналогичных ей функций. Такое же требование, предъявленное ко второму столбцу, налагает точно те же ограничения на производные функции $f^2(i, j)$ по тем же аргументам. Согласно теореме математического анализа о функциональной зависимости [12] для некоторой окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенное в соответствующей области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, в которой $\text{rang}(\Phi) = 2$ и имеют место уравнения (3.4).

Поскольку ранг матрицы отображения F для исходной тройки $\langle i, j, k \rangle$ равен 4 и максимален в окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$, из этой же теоремы о функциональной зависимости следует, что найдется такая его окрестность $U' \subseteq U$ и соответствующая область $E' \subseteq E$, для которых множество значений $F(U')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в E' , являясь гладкой без особых точек поверхностью в $\mathbb{R}^6$. На этом доказательство первого пункта теоремы завершается.

Второй пункт доказательства состоит из двух этапов. В первом этапе доказательства показывается от противного, что ранг матрицы отображения F не более 4 тем самым устанавливается, что он точно равен 4. Во втором этапе доказательства необходимо построить двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3, удовлетворяющую всем аксиомам 3.1.1 – 3.1.4. Для этого в §3.2 формулируется и доказывается классификационная теорема 3.2.1:

Теорема 3.2.1. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и замены локальных координат x, y существуют две и только две невы-*

рожденные метрические вектор-функции вида $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, задающие на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную ранга 3 двумерную геометрию. Компоненты этих метрических вектор-функций могут быть представлены следующими выражениями:

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (3.8)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j. \quad (3.9)$$

Выражения (3.8), (3.9) естественно называть каноническими выражениями.

В рамках доказательства этой теоремы формулировались и доказывались **леммы 3.2.1** и **3.2.2**, содержание которых направлено на исследование рангов соответствующих систем функционально-дифференциальных уравнений. Гладкая допустимая замена локальных координат позволила редуцировать эти системы к максимально простому виду. Применение аналитического метода, дополненного учетом геометрического смысла, привело к трем решениям, первые два из которых соответствуют первому и второму каноническим выражениям. Третье решение оказалось эквивалентным второму каноническому выражению (3.9) при соответствующем гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$ и гладкой обратимой замены локальных координат x, y .

В §3.3 полученная классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий сравнивается с соответствующей классификацией этих же геометрий, которая была построена Г.Г. Михайличенко групповым методом отличным от данного. Полученные же нами в §3.2 результаты приводят к постановке следующей задачи.

Задача 3.3.1. Установить с точностью до гладкого обратимого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi(f) = (\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2))$ и соответству-

ющей гладкой замены локальных координат $(\varphi(x, y), \tau(x, y)) \rightarrow (x, y)$ эквивалентность или неэквивалентность следующих метрических вектор-функций, каждая из которых задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию:

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (3.32)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j, \quad (3.33)$$

$$3. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j. \quad (3.34)$$

Решение этой задачи сводится к решению систем функциональных уравнений относительно φ, τ и ψ для всех трех возможных пар: 1) **1** и **2**, 2) **3** и **1**, 3) **3** и **2**. В результате доказывается, что функции **1** и **2** не эквивалентны, также как и функции **3** и **1**. Установлено также, что в паре **3** и **2** функция (3.34) эквивалентна функции (3.33) с точностью до замены координат

$$(\varphi(x, y), \tau(x, y)) = (ye^{-x}, e^x) \rightarrow (x, y)$$

и гладких преобразований

$$(\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2)) = (f^2 \exp(f^1), f^2) \rightarrow (f^1, f^2),$$

в которых $f^1 = x_i - x_j, \quad f^2 = y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j$.

В §3.4 для метрических функций (3.32), (3.33) и (3.34), также как и для Гельмгольцевых геометрий решаются задачи о нахождении соответствующих групп движений и их двухточечных инвариантов. В этом параграфе показывается, что группы движений двух геометрий, задаваемых метрическими функциями (3.33) и (3.34) подобны.

В §3.5 дается физическая интерпретация одной из двуметрических феноменологически симметричных геометрий. Такую геометрию можно ввести на плоскости термодинамических состояний (P, V) .

Пусть состояние термодинамической системы i задается двумя термодинамическими параметрами – объемом V_i и давлением P_i . Тогда все множество состояний представляет собой первую четверть числовой плоскости, так как $V \geq 0$, $P \geq 0$. Каждой паре состояний $\langle i, j \rangle$ сопоставим два числа, равные работам $A^{PV}(i, j)$, $A^{VP}(i, j)$, которые внешние тела совершают над системой при ее переходе из начального состояния i в конечное состояние j по двум различным путям PV и VP , состоящим из равновесных изобарного ($P = \text{const}$) и изохорного ($V = \text{const}$) процессов:

$$\left. \begin{aligned} A^{PV}(i, j) &= (V_i - V_j)P_i, \\ A^{VP}(i, j) &= (V_i - V_j)P_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Двухкомпонентная функция $\mathbf{A} = (A^{PV}, A^{VP})$ с выражениями (3.66) для ее компонент задает на плоскости термодинамических состояний (P, V) двуметрическую геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии, задаваемой на координатной плоскости (x, y) метрической функцией (1.35) (см. §1.5 главы 1), одновременно феноменологически симметрична и наделена групповой симметрией.

Группа движений для метрической функции (3.66) состоит из всех тех преобразований

$$\begin{aligned} V' &= \lambda(V, P), \\ P' &= \sigma(V, P), \end{aligned} \quad (3.68)$$

плоскости (P, V) , которые удовлетворяют двум функциональным уравнениям, являющимися следствиями инвариантности ее компонент:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) &= (V_i - V_j)P_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) &= (V_i - V_j)P_j, \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Решения этих уравнений легко находятся с помощью разделения переменных:

$$\lambda(V, P) = aV + b, \quad \sigma(V, P) = \frac{P}{a}, \quad (3.70)$$

где $a > 0$.

Множество всех преобразований (3.68) с решениями (3.70) является полной группой движений для метрической функции (3.66), выражая групповую симметрию степени 2 двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости термодинамических состояний (P, V) этой функцией.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю: доктору физико-математических наук, профессору Геннадию Григорьевичу Михайличенко за постановку задач, научное руководство и помощь в работе. Автор искренне благодарит и выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, зав. кафедрой теории функции ТГУ, профессору Сергею Порфирьевичу Гулько и всем участникам семинара за активное обсуждение результатов настоящей работы; кандидату физико-математических наук, доценту Евгению Матвеевичу Горбатенко за ценные советы и пожелания. Автор также искренне благодарит доктора физико-математических наук, зав. кафедрой математического анализа ГАГУ Андрея Викторовича Тетенова за всестороннюю помощь в работе над диссертацией, кандидата физико-математических наук, доцента Владимира Александровича Кырова за ценные замечания и постоянную поддержку. Отдельные слова благодарности заслуживают преподаватели кафедр теории функции ТГУ, геометрии ТГУ, математического анализа ГАГУ, физики и МПФ ГАГУ, математики и информатики ГАГУ, алгебры, геометрии и МПМ ГАГУ за внимание к теме данного исследования.

Глава 1

Основные определения

Первая глава носит подготовительный характер и необходима для общего знакомства с феноменологической и групповой симметриями в геометрии. В ней по работам Г.Г. Михайличенко ([29], [30], [48]) даются строгие формулировки исходных аксиом и определений, а также теорем о феноменологической и групповой симметриях в геометрии. В §1.5 на примерах плоскости и пространства Евклида поясняются групповая и феноменологическая симметрии, а также их эквивалентность. В заключительном §1.6 проводится обзор имеющихся к настоящему времени методов классификации феноменологически симметричных геометрий и формулируется задача о классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий аналитическим методом, решение которой представлено в третьей главе.

1.1 Феноменологическая и групповая симметрии одномерной геометрии

Рассмотрим одномерное дифференцируемое многообразие $\mathfrak{M}_1$, некоторая область которого покрывается одной локальной картой. Картирующее отображение Γ сопоставляет (гомеоморфно) каждому элементу

$i \in \mathfrak{M}_1$ вещественное число $\Gamma(i)$, обозначаемое x_i . Очевидно, мы ничего не теряем, если отождествим элемент i и его локальную координату x_i . Таким образом, всякой вещественнозначной функции $g(i)$, заданной на некоторой области $\Omega \subseteq \mathfrak{M}_1$, взаимнооднозначно соответствует вещественнозначная функция $\tilde{g}(x_i)$, заданная на некоторой области $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}$.

Речь идет, таким образом, о корректности отождествления

$$g(i) \triangleq \tilde{g}(x_i), \quad (1.1)$$

которое распространим и на операцию дифференцирования:

$$\frac{dg(i)}{di} \triangleq \frac{d\tilde{g}(x_i)}{dx_i} \quad (1.2)$$

Иногда, ради сокращения записи, мы будем вместо $\frac{d\tilde{g}(x_i)}{dx_i}$ писать $\frac{dg(i)}{dx_i}$, распространяя это правило и на частные производные.

Рассмотрим некоторое множество $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$, открытое и плотное в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$. Ему, благодаря локальной карте, отвечает множество $\tilde{\mathfrak{S}}_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, открытое в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Рассмотрим, далее, вещественнозначную функцию $f(i, j)$, определенную на $\mathfrak{S}_f$. Ей (аналогично (1.1)) соответствует функция $\tilde{f}(x_i, x_j)$, определенная на $\tilde{\mathfrak{S}}_f$. О такой функции $f(i, j)$ (соответственно, о функции $\tilde{f}(x_i, x_j)$) будем говорить, что она удовлетворяет **Аксиоме 1.1.1**.

Аксиома 1.1.2. Функция $f(i, j)$ (то есть, согласно (1.2), $\tilde{f}(x_i, x_j)$) в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 1.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1$ множества пар $\langle i, j \rangle$ локальное координатное представление функции $\tilde{f}(x_i, x_j)$ удовлетворяет следующим двум условиям

$$\frac{\partial f(i, j)}{\partial i} \triangleq \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_i} \neq 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial j} \triangleq \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_j} \neq 0. \quad (1.3)$$

Три приведенные аксиомы означают нетривиальность тех функций, которые мы собираемся рассматривать.

Определение 1.1.1. Функция $f(i, j)$ (и её локальное координатное представление $\tilde{f}(x_i, x_j)$), удовлетворяющая первым трем аксиомам **1.1.1**, **1.1.2**, **1.1.3**, приведенным выше, называется *метрической функцией*.

Функцию f , удовлетворяющую условиям аксиомы **1.1.3** будем называть *невыврожденной функцией*.

Принятое нами соглашение (1.1) сопоставляет всякому кортежу длины три $\langle i, j, k \rangle$, принадлежащему некоторой открытой и плотной в $\mathfrak{M}_1^3 = (\mathfrak{M}_1)^3$ области $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}_1^3$ кортеж $\langle x_i, x_j, x_k \rangle$, принадлежащий некоторой открытой области $\tilde{\mathfrak{S}}_F \subseteq \mathbb{R}^3$. Основой наших построений является метрическая функция $f(l, m) \triangleq \tilde{f}(x_l, x_m)$, где l, m – произвольные точки из $\mathfrak{S}_F$. Строим отображение F , сопоставляющее всякому кортежу $\langle i, j, k \rangle$ из $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}_1^3$ кортеж $\langle f(i, j), f(i, k), f(j, k) \rangle$, принадлежащий некоторому открытому подмножеству $E \subset \mathbb{R}^3$, то есть

$$\mathfrak{M}_1^3 \supseteq \mathfrak{S}_F \ni \langle i, j, k \rangle \xrightarrow{F} \langle f(i, j), f(i, k), f(j, k) \rangle \in E \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.4)$$

Используя картирующее отображение, отождествим отображение F с отображением

$$\mathbb{R}^3 \supseteq \tilde{\mathfrak{S}}_F \ni \langle x_i, x_j, x_k \rangle \xrightarrow{\tilde{F}} \langle \tilde{f}(x_i, x_j), \tilde{f}(x_i, x_k), \tilde{f}(x_j, x_k) \rangle \in \tilde{E} \subset \mathbb{R}^3, \quad (1.5)$$

в котором $\tilde{\mathfrak{S}}_F, \tilde{E}$ – есть некоторые открытые подмножества $\mathbb{R}^3$.

Аксиома 1.1.4. Существует вещественнозначная функция $\Phi(X, Y, Z) \in C^2$ трех вещественных переменных, определенная на $E \subset \mathbb{R}^3$ и обла-

дающая следующими свойствами:

$$1. \overrightarrow{\text{grad}}\Phi \neq \bar{0}, \quad (1.6)$$

$$2. \forall x_i \forall x_j \forall x_k \mid (\langle x_i, x_j, x_k \rangle \in \tilde{\mathfrak{S}}_F) \Rightarrow \Phi(\tilde{f}(x_i, x_j), \tilde{f}(x_i, x_k), \tilde{f}(x_j, x_k)) = 0. \quad (1.7)$$

Приведенные выше построения поясняет рис.1.1

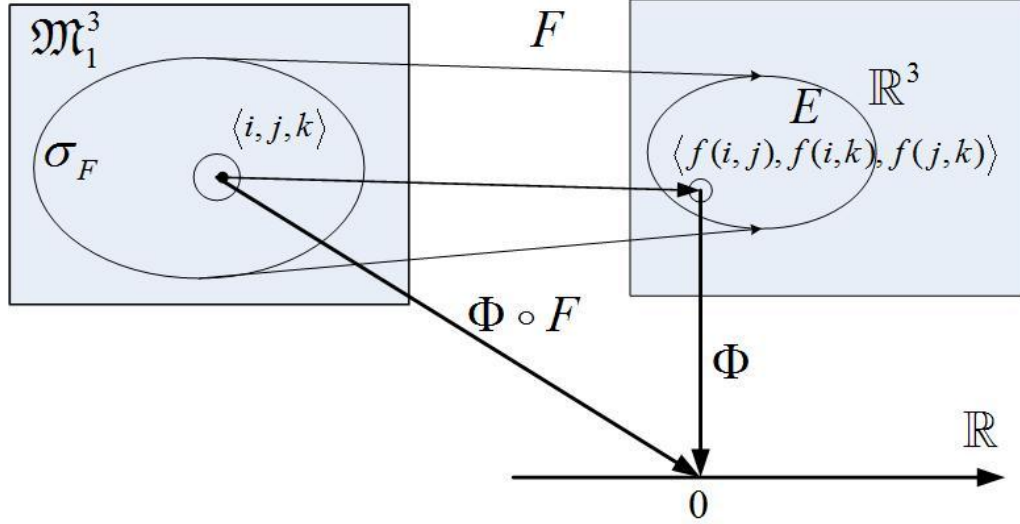


Рис. 1.1: Диаграмма отображений для одномерной феноменологически симметричной геометрии ранга 3

Определение 1.1.2. Будем говорить, что метрическая функция $f(i, j)$ (и её локальное координатное представление $\tilde{f}(x_i, x_j)$) задает на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ **феноменологически симметричную геометрию ранга 3**, если она удовлетворяет ещё и аксиоме 1.1.4.

Используя локальное координатное представление (1.5) отображения F , запишем его функциональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i, k)}{\partial x_i} & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial x_j} \\ 0 & \frac{\partial f(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f(j, k)}{\partial x_k} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Далее приведем теорему о ранге отображения F , доказательство которой содержится в монографии Г.Г. Михайличенко [35] и его работе [33].

Теорема 1.1.1. *Для того, чтобы метрическая функция $f(i, j)$ задавала на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен 2 на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Заметим, что не всякая метрическая функция $f(i, j)$ может задавать на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3. Приведем и докажем теорему о том, к какому виду может быть приведена метрическая функция $f(i, j)$, удовлетворяющая необходимым и достаточным условиям **теоремы 1.1.1**, подходящим преобразованием локальных координат. При доказательстве этой теоремы будет проиллюстрирован в более простом варианте аналитический метод решения функционально-дифференциальных уравнений.

Теорема 1.1.2. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и в надлежаще выбранной системе локальной координаты x невырожденная метрическая функция $f(i, j)$, задающая на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3 со связью (1.7) может быть представлена следующим выражением:*

$$f(i, j) \triangleq \tilde{f}(x_i, x_j) = x_i - x_j. \quad (1.9)$$

Доказательство. Действительно по **теореме 1.1.1** ранг отображения F равен 2, тогда, обращая в нуль определитель матрицы этого отобра-

жения (1.8), получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{f}(x_j, x_k)}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_k)}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{f}(x_j, x_k)}{\partial x_k} = 0. \quad (1.10)$$

Фиксируя точку $k = k_0$, и вводя обозначения

$$\left. \frac{\frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_k)}{\partial x_k}}{\frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_k)}{\partial x_i}} \right|_{k=k_0} = \mu(x_i), \quad \left. \frac{\frac{\partial \tilde{f}(x_j, x_k)}{\partial x_k}}{\frac{\partial \tilde{f}(x_j, x_k)}{\partial x_j}} \right|_{k=k_0} = \mu(x_j), \quad (1.11)$$

получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $\tilde{f}(x_i, x_j)$:

$$\mu(x_i) \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_i} + \mu(x_j) \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (1.12)$$

Ясно, что коэффициенты последнего уравнения, вообще говоря, зависят от выбора точки k_0 . Будем решать уравнение (1.12), считая функцию μ произвольной непрерывной.

Поскольку в силу (1.3) $\mu(x_i) \neq 0, \mu(x_j) \neq 0$, уравнение (1.12) можно решить методом характеристик:

$$\tilde{f}(x_i, x_j) = \chi(\varphi(x_i) - \varphi(x_j)), \quad (1.13)$$

где χ, φ – гладкие класса C^2 функции одной переменной, имеющие отличные от нуля производные и функция χ локально обратима. С учетом замены координат $\varphi(x) \rightarrow x$ и гладкого преобразования функции $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ (χ^{-1} есть обратная к χ функция), получим выражение (1.9) для метрической функции $f(i, j)$, задающей на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, поскольку определитель матрицы отображения F (1.8) равен нулю и ранг ее равен 2. Выражение (1.9) естественно называть каноническим видом. Уравнение (1.7), выражающее феноменологическую симметрию одномерной геометрии, задаваемой метрической функцией (1.9),

имеет вид: $f(i, j) - f(i, k) + f(j, k) = 0$, для любой тройки $\langle i, j, k \rangle \in \mathfrak{S}_F$.

□

Далее введем понятие групповой симметрии степени 1 и покажем, что феноменологически симметричная геометрия ранга 3, задаваемая метрической функцией $f(i, j)$ на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$, наделена указанной симметрией.

Пусть имеется гладкое локально-обратимое преобразование одномерного многообразия $\mathfrak{M}_1$

$$i' = \lambda(i), \quad (1.14)$$

которому соответствует локально-координатное представление

$$x' = \tilde{\lambda}(x), \quad (1.15)$$

где $\frac{d\tilde{\lambda}(x)}{dx} \neq 0$, являющееся *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию (1.9):

$$\tilde{f}(x'_i, x'_j) = \tilde{f}(x_i, x_j). \quad (1.16)$$

Равенство (1.16) при известной метрической функции (1.9), с учетом выражения (1.15), является *функциональным уравнением* на множество движений.

Определение 1.1.3. Будем говорить, что метрическая функция $f(i, j)$ (и её локальное координатное представление $\tilde{f}(x_i, x_j)$) задает на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ геометрию, *наделенную групповой симметрией степени 1*, если, кроме аксиом **1.1.1**, **1.1.2**, **1.1.3**, дополнительно выполняется следующая аксиома.

Аксиома 1.1.5. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_1$ множество, для каждой точки i которого задано эффeктивное гладкое действие одномерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что метрическая функция $f(i, j)$ является двухточеч-

ным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме **1.1.5**, определяет локальную подвижность жестких фигур в одномерном пространстве $\mathfrak{M}_1$. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы G^1 определены согласно аксиоме **1.1.5** в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}_1$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Будем также говорить, что метрическая функция допускает одномерную локальную группу Ли локальных движений.

Теорема 1.1.3. *Для того, чтобы метрическая функция $f(i, j)$ задавала на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени 1, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен 2 на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство **теоремы 1.1.3** можно найти в монографии Г.Г. Михайличенко [35] и его работе [33].

Заметим, что одномерная геометрия в соответствие с **теоремами 1.1.1** и **1.1.3** будет, с одной стороны, феноменологически симметрична ранга 3, а с другой стороны – наделена групповой симметрией степени 1, причем обе симметрии оказываются эквивалентными, поскольку необходимые и достаточные условия теорем о ранге отображения F совпадают, то есть эта эквивалентность является следствием **теорем 1.1.1** и **1.1.3**:

Теорема 1.1.4. *Для того, чтобы метрическая функция $f(i, j)$ задавала на гладком одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}_1$ геометрию, наделенную групповой сим-*

метрией степени 1.

Проиллюстрируем связь феноменологической и групповой симметрий одномерной геометрии.

Напомним, что уравнение (1.7), выражающее феноменологическую симметрию одномерной геометрии, задаваемой метрической функцией (1.9), имеет вид: $f(i, j) - f(i, k) + f(j, k) = 0$, для любой тройки $\langle i, j, k \rangle \in \mathfrak{S}_F$.

Функциональное уравнение (1.16) на множество ее движений будет следующим:

$$\tilde{\lambda}(x_i) - \tilde{\lambda}(x_j) = x_i - x_j, \quad (1.17)$$

которое легко решается методом разделения переменных:

$$\tilde{\lambda}(x_i) - x_i = \tilde{\lambda}(x_j) - x_j = \text{const} = a, \quad (1.18)$$

где a – произвольная постоянная. Откуда получаем общее решение уравнения (1.17)

$$\lambda(x) = x + a, \quad (1.19)$$

где $a \in U(0) \subset \mathbb{R}$. Множество всех движений (1.15) с функцией (1.19) является однопараметрической группой преобразований одномерного многообразия $\mathfrak{M}_1$, в чем можно убедиться проверив аксиомы группы преобразований.

Таким образом, однопараметрическая группа преобразований (1.19), сохраняющая метрическую функцию (1.9), определяет групповую симметрию степени 1 одномерной феноменологически симметричной геометрии ранга 3.

Убедимся, что метрическая функция (1.9) является единственным невырожденным двухточечным инвариантом группы преобразова-

ний (1.19) одномерного многообразия $\mathfrak{M}_1$:

$$\tilde{f}(x'_i, x'_j) = \tilde{f}(x_i, x_j) \quad (1.20)$$

Запишем функциональное уравнение (1.20) на двухточечный инвариант для известной группы преобразований (1.19):

$$\tilde{f}(x_i + a, x_j + a) = \tilde{f}(x_i, x_j) \quad (1.21)$$

Дифференцируя уравнение по параметру a , и придавая ему после дифференцирования значение соответствующее тождественному преобразованию, т.е. $a = 0$, получим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{f}(x_i, x_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (1.22)$$

Общим решением уравнения (1.22) является $\tilde{f}(x_i, x_j) \triangleq f(i, j) = \chi(x_i - x_j)$, где χ - произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной. Таким образом, с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ (χ^{-1} есть обратная к χ функция), метрическая функция $f(i, j)$, задающая на гладком одномерном многообразии феноменологически симметричную геометрию ранга 3, восстанавливается однозначно.

Изложенное выше выражает связь феноменологической и групповой симметрий геометрии, задаваемой на одномерном многообразии $\mathfrak{M}_1$ функцией $f(i, j)$, о которой говорится в **теореме 1.1.4**.

1.2 Феноменологическая симметрия в геометрии

Следуя работам Г.Г. Михайличенко [29], [30], [48] перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_{sn}$, наделенное структурой гладкого sn -мерного многообразия, где s и n - натуральные числа, точки которого здесь и далее будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle$ из области определения $\mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i, j) = (f^1(i, j), \dots, f^s(i, j)) \in R^s$.

Замечание 1.2.1. В общем случае вектор-функция f не всякой паре из $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении в явной записи s компонент вектор-функции $f(i, j)$ будем подразумевать, что пара $\langle i, j \rangle$ из области определения $\mathfrak{S}_f$.

Далее обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_{sn}$, через $U(\langle i, j \rangle)$ - окрестность упорядоченной пары точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_{sn}$ на себя.

Для некоторого кортежа $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in \mathfrak{M}_{sn}^n = (\mathfrak{M}_{sn})^n$ длины n введем функции $g_n = g_n(k_1, \dots, k_n)$ и $q_n = q_n(k_1, \dots, k_n)$. С их помощью сопоставим точке $i \in \mathfrak{M}_{sn}$ точки $(f(i, k_1), \dots, f(i, k_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1, i), \dots, f(k_n, i)) \in R^{sn}$ соответственно, если $\langle i, k_1 \rangle, \dots, \langle i, k_n \rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle k_1, i \rangle, \dots, \langle k_n, i \rangle \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций g_n и q_n могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}_{sn}$.

В отношении вектор-функции $f = (f^1, \dots, f^s)$, заданной на sn -мерном гладком многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

Аксиома 1.2.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ подмножество.

Аксиома 1.2.2. Вектор-функция f в области своего определения

есть достаточно гладкая функция.

Аксиома 1.2.3. В $\mathfrak{M}_{sn}^n$ плотно множество таких кортежей длины n , для которых отображение g_n и отображение q_n имеют максимальный ранг, равный sn , в точках плотного в $\mathfrak{M}_{sn}$ подмножества.

Достаточная гладкость означает, что в области ее определения непрерывна как сама функция f , так и все ее производные достаточно высокого порядка.

Определение 1.2.1. Вектор-функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$, для которой выполняются аксиомы 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, будем называть *метрической вектор-функцией* или просто *метрической функцией*, не требуя для ее s компонент выполнения аксиом обычной метрики [14].

Функцию f , удовлетворяющую условиям аксиомы 1.2.3 будем называть *невыврожденной вектор-функцией* (*невыврожденной функцией*).

Заметим, что ограничения в аксиомах 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

На основе исходной метрической вектор-функции f построим отображение F , сопоставляющее кортежу $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n+2$ из $\mathfrak{M}_{sn}^m = (\mathfrak{M}_{sn})^m$ точку $z = (f(i, j), f(i, k), \dots, f(v, w)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ чисел для следующих пар его точек: $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \dots, \langle i, w \rangle, \langle j, k \rangle, \dots, \langle v, w \rangle$ если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn}^m$ множество.

Определение 1.2.2. Будем говорить, что вектор-функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sn -мерном многообразии феноменологически симмет-

ричную геометрию ранга $m = n + 2$, если, кроме аксиом **1.2.1**, **1.2.2**, **1.2.3**, дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.2.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждого кортежа $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n + 2$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \rightarrow R^s$, определенная в некоторой области $E \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$, что в ней $\text{rang} \Phi = s$ и множество $F(U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(z) = \Phi(f(i, j), f(i, k), \dots, f(v, w)) = 0 \quad (1.23)$$

для всех кортежей из $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$.

Аксиома **1.2.4** составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Эта аксиома выражает требование, чтобы $sm(m-1)/2$ расстояний между точками любого кортежа длины $m = n + 2$ из $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$ были функционально связаны, удовлетворяя системе s уравнений (1.23). Условие $\text{rang} \Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_s = 0$) функционально независимы.

Приведенные выше построения поясняет рис.1.2

Если $x^1, \dots, x^{sn}$ - локальные координаты sn -мерного гладкого многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$, то для метрической вектор-функции $f = (f^1, \dots, f^s)$ в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, x_j) = f(x_i^1, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, \dots, x_j^{sn}), \quad (1.24)$$

где $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^{sn})$, $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^{sn})$.

Замечание 1.2.2. Поскольку в соответствии с аксиомой **1.2.3** ранги отображения, соответствующих функций g_n и q_n , равные sn , максималь-

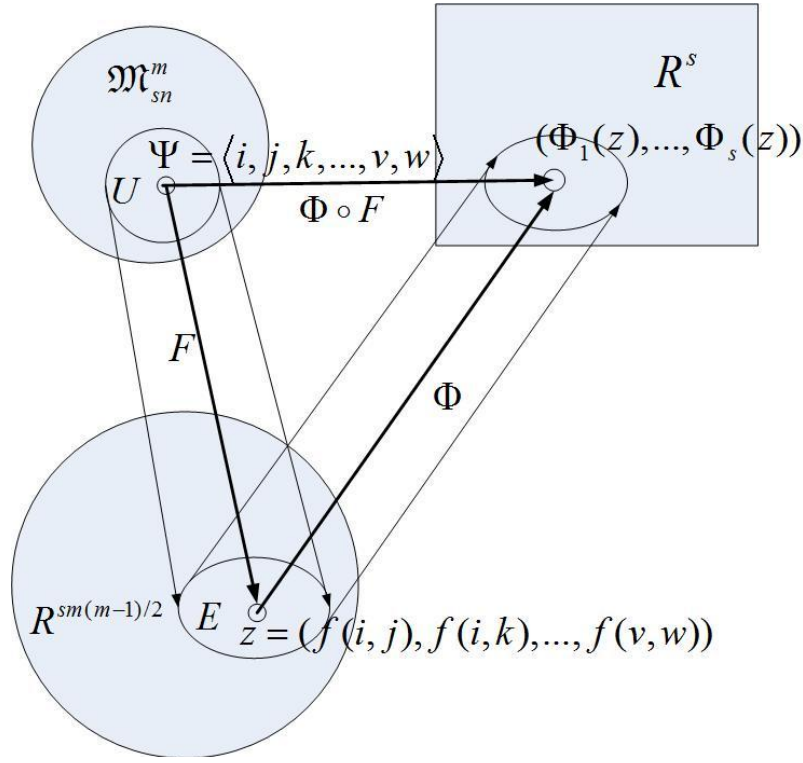


Рис. 1.2: Диаграмма отображений для s -метрических феноменологически симметричных sn -мерных геометрий ранга $n + 2$

ны, то координаты x_i и x_j входят в представление (1.24) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально-обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа в этом представлении, то есть не существует такой локальной системы координат, в которой оно может быть записано в виде

$$f(i, j) = f(x_i^1, \dots, x_i^{n'}, x_j^1, \dots, x_j^{n''}),$$

где или $n' < sn$ или $n'' < sn$. Действительно, если, например, $n' < sn$, то для любого кортежа $\langle j_1, \dots, j_n \rangle \in (U(j))^n$ длины n и для любой точки из $U(i)$ ранг отображения функции $g_n = g_n(j_1, \dots, j_n)$ будет заведомо меньше sn , что противоречит аксиоме **1.2.3**. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (1.24) от локальных координат $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^{sn})$ и $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^{sn})$ в общем случае не гарантирует выполнения аксиомы **1.2.3**.

Используя выражение (1.24), запишем локальное координатное пред-

ставление построенной выше функции F :

[illegible]

нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольной системы функций (1.25).

Функция F , согласно ее локальному координатному представлению (1.25), отображает окрестность $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle) \subset \mathfrak{S}_F$ в $R^{sm(m-1)/2}$. Матрицей этого отображения является функциональная матрица (1.26) системы функций (1.25), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция f задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство **теоремы 1.2.1** можно найти в монографии Г.Г. Михайличенко [35] и его работе [33].

1.3 Групповая симметрия в геометрии

Рассмотрим, следуя работам Г.Г. Михайличенко [29],[35] групповые свойства феноменологически симметричной геометрии, введенной в §1.2.

Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \rightarrow U' \quad (1.28)$$

называется *локальным движением*, если оно сохраняет метрическую функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$. Последнее означает, что для любой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $\langle \lambda(i), \lambda(j) \rangle$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(i, j), \quad (1.29)$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \dots, f^s$ метрической функции f , в котором $\lambda(i) = \lambda(x_i^1, \dots, x_i^{sn}), \lambda(j) = \lambda(x_j^1, \dots, x_j^{sn})$.

Множество всех движений (1.28) есть локальная группа преобразований, для которой метрическая функция f согласно равенству (1.29) является двухточечным инвариантом. Если метрическая функция f задана явно, например, в своем координатном представлении (1.24), то равенство (1.29) является *функциональным уравнением*, решая которое можно найти полную группу локальных движений (1.28). Нам же о метрической функции известно только то, что она невырождена и удовлетворяет некоторой системе s уравнений (1.23). Но этого оказывается достаточно для того, чтобы установить существование $sn(n+1)/2$ -параметрической группы ее движений. Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы" (см. [39], стр. 435). Пусть G^r – r -мерная локальная группа Ли и U – некоторая область многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \rightarrow U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что локальная группа Ли G^r в области $U \subset \mathfrak{M}_{sn}$ задает локальное гладкое действие, то есть r -мерную локальную группу Ли преобразований $G(U, G^r)$, если выполнены следующие три условия:

1. Единице e группы G^r соответствует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G^r$ соответствует композиция преобразований: сначала λ_a и затем λ_b (возможен и другой порядок: $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ba)$).

2. Преобразование λ_a является тождеством лишь при условии, что a есть единица e группы G^r .

3. В координатной форме $\lambda(i, a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i \in U$ и элемента $a \in G^r$.

Условие **2** есть не что иное, как требование эффективности только что введенной группы преобразований ([10], С.107–108; [11], С.10). Элементы группы $G^r(\lambda)$ являются в общем случае нетождественными преобразованиями.

Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r , причем условия **1**, **2**, **3** выполняются для некоторой содержащейся в U окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

В последующем изложении удобно считать, что область $U \subset \mathfrak{M}_{sn}$ не обязательно связна, например, может состоять из двух связных областей [8]: $U = U_1 \cup U_2$, причем $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что метрическая функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, *наделенную групповой симметрией* степени $sn(n+1)/2$, если, кроме аксиом **1.2.1**, **1.2.2**, **1.2.3** дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.3.1. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$ -мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что функция $f(i, j)$ по каждой из своих s компонент является двухточечным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме **1.3.1**, определяет локальную подвижность жестких фигур в sn -мерном простран-

стве $\mathfrak{M}_{sn}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы $G^{sn(n+1)/2}$ определены согласно аксиоме **1.3.1** в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}_{sn}$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $\langle i, j \rangle$, для которых метрическая функция f определена и является двухточечным инвариантом группы локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$. Будем также говорить, что метрическая функция f допускает $sn(n+1)/2$ -мерную локальную группу локальных движений.

Теорема 1.3.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция f задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$, где $m = n + 2$, на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство **теоремы 1.3.1** приведено в монографии Г.Г. Михайличенко [35] и его работе [33].

1.4 Эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии

Метрическая функция f задает геометрию пространства. По этой функции можно найти множество всех движений, относительно которой она будет являться двухточечным инвариантом. С одной стороны, геометрия наделена групповой симметрией, относительно которой она является теорией инвариантов некоторой группы преобразований, лежащей в основе "Эрлангенской программы" Ф. Клейна 1872 года [13]. С дру-

гой стороны, геометрия наделена феноменологической симметрией, выражаемой некоторой функциональной связью между всеми взаимными расстояниями для определенного числа точек пространства, на которую впервые обратил внимание Ю.И. Кулаков [16], сделав основным принципом своей теории физических структур [19], то есть феноменологически симметричной геометрией двух множеств.

В монографии "Полиметрические геометрии" [35] Г.Г. Михайличенко сформулирована теорема об эквивалентности групповой и феноменологической симметрий в геометрии, задаваемой на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ метрической функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$, являющаяся следствием **теорем 1.2.1** и **1.3.1** настоящей главы, необходимые и достаточные условия которых о ранге отображения F совпадают.

Теорема 1.4.1. *Для того, чтобы метрическая вектор-функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $t = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n + 1)/2$.*

В работе [35] в рамках общего доказательства эквивалентности феноменологической и групповой симметрии сформулирована и доказана теорема о размерности локальной группы локальных движений.

Теорема 1.4.2. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых метрической вектор-функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$, задающей на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $t = n + 2$, или, что то же самое, геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n + 1)/2$, не превышает этой степени.*

Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий поз-

волила провести полную классификацию некоторых геометрий, а также исследования в отношении локальных групп Ли преобразований (см. работы Г.Г. Михайличенко [35], В.А. Кырова [21], [22], [23]).

Феноменологическая симметрия ранга $m = n + 2$, выражаемая уравнениями (1.23) из §1.2, легко устанавливается по его явному виду или функциональной матрице (1.26) §1.2, ранг которой определен **теоремой 1.2.1** для $sm(m-1)/2$ функций, специальным образом зависящие от smn координат $x = (x_i^1, \dots, x_w^{sn})$ всех точек кортежа $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n + 2$. Ранг этой матрицы согласно **теореме 1.2.1.** из §1.2 равен $sm(m-1)/2 - s$, что свидетельствует о наличие s -независимых функциональных связей, задаваемые уравнениями (1.23) и выражающих феноменологическую симметрию в геометрии.

Групповая симметрия степени $sn(n+1)/2$ является следствием феноменологической симметрии в соответствии с **теоремой 1.4.1.** настоящего параграфа. Решением функционального уравнения (1.29) §1.2 находится полная локальная группа локальных движений, которая определяет групповую симметрию степени $sn(n+1)/2$. Так же следует отметить, что, решая соответствующее функциональное уравнение при известной группе движений, можно однозначно восстановить метрическую функцию f как двухточечный инвариант с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ [35].

Таким образом, феноменологически симметричные геометрии - это геометрии Клейна с функциональной связью между всеми взаимными расстояниями произвольных $n + 2$ точек. В пространстве с этой геометрией жесткие фигуры и твердые тела при своем движении имеют не более $sn(n+1)/2$ степеней свободы.

1.5 Примеры: плоскость и пространство Евклида

Данные примеры иллюстрируют связь феноменологической и групповой симметрий.

Рассмотрим, следуя работе [33] двумерные ($s = 1, n = 2$) феноменологически симметричные геометрии, которые задаются на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$. Ее локальное координатное представление определяется выражением

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (1.30)$$

где x, y – локальные координаты в многообразии.

Жесткая фигура на плоскости при движении имеет три степени свободы. Возьмем четырехточечную фигуру $\langle i, j, k, l \rangle$. Каждая ее точка задается двумя координатами, а вся фигура – восемью. Шесть значений функции (1.30) для этой фигуры должны быть зависимы, так как, иначе, число ее степеней свободы, определяющееся разностью числа координат и связей, будет равно только двум: $8 - 6 = 2$. Таким образом, для любой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$ согласно аксиоме **1.2.4.** §1.2. должна существовать функциональная связь

$$\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) = 0, \quad (1.31)$$

выражающая феноменологическую симметрию плоской геометрии с метрической функцией (1.30).

Невырожденная метрическая функция (1.30) по аксиоме **1.2.3.** из §1.2. должна, очевидно, удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left. \begin{aligned} \partial(f(i, k), f(i, l))/\partial(x_i, y_i) &\neq 0, \\ \partial(f(k, j), f(l, j))/\partial(x_j, y_j) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2^3$ множества троек $\langle i, k, l \rangle$ и $\langle k, l, j \rangle$.

Содержание **теорем 1.4.1.** и **1.4.2.** §1.4. позволяют сделать вывод о том, что если имеет место связь (1.31), то существует трехпараметрическая группа движений:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

относительно которой метрическая функция (1.30) является двухточечным инвариантом: $f(i', j') = f(i, j)$ или

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (1.34)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$, $\lambda(j) = \lambda(x_j, y_j; a^1, a^2, a^3)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i; a^1, a^2, a^3)$, $\sigma(j) = \sigma(x_j, y_j; a^1, a^2, a^3)$.

Множество всех движений (1.33) определяет групповую симметрию плоской геометрии с метрической функцией (1.30).

Для иллюстрации феноменологической и групповой симметрий в обычной двумерной геометрии, а также связи между ними рассмотрим плоскость Евклида. В декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между любыми двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \quad (1.35)$$

Возьмем четыре произвольные точки i, j, k, l и запишем для них шесть значений метрической функции (1.35): $f(i, j)$, $f(i, k)$, $f(i, l)$, $f(j, k)$, $f(j, l)$, $f(k, l)$. Известно [3], что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ 1 & f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) \\ 1 & f(i, k) & f(j, k) & 0 & f(k, l) \\ 1 & f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.36)$$

Задача 1.5.1. Установить, что для плоскости Евклида с метрической функцией (1.35) соотношение феноменологической симметрии (1.31) выражается уравнением (1.36).

Решение. Используя известное правило перемножения квадратных матриц и их определителей, представим уравнение (1.36) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 & 1 & 0 \\ x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 & 1 & 0 \\ x_l & y_l & x_l^2 + y_l^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -2x_i & -2x_j & -2x_k & -2x_l \\ 0 & -2y_i & -2y_j & -2y_k & -2y_l \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_i^2 + y_i^2 & x_j^2 + y_j^2 & x_k^2 + y_k^2 & x_l^2 + y_l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.37)$$

Действительно, левые части уравнений (1.36) и (1.37) совпадают для метрической функции (1.35). Убедимся в этом, перемножив, например, в левой части уравнения (1.37) вторую строку первого определителя на третий столбец второго: $-2x_i x_j - 2y_i y_j + x_i^2 + y_i^2 + x_j^2 + y_j^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = f(i, j)$. Оба перемножаемых определителя, имея нулевой столбец и нулевую строку, заведомо равны нулю, и их произведение, совпадающее с определителем Кэли-Менгера в левой части уравнения (1.36), также равно нулю. Это и доказывает справедливость уравнения (1.36), которое является тождеством по восьми координатам $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$

четырёх точек i, j, k, l .

Геометрический смысл соотношения (1.36) состоит в том, что объём тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. В соответствии с терминологией Ю.И. Кулакова [16] соотношение (1.36), справедливое для любой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости ранга 4. По метрической функции (1.35) можно найти множество движений плоскости Евклида, то есть таких гладких и обратимых ее преобразований

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (1.38)$$

удовлетворяющих условию $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, относительно которых эта функция сохраняется: $f(i', j') = f(i, j)$. Действительно, если преобразование (1.38) является движением, то для его функций λ и σ получаем функциональное уравнение

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\lambda(j) = \lambda(x_j, y_j)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$, $\sigma(j) = \sigma(x_j, y_j)$. Сводя это уравнение к системе функционально - дифференциальных соотношений, можно найти все его решения [37]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x, y) &= ax - \varepsilon by + c, \\ \sigma(x, y) &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные.

Множество всех движений (1.38) с функциями (1.39) является группой, определяющей групповую симметрию плоскости Евклида, в которую входят как собственные движения с $\varepsilon = 1$, так и несобственные с $\varepsilon = -1$. Все собственные движения составляют связную локальную группу преобразований, которые можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + c, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + d. \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Сопоставляя полученные уравнения движений (1.40) с общей их записью (1.33), устанавливаем соотношение параметров: $a^1 = c, a^2 = d, a^3 = \varphi$. Аддитивные параметры c, d задают параллельный перенос вдоль координатных осей, а угловой параметр φ – поворот относительно начала координат в плоскости Евклида.

С другой стороны, эта трехпараметрическая группа преобразований координатной плоскости (x, y) задает на ней по Ф.Клейну [13] евклидову геометрию. В частности, метрическая функция $f(i, j)$ может быть найдена решением функционального уравнения

$$f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

как двухточечный инвариант группы движений (1.30). Общее решение этого уравнения совпадает с метрической функцией (1.35) с точностью до преобразования, задаваемого произвольной гладкой функцией ψ одной переменной:

$$f(i, j) = \psi((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2).$$

Полученный результат на примере плоскости Евклида устанавливает эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, что обеспечено **теоремой 1.4.1** на плоскости.

Заметим, что приведенные выше соображения о связи феноменологической и групповой симметрий применимы не только в отношении плоскости Евклида, но и в отношении других феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 4 (плоскости Лобачевского, плоскости Минковского, симплектической плоскости, обычной двумерной сферы и т.д.), которая была установлена Ю.И. Кулаковым [19].

Далее рассмотрим трехмерные ($s = 1, n = 3$) феноменологически симметричные геометрии, которые задаются на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_3 \times \mathfrak{M}_3$. Ее

координатное представление определяется выражением

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \quad (1.41)$$

где (x, y, z) – локальные координаты в многообразии. Если эта функция задает феноменологически симметричную геометрию ранга 5, то по аксиоме **1.2.4.** из §1.2. десять ее значений для пятерки $\langle i, j, k, l, m \rangle$ функционально связаны:

$$\begin{aligned} &\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(i, m), f(j, k), \\ &f(j, l), f(j, m), f(k, l), f(k, m), f(l, m)) = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Невырожденная метрическая функция (1.41) по аксиоме **1.2.3.** из §1.2. должна, очевидно, удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left. \begin{aligned} &\partial(f(i, k), f(i, l), f(i, m))/\partial(x_i, y_i, z_i) \neq 0, \\ &\partial(f(k, j), f(l, j), f(m, j))/\partial(x_j, y_j, z_j) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_3^4$ множества четверок $\langle i, k, l, m \rangle$ и $\langle k, l, m, j \rangle$.

В качестве второго примера приведем трехмерное пространство Евклида. Для метрической функции $f(i, j)$, сопоставляющей паре точек $\langle i, j \rangle$ квадрат обычного расстояния, в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) представление будет следующим:

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2. \quad (1.44)$$

В пространстве Евклида, оказывается [19] десять взаимных расстояний для пятерки $\langle i, j, k, l, m \rangle$ точек функционально между собой связаны, обращая в ноль определитель Кэли-Менгера шестого порядка, строение которого аналогично строению определителя пятого порядка (1.36):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) & f(i, m) \\ 1 & f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) & f(j, m) \\ 1 & f(i, k) & f(j, k) & 0 & f(k, l) & f(k, m) \\ 1 & f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 0 & f(l, m) \\ 1 & f(i, m) & f(j, m) & f(k, m) & f(l, m) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.45)$$

Задача 1.5.2. Установить, что для пространства Евклида с метрической функцией (1.44) соотношение феноменологической симметрии (1.42) выражается уравнением (1.45).

Решение. По аналогии с решением задачи 1.5.1 представим уравнение (1.45) в виде произведения двух определителей:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & z_i & x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 & 1 & 0 \\ x_j & y_j & z_j & x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & z_k & x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 & 1 & 0 \\ x_l & y_l & z_l & x_l^2 + y_l^2 + z_l^2 & 1 & 0 \\ x_m & y_m & z_m & x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -2x_i & -2x_j & -2x_k & -2x_l & -2x_m \\ 0 & -2y_i & -2y_j & -2y_k & -2y_l & -2y_m \\ 0 & -2z_i & -2z_j & -2z_k & -2z_l & -2z_m \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 & x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 & x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 & x_l^2 + y_l^2 + z_l^2 & x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.46)$$

Очевидно, что произведение определителей (1.46) совпадает с определителем Кэли-Менгера в левой части уравнения (1.45) и равно нулю, что доказывает наличие связи (1.42).

Согласно **теоремам 1.4.1.** и **1.4.2.** из §1.4. групповая симметрия трехмерных геометрий степени 6 эквивалентна феноменологической

симметрии ранга 5.

Локально-обратимое преобразование

$$x' = \lambda(x, y, z), \quad y' = \sigma(x, y, z), \quad z' = \tau(x, y, z),$$

удовлетворяющее условию $\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(x, y, z) \neq 0$, будет являться локальным движением, если оно сохраняет метрическую функцию (1.41):

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \tau(i), \lambda(j), \sigma(j), \tau(j)) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), \quad (1.47)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i, z_i)$, $\tau(i) = \tau(x_i, y_i, z_i)$.

Решением этого функционального уравнения для трехмерного пространства Евклида с метрической функцией (1.44) находится полная локальная шестипараметрическая группа движений, определяющая ее групповую симметрию степени 6

$$\begin{aligned} x' &= x(\cos\varphi\cos\theta - \varepsilon\sin\varphi\sin\psi\sin\theta) - \varepsilon y\sin\varphi\cos\psi \\ &\quad + z(\sin\varphi\cos\theta + \varepsilon\cos\varphi\sin\psi\sin\theta) + d_1, \\ y' &= x(\sin\varphi\cos\theta + \varepsilon\cos\varphi\sin\psi\sin\theta) + \varepsilon y\cos\varphi\cos\psi \\ &\quad + z(\sin\varphi\sin\theta - \varepsilon\cos\varphi\sin\psi\sin\theta) + d_2, \\ z' &= -x\cos\psi\sin\theta + y\sin\psi + z\cos\psi\cos\theta + d_3, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где d_1, d_2, d_3 – аддитивные параметры, задающие параллельный перенос вдоль координатных осей, φ, ψ, θ – угловые параметры, задающие повороты вокруг каждой из трех осей, $\varepsilon = \pm 1$ – дискретный параметр, отличающий собственное движение ($\varepsilon = 1$) от несобственного ($\varepsilon = -1$).

Функциональное уравнение (1.47) для метрической функции (1.44) будет иметь следующий вид:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 + (\tau(i) - \tau(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \quad (1.49)$$

в котором, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i, z_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i, z_i)$, $\tau(i) =$

$\tau(x_i, y_i, z_i)$. Сводя это функциональное уравнение к системе функционально-дифференциальных уравнений, можно найти все его решения [57]:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ \sigma(x, y, z) &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ \tau(x, y, z) &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

где между девятью непрерывными параметрами $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ имеется шесть связей:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

с учетом которых число степеней свободы при движении жесткой фигуры в пространстве Евклида, действительно равно 6.

В заключение отметим, что, также как и в плоскости Евклида, в трехмерном пространстве Евклида по известной группе движений (1.48) метрическая функция восстанавливается однозначно как ее двухточечный инвариант с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ решением функционального уравнения (1.47) [57].

Полученный результат на примере пространства Евклида устанавливает эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, что также, как и в случае плоскости Евклида обеспечено **теоремой 1.4.1.**

1.6 Методы классификации феноменологически симметричных геометрий и анализ полученных результатов

Одной из наиболее важных задач при исследовании феноменологически симметричных геометрий является их классификация. Это объясняется тем, что сами функции (1.24), задающие такие геометрии, и уравнения (1.23), выражающие их феноменологическую симметрию, могут иметь содержательную физическую интерпретацию.

К настоящему времени построены полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий соответствующих рангов 3, 4 и 5, а также двуметрических, триметрических и четырехметрических феноменологически симметричных геометрий минимального ранга, равного 3 (см. работы Г.Г. Михайличенко [36], [37], В.Х. Лева [26], В.А. Кырова [20]). Другие классификации еще не построены, так как не найдены новые более эффективные методы решения подобных задач.

Основными же методами классификации феноменологически симметричных геометрий являются сейчас групповой и аналитический методы, которые были предложены и разработаны Г.Г. Михайличенко в рамках теории физических структур [33], [27], как феноменологически симметричной геометрии двух множеств.

Основу группового метода классификации составляет, установленная Г.Г. Михайличенко эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометриях [29], [33], строящихся на групповой и феноменологической симметриях, суть которой была изложена в параграфах §1.2 – §1.4.

Групповой метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в определении всех необходимых локальных групп Ли преобразований многообразия и соответствующих им алгебр Ли, между которыми имеется взаимно однозначное соответствие [28], [31]. В данном методе метрические функции феноменологически симметричных геометрий являются невырожденными двухточечными инвариантами соответствующих групп преобразований исходного многообразия. Задача классификации таких геометрий предполагает предварительную полную классификацию групп преобразований с определенным числом параметров [31], [32]. Однако с ростом компонент метрической вектор-функции f и ранга феноменологической симметрии проведение полной классификации групп преобразований становится технически сложным, например, не удастся построить классификацию шестипараметрических групп преобразований трехмерного многообразия.

Аналитический метод классификации состоит в получении функционально - дифференциальных соотношений из свойств соответствующей функциональной матрицы и переходу от них к системе дифференциальных уравнений. Ее решения делятся на невырожденные, согласующиеся с системой исходных аксиом и вырожденные – им не удовлетворяющие. Невырожденные решения есть метрические функции, задающие на гладком многообразии феноменологически симметричные геометрии, которые определяются с точностью до локально обратимой замены локальных координат в многообразии и гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$. Таким образом, основа аналитического метода исследования состоит в применении методов классического математического анализа к специфическим задачам, возникающим при классификации феноменологически симметричных геометрий и исследовании их свойств.

Гибкое сочетание аналитического и группового методов было применено В.Х. Левом при воспроизведении классификации двумерных и построении классификации трехмерных геометрий [26].

В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий, опирающийся на гипотезу о вложении (см. [24],[25]), которую поясним следующим примером. Например, двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга 4, задаваемые на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (1.30) §1.5, содержатся в трехмерных феноменологически симметричных геометриях ранга 5, задаваемые на гладком трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (1.41) §1.5, то есть $f(i, j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \chi(g(x_i, y_i, x_j, y_j), z_i, z_j)$, где $g(i, j) = g(x_i, y_i, x_j, y_j)$ есть метрическая функция двумерной феноменологически симметричной геометрии ранга 4. Справедливость гипотезы подтверждается сопоставлением классификаций двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко [37] и В.Х. Лева [26]). В частности, метрическая функция трехмерного пространства Евклида (1.44) содержит метрическую функцию плоскости Евклида (1.35) (см. §1.5).

Вопрос о необходимости применения разных методов классификации феноменологически симметричных геометрий является существенным, поскольку, во-первых, не во всех случаях при построении таких геометрий можно ограничиться только одним методом; во-вторых, применение разных методов в проведении классификации геометрии позволяет судить о полученных ранее результатов с иной точки зрения. Например, двумерные феноменологически симметричные геометрии, также как двуметрические и триметрические геометрии, были построены груп-

повым методом, а трехмерные феноменологически симметричные геометрии методом, предложенным В.Х. Левом. С другой стороны, классификация двумерных геометрий была вначале построена групповым методом, а затем воспроизведена В.Х. Левом [26] методом, отличным от группового. Эти соображения естественно приводят к задаче воспроизведения классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий аналитическим методом, который опирается на анализ ранга некоторых функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла с точностью до гладкой замены локальных координат, позволяющей редуцировать, возникающие из них системы функциональных уравнений к максимально простому виду. Развитие аналитического метода и его использование было осуществлено автором настоящего исследования (см. главы 2, 3) и опубликовано в работах [51], [52].

Глава 2

Группы движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий

Вторая глава диссертации посвящена нахождению групп движений Гельмгольцевых геометрий (плоскость Гельмгольца, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева плоскости) как решение соответствующих функциональных уравнений, а также их двухточечных инвариантов.

2.1 Определение феноменологически симметричных двумерных геометрий и их классификация

В настоящем параграфе в соответствие с §1.2 главы 1 определим феноменологически симметричную двумерную геометрию ($s = 1, n = 2$).

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_2$, наделенное структурой гладкого двумерного многообразия, а также гладкая функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ некоторое вещественное число $f(i, j) \in R$. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$, через $U(\langle i, j \rangle)$ – окрестность пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений мно-

жества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Для некоторой пары $\langle k_1, k_2 \rangle$ из $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ введем функции $g_2 = g_2(k_1, k_2)$ и $q_2 = q_2(k_1, k_2)$. С их помощью сопоставим точке $i \in \mathfrak{M}_2$ точки $(f(i, k_1), f(i, k_2)) \in R^2$ и $(f(k_1, i), f(k_2, i)) \in R^2$ соответственно, если $\langle i, k_1 \rangle, \langle i, k_2 \rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle k_1, i \rangle, \langle k_2, i \rangle \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций g_2 и q_2 могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}_2$.

Для функции f , заданной на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$, будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

Аксиома 2.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ подмножество.

Аксиома 2.1.2. Функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 2.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2^3$ множества троек $\langle i, k, l \rangle$ и $\langle k, l, j \rangle$ локальное координатное представление функции f удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f(i, k), f(i, l))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f(k, j), f(l, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \quad (2.1)$$

Определение 2.1.1. Функцию f , для которой выполняются аксиомы **2.1.1**, **2.1.2**, **2.1.3** будем называть *метрической функцией*, не требуя для ее s компонент выполнения аксиом обычной метрики [14].

Функцию f , удовлетворяющую условиям аксиомы **2.1.3** будем называть *невыврожденной функцией*.

На основе исходной функции f построим отображение F , сопоставляющее четверке $\langle i, j, k, l \rangle$ из $\mathfrak{M}_2^4$ точку $z = (f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) \in R^6$, координаты которой в R^6 определяются упорядоченной по исходной четверке последовательностью шести расстояний

для следующих пар его точек: $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \langle i, l \rangle, \langle j, k \rangle, \langle j, l \rangle, \langle k, l \rangle$, если они принадлежат $\mathfrak{S}_f$ (см. рис. 3.1).

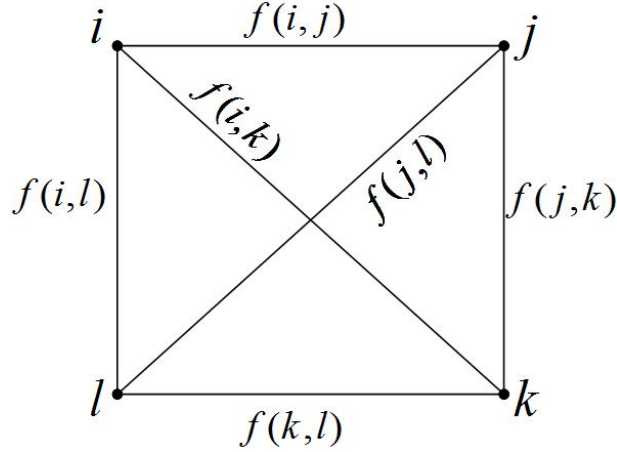


Рис. 2.1: Схема построения отображения F

Очевидно, что область определения $\mathfrak{S}_F$ функции F есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^4$ множество.

Определение 2.1.2. Будем говорить, что метрическая функция f задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную геометрию ранга 4, если, кроме аксиом 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, дополнительно выполняется следующая аксиома.

Аксиома 2.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$ которой и некоторой ее окрестности $U(\langle i, j, k, l \rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \rightarrow R$, определенная в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k, l \rangle)$, что в ней $\text{grad}\Phi \neq \vec{0}$ и множество $F(U(\langle i, j, k, l \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(z) = \Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) = 0 \quad (2.2)$$

для всех четверок из $U(\langle i, j, k, l \rangle)$.

Аксиома 2.1.4. составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Эта аксиома выражает требование, чтобы шесть рас-

стояний между точками любой четверки из $U(\langle i, j, k, l \rangle)$ были функционально связаны, удовлетворяя уравнению (2.2). Условие $grad\Phi \neq \vec{0}$ означает, что в этом уравнении функция Φ тождественно в постоянную не обращается.

Данные построения поясняет рис. 2.2

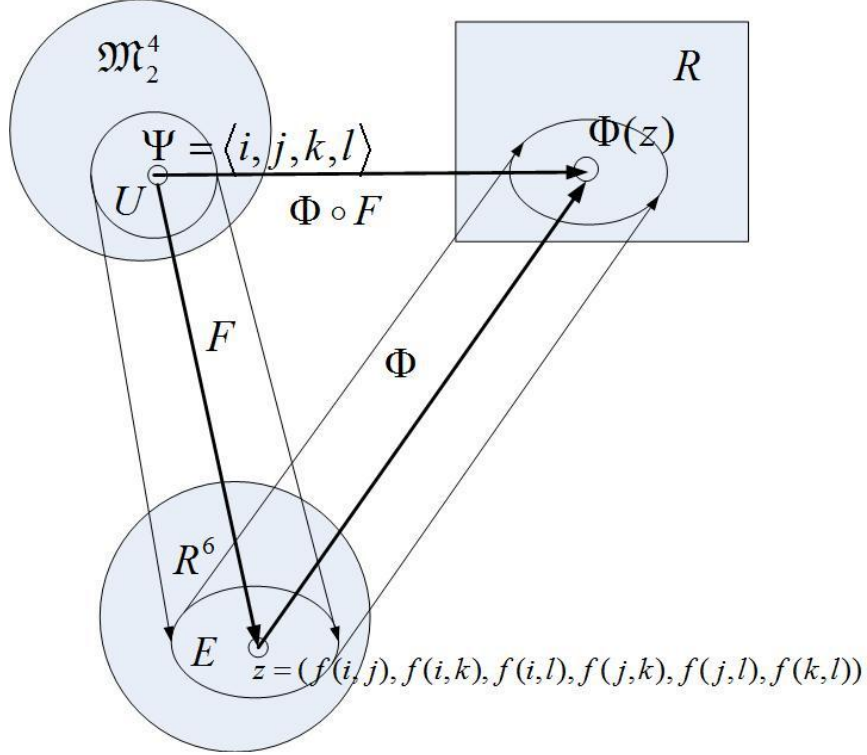


Рис. 2.2: Диаграмма отображений для феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 4

Согласно аксиоме **2.1.4** множество значений композиции $\Phi \circ F$ функций Φ и F в R содержит единственную точку – *ноль*.

Если (x, y) – локальные координаты в двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$, то для метрической функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.3)$$

Используя выражение (2.3), запишем локальное координатное пред-

ставление построенной функции F :

$$\left. \begin{aligned} f(i, j) &= f(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f(i, k) &= f(x_i, y_i, x_k, y_k), \\ f(i, l) &= f(x_i, y_i, x_l, y_l), \\ f(j, k) &= f(x_j, y_j, x_k, y_k), \\ f(j, l) &= f(x_j, y_j, x_l, y_l), \\ f(k, l) &= f(x_k, y_k, x_l, y_l) \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

функциональная матрица которой

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i, k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(i, l)}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f(i, l)}{\partial y_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f(j, l)}{\partial x_j} & 0 \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f(j, l)}{\partial y_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(i, k)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial x_k} & 0 & \frac{\partial f(k, l)}{\partial x_k} \\ 0 & \frac{\partial f(i, k)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(j, k)}{\partial y_k} & 0 & \frac{\partial f(k, l)}{\partial y_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(i, l)}{\partial x_l} & 0 & \frac{\partial f(j, l)}{\partial x_l} & \frac{\partial f(k, l)}{\partial x_l} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(i, l)}{\partial y_l} & 0 & \frac{\partial f(j, l)}{\partial y_l} & \frac{\partial f(k, l)}{\partial y_l} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

имеет восемь строк и шесть столбцов. Поскольку число функций в системе (2.4) меньше числа координат, наличие связи (2.2) является нетривиальным фактом.

Функция F , согласно ее локальному координатному представлению (2.4), отображает окрестность $U(\langle i, j, k, l \rangle) \subset \mathfrak{S}_F$ в R^6 . Функциональной матрицей этого отображения является матрица (2.5) системы функций (2.4), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Далее приведем формулировку теоремы о ранге отображения по-

строенной функции F по работе [37], полное доказательство которой содержится в этой работе.

Теорема 2.1.1. *Для того, чтобы метрическая функция f , удовлетворяющая аксиомам 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную геометрию ранга 4, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен 5 на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Плоскость Евклида с метрической функцией (1.13) и функциональной связью (1.14), выражающей ее феноменологическую симметрию, которая была приведена в качестве примера в §1.5, является одной из таких геометрий. Но сколько их может быть? В качестве ответа на этот вопрос, следуя работе [34], приведем классификацию феноменологически симметричных двумерных геометрий, построенную Г.Г. Михайличенко групповым методом.

Теорема 2.1.2. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) невырожденная метрическая функция f , задающая на открытой области двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную геометрию ранга четыре, может быть представлена одним из следующих одиннадцати канонических выражений:*

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad (2.6)$$

$$f(i, j) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \quad (2.7)$$

$$f(i, j) = \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j, \quad (2.8)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, \quad (2.9)$$

$$f(i, j) = \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j, \quad (2.10)$$

$$f(i, j) = x_i y_j - x_j y_i, \quad (2.11)$$

$$f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \quad (2.12)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta \operatorname{ar}(c) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.13)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.14)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.15)$$

$$f(i, j) = \frac{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2}{y_i y_j}, \quad (2.16)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$; $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, причем необязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

В приведенной классификации шесть выражений (2.6)–(2.11) определяют метрические функции хорошо известных двумерных геометрий: (2.6) – плоскости Евклида; (2.7) – двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве; (2.8) – плоскости Лобачевского как двумерного двухполостного гиперboloида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; (2.9) – плоскости Минковского; (2.10) – двумерного однополостного гиперboloида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; (2.11) – симплектической плоскости.

Существование четырех метрических функций (2.12)–(2.15), задающих двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга четыре, впервые было установлено Г.Г. Михайличенко. Двумерная геометрия с метрической функцией (2.15) была названа плоскостью Гельмгольца, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко упоминает Гельмгольц в своей работе [9]. Соответственно, метрическая функция (2.13) задает псевдогельмгольцеву плоскость, а метрическая функция (2.14) – дуальногельмгольцеву плоскость.

Профессор А.М. Широков (кафедра Казанского государственного университета) обратил внимание Г.Г. Михайличенко на то, что три мет-

рические функции: (2.13), (2.14), (2.15) можно записать единообразно, используя три типа комплексных чисел:

$$f(i, j) = (z_i - z_j) \overline{(z_i - z_j)} \exp 2\gamma \arg(z_i - z_j),$$

где $z = x + ey$, $\bar{z} = x - ey$, причем $e^2 = +1$, $\gamma > 0$ и дополнительно $\gamma \neq 1$ для выражения (2.13); $e^2 = 0$, $\gamma = 1$ для выражения (2.14); $e^2 = -1$, $\gamma > 0$ для выражения (2.15). Таким образом все три возможные типа комплексных чисел на плоскости, а именно двойные ($e^2 = +1$), дуальные ($e^2 = 0$) и обычные ($e^2 = -1$), естественно вписались в полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга 4.

Метрическая функция (2.12) задает так называемую симплициальную плоскость, название которой было подсказано автору классификации (2.6) – (2.16) известным геометром Р.И. Пименовым, в исследованиях которого такое выражение встречалось [38]. Последнее выражение (2.16) определяет метрическую функцию, задающую феноменологически симметричную геометрию на несвязном двумерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$) [40], либо двумерный однополостной гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$).

Полное доказательство **теоремы 2.1.2.** можно найти в монографиях [35], [37].

Феноменологическую симметрию этих одиннадцати геометрий (2.6)–(2.16) можно установить по рангу функциональной матрицы для шести функций $f(i, j)$, $f(i, k)$, $f(i, l)$, $f(j, k)$, $f(j, l)$, $f(k, l)$, специальным образом зависящих от восьми переменных – координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ четырех точек кортежа $\langle i, j, k, l \rangle$, который, как показывают программы Matlab, Maple равен 5, что свидетельствует о наличии функ-

циональной связи. Что же касается самого уравнения (2.2), то в явном виде оно найдено для всех двумерных геометрий, кроме гельмгольцевых, задаваемых метрическими функциями (2.13), (2.14) и (2.15). Например, для плоскости Евклида – (2.6) и псевдоевклидовой плоскости Минковского – (2.9) таким уравнением будет общее для них уравнение (1.36) из §1.5, обращающее в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка для четверки $\langle i, j, k, l \rangle$ точек этих плоскостей. Для следующих пяти двумерных геометрий, а именно: двумерной сферы – (2.7), плоскости Лобачевского – (2.8), однополостного гиперboloида – (2.10), симплектической плоскости – (2.11) и геометрии на несвязном двумерном многообразии – (2.16), в уравнении (2.2) слева стоит определитель Грама четвертого порядка для четверки $\langle i, j, k, l \rangle$, причем диагональными элементами определителя являются значения метрической функции для диагональных пар $\langle i, i \rangle; \langle j, j \rangle; \langle k, k \rangle; \langle l, l \rangle$.

Ниже приведем явный вид уравнений, выражающие феноменологическую симметрию каждой геометрии (2.6)–(2.16). Напоминаем, что для плоскости Евклида (2.6) и псевдоевклидовой плоскости Минковского (2.9) таким уравнением будет обращение в ноль определителя Кэли-Менгера пятого порядка (1.14) [37]:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ 1 & f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) \\ 1 & f(i, k) & f(j, k) & 0 & f(k, l) \\ 1 & f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для двумерной сферы – (2.7) и однополостного гиперboloида – (2.10)

уравнение (2.2) будет таким:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ f(i, j) & 1 & f(j, k) & f(j, l) \\ f(i, k) & f(j, k) & 1 & f(k, l) \\ f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

для симплектической плоскости (2.11) будет следующим:

$$\begin{vmatrix} 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ -f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) \\ -f(i, k) & -f(j, k) & 0 & f(k, l) \\ -f(i, l) & -f(j, l) & -f(k, l) & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

для плоскости Лобачевского (2.8):

$$\begin{vmatrix} -1 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ f(i, j) & -1 & f(j, k) & f(j, l) \\ f(i, k) & f(j, k) & -1 & f(k, l) \\ f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

и, наконец, для геометрии на несвязном двумерном многообразии (2.16):

$$\begin{vmatrix} 2\varepsilon_i & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ f(i, j) & 2\varepsilon_j & f(j, k) & f(j, l) \\ f(i, k) & f(j, k) & 2\varepsilon_k & f(k, l) \\ f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 2\varepsilon_l \end{vmatrix} = 0.$$

Также найдено в явном виде уравнение (2.2) и для симплицальной плоскости, задаваемой метрической функцией (2.12) [37]:

$$\begin{vmatrix} f(i, j) - f(j, k) & f(j, k) - f(i, k) & 0 \\ f(i, j) - f(j, l) & 0 & f(i, l) - f(j, l) \\ 0 & f(i, k) - f(k, l) & f(i, l) - f(k, l) \end{vmatrix} = 0.$$

Как отмечалось выше, для гельмгольцевых плоскостей – (2.13), (2.14) и (2.15) уравнение (2.2) в явном виде еще не найдено.

2.2 Группа движений как решение функционального уравнения

Пусть метрическая функция

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (2.17)$$

удовлетворяющая условиям аксиом **2.1.1**, **2.1.2**, **2.1.3** задает геометрию на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$.

Гладкое локально обратимое преобразование многообразия $\mathfrak{M}_2$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda(x, y), \\ y' &= \sigma(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad (2.19)$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию (2.17):

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (2.20)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$, $\lambda(j) = \lambda(x_j, y_j)$, $\sigma(j) = \sigma(x_j, y_j)$.

Равенство (2.20) при известном координатном представлении (2.17) есть *функциональное уравнение* на множество движений. Решая это уравнение, находим все возможные движения, совокупность которых является локальной группой преобразований многообразия.

Запишем определение 1.3.1 из §1.3 главы 1 для двумерной геометрии.

Определение 2.2.1. Будем говорить, что метрическая функция f задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ геометрию, *наделенную групповой симметрией* степени 3, если, кроме аксиом **2.1.1**, **2.1.2**, **2.1.3**, дополнительно выполняется следующая аксиома.

Аксиома 2.2.1: Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие трехмерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что метрическая функция $f(i, j)$ является двухточечный инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме **2.2.1**, определяет локальную подвижность жестких фигур в двумерном пространстве $\mathfrak{M}_2$, аналогичную подвижности твердых тел в плоскости Евклида. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы G^3 определены согласно аксиоме **2.2.1** в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $\langle i, j \rangle$, для которых метрическая функция f определена и является двухточечным инвариантом группы локальных преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$. Будем также говорить, что метрическая функция допускает трехмерную локальную группу Ли локальных движений.

Для двумерных геометрий теорема об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, как частный случай **теоремы 1.4.1** из главы 1, можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.2.1. *Для того, чтобы метрическая функция f задавала на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на нем двумерную геометрию наделенную групповой*

симметрией степени 3.

Степень групповой симметрии двумерной геометрии, задаваемой метрической функцией (2.17) устанавливается по числу независимых и непрерывных параметров группы движений. Если эта степень равна 3, то согласно **теореме 2.2.1** метрическая функция (2.17) на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ задает феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

В качестве иллюстрации методов решения функционального уравнения (2.17) рассмотрим по монографии [37] плоскость Евклида, задаваемую метрической функцией (1.35):

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

для которой оно имеет следующий вид:

$$((\lambda(i)) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad (2.21)$$

где $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\lambda(j) = \lambda(x_j, y_j)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$, $\sigma(j) = \sigma(x_j, y_j)$.

Задача 2.2.1. Для плоскости Евклида с метрической функцией (1.35) найти полную локальную группу движений.

Решение. Вследствие предполагаемой локальной обратимости преобразований (2.19) якобиан для двух функций $\lambda(x, y), \sigma(x, y)$ по двум переменным x, y

$$\Delta = \frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.21) справедливо для любых точек i и j , поэтому по их координатам x_i, y_i и x_j, y_j оно должно выполняться тождественно. Дифференцируя его по координатам x_j, y_j точки j получаем:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j)) \frac{\partial \lambda(j)}{\partial x_j} + (\sigma(i) - \sigma(j)) \frac{\partial \sigma(j)}{\partial x_j} &= x_i - x_j, \\ (\lambda(i) - \lambda(j)) \frac{\partial \lambda(j)}{\partial y_j} + (\sigma(i) - \sigma(j)) \frac{\partial \sigma(j)}{\partial y_j} &= y_i - y_j. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Результаты дифференцирования (2.23) рассмотрим как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно разностей $\lambda(i) - \lambda(j)$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$. Поскольку определитель этой системы совпадает с якобианом (2.22) для точки j и отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= (x_i - x_j) \frac{\partial \sigma(j)}{\Delta(j) \partial y_j} - (y_i - y_j) \frac{\partial \sigma(j)}{\Delta(j) \partial x_j}, \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= -(x_i - x_j) \frac{\partial \lambda(j)}{\Delta(j) \partial y_j} + (y_i - y_j) \frac{\partial \lambda(j)}{\Delta(j) \partial x_j}, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где $\Delta(j) = \frac{\partial(\lambda(x_j, y_j), \sigma(x_j, y_j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0$.

Дифференцируя найденные решения по координатам точки i , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda(i)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sigma(j)}{\Delta(j) \partial y_j}, & \frac{\partial \lambda(i)}{\partial y_i} &= -\frac{\partial \sigma(j)}{\Delta(j) \partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma(i)}{\partial x_i} &= -\frac{\partial \lambda(j)}{\Delta(j) \partial y_j}, & \frac{\partial \sigma(i)}{\partial y_i} &= \frac{\partial \lambda(j)}{\Delta(j) \partial x_j}. \end{aligned} \right\}$$

Вследствие разделения переменных (координат точек i и j) получаем, что коэффициенты в (2.24) при разностях координат $x_i - x_j$ и $y_i - y_j$ являются постоянными, которые обозначим соответственно через a, g, b, h :

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= a(x_i - x_j) + g(y_i - y_j), \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= b(x_i - x_j) + h(y_i - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Разделяя, далее, в решениях (2.25) точки i, j и затем опуская их обозначения, приходим к следующим выражениям:

$$\lambda(x, y) = ax + gy + c, \quad \sigma(x, y) = bx + hy + d, \quad (2.26)$$

которые необходимо подставить в исходное функциональное уравнение (2.21). В результате получаем связь между коэффициентами этих выражений:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad g^2 + h^2 = 1, \quad ag + bh = 0,$$

откуда находим:

$$h = \varepsilon a, \quad g = -\varepsilon b, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Таким образом, для функций λ и σ преобразования (2.18), определяющих множество всех движений плоскости Евклида, получаем окончательно следующие выражения, с помощью которых запишем уравнения группы движения

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные.

Легко устанавливается, что множество движений (2.27) является трехпараметрической группой, то есть плоскость Евклида наделена групповой симметрией степени 3. Это же можно сказать в силу **теоремы 2.2.1** и о любой из геометрий, задаваемых метрическими функциями (2.6)–(2.16). Для гельмгольцевых геометрий это будет установлено в следующих параграфах более совершенными методами.

Полагая в уравнениях (2.27) $a = \cos \varphi$, $b = \sin \varphi$, получаем множество преобразований

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - \varepsilon y \sin \varphi + c, \\ y' &= x \sin \varphi + \varepsilon a \cos \varphi + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, c, d, φ – произвольные постоянные. Множество преобразований (2.28) является полной локальной трехпараметрической группой движений плоскости Евклида, в которую входят как собственные движения (1.30) §1.5 при $\varepsilon = +1$, так и несобственные движения с $\varepsilon = -1$, причем, напомним, угловой параметр φ определяет вращение, а аддитивные параметры c, d – параллельный перенос.

2.3 Группа движений плоскости Гельмгольца

В приведенной выше классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга 4 (см. теорему 2.1.2) присутствует плоскость Гельмгольца, задаваемая метрической функцией (2.15) на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$. Явный вид уравнения (2.2), напоминаем, для нее не известен, однако его существование подтверждается рангом функциональной матрицы (2.5), который равен 5.

Целью исследований настоящего параграфа является нахождение множества всех движений плоскости Гельмгольца как решение функционального уравнения (2.20) относительно обратимых преобразований (2.18), удовлетворяющих условию (2.19), которые сохраняют метрическую функцию (2.15).

По **теореме 2.2.1.** плоскость Гельмгольца наделена групповой симметрией степени 3, убедимся в этом.

Запишем для нее функциональное уравнение (2.20) на множество движений:

$$\begin{aligned} & ((\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)}) = \\ & = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\gamma > 0$ – параметр семейства. Результат его решения представим в виде теоремы, доказательство которой опубликовано автором исследования в работе [51]:

Теорема 2.3.1. *Все движения плоскости Гельмгольца образуют однопараметрическое семейство трехпараметрических групп ее преобразований*

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.30)$$

где $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{b}{a}) = 1$. Здесь γ – положительная константа (параметр семейства).

Доказательство. Продифференцируем уравнение (2.29) по координатам x_j, y_j точки j и разделим почленно на него уравнение, полученное в результате дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} + \\ & + (\sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ & (\lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} + \\ & + (\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{(x_i - x_j)\gamma + (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

В полученных равенствах и везде далее введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_x(j) &= \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \quad \lambda_y(j) = \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial y_j}, \\ \sigma_x(j) &= \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \quad \sigma_y(j) = \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Равенства (2.31) рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2}.$$

Определитель этой системы

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j) & \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j) \\ \lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j) & \sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) \end{vmatrix} = (1 + \gamma^2) \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

согласно условию (2.19) отличен от нуля, и поэтому система может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\
& \frac{\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) - \gamma(\sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j))}{\Delta(j)} \times \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \\
& - \frac{\gamma(\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j)) + \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\
& \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\
& \frac{\gamma(\lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)) - \lambda_y(j) - \gamma\sigma_y(j)}{\Delta(j)} \times \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \\
& + \frac{\gamma(\lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j)) + \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.
\end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Запишем эти решения в следующем виде

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{au}{u^2 + v^2} + \frac{g\vartheta}{u^2 + v^2}, \\
& \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{bu}{u^2 + v^2} + \frac{h\vartheta}{u^2 + v^2},
\end{aligned} \right\}, \quad (2.33)$$

введя обозначения переменных

$$u = x_i - x_j, \quad v = y_i - y_j \quad (2.34)$$

и коэффициентов

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) - \gamma(\sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j))}{\Delta(j)} = a, \\
& \frac{\gamma(\lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)) - \lambda_y(j) - \gamma\sigma_y(j)}{\Delta(j)} = b, \\
& - \frac{\gamma(\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j)) + \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j)}{\Delta(j)} = g, \\
& \frac{\gamma(\lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j)) + \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)}{\Delta(j)} = h.
\end{aligned} \right\}$$

Согласно этим обозначениям, переменные u, v независимы, а коэффициенты a, b, g, h зависят от координат точки j , после подстановки ко-

торых в определитель $\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j) & \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j) \\ \lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j) & \sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) \end{vmatrix} = (1 +$

$\gamma^2) \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$ системы (2.31) получим

$$ha - bg = \frac{1 + \gamma^2}{\Delta(j)} = \frac{1}{\frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}} \neq 0. \quad (2.35)$$

Из (2.33) найдем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{(au + g\vartheta)^2 + (bu + h\vartheta)^2}{(u^2 + \vartheta^2)^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} &= \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.36)$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (2.29):

$$\exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}) = \frac{(au + g\vartheta)^2 + (bu + h\vartheta)^2}{u^2 + \vartheta^2} \exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{\vartheta}{u}),$$

откуда после простых преобразований получаем тождество

$$\begin{aligned} &2\gamma \operatorname{arctg} \frac{bu^2 + (h - a)u\vartheta - g\vartheta^2}{u^2 + (g + b)u\vartheta + h\vartheta^2} = \\ &= \ln \frac{(a^2 + b^2)u^2 + 2(ag + bh)u\vartheta + (g^2 + h^2)\vartheta^2}{u^2 + \vartheta^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Тождество (2.37) продифференцируем по переменной u :

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma(2(bh + ga)u\vartheta^2 + (bg - ha + b^2 + a^2)u^2\vartheta + (h^2 - ha + g^2 + bg)\vartheta^3)}{(a^2 + b^2)u^4 + 2(bh + ga)(u\vartheta^3 + \vartheta u^3) + (a^2 + b^2 + g^2 + h^2)u^2\vartheta^2 + (g^2 + h^2)\vartheta^4} = \\ &= \frac{(ag + bh)\vartheta^3 + (a^2 + b^2 - g^2 - h^2)u\vartheta^2 - (ag + bh)u^2\vartheta}{(a^2 + b^2)u^4 + 2(bh + ga)(u\vartheta^3 + \vartheta u^3) + (a^2 + b^2 + g^2 + h^2)u^2\vartheta^2 + (g^2 + h^2)\vartheta^4}, \end{aligned}$$

после чего убираем общий знаменатель и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} &(2\gamma(bh + ga) - (a^2 + b^2 - g^2 - h^2))u\vartheta^2 + ((bg - ha + b^2 + a^2)\gamma + \\ &+ (ag + bh))\vartheta u^2 + (\gamma(h^2 - ha + g^2 + bg) - (ag + bh))\vartheta^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Следствием тождества (2.38) являются связи между коэффициентами выражений (2.36):

$$\begin{aligned} &2\gamma(bh + ga) - (a^2 + b^2 - g^2 - h^2) = 0, \\ &(bg - ha + b^2 + a^2)\gamma + (ag + bh) = 0, \\ &\gamma(h^2 - ha + g^2 + bg) - (ag + bh) = 0, \end{aligned}$$

которые выполняются одновременно с неравенством (2.35). Вычитая из второй связи третью и подставляя результат в первую, приходим к следующему соотношению:

$$bh + ag = 0. \quad (2.39)$$

Тогда из первой связи, с учетом (2.39), получаем

$$a^2 + b^2 - g^2 - h^2 = 0. \quad (2.40)$$

Если сложить вторую связь с третьей, то с учетом $ha - bg \neq 0$ получим

$$a^2 + b^2 + g^2 + h^2 = 2(ha - bg) \neq 0. \quad (2.41)$$

Учитывая связь (2.40), первое из выражений (2.36) приводим к следующему виду:

$$\frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{a^2 + b^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

с учетом чего из (2.33) получаем

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{a}{a^2 + b^2}(x_i - x_j) - \frac{b}{a^2 + b^2}(y_i - y_j), \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{b}{a^2 + b^2}(x_i - x_j) + \frac{a}{a^2 + b^2}(y_i - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Дифференцируя результаты (2.42) по координатам точки i , разделим переменные:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x(i) &= \frac{a(j)}{a(j)^2 + b(j)^2} = \text{const} = \tilde{a}, \\ \sigma_x(i) &= \frac{b(j)}{a(j)^2 + b(j)^2} = \text{const} = \tilde{b}. \end{aligned} \right\}$$

Введение новых констант $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ позволяет в выражениях (2.42) осуществлять дополнительное разделение переменных:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \tilde{a}x_i + \tilde{b}y_i &= \lambda(j) - \tilde{a}x_j + \tilde{b}y_j = \text{const} = c, \\ \sigma(i) - \tilde{b}x_i - \tilde{a}y_i &= \sigma(j) - \tilde{b}x_j - \tilde{a}y_j = \text{const} = d. \end{aligned} \right\}.$$

Эта операция (с переобозначением констант $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ на a , b) приводит к следующим соотношениям:

$$\lambda(x, y) = ax - by + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \quad (2.43)$$

Дополнительная связь на константы a, b , входящих в выражения (2.43), возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.29):

$$(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a}) = 1, \quad (2.44)$$

где γ – положительная константа (параметр семейства).

Функции (2.43) со связью (2.44) как полное решение функционального уравнения (2.29) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.30) плоскости Гельмгольца. Это множество является локальной группой по их композиции, так как выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [39]. $\square$

Таким образом, плоскость Гельмгольца действительно наделена групповой симметрией степени 3, а задание константы γ определяет конкретную плоскость Гельмгольца.

2.4 Группа движений псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей

В данном параграфе для двух оставшихся гельмгольцевых геометрий, задаваемых метрическими функциями (2.13), (2.14) (см. теорему 2.1.2 §2.1), находятся все движения как решения функционального уравнения (2.20).

Для начала рассмотрим псевдогельмгольцеву плоскость, задаваемую метрической функцией (2.13) на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$. Запишем для нее функциональное уравнение на множество движений (2.19):

$$\begin{aligned} & ((\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp(2\beta \ar(c) th \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)}) = \\ & = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp(2\beta \ar(c) th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметры семейства. При этом выбирается функция $arth$, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция $arcth$, если аргумент по величине больше единицы. Результат его решения сформулируем в виде теоремы, доказательство которой опубликовано в работе [51].

Теорема 2.4.1. *Все движения псевдогильмгольцевой плоскости образуют однопараметрическое семейство трехпараметрических групп ее преобразований*

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.46)$$

где $(a^2 - b^2) \exp(2\beta ar(c)th \frac{b}{a}) = 1$. Здесь β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства).

При этом выбирается функция $arth$, если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция $arcth$, если аргумент по величине больше единицы.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (2.45) по координатам точки j и деля на него почленно результаты дифференцирования, получаем два равенства:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} - \\ & - (\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{(x_i - x_j) - \beta(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}, \\ & (\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} - \\ & - (\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{\beta(x_i - x_j) - (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.47)$$

которые рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2}.$$

Поскольку определитель системы (2.47)

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j) & -(\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) \\ \lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j) & -(\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) \end{vmatrix} = (\beta^2 - 1) \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

вследствие $\beta \neq 1$ и условия (2.19) отличен от нуля, она (система) может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\ & = \frac{\beta(\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) - (\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j))}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2} + \\ & + \frac{\beta(\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) - (\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j))}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}, \\ & \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\ & = \frac{\beta(\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j)) - (\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j))}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2} + \\ & + \frac{\beta(\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j)) - (\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j))}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Запишем решения (2.48) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{au}{u^2 - v^2} + \frac{g\vartheta}{u^2 - v^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{bu}{u^2 - v^2} + \frac{h\vartheta}{u^2 - v^2}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.49)$$

используя обозначения переменных (2.34) и вводя новые обозначения коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta(\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) - (\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j))}{\Delta(j)} &= a, \\ \frac{\beta(\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j)) - (\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j))}{\Delta(j)} &= b, \\ \frac{\beta(\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) - (\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j))}{\Delta(j)} &= g, \\ \frac{\beta(\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j)) - (\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j))}{\Delta(j)} &= h, \end{aligned} \right\}$$

причем $a = a(j), b = b(j), g = g(j), h = h(j)$ и выполняется неравенство

$ha - bg \neq 0$. Из решений (2.49) найдем выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{(au + g\vartheta)^2 - (bu + h\vartheta)^2}{(u^2 - \vartheta^2)^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} &= \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.50)$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (2.45):

$$\begin{aligned} 2\beta ar(c)th \frac{bu^2 + (h - a)u\vartheta - g\vartheta^2}{au^2 + (g - b)u\vartheta - h\vartheta^2} = \\ = \ln \frac{(a^2 - b^2)u^2 + 2(ag - bh)u\vartheta + (g^2 - h^2)\vartheta^2}{u^2 - \vartheta^2}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Тождество (2.46) продифференцируем по переменной u :

$$\begin{aligned} \frac{2\beta((b(g - b) - a(h - a))u^2\vartheta + (2ag - 2bh)u\vartheta^2 + (g(g - b) - h(h - a))\vartheta^3)}{(a^2 - b^2)u^4 + 2(ag - bh)u^3\vartheta + (g^2 - h^2)\vartheta^2u^2 - (a^2 - b^2)u^2\vartheta^2 - 2(ag - bh)u\vartheta^3 - (g^2 - h^2)\vartheta^3} = \\ = \frac{-2(ag - bh)\vartheta u^2 - 2(a^2 - b^2 + g^2 - h^2)u\vartheta^2 - 2(ag - bh)\vartheta^3}{(a^2 - b^2)u^4 + 2(ag - bh)u^3\vartheta + (g^2 - h^2)\vartheta^2u^2 - (a^2 - b^2)u^2\vartheta^2 - 2(ag - bh)u\vartheta^3 - (g^2 - h^2)\vartheta^3}, \end{aligned}$$

после чего умножим на общий знаменатель и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} (2\beta(bg - b^2 - ah + a^2) + 2(ag - bh))u^2\vartheta + \\ + 2((ag - bh)2\beta + (a^2 - b^2 + g^2 - h^2))\vartheta^2u + \\ + (2\beta(g^2 - bg - h^2 + ha) + 2(ag - bh))\vartheta^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Следствием тождества (2.52) являются следующие связи на коэффициенты выражений (2.50)

$$\begin{aligned} 2\beta(bg - b^2 - ah + a^2) + 2(ag - bh) &= 0, \\ (ag - bh)2\beta + (a^2 - b^2 + g^2 - h^2) &= 0, \\ 2\beta(g^2 - bg - h^2 + ha) + 2(ag - bh) &= 0. \end{aligned}$$

С учетом неравенства $ha - bg \neq 0$ эти связи приводятся к виду

$$ag - bh = 0, \quad a^2 - b^2 + g^2 - h^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = h^2 - g^2 = ha - bg \neq 0.$$

Подставим вторую из них в первое выражение (2.50) и получим равенство

$$\frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{a^2 - b^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

с учетом чего из (2.49) находим

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{a}{a^2 - b^2}(x_i - x_j) + \frac{b}{a^2 - b^2}(y_i - y_j), \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{b}{a^2 - b^2}(x_i - x_j) + \frac{a}{a^2 - b^2}(y_i - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Дифференцируя результаты (2.53) по координатам точки i , разделяем переменные:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x(i) &= \frac{a(j)}{a(j)^2 - b(j)^2} = \text{const} = a, \\ \sigma_x(i) &= \frac{b(j)}{a(j)^2 - b(j)^2} = \text{const} = b. \end{aligned} \right\}$$

Введение новых констант a и b позволяет записать результат разделения переменных в (2.53) в следующем виде:

$$\lambda(x, y) = ax + by + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \quad (2.54)$$

Дополнительная связь на константы выражений (2.54) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.45):

$$(a^2 - b^2) \exp(2\beta \operatorname{ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a}) = 1, \quad (2.55)$$

где β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства). При этом выбирается функция arth , если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция arcth , если аргумент по величине больше единицы.

Функции (2.54) со связью (2.55) как полное решение функционального уравнения (2.45) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.46) псевдогельмгольцевой плоскости. Это множество является локальной группой по композиции движений, причем выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [39], как и в случае плоскости Гельмгольца. $\square$

Задание константы β позволяет определить конкретную псевдогельмгольцеву плоскость.

Далее запишем функциональное уравнение для дуальногелъмгольцевой плоскости, которая, напомним, задается метрической функцией (2.14) (см. **теорему 2.1.2**) на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$.

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 \exp(2 \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)}) = (x_i - x_j)^2 \exp(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}). \quad (2.56)$$

Результат его решения сформулируем в виде теоремы, доказательство которой опубликовано в работе автора [51].

Теорема 2.4.2. *Все движения дуальногелъмгольцевой плоскости образуют трехпараметрическую группу ее преобразований*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.57)$$

где $a^2 \exp(2 \frac{b}{a}) = 1$.

Доказательство. Воспользуемся примененным выше методом для решения функционального уравнения (2.56). Дифференцируя его по координатам точки j и деля на него результаты дифференцирования, получаем два равенства:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_x(j) + \sigma_x(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} - \lambda_x(j) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \\ &= \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}, \\ & (\lambda_y(j) + \sigma_y(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} - \lambda_y(j) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \\ &= \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

где $x_i - x_j \neq 0$, $\lambda(i) - \lambda(j) \neq 0$.

Рассмотрим равенства (2.58) как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2}.$$

Поскольку определитель системы (2.58)

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \sigma_x(j) & -\lambda_x(j) \\ \lambda_y(j) + \sigma_y(j) & -\lambda_y(j) \end{vmatrix} = \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

вследствие условия (2.19) отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{\lambda_x(j) - \lambda_y(j)}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\lambda_y(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{\lambda_x(j) + \sigma_x(j) - \lambda_y(j) - \sigma_y(j)}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} + \\ &+ \frac{\lambda_y(j) + \sigma_y(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Учитывая обозначения переменных (2.34) и вводя новые обозначения для коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_x(j) - \lambda_y(j)}{\Delta(j)} &= a(j) = a, & \frac{\lambda_x(j) + \sigma_x(j) - \lambda_y(j) - \sigma_y(j)}{\Delta(j)} &= b(j) = b, \\ \frac{\lambda_y(j)}{\Delta(j)} &= g(j) = g, & \frac{\lambda_y(j) + \sigma_y(j)}{\Delta(j)} &= h(j) = h, \end{aligned} \right\}$$

решения (2.59) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{au}{u^2} + \frac{g\vartheta}{u^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{bu}{u^2} + \frac{h\vartheta}{u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Для этих коэффициентов также выполняется неравенство $ha - bg \neq 0$.

Из (2.60) найдем выражения

$$\frac{1}{\lambda(i) - \lambda(j)} = \frac{au + g\vartheta}{u^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} = \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}. \quad (2.61)$$

С учетом выражений (2.61) исходное функциональное уравнение (2.56) примет вид

$$2 \frac{u(bu + h\vartheta) - \vartheta(au + g\vartheta)}{u(au + g\vartheta)} = \ln \frac{(au + g\vartheta)^2}{u^2}. \quad (2.62)$$

Равенство (2.62) продифференцируем по переменной u :

$$\begin{aligned} & \frac{(2bu + h\vartheta - a\vartheta)(au^2 + gu\vartheta) - 2bau^3 - 2hau^2\vartheta + 2a^2u^2\vartheta}{u^2(au + g\vartheta)^2} + \\ & + \frac{2ag u\vartheta^2 - bgu^2\vartheta - gh u\vartheta^2 + ag u\vartheta^2 + g^2\vartheta^3}{u^2(au + g\vartheta)^2} = \\ & = \frac{a^2u^3 + ag u^2\vartheta - a^2u^3 - 2ag u^2\vartheta - g^2u\vartheta^2}{u^2(au + g\vartheta)^2}. \end{aligned}$$

При $u(au + g\vartheta) \neq 0$ последнее выражение принимает вид

$$(bg - ah + ag + a^2)u^2\vartheta + (2ag + g^2)u\vartheta^2 + g^2\vartheta^3 = 0. \quad (2.63)$$

Присоединяя к равенству (2.63) результаты дифференцирования по переменным u , v до третьего порядка включительно, требуем, чтобы исходное равенство (2.63) и присоединенные равенства выполнялись при любых допустимых значениях u , v . Отсюда получаем, что $g = 0$, $h = a \neq 0$. С учетом данных связей из (2.59) находим

$$\lambda(i) - \lambda(j) = \frac{u}{a(j)}, \quad \sigma(i) - \sigma(j) = \frac{b(j)u}{a(j)^2} + \frac{\vartheta}{a(j)}. \quad (2.64)$$

Дифференцируя результаты (2.64) по координате x_i , с учетом того, что $u = x_i - x_j$, разделяем переменные:

$$\frac{\partial \lambda(i)}{\partial x_i} = \lambda_x(i) = \frac{1}{a(j)} = \text{const} = \tilde{a}, \quad \frac{\partial \sigma(i)}{\partial x_i} = \sigma_x(i) = \frac{b(j)}{a(j)^2} = \text{const} = \tilde{b}.$$

Введение констант $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с последующим их переобозначением символами a , b позволяет в выражениях (2.64) осуществить дополнительное разделение переменных, после чего получаем

$$\lambda(x, y) = ax + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \quad (2.65)$$

Дополнительная связь на коэффициенты выражений (2.65) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.56):

$$a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1. \quad (2.66)$$

Функции (2.65) со связью (2.66) как полное решение функционального уравнения (2.56) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.57) дуальногельмгольцевой плоскости. Это множество является локальной группой по композиции движений, так как выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [39], как и в случаях рассмотренных выше гельмгольцевых геометрий. $\square$

Таким образом, подобно плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева плоскости наделены групповой симметрией степени 3. Согласно **теореме 2.2.1** метрические функции этих геометрий задают на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 4.

2.5 Метрическая функция как двухточечный инвариант группы движений

Пусть задана трехпараметрическая группа движений двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то есть таких гладких и обратимых преобразований:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

с $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, сохраняющих метрическую функцию (2.17)

$$f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (2.68)$$

явный вид которой неизвестен. Условие (2.68) при известной группе преобразований (2.67) является *функциональным уравнением относительно метрической функции* (2.17). Решая это уравнение с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и соответствующей замены координат, находим явный вид невырожденной метрической функции (2.17), являющейся двухточечным инвариантом группы преобразований (2.67).

В качестве иллюстрации методов решения функционального уравнения (2.68) рассмотрим сначала плоскость Евклида.

Задача 2.5.1. Для группы движений плоскости Евклида (2.27) найти все двухточечные инварианты (2.17).

Результат решения задачи 2.5.1 представим в виде теоремы.

Теорема 2.5.1. *Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \equiv R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией плоскости Евклида, задающая на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Доказательство. Запишем уравнение (2.68) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.69) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, совпадающего с R^2 :

$$f(ax_i - \varepsilon by_i + c, bx_i + \varepsilon ay_i + d, ax_j - \varepsilon by_j + c, bx_j + \varepsilon ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.70)$$

Дифференцируя уравнение (2.70) по параметрам c, d и b с учетом того, что параметр a зависит от b , поскольку между ними существует связь $a^2 + b^2 = 1$, и потому, очевидно, $a \frac{da}{db} = -b$, получим следующую систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} \left(-x_i \frac{b}{a} - \varepsilon y_i\right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} \left(x_i - \varepsilon \frac{b}{a} y_i\right) + \\ + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} \left(-x_j \frac{b}{a} - \varepsilon y_j\right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} \left(x_j - \varepsilon \frac{b}{a} y_j\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

где $a \neq 0$, и, например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В системе дифференциальных соотношений (2.71) параметрам a, b, c, d и ε придадим значения соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c =$

$0, d = 0$ и $\varepsilon = 1$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ -\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} y_i + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} x_i - \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} y_j + x_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

где, например, $\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}$.

Общее решение первого и второго уравнения системы (2.72) задается, очевидно, следующим выражением:

$$f(i, j) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j), \quad (2.73)$$

где $\Theta(u, v) \in C^2$ – функция двух переменных $u = x_i - x_j$ и $v = y_i - y_j$. Подставим выражение (2.73) в третье уравнение системы (2.72). В результате получаем уравнение для функции $\Theta(u, v)$:

$$-v \frac{\partial \Theta}{\partial u} + u \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0. \quad (2.74)$$

Общее решение уравнения (2.74) есть функция

$$\Theta(u, v) = \chi(u^2 + v^2), \quad (2.75)$$

где $\chi \in C^2$ – функция одной переменной с отличной от нуля производной. По решению (2.75) и выражению (2.73) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2),$$

который эквивалентен метрической функции плоскости Евклида (1.13), переходящей в него при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ (χ^{-1} есть обратная к χ функция). $\square$

Рассмотрим аналогичную задачу нахождения невырожденного двухточечного инварианта групп преобразований плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей, для которых в предыдущих параграфах 2.3, 2.4 были найдены соответствующие множества движений (см. **теоремы 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2**).

Задача 2.5.2. Для трехпараметрической группы преобразований плоскости Гельмгольца (2.30) найти все двухточечные инварианты (2.17).

Результат решения задачи 2.5.2 представим в виде теоремы.

Теорема 2.5.2. *Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

где $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a}) = 1$, γ – положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией плоскости Гельмгольца, задающая на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Доказательство. Запишем уравнение (2.68) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.76) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i - by_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j - by_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.77)$$

Дифференцируя уравнение (2.77) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметр a зависит от b , поскольку между ними существует связь $(a^2 + b^2) \exp(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a}) = 1$ (γ – положительная константа – параметр семейства), в которой $(a - \gamma b) \frac{da}{db} = -(b + \gamma a)$, получим следующую систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} \left(-x_i \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} - y_i\right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} \left(x_i - \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} y_i\right) + \\ + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} \left(-x_j \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} - y_j\right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} \left(x_j - \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} y_j\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

где $a - \gamma b \neq 0$, и например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В системе дифференциальных соотношений (2.78) параметрам a, b, c, d придадим значения соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} (-\gamma x_i - y_i) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - \gamma y_i) + \\ + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} (-\gamma x_j - y_j) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - \gamma y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Общее решение $\Theta(u, v) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j)$ первого и второго уравнения системы (2.79) подставим в его третье уравнение

$$-\gamma u \frac{\partial \Theta}{\partial u} - v \frac{\partial \Theta}{\partial u} + u \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \gamma v \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad (2.80)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j$ и $v = y_i - y_j$. Общее решение уравнения (2.80) есть функция

$$\Theta(u, v) = \chi((u^2 + v^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{v}{u})), \quad (2.81)$$

где $\chi \in C^2$ – функция одной переменной с отличной от нуля производной.

По (2.81) и (2.73) находим двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi[((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp(2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j})],$$

который эквивалентен метрической функции плоскости Гельмгольца (2.15), переходящей в него при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ (χ^{-1} есть обратная к χ функция). $\square$

Задача 2.5.3. Для трехпараметрической группы преобразований псевдогельмгольцевой плоскости (2.46) найти все двухточечные инварианты (2.17).

Результат решения задачи 2.5.3, также как и в случае задач 2.5.1 и 2.5.2 представим в виде теоремы.

Теорема 2.5.3. *Каждый двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

где $(a^2 - b^2) \exp(2\beta \operatorname{ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a}) = 1$, β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией псевдогельмгольцевой плоскости, задающая на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

При этом выбирается функция arth , если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция arcth , если аргумент по величине больше единицы.

Доказательство. Запишем уравнение (2.68) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.82) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i + by_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j + by_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.83)$$

Дифференцируя уравнение (2.83) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметр a зависит от b , поскольку между ними существует

связь $(a^2 - b^2) \exp(2\beta ar(c)th\frac{b}{a}) = 1$ (β – положительная константа, отличная от единицы), в которой $(a - \beta b)\frac{da}{db} = -(b - \beta a)$, получим следующую систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} \left(\frac{b - \beta a}{a - \beta b} x_i + y_i \right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} \left(x_i + \frac{b - \beta a}{a - \beta b} y_i \right) + \\ + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} \left(\frac{b - \beta a}{a - \beta b} x_j + y_j \right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} \left(x_j + \frac{b - \beta a}{a - \beta b} y_j \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

где $a - \beta b \neq 0$, и, например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В системе дифференциальных соотношений (2.84) параметрам a, b, c, d придадим значения соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} (-\beta x_i + y_i) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - \beta y_i) + \\ + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} (-\beta x_j + y_j) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - \beta y_j) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Общее решение $\Theta(u, v) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j)$ первого и второго уравнения системы (2.85), как и в случае плоскости Гельмгольца подставим в ее третье уравнение

$$(v - \beta u) \frac{\partial \Theta}{\partial u} + (u - \beta v) \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad (2.86)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j$ и $v = y_i - y_j$. Общее решение которого есть функция

$$\Theta(u, v) = \chi((u^2 - v^2) \exp(2\beta ar(c)th\frac{v}{u})), \quad (2.87)$$

где $\chi \in C^2$ – функция одной переменной с отличной от нуля производной.

По решению (2.87) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi[((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp(2\beta ar(c)th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j})],$$

который эквивалентен метрической функции псевдогельмгольцевой плоскости (2.13), переходящей в него при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ (χ^{-1} есть обратная к χ функция). $\square$

Задача 2.5.4. Для трехпараметрической группы преобразований дуальногельмгольцевой плоскости (2.57) найти все двухточечные инварианты (2.17).

Результат решения задачи 2.5.4, также как и в случае задач 2.5.1–2.5.3 представим в виде теоремы.

Теорема 2.5.4. *Каждый двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$,*

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

где $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией дуальногельмгольцевой плоскости, задающая на нем феноменологически симметричную геометрию ранга 4.

Доказательство. Запишем уравнение (2.68) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.88) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.89)$$

Дифференцируя уравнение (2.89) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметры a и b связаны соотношением $a^2 \exp(2\frac{b}{a}) = 1$, из которого следует равенство $(a-b)\frac{da}{db} = -a$, получим следующую систему

дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} &= 0, \\ -\frac{a}{a-b}x_i \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} (x_i - \frac{a}{a-b}y_i) - \\ -\frac{a}{a-b}x_j \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} (x_j - \frac{a}{a-b}y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

В системе дифференциальных соотношений (2.90) параметрам a, b, c, d придадим значения соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ -x_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - y_i) - \\ -x_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Общее решение $\Theta(u, v)$ первого и второго уравнения системы (2.91), как и в случае плоскости Гельмгольца совпадает с выражением (2.73), поэтому подставим его в третье уравнение этой системы

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial u} + (u - v) \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad (2.92)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j$ и $v = y_i - y_j$. Общее решение которого есть функция

$$\Theta(u, v) = \chi(u^2 \exp(2\frac{v}{u})), \quad (2.93)$$

где $\chi \in C^2$ – функция одной переменной. По решению (2.93) и выражению (2.73) находим двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi[(x_i - x_j)^2 \exp(2\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j})],$$

который эквивалентен метрической функции псевдогельмгольцевой плоскости (2.14), переходящей в него при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ (χ^{-1} есть обратная к χ функция). $\square$

Каждый найденный в задачах 2.5.1 – 2.5.4 двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$ согласно **теореме 2.2.1** задает на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4 и действительно, плоскость Евклида, плоскость Гельмгольца, псевдогельмгольцева и дуальногельмгольцева плоскости содержатся в классификации (2.6) – (2.16) из §2.1 феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 4. Результаты исследований настоящего параграфа опубликованы в работе [51].

Глава 3

Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии

В третьей главе расширенным аналитическим методом (существенно использующим исследование ранга функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла: в первую очередь имеется в виду гладкая допустимая замена локальных координат, позволяющая редуцировать дифференциальные уравнения к максимально простому виду), построена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий (теоремы 3.1.1, 3.2.1). В качестве дополнения найдены группа движений одной из них, решением соответствующей системы функциональных уравнений этих групп, и их двухточечные инварианты, а также дана физическая интерпретация.

3.1 Определение двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_2$, наделенное структурой гладкого двумерного многообразия, а также гладкая функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^2$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ два вещественных числа $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) \in R^2$. Обозначим че-

рез $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$, через $U(\langle i, j \rangle)$ – окрестность пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Если x, y – локальные координаты гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то для вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) = (f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)), \quad (3.1)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты точек i и j пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении вектор-функции f будем предполагать выполнение следующих аксиом:

Аксиома 3.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ подмножество.

Аксиома 3.1.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 3.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множества пар $\langle i, j \rangle$ локальное координатное представление (3.1) вектор-функции $f(i, j)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \quad (3.2)$$

Заметим, что при условии (3.2) ранг касательного отображения для отображения (3.1) равен 2, то есть максимален.

Определение 3.1.1. Вектор-функцию f , удовлетворяющую аксиомам 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, приведенным выше, будем называть *метрической вектор-функцией* (или *метрической функцией*).

Функцию f , удовлетворяющую условиям аксиомы 3.1.3 будем называть *невыврожденной вектор-функцией* (невыврожденной функцией).

На основе исходной метрической вектор-функции f построим отображение F , сопоставляющее тройке $\langle i, j, k \rangle$ из $\mathfrak{M}_2^3$ кортеж $\langle f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k) \rangle$, принадлежащий некоторому открытому подмножеству $E \subset \mathbb{R}^6$, если пары $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \langle j, k \rangle \in \mathfrak{S}_f$. То есть

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2^3 \supseteq \mathfrak{S}_F \ni \langle i, j, k \rangle &\xrightarrow{F} \langle f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), \\ &f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k) \rangle \in E \subset \mathbb{R}^6, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\mathfrak{S}_F$ – есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^3$ подмножество, которое является областью определения построенной функции F .

Далее, пусть имеется еще одно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^2$, где $E \subset \mathbb{R}^6$, которое сопоставляет точке $z \in E \subseteq \mathbb{R}^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in \mathbb{R}^2$. Данные построения поясняет рис. 3.1.

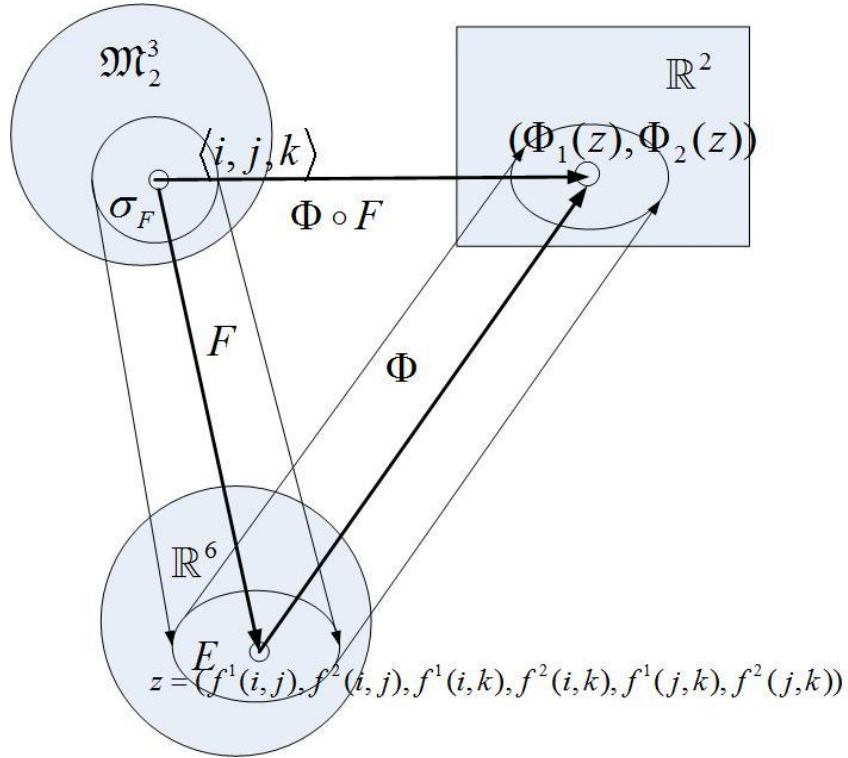


Рис. 3.1: Диаграмма отображений для двуметрической феноменологически симметричной геометрии ранга 3

Аксиома 3.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ подмножество, для каждой тройки $\langle i, j, k \rangle$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ най-

дётся такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^2$, определенное в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k \rangle)$, что в ней ранг якобиевой матрицы отображения Φ равен 2 и множество $F(U(\langle i, j, k \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = (0, 0) \quad (3.4)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – функция шести переменных, для всех троек из $U(\langle i, j, k \rangle)$.

Если условие $\text{rang} \Phi = 2$ выполнено для отображения

$$\begin{aligned} &\Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = \\ &(\Phi_1(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)), \\ &\Phi_2(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))), \end{aligned}$$

то в области E величины $f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)$ связаны двумя независимыми уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) &= 0, \\ \Phi_2(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Используя выражение (3.1), запишем локальное координатное представление построенной функции F :

$$\left. \begin{aligned} f^1(i, j) &= f(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f^2(i, j) &= f(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f^1(i, k) &= f(x_i, y_i, x_k, y_k), \\ f^2(i, k) &= f(x_i, y_i, x_k, y_k), \\ f^1(j, k) &= f(x_j, y_j, x_k, y_k), \\ f^2(j, k) &= f(x_j, y_j, x_k, y_k) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

функциональная матрица которой

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ \frac{\partial y_i}{\partial f^1(i, j)} & \frac{\partial y_i}{\partial f^2(i, j)} & \frac{\partial y_i}{\partial f^1(i, k)} & \frac{\partial y_i}{\partial f^2(i, k)} & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial x_j}{\partial f^1(i, j)} & \frac{\partial x_j}{\partial f^2(i, j)} & 0 & 0 & \frac{\partial x_j}{\partial f^1(j, k)} & \frac{\partial x_j}{\partial f^2(j, k)} \\ \frac{\partial y_j}{\partial f^1(i, j)} & \frac{\partial y_j}{\partial f^2(i, j)} & 0 & 0 & \frac{\partial y_j}{\partial f^1(j, k)} & \frac{\partial y_j}{\partial f^2(j, k)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

имеет 6 строк и 6 столбцов, а ранг ее матрицы есть ранг касательного отображения.

Определение 3.1.2. Будем говорить, что метрическая вектор-функция f задает на гладком двумерном многообразии $\mathcal{M}_2$ *двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3*, если, кроме аксиом **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3**, она удовлетворяет еще аксиоме **3.1.4**.

Далее приведем лемму и теорему о ранге отображения F , доказательства которых опубликованы автором в работе [52].

Лемма 3.1.1. Если вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ и аналогичные ей удовлетворяют аксиомам **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3**, то ранг матрицы (3.6) не менее 4.

Справедливость Леммы 3.1.1 следует из того, что минор четвертого порядка Δ_4 , занимающий "северо-восточный угол" матрицы (3.6) отличен от нуля в соответствии с аксиомой 3.1.3.

Замечание 3.1.1. Понижение ранга матрицы до четырех в следствии феноменологической симметрии равносильно тому, что каждый из двух первых столбцов матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (то есть столбцов с номерами 3,4,5,6). Требование разложи-

мости по базисным столбцам первого столбца налагает ограничения на производные функции $f^1(i, j)$ и аналогичных ей функций. Такое же требование, предъявленное ко второму столбцу, налагает точно те же ограничения на производные функции $f^2(i, j)$ по тем же аргументам. Мы исследуем следствия из разложимости первого столбца и убедимся в том, что они не только необходимы для выполнения условия $\text{rang}(A) = 4$, но и достаточны. Данный результат является центральным для этой главы и мы оформляем его следующей теоремой.

Теорема 3.1.1.

1. Если ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве, то метрическая вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющая аксиомам 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3 (то есть удовлетворяет аксиоме 3.1.4).

2. Система аксиом 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 и 3.1.4 совместна, то есть существует модель соответствующей аксиоматической теории - набор вектор-функций $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.

Доказательство пункта 1.

Пусть для тройки $\langle i, j, k \rangle \in \mathfrak{S}_F$ ранг отображения F равен 4. Из леммы 3.1.1 и Замечания 3.1.1 следует, что для некоторой окрестности тройки $\langle i, j, k \rangle$ ранг функциональной матрицы (3.6) не менее 4 и равен для неё этому значению. Согласно теореме математического анализа о функциональной зависимости [12] для некоторой окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенное в соответствующей области $E \subset \mathbb{R}^6$, содержащей точку $z =$

$(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, в которой $\text{rang}(\Phi) = 2$ и имеют место уравнения (3.4).

Поскольку ранг матрицы (3.6) для исходной тройки $\langle i, j, k \rangle$ равен 4 и максимален в окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$, из этой же теоремы о функциональной зависимости следует, что найдется такая его окрестность $U' \subseteq U$ и соответствующая область $E' \subseteq E$, для которых множество значений $F(U')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в E' , являясь гладкой без особых точек поверхностью в $\mathbb{R}^6$. Пункт 1 доказан.

Доказательство пункта 2.

По Лемме 3.1.1 ранг матрицы не менее 4. Докажем, что ранг матрицы (3.6) не более 4. Для доказательства продифференцируем уравнение (3.4) по каждой из 6 координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ точек тройки $\langle i, j, k \rangle$. В результате получим 6 линейных однородных уравнений относительно 6 производных компонент функции Φ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} = 0 \\ & \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} = 0 \\ & \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} = 0 \\ & \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} = 0 \\ & \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} = 0 \\ & \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} = 0, \end{aligned} \right\},$$

$$\Phi_m = \Phi_m(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = 0, (m = 1, 2)$$

$$(3.7)$$

матрица которой совпадает с функциональной матрицей (3.6) с точностью до транспонирования.

Предположим, что ранг матрицы системы (3.7) равен 5 или 6. Тогда система (3.7) будет иметь только одно линейно независимое ненулевое решение или ни одного, так как их число равно разности между числом

переменных в системе (3.7) и рангом ее матрицы. Однако, уравнения системы (3.7) имеют, по крайней мере, два таких решения в некоторой окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$, так как по аксиоме **3.1.4** $\text{rang}\Phi = 2$ в точке $z = F(\langle i, j, k \rangle)$. Ниже, то есть в §3.2, проводя анализ систем уравнений, мы убедимся в существовании метрической вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющей аксиомам **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3**, **3.1.4**, причем $\text{rang}\Phi = 2$.

3.2 Аналитические методы классификации

В данном параграфе будет проведена классификация двуметрических феноменологически симметричных геометрий ранга 3 аналитическим методом, который состоит в исследовании отображений и решении возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Напомним, что к настоящему времени классификация таких геометрий построена Г.Г. Михайличенко [37] в рамках группового подхода, однако, возникает необходимость в установлении надежности полученного им результата и разработке иного подхода, чем и является развитие аналитического метода, суть которого будет изложена ниже.

Следуя работе автора [52], сформулируем и подробно изложим доказательство классификационной теоремы.

Теорема 3.2.1. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и замены локальных координат x, y существуют две и только две невырожденные метрические вектор-функции вида $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, задающие на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную ранга 3 двумерную геометрию. Компоненты этих метрических вектор-функций могут быть представле-*

ны следующими выражениями:

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (3.8)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j. \quad (3.9)$$

Выражения (3.8), (3.9) естественно называть каноническими выражениями.

Доказательство. Учитывая **Замечание 3.1.1**, сделанное в параграфе §3.1, сводим требование $\text{rang}(A) = 4$ к обращению в нуль миноров пятого порядка, окаймляющих базисный минор четвертого порядка, содержащих элементы первого и второго столбцов. Тогда, применяя для окаймления строки пятую и шестую, и приравнивая полученные миноры к нулю, приходим к функционально-дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} & A_2^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_2^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_2^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_2^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & A_1^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_1^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_1^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_1^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned}$$

(3.10)

$(\alpha = 1, 2).$

Коэффициенты при произвольных компонентах функции $f(i, j)$ в

уравнениях системы (3.10) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
A_1^1(i, k) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|, & A_1^2(i, k) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|, \\
A_2^1(i, k) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|, & A_2^2(i, k) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|, \\
A_0(i, k) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \end{array} \right| \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично определяются $A_1^1(j, k)$, $A_1^2(j, k)$, $A_2^1(j, k)$, $A_2^2(j, k)$, $A_0(j, k)$.

Для $\alpha = 1, 2$ получаем матрицу системы (3.10) вида

$$\begin{pmatrix} A_1^1(i, k)A_0(j, k) & -A_1^2(i, k)A_0(j, k) & A_1^1(j, k)A_0(i, k) & -A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ A_2^1(i, k)A_0(j, k) & -A_2^2(i, k)A_0(j, k) & A_2^1(j, k)A_0(i, k) & -A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Лемма 3.2.1. Ранг системы уравнений (3.10) равен 2.

Доказательство. Заметим, что применив условие (3.2) к точкам j и k , мы получаем неравенства

$$\frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_k, y_k)} \neq 0. \tag{3.13}$$

Выделим в матрице (3.12) квадратную подматрицу второго порядка, содержащую отличный от нуля определитель $A_0(i, k)$, для определителя которой в силу (3.13) справедливо соотношение

$$\begin{vmatrix} -A_1^1(j, k)A_0(i, k) & A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ -A_2^1(j, k)A_0(i, k) & A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{vmatrix} = -(A_0(i, k))^2 \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} \right) \neq 0$$

Следовательно, ранг системы (3.10) равен 2. $\square$

Заменяя величины $A_\mu^\beta(i, k)$, $A_\mu^\beta(j, k)$, где $(\mu, \beta = 1, 2)$ в уравнениях (3.10) на $\tilde{A}_\mu^\beta(i, k_0)$, $\tilde{A}_\mu^\beta(j, k_0)$

$$\begin{array}{l} \tilde{A}_1^1(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|, & \tilde{A}_1^2(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|, \\ k = k_0 & k = k_0 \\ \tilde{A}_2^1(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|, & \tilde{A}_2^2(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|, \\ k = k_0 & k = k_0 \\ \tilde{A}_0(i, k_0) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \end{array} \right|, & \\ k = k_0 & \end{array}$$

получим систему двух независимых дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент метрической вектор-функции $f(i, j)$:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{A}_2^1(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - \tilde{A}_2^2(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ + \tilde{A}_2^1(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - \tilde{A}_2^2(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \tilde{A}_1^1(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - \tilde{A}_1^2(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ + \tilde{A}_1^1(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - \tilde{A}_1^2(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{array} \right\} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.14)$$

Поделив почленно уравнения системы (3.14) на произведение $\tilde{A}_0(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \neq 0$ и вводя новые обозначения коэффициентов, полу-

чим более простую ее запись

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \lambda_2(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_2(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_2(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ + \sigma_2(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\}, \quad (3.15)$$

в которой $\lambda_\alpha(x_i, y_i) = \frac{\tilde{A}_\alpha^1(i, k_0)}{\tilde{A}_0(i, k_0)}$, $\sigma_\alpha(x_i, y_i) = -\frac{\tilde{A}_\alpha^2(i, k_0)}{\tilde{A}_0(i, k_0)}$, $\lambda_\alpha(x_j, y_j) = \frac{\tilde{A}_\alpha^1(j, k_0)}{\tilde{A}_0(j, k_0)}$, $\sigma_\alpha(x_j, y_j) = -\frac{\tilde{A}_\alpha^2(j, k_0)}{\tilde{A}_0(j, k_0)}$, и $\lambda_\alpha^2(x, y) + \sigma_\alpha^2(x, y) \neq 0$ по лемме 3.2., где $\alpha = 1, 2$.

Рассмотрим функции двух вещественных аргументов, а именно, $\varphi(X, Y) \in C^2$, $\psi(X, Y) \in C^2$, для которых

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, Y)} \neq 0 \quad (3.16)$$

В уравнениях системы (3.15) произведем локально обратимую гладкую замену координат

$$\zeta_i = \varphi(x_i, y_i), \eta_i = \psi(x_i, y_i), \zeta_j = \varphi(x_j, y_j), \eta_j = \psi(x_j, y_j). \quad (3.17)$$

Якобиан замены имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} & \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} & \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} & \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \end{vmatrix}$$

и в силу (3.16) отличен от нуля. Тогда первое уравнение системы (3.15) запишется в такой форме:

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \\
& + \left(\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_i} + \\
& + \left(\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} + \\
& + \left(\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_j} = 0, \\
& (\alpha = 1, 2)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Для второго уравнения системы (3.15) получим аналогичную по виду запись (3.18).

Если функции φ и ψ для точек $i = (x_i, y_i)$, $j = (x_j, y_j)$ соответственно взять из решений дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} &= 1, \\
\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} &= 0, \\
\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= 1, \\
\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= 0,
\end{aligned}$$

где $\lambda_1(x, y)^2 + \sigma_1(x, y)^2 \neq 0$, то для уравнения (3.18) получим максимально простой его вид $\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} = 0$. Присваиваем новым переменным ζ_i , ζ_j , η_i , η_j соответственно имена x_i , x_j , y_i , y_j . При любом значении индекса $\alpha = 1, 2$ функции f^α связаны двумя дифференциальными уравнениями, полученными путем преобразования системы (3.15)

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\
& \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\
& \quad + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0.
\end{aligned} \right\} \tag{3.19}$$

Продифференцируем второе уравнение системы (3.19) вначале по переменной x_i , а затем по x_j . Сложив результаты дифференцирования, получим третье уравнение, которое расширит исходную систему (3.19):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ &+ \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{\partial \lambda(x_i, y_j)}{\partial x_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

причем слагаемые со вторыми частными производными в последнем уравнении уничтожаются с учетом первого уравнения. Здесь как и в (3.19), уравнения справедливы независимо от значения $\alpha = 1, 2$.

Лемма 3.2.2. Ранг касательного отображения для отображения (3.1), подчиненного условиям (3.20), остается максимальным (то есть равным 2) только тогда, когда ранг матрицы системы (3.20) не более двух.

Доказательство. Для отображения (3.1) имеем матрицу касательного отображения вида

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} \\ \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг матрицы системы (3.20) равен 3 при $\alpha = 1$, тогда он равен 3 и при $\alpha = 2$. Коэффициенты системы (3.20) не зависят от значения α . Поэтому

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} \\ \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, следовательно $\text{rang}(B) < 2$. $\square$

Обратим в нуль все миноры третьего порядка матрицы системы (3.20). Получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ -\lambda(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \\ &\quad - \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} = 0; \\ \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ -\sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} \lambda(x_j, y_j) - \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \\ &\quad + \frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} \sigma(x_i, y_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Первое (и равносильное ему третье) уравнение, записанное в виде $\frac{1}{\sigma(x_j, y_j)} \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma(x_i, y_i)} \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i}$, с учетом произвольности точек i, j равносильно независимости отношения $\frac{1}{\sigma(A)} \frac{\partial \sigma(A)}{\partial x}$ от выбора точки

A , то есть приводит к уравнению $\frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a\sigma(x, y)$, где $a = \text{const}$.

Второе (как и равносильное ему четвертое) уравнение, записанное в виде $\frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} - a\lambda(x_i, y_i) = \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} - a\lambda(x_j, y_j) = \text{const} = b$ приводит к уравнению $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = b + a\lambda(x, y)$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

Таким образом, получаем систему из двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = a\lambda(x, y) + b, \quad \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a\sigma(x, y), \quad (3.22)$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

При интегрировании системы (3.22) отдельно рассмотрим следующие три случая: **1.** $a = 0$, $b = 0$; **2.** $a = 0$, $b \neq 0$; **3.** $a \neq 0$.

В первом случае система (3.22) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = \tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = \tilde{\sigma}(y).$$

В результате подстановки данных решений в (3.19), получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \tilde{\lambda}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \tilde{\lambda}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

где $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$, как следствие условия (3.2).

В системе (3.23) произведем локально обратимую замену координат

$$\tilde{x} = x + \tilde{\varphi}(y), \quad \tilde{y} = \tilde{\psi}(y), \quad (3.24)$$

где $\tilde{\psi}' \neq 0$. Тогда первое уравнение системы (3.23) сохранит свой простой вид в новых координатах, а второе - изменит:

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{\lambda}(y_i) + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial \tilde{\psi}(y_i)}{\partial y_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_i} + \\ &+ \left(\tilde{\lambda}(y_j) + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial \tilde{\psi}(y_j)}{\partial y_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_j} = 0. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{\varphi}(y)$ и $\tilde{\psi}(y)$ в замене координат (3.24) возьмем из решения дифференциальных уравнений $\tilde{\lambda}(\tilde{y}) + \tilde{\sigma}(\tilde{y}) \frac{\partial \tilde{\varphi}(\tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 0$, $\tilde{\sigma}(\tilde{y}) \frac{\partial \tilde{\psi}(\tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 1$. После присваивания новым переменным $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{y}_j$ соответственно имен x_i , x_j , y_i , y_j система (3.23) примет вид:

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.25)$$

Решением этой системы уравнений является вектор-функция $f^\alpha(x_i, x_j, y_i, y_j) = \theta^\alpha(x_i - x_j, y_i - y_j)$, где $\alpha = 1, 2$. Взяв наиболее простой базис первых интегралов полученного решения, мы, считая допустимым применение обратимости гладкого преобразования $\psi^\alpha(f^1, f^2) \rightarrow f^\alpha$, в котором получаем первое каноническое выражение (3.8).

Во втором случае $a = 0$, $b \neq 0$ система (3.22) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = bx + b\tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = b\tilde{\sigma}(y),$$

где $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$. Тогда система (3.19) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\ & \left(x_i + \tilde{\lambda}(y_i) \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \left(x_j + \tilde{\lambda}(y_j) \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ & \quad + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.26)$$

К уравнениям системы (3.26) применим локально обратимую замену координат (3.24) и присвоим новым переменным $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{y}_j$ соответственно имена x_i , x_j , y_i , y_j , после чего система (3.26) примет вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\ & x_i \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + x_j \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.27)$$

Решением системы дифференциальных уравнений (3.27) является вектор-функция $f^\alpha(x_i, y_i, x_j, y_j) = \theta^\alpha((x_i - x_j) \exp(-y_i), (y_i - y_j) \exp(-y_j))$, $(\alpha = 1, 2)$, которая с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и замены координат $\exp(-y_i) \rightarrow y_i$, $\exp(-y_j) \rightarrow y_j$ может быть записана во второй канонической форме (3.9).

Рассмотрим последний случай, когда $a \neq 0$. Дифференциальные уравнения (3.22) на коэффициенты системы (3.19) будут иметь следующие решения:

1. В случае, когда $a \neq 0$, $b = 0$

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \tilde{\sigma}(y); \quad (3.28)$$

2. В случае, когда $a \neq 0$, $b = \text{const} \neq 0$

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \tilde{\lambda}(y) - \frac{b}{a}, \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \tilde{\sigma}(y); \quad (3.29)$$

в которых $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$. После подстановки каждого из решений (3.28),

(3.29), исходная система (3.19) будет иметь один и тот же вид, а именно

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\ & e^{ax_i} \tilde{\lambda}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + e^{ax_i} \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \tilde{\lambda}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ & \quad + e^{ax_j} \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.30)$$

Произведем в полученной системе локально обратимую замену координат: $\tilde{x} = ax + \tilde{\varphi}(y)$, $\tilde{y} = \tilde{\psi}(y)$. Тогда система (3.30), с учетом присваивания новым переменным $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{y}_j$ соответственно имена x_i , x_j , y_i , y_j будет иметь следующий вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\ & e^{ax_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (3.31)$$

Решением системы уравнений (3.31) является вектор-функция $f^\alpha(i, j) = \theta^\alpha(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j)$, которая с точностью до преобразований $\tilde{f}^1 = \psi^1(f^1, f^2) = \exp(f^1) \cdot f^2$, $\tilde{f}^2 = \psi^2(f^1, f^2) = f^2$ и замены координат $\exp(x) \rightarrow \tilde{y}$, $y/\exp(x) \rightarrow \tilde{x}$ (с учетом присваивания новым переменным $\tilde{x}_i$, $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{y}_j$ соответственно имен x_i , x_j , y_i , y_j) совпадает с каноническим выражением (3.9). $\square$

В завершение следует отметить, что доказательство **теоремы 3.2.1** позволяет полностью завершить доказательство пункта 2 **теоремы 3.1.1**. Действительно, существуют метрические вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, которые могут быть представлены одним из видов канонических выражений (3.8), (3.9), удовлетворяющие аксиомам **3.1.1**, **3.1.2**, **3.1.3**, **3.1.4**, и задающие на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3.

3.3 Анализ полученного результата

С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и обратной гладкой замены локальных координат x, y в рамках доказательства классификационной **теоремы 3.2.1** установлено, что существует два не сводимых друг к другу канонических выражения метрической вектор-функции $f = (f^1, f^2)$ (3.8) и (3.9), задающие на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3. Этот результат был получен расширенным аналитическим методом, суть которого состоит в исследовании рангов построенных отображений (см. доказательство **теоремы 3.1.1**) и решении возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Однако решение подобного типа уравнений иногда приводят к появлению таких выражений метрических вектор-функций, задающих на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3, что устанавливается по рангу соответствующей функциональной матрицы (3.6), которые на первый взгляд не совпадают с каноническими выражениями, но сводятся к ним путем решения соответствующих систем функциональных уравнений для замены координат x, y и преобразования $\psi(f) \rightarrow f$. Поэтому естественно сформулировать и решить следующую задачу.

Задача 3.3.1. Установить с точностью до гладкого обратимого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi(f) = (\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2))$ и соответствующей гладкой замены локальных координат $(\varphi(x, y), \tau(x, y)) \rightarrow (x, y)$ эквивалентность или неэквивалентность следующих метрических вектор-функций, каждая из которых задает на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную

геометрию:

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (3.32)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j, \quad (3.33)$$

$$3. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j. \quad (3.34)$$

Решение. Необходимо исследовать на эквивалентность все три возможные пары: 1) **1** и **2**, 2) **3** и **1**, 3) **3** и **2**.

Пусть имеется гладкая локально-обратимая замена координат

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= \varphi(x, y), \\ \tilde{y} &= \tau(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

где $\frac{\partial(\varphi(x, y), \tau(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0$.

Рассмотрим первый случай, то есть установим эквивалентны или неэквивалентны первые два выражения метрической функции f – (3.32) и (3.33).

Запишем соответствующую систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} (\varphi(x_i, y_i) - \varphi(x_j, y_j))\tau(x_i, y_i) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i - y_j), \\ (\varphi(x_i, y_i) - \varphi(x_j, y_j))\tau(x_j, y_j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i - y_j), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где $\frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(u, v)} \neq 0$, $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$. Если эти функциональные уравнения имеют решения, то метрические функции (3.32) и (3.33) будут эквивалентными, если же они не имеют решения, то эти метрические функции не эквивалентны.

Дифференцируя каждое из уравнений (3.36) по переменным x_i , x_j и складывая результаты дифференцирования получаем следующие соотношения:

$$\frac{\varphi_x(i) - \varphi_x(j)}{\varphi(i) - \varphi(j)} = -\frac{\tau_x(i)}{\tau(i)} = -\frac{\tau_x(j)}{\tau(j)} = \text{const} = a, \quad (3.37)$$

в которых, и везде далее, ввели сокращающие запись обозначения $\varphi_x(i) = \frac{\partial\varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i}$, $\varphi_x(j) = \frac{\partial\varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j}$, $\tau_x(i) = \frac{\partial\varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i}$, $\tau_x(j) = \frac{\partial\varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j}$,
 $\varphi(i) = \varphi(x_i, y_i)$, $\varphi(j) = \varphi(x_j, y_j)$, $\tau(i) = \tau(x_i, y_i)$, $\tau(j) = \tau(x_j, y_j)$.

Из дифференциальных соотношений (3.37) получаем два решения

$$1. \left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(y)e^{ax} + \frac{b}{a}, \\ \tau(x, y) &= \tau(y)e^{-ax}, \\ a &\neq 0, \varphi(y)\tau(y) \neq const, \end{aligned} \right\}, \quad (3.38)$$

$$2. \left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= cx + \varphi(y), \\ \tau(x, y) &= \tau(y), \\ c &\neq 0, \tau'(y) \neq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.39)$$

Далее продифференцируем функциональные уравнения (3.36) по y_i , y_j и действуя аналогично получим другие соотношения:

$$\frac{\varphi_y(i) - \varphi_y(j)}{\varphi(i) - \varphi(j)} = -\frac{\tau_y(i)}{\tau(i)} = -\frac{\tau_y(j)}{\tau(j)} = const = g, \quad (3.40)$$

из которых получаем уравнения

$$\varphi_y(x, y) - g\varphi(x, y) = d, \quad \tau_y(x, y) = -g\tau(x, y). \quad (3.41)$$

После подстановки в них выражений (3.38) получаем противоречие:
 $\varphi(y)\tau(y) = const$.

Далее подставляем в уравнения (3.41) выражения (3.39), откуда получаем два соотношения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y(y) - g(cx + \varphi(y)) &= d, \\ \tau'(y) = -g\tau(y) \neq 0 &\Rightarrow g \neq 0. \end{aligned} \right\}$$

где, напомним, $c \neq 0$. Дифференцируя первое из них по переменной x получаем противоречие: $gc = 0$.

Полученные выше противоречия доказывают, что система функциональных уравнений (3.36) решений не имеет, поэтому метрические функции (3.32) и (3.33) не эквивалентны.

Рассмотрим далее второй случай, то есть когда исследуется эквивалентность метрических функций (3.32) и (3.34).

Запишем соответствующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned}\varphi(i) - \varphi(j) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j), \\ \tau(i) - \tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j)\end{aligned}\quad (3.42)$$

с учетом локальной замены координат (3.35) и преобразования $\psi(f) \rightarrow f$.

Дифференцируя каждое из уравнений (3.42) по переменным x_i, x_j и складывая результаты дифференцирования, получаем следующие решения:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= ax + \varphi(y), \\ \tau(x, y) &= bx + \tau(y),\end{aligned}\quad (3.43)$$

причем $a^2 + b^2 \neq 0$.

Дифференцирование по переменным y_i, y_j каждого уравнения (3.42) приводит к выражениям

$$\varphi'(y_i) = \varphi'(y_j)e^{-(x_i - x_j)}, \quad \tau'(y_i) = \tau'(y_j)e^{-(x_i - x_j)},$$

дифференцируя которые по $u = x_i - x_j$ получаем: $\varphi(y) = c = \text{const}$, $\tau(y) = d = \text{const}$. С учетом этих выражений решения (3.43) примут вид

$$\varphi(x, y) = ax + c, \quad \tau(x, y) = bx + d,$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$. Для них условие $\frac{\partial(\varphi(x, y), \tau(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0$, очевидно, не выполняется, следовательно исходная система функциональных уравнений (3.42) не имеет решений, что доказывает не эквивалентность метрических функций (3.32) и (3.34).

Рассмотрим, наконец, последнюю пару метрических функций (3.33) и (3.34).

С учетом замены координат (3.35) и преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ запишем систему функциональных уравнений на эквивалентность этих

выражений

$$\begin{aligned}(\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j), \\(\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j).\end{aligned}\tag{3.44}$$

Дифференцируя каждое из уравнений (3.44) по переменным x_i, x_j и складывая результаты дифференцирования, получаем соотношения:

$$\frac{\varphi_x(j) - \varphi_x(i)}{\varphi(i) - \varphi(j)} = \frac{\tau_x(i)}{\tau(i)} = \frac{\tau_x(j)}{\tau(j)} = \text{const} = a,\tag{3.45}$$

совпадающие с соотношениями (3.37).

Из дифференциальных соотношений (3.45) получаем два решения

$$1. \quad \left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(y)e^{ax} + \frac{b}{a}, \\ \tau(x, y) &= \tau(y)e^{-ax}, \\ a &\neq 0, \varphi(y)\tau(y) \neq \text{const}, \end{aligned} \right\},\tag{3.46}$$

$$2. \quad \left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= cx + \varphi(y), \\ \tau(x, y) &= \tau(y), \\ c &\neq 0, \tau'(y) \neq 0 \end{aligned} \right\},\tag{3.47}$$

совпадающие с решениями (3.38) и (3.39).

Подставляя результаты дифференцирования по переменной y_i в результаты дифференцирования по переменной y_j каждого функционального уравнения (3.44), получим следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{\varphi_y(i)e^{x_i} - \varphi_y(j)e^{x_j}}{\varphi(i) - \varphi(j)} = -\frac{\tau_y(i)e^{x_i}}{\tau(i)} = -\frac{\tau_y(j)e^{x_j}}{\tau(j)} = \text{const} = m.\tag{3.48}$$

После подстановки первых решений (3.46) в дифференциальные соотношения (3.48) находим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= (c_1 y + c_2)e^{-x} - b, \\ \tau(x, y) &= c_3 e^x, \\ c_1 &\neq 0, c_3 \neq 0. \end{aligned} \right\} \tag{3.49}$$

Для решений (3.49) выполняется условие $\frac{\partial(\varphi(x, y), \tau(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0$, следовательно эти решения определяют локальную замену координат, при которых метрическая функция (3.34) сводится ко второй канонической форме (3.33).

Из общих решений (3.49) можно взять частное для тех же целей:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= ye^{-x}, \\ \tau(x, y) &= e^x,\end{aligned}\tag{3.50}$$

полагая $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $b = 0$.

Далее найдем функции $\psi_1(u, v)$, $\psi_2(u, v)$. Для этого подставим выражения (3.50) в исходную систему функциональных уравнений (3.44).

$$\begin{aligned}\psi^1(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) &= (y_i e^{-x_i} - y_j e^{-x_j}) e^{x_i}, \\ \psi^2(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) &= (y_i e^{-x_i} - y_j e^{-x_j}) e^{x_j}.\end{aligned}\tag{3.51}$$

Преобразуем эти функции таким образом, чтобы они были функциями от переменных $u = f^1 = x_i - x_j$, $v = f^2 = y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j$, то есть

$$\begin{aligned}\psi^1(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) &= \psi^1(u, v) = (y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) e^{x_i - x_j} = v e^u, \\ \psi^2(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) &= \psi^2(u, v) = y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j = v.\end{aligned}$$

Эти функции с учетом $u = f^1 = x_i - x_j$, $v = f^2 = y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j$ можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}\psi^1(f^1, f^2) &= f^2 \exp(f^1), \\ \psi^2(f^1, f^2) &= f^2.\end{aligned}$$

Подстановка вторых решений (3.47) в дифференциальные соотношения (3.48) приводит к уравнению

$$\tau'(y) e^x = m \tau(y),$$

дифференцируя которое по переменной x приводит к противоречию

$\tau'(y) = 0$. Следовательно исходная система функциональных уравнений (3.44) не имеет решения.

Таким образом, решение данной задачи позволяет сравнить классификацию двуметрических двумерных геометрий ранга 3, полученную нами в рамках аналитического подхода, с построенной групповым методом классификацией этой же геометрии Г.Г. Михайличенко [37]. Действительно, два канонических выражения, найденные им групповым методом, о которых говорится в классификационной **теореме 3.2.1**, не эквивалентны, а появившееся в рамках аналитического подхода третье решение (3.34) оказалось эквивалентным только второму каноническому выражению (3.33). Этот факт независимо подтверждает несводимость приведенных в **теореме 3.2.1** канонических выражений метрических функций, задающих двуметрические двумерные геометрии ранга 3.

3.4 Группа движений и ее двухточечный инвариант

Согласно общей **теореме 1.4.1** об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, приведенной в §1.4 первой главы, двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3 наделены групповой симметрией. Убедимся, что степень групповой симметрии этих геометрий равна 2 (см. **теорему 1.4.1** из §1.4 главы 1). Таких геометрий в классификации всего две, как это было установлено в рамках группового подхода Г.Г. Михайличенко [37] и подтверждено примененным в настоящей работе автором аналитическим методом (см. §3.1 – §3.3 главы 3).

В соответствие с §2.2 второй главы определим гладкое локально обратимое преобразование двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \lambda(x, y), \\ y' &= \sigma(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (3.53)$$

которое называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию (3.1), удовлетворяющую аксиомам **3.1.1 – 3.1.3, 1.3.1**:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (3.54)$$

где $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$, $\lambda(j) = \lambda(x_j, y_j)$, $\sigma(j) = \sigma(x_j, y_j)$.

Напомним, что равенство (3.54) при известном координатном представлении функции (3.1) является системой функциональных уравнений на множество движений.

Следуя работе [37], найдем сначала совокупность всех движений для метрической функции, представленной каноническим выражением (3.8) (см. теорему 3.2.1 §3.2):

$$f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j. \quad (3.55)$$

Запишем для метрической функции (3.55) систему функциональных уравнений (3.54) на множество движений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= x_i - x_j, \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= y_i - y_j. \end{aligned} \right\}$$

Решения этой системы легко находятся методом разделения переменных – координат точек i и j (см. §1.1):

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x, y) &= x + a, \\ \sigma(x, y) &= y + b. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Эти решения задают локальную двухпараметрическую группу преобразований (3.52) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, в чем можно убедиться, проверив выполнение аксиом группы преобразований.

Метрическая функция, заданная выражениями (3.55) является единственным двухточечным инвариантом группы преобразований (3.52) с решениями (3.56), в чем можно также убедиться, записав функциональное уравнение (3.54) при известной группе преобразований:

$$f(x_i + a, x_j + a) = f(x_i, x_j), \quad (3.57)$$

метод решения которого аналогичен, примененном в первом параграфе первой главы. С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ обе компоненты метрической функции (3.55) $f = (f^1, f^2)$ восстанавливаются однозначно решением функционального уравнения (3.57).

Далее, найдем совокупность всех движений для метрической функции представленной, каноническим выражением (3.9) (см. **теорему 3.2.1 §3.2**):

$$f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (y_i - y_j)y_j, \quad (3.58)$$

которое также, как и в случае первой канонической формы (3.55) оказывается двухпараметрической группой преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$.

Запишем для нее систему функциональных уравнений (3.54) на множество движений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) &= (x_i - x_j)y_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) &= (x_i - x_j)y_j, \end{aligned} \right\}$$

решая которую методом разделения переменных – координат точек i, j находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma(x, y) &= \frac{y}{a}, \\ \lambda(x, y) &= ax + b, \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

где $a \neq 0, b$ – произвольные постоянные.

Множество преобразований (3.52) с функциями (3.59) является группой всех движений, которая определяет групповую симметрию степени

2 двумерной двуметрической геометрии, задаваемой на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ функцией (3.57).

С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$, решая функциональное уравнение

$$f\left(ax_i + b, \frac{y_i}{a}, ax_j + b, \frac{y_j}{a}\right) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (3.60)$$

можно однозначно восстановить метрическую функцию (3.58) как двухточечный инвариант группы преобразований (3.59).

Дифференцируя уравнение (3.60) по параметрам a, b получим следующую систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} x_i - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} y_i + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} x_j - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} y_j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

где $a \neq 0$, и, напомним, например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В соотношениях (3.61) придадим параметрам a, b значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0$, в результате чего получим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} x_i - \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} x_j - \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} y_j &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Общее решение первого уравнения этой системы $f(i, j) = \theta(x_i - x_j, y_i, y_j)$ подставим во второе уравнение:

$$u \frac{\partial \theta(u, y_i, y_j)}{\partial u} - y_i \frac{\partial \theta(u, y_i, y_j)}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial \theta(u, y_i, y_j)}{\partial y_j} = 0,$$

где $u = x_i - x_j$. Соответствующие уравнения характеристик

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy_i}{y_i} = -\frac{dy_j}{y_j}$$

имеют два независимых интеграла: $uy_i = \text{const}$, $uy_j = \text{const}$, по которым с точностью до преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ определяются компоненты метрической функции: $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) = ((x_i - x_j)y_i, (x_i - x_j)y_j)$.

Рассмотрим, наконец, аналогичную задачу в отношении следующей метрической функции

$$f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j, \quad (3.62)$$

которая, как мы знаем, также задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, однако, данное выражение в классификационной тереме **3.2.1** отсутствует, поскольку оно эквивалентно второму, рассмотренному выше, каноническому выражению (3.9). Этот факт был установлен в решении **задачи 3.3.1** §3.3. В силу установленной эквивалентности множество движений для этой метрической функции будет являться двухпараметрической группой преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2$, которая должна быть подобна группе преобразований (3.52) с функциями (3.59) с точностью до замены координат x , y в многообразии $\mathfrak{M}_2$ и замены параметров a , b в действующей группе G^2 . Убедимся в сказанном.

Вначале найдем для метрической функции (3.62) совокупность всех движений, записав функциональные уравнения (3.54):

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= x_i - x_j, \\ \sigma(i)e^{-(\lambda(i) - \lambda(j))} - \sigma(j) &= y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j, \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

решая первое уравнение которого методом разделения переменных находим

$$\lambda(x, y) = x + a.$$

Подставив это решение во второе уравнение этой же системы и решая

его методом разделения переменных получаем второе решение

$$\sigma(x, y) = y + be^x.$$

Таким образом совокупность всех движений (3.52) для метрической функции (3.62) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + be^x. \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

Уравнения (3.64) задают двухпараметрическое множество всех движений (3.52), которое является локальной группой преобразований, определяющей групповую симметрию степени 2 соответствующей двуметрической двумерной геометрии, задаваемой метрической функцией (3.62).

Покажем, что найденные выше группы движений (3.59) и (3.64) подобны. Для этого преобразуем уравнения группы (3.64) следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{x'} &= e^{x+a} = e^x e^a, \\ e^{-x'} y' &= (y + be^x) e^{-(x+a)}. \end{aligned}$$

Производя затем замены координат $ye^{-x} \rightarrow x$, $e^x \rightarrow y$ и параметров $e^{-a} \rightarrow a$, $e^{-a}b \rightarrow b$ получаем группу движений (3.52) с функциями (3.59), тем самым устанавливая ее подобие группе движений (3.64).

Рассмотрим последний вопрос – о восстановлении метрической функции (3.62) по соответствующей группе преобразований (3.64). Запишем функциональное уравнение (3.54) на метрическую функцию при известной группе преобразований (3.64):

$$f(x_i + a, y_i + be^{x_i}, x_j + a, y_j + be^{x_j}) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) \quad (3.65).$$

Дифференцируя данное уравнение по параметрам a , b и придавая им в найденных соотношениях значения, соответствующие покою $a =$

0, $b = 0$, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ e^{x_i} \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + e^{x_j} \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Решая каждое уравнение этой системы независимо методом характеристик находим для первого уравнения интеграл: $x_i - x_j = \text{const}$, для второго уравнения интеграл: $y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j = \text{const}$. Тогда общее решение этой системы есть произвольная достаточно гладкая функция от этих интегралов

$$f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) = \psi(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j),$$

совпадающее с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (3.62), задающей на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3.

3.5 Физическая интерпретация

Аксиома **1.2.4** §1.2 первой главы выражает принцип феноменологической симметрии, к которому ее автор Ю.И. Кулаков пришел, анализируя строение всем известного второго закона Ньютона [19]. Данный принцип является основным постулатом теории физических структур, предложенной им же в 1968 году для классификации законов физики. То есть феноменологическая симметрия обнаруживает себя не только в геометрии, но и (естественным образом) в физических законах. Покажем, например, что двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3 допускают содержательную физическую интерпретацию в термодинамике.

Рассмотрим некоторую термодинамическую систему. Пусть ее состояние i задается двумя термодинамическими параметрами – объемом V_i и

давлением P_i . Тогда все множество состояний представляет собой первую четверть числовой плоскости, так как $V \geq 0$, $P \geq 0$. Каждой паре состояний $\langle i, j \rangle$ сопоставим два числа, равные работам $A^{PV}(i, j)$, $A^{VP}(i, j)$, которые внешние тела совершают над системой при ее переходе из начального состояния i в конечное состояние j по двум различным путям PV и VP , состоящим из равновесных изобарного ($P = const$) и изохорного ($V = const$) процессов:

$$\left. \begin{aligned} A^{PV}(i, j) &= (V_i - V_j)P_i, \\ A^{VP}(i, j) &= (V_i - V_j)P_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Двухкомпонентная функция $\mathbf{A} = (A^{PV}, A^{VP})$ с выражениями (3.66) для ее компонент задает на плоскости термодинамических состояний (P, V) двуметрическую геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии, задаваемой на координатной плоскости (x, y) метрической функцией (1.35) (см. §1.5 главы 1), одновременно феноменологически симметрична и наделена групповой симметрией.

Возьмем три произвольные состояния i, j, k . Тогда дополнительно к двум работам (3.66) можно выписать еще четыре: $A^{PV}(i, k)$, $A^{VP}(i, k)$ и $A^{PV}(j, k)$, $A^{VP}(j, k)$ для пар состояний $\langle i, k \rangle$ и $\langle j, k \rangle$. Из этих шести работ можно исключить все шесть параметров $V_i, P_i, V_j, P_j, V_k, P_k$ трех состояний i, j, k , в результате чего получаются две функциональные связи между ними, задаваемые двумя независимыми уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & -A^{VP}(i, j) & -A^{VP}(i, k) \\ A^{PV}(i, j) & 0 & -A^{VP}(j, k) \\ A^{PV}(i, k) & A^{PV}(j, k) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ & \begin{vmatrix} A^{PV}(i, j) & A^{PV}(j, k) & -A^{VP}(i, k) \\ A^{PV}(i, k) & 0 & -A^{VP}(i, k) \\ A^{PV}(i, k) & -A^{VP}(i, j) & -A^{VP}(j, k) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Соотношения (3.67), справедливые для любой тройки состояний $\langle i, j, k \rangle$, выражают феноменологическую ранга три симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости термодинамических состояний (P, V) метрической вектор-функцией (3.66).

Группа движений для метрической функции (3.66) состоит из всех тех преобразований

$$\begin{aligned} V' &= \lambda(V, P), \\ P' &= \sigma(V, P), \end{aligned} \quad (3.68)$$

плоскости (P, V) , которые удовлетворяют двум функциональным уравнениям, являющимися следствиями инвариантности ее компонент:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) &= (V_i - V_j)P_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) &= (V_i - V_j)P_j, \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Решения этих уравнений легко находятся с помощью метода разделения переменных:

$$\lambda(V, P) = aV + b, \quad \sigma(V, P) = \frac{P}{a}, \quad (3.70)$$

где $a > 0$.

Множество всех преобразований (3.68) с решениями (3.70) является полной группой движений для метрической функции (3.66), выражая групповую симметрию степени 2 двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости термодинамических состояний (P, V) этой функцией.

Двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3 можно ввести также на плоскости термодинамических состояний (T, S) , где T , S – термодинамические параметры, соответственно энтропия и температура, как это было сделано в работе [37].

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию аналитическими методами проблем классификации и определения групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий, задаваемых на двумерном дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией.

В первой главе приведены основные определения теории, в рамках которой выполнялась работа. Во второй главе разработан метод решения функциональных уравнений, возникающих при нахождении групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей, а также найдены все их двухточечные инварианты. Модифицируя данный метод, можно распространить его для нахождения групп движений других феноменологически симметричных геометрий.

В третьей главе аналитическим методом построена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, которая ранее была построена Г.Г. Михайличенко (см.[33], [34]) групповым методом. Аналитический метод состоит в исследовании ранга некоторых функционально-дифференциальных соотношений и их геометрического смысла: в первую очередь имеется в виду гладкая замена локальных координат, позволяющая редуцировать дифференциальные уравнения к максимально простому виду. Указанная редукция диффе-

ренциальных уравнений позволяет сопоставлять полученные результаты с результатами других авторов.

Аналитический метод может быть применен в проведении классификации феноменологически симметричных геометрий более высокой размерности, например, двумерных, триметрических, трехмерных и четырехмерных, определении групп их движений и метрических функций как двухточечных инвариантов.

Литература

- [1] Александров, А.Д. Обобщенные римановы пространства / А. Д. Александров, В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев // Успехи матем. наук. - 1986. - Т. 41, вып. 3. - С. 3-44.
- [2] Алексеевский, Д.В. Геометрия пространств постоянной кривизны. / Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Т. 29 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1988, 5—146
- [3] Берже, М. Геометрия: Пер. с франц. Т1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.
- [4] Бураго Ю. Д. Введение в риманову геометрию / Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. - СПб. : Наука, 1994. - 318 с.
- [5] Владимиров, Ю.С. Описание взаимодействий в рамках теории физических структур / Ю.С. Владимиров. // Вычислительные системы. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. – Вып. 125, С. 61–87.
- [6] Владимиров, Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений / Ю.С. Владимиров. – М.: Изд-во МГУ, 1996. - 262 с.
- [7] Владимиров, Ю.С. Метафизика / Ю.С. Владимиров. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. - 568 с.

- [8] Виноградов, И.М. Математическая энциклопедия / И.М. Виноградов, т.1. – М.: Советская энциклопедия, 1977. 1152 с.
- [9] Гельмгольц, Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. – М.: – 1956. С.366-388.
- [10] Горбацевич, В.В. Группы Ли преобразований / В.В. Горбацевич, А.Л. Онищик. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). – М., 1988. –Т.20, С. 103–240
- [11] Желобенко, Д.П. Представления групп Ли / Д.П. Желобенко, А.И. Штерн. – М.: Наука, 1983. - 360 с.
- [12] Зорич, В.А. Математический анализ: учебник. Ч. I. / В.А. Зорич. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: ФАЗИС, 1997. - 554 с.
- [13] Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") / Ф. Клейн. // Об основаниях геометрии. –М., 1956. – С. 402-434.
- [14] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968г.
- [15] Кулаков, Ю.И. Элементы теории физических структур /Ю.И. Кулаков. Новосибирск: НГУ,1968.
- [16] Кулаков, Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. – 1970. –Т.193, № 5, С.985-987.
- [17] Кулаков, Ю.И. О теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1983, Т.127, С.103-151.

- [18] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаух А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику / Ю.И. Кулаков, Ю.С. Владимиров, А.В. Карнаух. М.: Архимед, 1992.
- [19] Кулаков, Ю.И. Теория физических структур / Ю.И. Кулаков. – М.: Доминико, 2004.
- [20] Кыров, В.А. Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов / В.А. Кыров. // Известия высших учебных заведений. Математика. –Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2008. –№ 6, С.29-42.
- [21] Кыров, В.А. Феноменологически симметричные локальные группы Ли преобразований пространства R^S / В.А. Кыров. // Известия высших учебных заведений. Математика. –Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2009. –№ 7, С.10-21.
- [22] Кыров, В.А. Критерий невырожденности $sn(n - 1)/2$ -параметрической группы Ли преобразований пространства R^{sn} / В.А. Кыров. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т XII. № 1. – С. 109-113.
- [23] Кыров, В.А. Критерий невырожденности группы преобразований / В.А. Кыров. // Матем. заметки. – 2009. – Т.85. № 1. – С. 144-146.
- [24] Кыров, В.А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии / В.А. Кыров. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т 13. № 4. – С. 38-51.

- [25] Кыров, В.А. Функциональные уравнения в симплектической плоскости / В.А. Кыров. // Тр. ИММ УрО РАН– 2010. – Т. 16. № 2. – С. 149-153.
- [26] Лев, В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125, С. 90-103.
- [27] Михайличенко, Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2). Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т.14, № 5. – С. 1057-1064.
- [28] Михайличенко, Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журн. – 1982. – Т.23, № 5. – С. 132 -141.
- [29] Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288.
- [30] Михайличенко, Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журн. – 1984. – XXV, № 5. – С. 99 – 113.
- [31] Михайличенко, Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований / Г.Г. Михайличенко. // Вестник МГУ сер. 1. Математика, механика. – 1986. – № 5. – С. 93.
- [32] Михайличенко, Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства Г.Г. Михайличенко. // Извест. вузов. Математика. – 1997. – №9(424). – С. 41-48.

- [33] Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I. / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395.
- [34] Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР, 1981, Т.260, №4, С.803-805.
- [35] Михайличенко, Г.Г. Полиметрические геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Новосибирск: НГУ, 2001.
- [36] Михайличенко, Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. II. /Г.Г. Михайличенко. // Наука, культура, образование. – 2001, № 8/9. С. 7-16.
- [37] Михайличенко, Г.Г. Двумерные геометрии / Г.Г. Михайличенко. – Барнаул: БГПУ, 2004, 132 с.
- [38] Пименов, Р.И. Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы. / Р.И. Пименов. // Матем. заметки. – 1969. Т.6, № 4, С. 361 - 369.
- [39] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1973.
- [40] Пуанкаре, А. Об основных гипотезах геометрии / А. Пуанкаре. // Об основаниях геометрии. - М., 1956. С. 388-398.
- [41] Решетняк, Ю.Г. Двумерные многообразия ограниченной кривизны / Ю. Г. Решетняк // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. - Т. 70 [Геометрия - 4]. - 1989. - С. 5-189.
- [42] Ballmann W. Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature. GMV Seminar 25 / W. Ballmann. - Basel : Birkhauser Verlag, 1995.

- [43] Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [44] Busemann H. Recent Synthetic Differential Geometry / H. Busemann. – Berlin – Heidelberg – New York : Springer-Verlag, 1970.
- [45] Busemann H. Spaces with Distinguished Geodesics / H. Busemann, B. B. Phadke. - New York - Basel - Marsel : Dekker Inc., 1987.
- [46] Bridson M. R. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A / M. R. Bridson, A. Haefliger // Series of Comprehensive Studies in Mathematics. - Berlin : Springer-Verlag. - 1999. - V. 319.
- [47] Mikhaylitchenko, G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981, T.293. Serie 1. P.529- 531.
- [48] Michailichenko, G.G. On group and phenomenological simmetries in geometry / G.G. Michailichenko // Soviet Math. Dokl. – 1983. – V.27, № 2. – P. 325-326.
- [49] Papadopoulos A. Metric spaces convexity and nonpositive curvature / A. Papadopoulos. - Zurich : European Math. Society, 2005.
- [50] Wene, G.P. Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras // Hadronic J., 1985, Vol.8, №2, P.63-74.

Список публикаций автора по теме диссертации

- [51] Богданова, Р.А. Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Сиб.журн.индустр.матем. – 2009. Т.12, № 4, С. 12-22. – 0,69 п.л.

- [52] Богданова, Р.А. Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3 / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. № 1(27), С. 11–24. – 1,12 п.л.
- [53] Богданова, Р.А. (Черубаева Р.А.) Некоторые группы преобразований и функциональные уравнения / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Приложение (Доклады VI Сибирской научной школы-семинара с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография" SIBECRYPT'07: Математические основы криптологии). – 2007, – № 23. С. 67 – 68. – 0,23 п.л.
- [54] Богданова, Р.А. Некоторые группы преобразований и функциональные уравнения / Р.А. Богданова. // Доклады всероссийской научно-технической конференции "Информационные системы и модели в научных исследованиях, промышленности и экологии": Моделирование процессов и систем. / Под общ. ред. д.т.н, проф. Панарина В.М. (Тула, 8 июня 2007) – Тула: ТулГУ, 2007, С. 38-39. – 0,13 п.л.
- [55] Богданова, Р.А. Группы движений плоскости Гельмгольца / Р.А. Богданова. // Материалы всероссийской научно-практической конференции "Математическое образование в регионах России": Геометрия (Барнаул, 21 ноября 2008). – Барнаул: БГПУ, 2008, С. 6. – 0,06 п.л.
- [56] Богданова, Р.А. Группы движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции

"Студент и научно-технический прогресс": Математика (Новосибирск, 27–30 апреля 2008). – Новосибирск: изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2008, С. 31. – 0,06 п.л.

- [57] Богданова, Р.А. Группа движений пространства Евклида как решение функционального уравнения / Р.А. Богданова. // Вестник молодых ученых: сборник научных работ № 8. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2011, С. 160-162. – 0,37 п.л.
- [58] Богданова, Р.А. Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3 / Р.А. Богданова. // Материалы международной молодежной конференции "Современные методы механики": Математика и ее применение в задачах механики (Томск, 19 – 20 сентября 2012). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2012, С. 5 – 6. – 0,13 п.л.
- [59] Богданова, Р.А. Исследование ранга отображения двухкомпонентной метрической функции / Р.А. Богданова. // Сборник научных статей международной школы семинара "Ломоносовские чтения на Алтае": Анализ, геометрия и топология (Барнаул, 20–23 ноября 2012). – Барнаул: АлтГПА, 2012, С. 260 – 264. – 0,31 п.л.
- [60] Богданова, Р.А. Функциональное уравнение, возникающее при восстановлении метрики по группе движений пространства Евклида / Р.А. Богданова. // Materialy VIII mezinarodni vedecko - prakticka konference "Veda a technologie: krok do budoucnosti - 2012". - Dil 33. Matematika. Fyzika. Vystavba a architektura: Praha. Publishing House "Education and Science"s.r.o. - P. 3–5. – 0,19 п.л.